ENCYCLOPÉDIE DES SCIENCES INDUSTRIELLES QUILLET

Nouvelle encyclopédie pratique de mécanique, d'électricité et d'électronique

Électricité - Électronique
Généralités

LIBRAIRIE ARISTIDE QUILLET
278 boulevard Saint-Germain, Paris 7e

© LIBRAIRIE ARISTIDE QUILLET - PARIS - 1973
PRINTED IN FRANCE
IMPRIMÉ EN FRANCE

PRÉFACE

Que les connaissances scientifiques s'accroissent et s'affinent, nul n'en doute plus depuis longtemps. Et le thème du « progrès » constitue l'un des arguments de ceux qui ont foi en l'humanité. Que les connaissances nouvelles rendent caduques les connaissances anciennes, qu'en quelques années un homme « qui sait » puisse se transformer en un homme « qui ne sait pas », ou tout au moins « qui ne sait plus », voilà qui rend perplexe un grand nombre de scientifiques et de techniciens, lesquels sont en droit de s'interroger sur leur avenir personnel.

Aujourd'hui quelques mots reviennent sans cesse dans le langage parlé ou écrit : « mise à jour », « recyclage », « formation permanente ». Pour suivre de façon continue l'évolution d'une technique ou d'un corps de techniques, il semble nécessaire de lire et d'étudier de nombreux ouvrages, dont la plupart n'abordent qu'une question de détail, parfois avec une optique, si ce n'est partisane, tout au moins très particulière. Devant cette masse de documents et d'idées, nouvelles ou présentées de façon nouvelle, le lecteur est désorienté, submergé. S'il cherche une explication particulière, *bien souvent celle-ci fait intervenir des notions complexes (mathématiques notamment) : la réponse trouvée est plus difficile que la question qu'il se posait. En revanche, s'il désire comprendre le sens* général *de la démarche scientifique dans un domaine quelconque, bien vite le découragent les multiples détails techniques.*

* * *

La Librairie Aristide Quillet a voulu rassembler en une seule encyclopédie ce qu'il est nécessaire de connaître : *la connaissance qui n'a pas changé (mais que le lecteur a peut-être oubliée ou n'avait pas bien assimilée), telle qu'elle a pu donner le jour à des connaissances « nouvelles » ; la connaissance nouvelle, extraite de sa gangue de technicité, telle qu'elle constitue une base solide. Système complet d'exposés, la présente encyclopédie n'isole pas mais relie ; le lecteur peut y entrer en confiance sans avoir recours à de nombreux ouvrages spécialisés ou extrêmement théoriques : elle se suffit à elle-même. Elle ne demande à son lecteur que des connaissances traditionnelles, du bon sens et de l'attention. Elle s'adresse à tous ceux qui préfèrent la rigueur d'un exposé simple et la clarté du calcul à l'énumération de formules savantes.*

Aussi avons-nous choisi pour auteurs non des théoriciens mais des techniciens hautement qualifiés. Seuls de tels spécialistes savent concevoir avec simplicité des questions générales, fondamentales, et montrer de façon efficace comment des connaissances théoriques reçoivent des applications pratiques

dans des domaines aussi divers que l'informatique, les automatismes, le transport et la distribution de l'énergie électrique, l'électrothermie, l'éclairage ou les télécommunications.

Nous avons voulu placer le lecteur dans les conditions concrètes d'une technique précise, de façon qu'il en assimile aisément les principes de base. Aussi l'illustration joue-t-elle un rôle important dans notre ouvrage, ayant valeur d'exemple plus qu'un simple attrait décoratif.

* * *

Prenons quelques chapitres comme exemples.

Le premier d'entre eux est un exposé de mathématiques qui pour certains vaudra comme rappel, pour d'autres (notamment pour ceux qui n'ont pas étudié la « théorie des ensembles ») comme initiation. Ensuite, des domaines aussi divers que la thermodynamique, la mécanique, la physique nucléaire, l'optique et le magnétisme apparaîtront comme des sciences fondamentales tout autant que des techniques « actuelles », car nous avons décrit et expliqué les applications *les plus récentes chaque fois que nous ne risquions pas de déséquilibrer inutilement l'ensemble de la question. De même, l'électricité, l'électrotechnique, telles qu'il convient de les concevoir, reposent sur des notions générales* permanentes, *dont l'acquisition rationnelle permet de comprendre que seule la technologie* a considérablement évolué ; *en effet, les constructeurs mettent au point continuellement des matériaux aux performances meilleures ; de ce fait, certaines applications, théoriquement possibles depuis longtemps, sont devenues des réalités (moteur linéaire, peinture électrostatique) ou sont en passe de le devenir (M.H.D., pile à combustible).*

L'apport de ces disciplines et de leurs réalisations bouleverse aussi bien la vie de travail que la vie courante de nos contemporains, mais les chapitres dans lesquels nous détaillons les applications *sont restés conformes à notre doctrine générale. Que nous traitions les automatismes ou l'horlogerie atomique, que nous nous intéressions aux réalisations industrielles ou à l'électrophone du particulier, nous avons multiplié les exemples simples et sans cesse rappelé les lois élémentaires, « immuables ».*

Le complexe est fait d'éléments simples ; une réalisation complexe a toujours des raisons simples : recherche de la sécurité maximale (mesures de protection par exemple) ou de performances extrêmes. Notre esprit d'analyse, s'il trouve un écho chez le lecteur, lui permettra d'accéder du simple au complexe, c'est-à-dire d'acquérir l'assurance qu'il a assimilé le savoir élémentaire qui constitue la base des sciences industrielles de notre temps.

L'Éditeur

PRÉLIMINAIRES

CHAPITRE PREMIER

LETTRES, NOMBRES, SYMBOLES DIVERS

Ce chapitre regroupe les principales règles d'écriture des lettres, des nombres, des symboles d'unités et des signes divers, notamment ceux qui concernent les opérations.

Pour simplifier et pour clarifier l'exposé, les normes françaises éditées par l'AFNOR (Association française de normalisation) et par certains bureaux de normalisation ont été utilisées systématiquement et ce sont quelques-unes des recommandations de ces organismes qui sont rappelées ici.

1. LETTRES

Une grandeur, un nombre peuvent être représentés par des lettres minuscules ou par des lettres majuscules. Ces lettres peuvent être suivies d'indices (ex.: a_1); ceux-ci doivent obligatoirement être placés en contrebas des lettres auxquelles ils sont affectés et jamais sur la même ligne qu'elles. Dans certains cas, les lettres sont suivies de signes d'accentuation qui se placent en haut et à droite de la lettre: *a'* (*a* prime), *a''* (*a* seconde).

L'emploi très fréquent des lettres de l'alphabet grec impose de le rappeler:

		lettres correspondantes de l'alphabet
A ou α	(alpha)	*A* ou *a*
B ou β	(bêta)	*B* ou *b*
Γ ou γ	(gamma)	*G* ou *g*
Δ ou δ	(delta)	*D* ou *d*
E ou ε	(epsilon)	*É* ou *é* (bref)
Z ou ζ	(dzêta)	*DZ* ou *dz*
H ou η	(êta)	*Ê* ou *ê* (long)
Θ ou θ	(thêta)	*T* ou *th*
I ou ι	(iota)	*I* ou *i* (long ou bref)
K ou κ	(kappa)	*K* ou *k*
Λ ou λ	(lambda)	*L* ou *l*
M ou μ	(mu)	*M* ou *m*
N ou ν	(nu)	*N* ou *n*
Ξ ou ξ	(xi)	*X* ou *x* ou *cs*
O ou ο	(omicron)	*O* ou *o* (bref)
Π ou π	(pi)	*P* ou *p*
P ou ρ	(rhô)	*R* ou *r*
Σ ou σ ou ς	(sigma)	*S* ou *s* (dur)
T ou τ	(tau)	*T* ou *t*
Υ ou υ	(upsilon)	*U* ou *u* (long ou bref)
Φ ou φ	(phi)	*F* ou *f* (ou *ph*)
X ou χ	(khi)	*K* ou *k*
Ψ ou ψ	(psi)	*PS* ou *ps*
Ω ou ω	(ômega)	*O* ou *ô* (long)

Les normalisations AFNOR et ISO (*International Organization for Standardization* ou Organisation Internationale de Normalisation) recommandent l'emploi d'un certain nombre de symboles (norme NF C 03-000) comme le tableau A le montre.

2. NOMBRES

En général, les nombres doivent être formés de chiffres, de corps uniformes. La virgule est le *seul* signe à utiliser pour séparer la partie entière et la partie décimale. Lorsque ces parties comportent chacune *plus* de 4 chiffres, ceux-ci doivent être séparés en tranches de 3 chiffres de part et d'autre de la virgule; la séparation entre ces tranches est constituée par un *espace blanc* de largeur inférieure ou égale à celle d'un chiffre. Ex.: 25 362,533 34; 15, 455 16.

Certaines tolérances (par ex.: point ou astérisque à la place de la virgule, caractères plus petits pour les décimes que pour les unités, etc.) sont admises dans certains cas, notamment pour l'expression de sommes en francs avec certains appareils mécanographiques.

3. SYMBOLES DIVERS

Afin d'éviter toute confusion dans l'emploi des signes d'égalité, d'inégalité, etc., nous avons regroupé dans le tableau B les symboles les plus couramment utilisés. Nous avons indiqué à côté de chacun d'eux leur signification.

4. UNITÉS

Les seules unités employées sont celles du système international (unités SI); leurs définitions et leurs représentations symboliques sont données au chapitre suivant. Pour l'écriture de ces unités et des symboles qui les représentent, un certain nombre de règles sont à respecter (norme NF X 02-003).

4.1. Noms des unités. — Les noms d'unités, y compris ceux qui dérivent de noms de savants, doivent être considérés comme des **noms communs:** *les initiales s'écrivent en lettres minuscules et ces noms prennent la marque du pluriel* s'ils suivent un nombre supérieur ou égal à 2 (1,9 ampère; 2,1 volts). Les noms des unités dérivées de noms de savants sont du **genre masculin** ainsi que leurs multiples et sous-multiples (un joule, un watt). **Aucun qualificatif n'est à ajouter à un nom d'unité;** ainsi il est incorrect de parler de *mètre linéaire*.

Lorsqu'une **grandeur est le produit de 2 autres** (dont aucune n'est un quotient), **le nom de l'unité est obtenu en réunissant les 2 unités correspondantes par un trait d'union** (et non pas en plaçant une barre oblique, symbole d'un quotient). Ainsi, le moment d'une force, produit d'une force par une longueur, s'exprime en utilisant comme unité le newton-mètre.

Dans le cas d'unités très courantes, les deux noms d'unités peuvent être accolés (un wattheure). La marque du pluriel s'ajoute aux 2 noms composants dans le premier cas, au seul dernier dans le second (ex.: des newtons-mètres ou des wattheures).

— Une règle analogue s'applique pour former le nom de l'unité d'une **grandeur quotient de 2 autres** (qui ne sont pas elles-mêmes des quotients); **le nom est obtenu en intercalant le mot *par*** (et non pas un des symboles de la division) **entre les unités du dividende et celles du diviseur** (ex.: un kilomètre par heure et non pas kilomètre/heure; des kilomètres par heure).

4.2. Symboles d'unités. — À la suite d'un nombre, un nom d'unité peut être remplacé par un symbole. Nous pouvons écrire 3 mètres ou 3 m mais il faut écrire *trois mètres* (et non pas *trois m*) et *plusieurs mètres* (et non pas *plusieurs m*). Un certain nombre de règles sont à respecter pour l'écriture de ces symboles.

— **Un symbole d'unité ne doit pas être modifié;** en particulier, il ne prend jamais la marque du pluriel (ex.: 12 kg et non pas 12 kgs) et il ne doit pas être suivi d'un point sauf à la fin d'une phrase.

— En principe tous les symboles d'unités dérivées de noms de savants commencent par des lettres majuscules alors que les autres commencent par des lettres minuscules (sauf franc: F).

— **Un symbole est disposé obligatoirement à la suite du résultat numérique** lorsqu'il s'agit d'unités décimales (25,2 m et non pas 25,2 ou 25 m,2); cette règle ne s'applique pas aux unités qui ne sont pas décimales (ex.: 12 h 15 min 30 s) et à certaines unités monétaires dans la pratique comptable ou bancaire (ex.: F 355).

— Dans le cas d'unités composées, le symbole est figuré par une expression algébrique dans laquelle chacun des symboles joue le même rôle que la grandeur correspondante de l'équation de définition; ainsi dans le cas de produit (vectoriel ou scalaire) ou de quotient, le symbole est le produit (vectoriel ou scalaire) ou le quotient des symboles des unités composantes. Par exemple à l'unité d'énergie électrique le wattheure (V. ci-dessus 4.1) correspond le symbole Wh. Une vitesse, quotient d'une longueur et d'un temps, peut s'exprimer avec une unité dont le symbole est $\frac{m}{s}$ ou m/s. Il est à noter que l'expression obtenue peut être transformée en appliquant les règles de l'algèbre; par ex.: la résistivité électrique étant définie par l'expression $\frac{RS}{l}$ où R est une résistance, S une surface et l une longueur, l'unité correspondante a pour symbole $\frac{\Omega . m^2}{m}$ ou $\Omega . m$ (après simplification). Des exposants positifs ou négatifs peuvent également être employés dans ces expressions: la masse volumique est le quotient d'une masse et d'un volume, l'unité SI a pour symbole $\frac{kg}{m^3}$ ou $kg . m^{-3}$.

Tableau A — Symboles normalisés dont l'emploi est recommandé pour représenter diverses grandeurs

	NOM DE LA GRANDEUR	SYMBOLE
GÉOMÉTRIE - MÉCANIQUE	Accélération angulaire	α
	Accélération linéaire	a
	Accélération due à la pesanteur	g
	Angle (angle plan)	α, β, γ
	Angle solide	Ω (ou ω)
	Aire, superficie	A (ou S)
	Diamètre	d
	Énergie	E (ou W)
	Épaisseur	d (ou δ)
	Force	F
	Fréquence	f (ou ν)
	Hauteur	h
	Largeur	b
	Longueur	l
	Longueur d'onde	λ
	Masse	m
	Masse volumique	ρ
	Moment d'inertie	I (ou J)
	Moment d'une force	M
	Moment d'un couple	T
	Période	T
	Poids	G (ou P, ou W)
	Pression	p
	Puissance	P
	Pulsation	ω
	Quantité de mouvement	p
	Rayon	r
	Rendement	η
	Superficie	A (ou S)
	Temps	t
	Travail	W (ou A)
	Vitesse (linéaire)	v
	Vitesse (angulaire)	ω (ou Ω)
	Vitesse de propagation des ondes électromagnétiques	c
	Vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide	c_0
	Volume	V (ou v)

	NOM DE LA GRANDEUR	SYMBOLE
ÉLECTRICITÉ	Admittance	Y
	Capacité	C
	Champ électrique	E (ou K)
	Conductance	G
	Conductivité	γ (ou σ)
	Courant (intensité)	I
	Densité de courant	J
	Déplacement	D
	Différence de potentiel	U (ou V)
	Différence de phase	φ (ou Φ)
	Flux électrique (flux de déplacement)	ψ
	Force électromotrice	E
	Impédance	Z
	Inductance	L
	Permittivité	ε
	Permittivité relative	ε_r
	Potentiel électrique	V
	Puissance active	P
	Puissance réactive	Q (ou P_q)
	Puissance apparente	S (ou P_s)
	Quantité d'électricité	Q
	Réactance	X
	Résistance	R
	Résistivité	ρ
MAGNÉTISME	Champ magnétique	H
	Induction magnétique	B
	Flux magnétique	Φ
	Perméabilité	μ
	Perméabilité relative	μ_r
	Réluctance	R ou R_m
THERMODYNAMIQUE	Capacité thermique	C
	Chaleur massique	c
	Coefficient de température	α
	Conductivité thermique	λ
	Quantité de chaleur	Q
	Température thermodynamique	T (ou Θ)
	Température usuelle	θ (ou t)

Tableau B* — Symboles divers

Symbole	Signification	Remarque
$=$	égal à	
$\equiv$	égal identiquement à	
$>$	plus grand que *ou* supérieur à	ce qui est placé devant le signe $>$ est supérieur à ce qui suit le signe Ex. : $a > b$ (a est plus grand que b)
$\geqslant$	supérieur *ou* égal à	$a \geqslant b$, a supérieur ou égal à b
$\gg$	très supérieur à	
$<$	plus petit que *ou* inférieur à	ce qui est placé devant le signe $<$ est inférieur à ce qui suit le signe Ex. : $a < b$ (a est plus petit que b)
$\leqslant$	inférieur ou égal à	$a \leqslant b$, a est inférieur ou égal à b
$\ll$	très inférieur à	
$\sim$	proportionnel à	$a \sim b$: a est proportionnel à b
$\approx$	égal environ à	
$\simeq$	asymptotiquement égal à	
$+$	plus	
$-$	moins	
$\pm$	plus ou moins	
$\mp$	moins ou plus	
$\times$	multiplié par	**entre deux nombres seulement : 15×3**
un point .	multiplié par	**entre deux lettres : a . b** Le point est *toléré* entre un chiffre et une puissance de 10 Le point peut être *supprimé* entre les lettres $a.b.c.$ ou $a\ b\ c$
trait horizontal — ou trait oblique / ou deux points :	divisé par	$a : b = \frac{a}{b} = a/b$ La terminaison ième est à proscrire à la suite d'une fraction
$\neq$	différent de	$a \neq b$: a est différent de b
d	signe de la différentielle ordinaire	dx : différentielle de x
∂	signe de la dérivée partielle	$\frac{\partial y}{\partial t}$: dérivée partielle de y par rapport à t
δ	signe de variation	δa : variation de a
Δ	signe de l'accroissement	Δa : accroissement de a
Σ	signe de la somme	$\sum_{i=1}^{i=5} p_i$ se lit : somme des nombres p_i pour les valeurs de i comprises entre 1 et 5 $\sum_{i=1}^{i=5} p_i = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5$
Π	signe du produit	
e	base des logarithmes népériens (naturels)	
i (ou j)	unité imaginaire	$i^2 = -1$; j est employé à la place de i en électricité
lg x ou $\log_{10} x$	logarithme décimal de x	
ln x ou $\log_e x$	logarithme népérien de x	
x, y, z	coordonnées cartésiennes	
θ, r, z	coordonnées cylindriques	
θ, γ, R	coordonnées sphériques	

* Conforme à la norme NF X 02 101 *Symboles algébriques*.

Tableau C — Classification alphabétique des grandeurs avec leurs unités SI respectives

Grandeur	Unité SI	Symbole de l'unité	Parties de l'ouvrage à consulter pour la définition
Accélération angulaire	radian par seconde carrée	rad/s^2	Préliminaires et Mécanique
Accélération linéaire	mètre par seconde carrée	m/s^2	Préliminaires et Mécanique
Activité	becquerel	Bq	
Admittance	siemens	S	Électricité
Aimantation	ampère par mètre	A/m	Magnétisme
Aire, superficie	mètre carré	m^2	Préliminaires
Angle plan	radian	rad	Préliminaires
Angle solide	stéradian	sr	Préliminaires
Capacité	farad	F	Préliminaires et Électricité
Capacité thermique	joule par kelvin	J/K	Thermodynamique
Capacité thermique molaire	joule par mole kelvin	J/(mol . K)	
Chaleur massique (capacité thermique massique)	joule par kilogramme kelvin	J/(kg . K)	Thermodynamique
Chaleur de transformation massique	joule par kilogramme	J/kg	Thermodynamique
Champ électrique (intensité)	volt par mètre	V/m	Préliminaires et Électricité
Champ magnétique (intensité)	ampère par mètre	A/m	Magnétisme
Charge électrique	coulomb	C	Électricité
Charge surfacique	coulomb par mètre carré	C/m^2	Électricité
Charge volumique	coulomb par mètre cube	C/m^3	Électricité
Coefficient de dilatation linéique Coefficient de température	kelvin à la puissance moins un	K^{-1}	Préliminaires et Thermodynamique
Coefficient de transmission thermique	watt par mètre carré kelvin	$W/(m^2 . K)$	
Concentration	kilogramme par mètre cube	kg/m^3	Préliminaires
Conductance	siemens	S	Préliminaires et Électricité
Conductivité	ohm-mètre à la puissance moins un	$(\Omega . m)^{-1}$	Électricité
Conductivité thermique	watt par mètre kelvin	W/(m . K)	Préliminaires et Thermodynamique
Courant électrique (intensité)	ampère	A	Électricité
Densité de courant	ampère par mètre carré	A/m^2	Électricité
Densité de flux thermique	watt par mètre carré	W/m^2	
Densité de flux magnétique	tesla	T	Magnétisme
Densité linéique de courant	ampère par mètre	A/m	Électricité
Déplacement	coulomb par mètre carré	C/m^2	Électricité
Différence de phases (déphasage)	radian	rad	Électricité
Différence de potentiel (ou tension) électrique	volt	V	Préliminaires et Électricité
Différence de potentiel magnétique	ampère	A	Électrotechnique
Dose absorbée	gray	Gy	
Éclairement lumineux	lux	lx	Préliminaires et Optique
Émittance	lux	lx	Éclairage
Énergie - Travail	joule	J	Préliminaires et Mécanique

Grandeur	Unité SI	Symbole de l'unité	Parties de l'ouvrage à consulter pour la définition
Énergie interne massique	joule par kilogramme	J/kg	Thermodynamique
Énergie interne molaire	joule par mole	J/mol	
Entropie	joule par kelvin	J/K	Thermodynamique
Entropie massique	joule par kilogramme kelvin	J/(kg . K)	Thermodynamique
Entropie molaire	joule par mole kelvin	J/(mol.K)	
Exposition	coulomb par kilogramme	C/kg	
Flux électrique (flux de déplacement)	coulomb	C	Préliminaires et Électricité
Flux d'induction magnétique	weber	Wb	Magnétisme
Flux lumineux	lumen	lm	Préliminaires et Optique
Flux thermique	watt	W	Thermodynamique
Force	newton	N	Préliminaires et Mécanique
Force électromotrice	volt	V	Électricité
Force magnétomotrice	ampère	A	Préliminaires
Fréquence	hertz	Hz	Préliminaires et Électricité
Fréquence de rotation	seconde à la puissance moins un	s^{-1}	Électrotechnique
	éventuellement, tour par seconde	tr/s	
Impédance	ohm	Ω	Électricité
Inductance propre et inductance mutuelle	henry	H	Préliminaires et Électricité
Induction magnétique	tesla	T	Préliminaires et Électricité
Intensité lumineuse	candela	cd	Préliminaires et Optique
Intervalle de température	kelvin	K	Thermodynamique
Longueur	mètre	m	Préliminaires
Longueur d'onde	mètre	m	Optique
Luminance lumineuse	candela par mètre carré	cd/m^2	Préliminaires et Optique
Masse	kilogramme	kg	Préliminaires
Masse linéique	kilogramme par mètre	kg/m	Préliminaires
Masse molaire	kilogramme par mole	kg/mol	
Masse surfacique	kilogramme par mètre carré	kg/m^2	Préliminaires
Masse volumique	kilogramme par mètre cube	kg/m^3	Préliminaires
Molalité	mole par kilogramme	mol/kg	
Molarité	mole par mètre cube	mol/m^3	
Moment cinétique	kilogramme-mètre carré par seconde	$kg . m^2/s$	Mécanique
Moment de dipôle électrique	coulomb-mètre	C.m	Électricité
Moment de dipôle magnétique	newton-mètre carré par ampère ou weber-mètre	$N . m^2/A$ ou Wb . m	Magnétisme
Moment électromagnétique	ampère-mètre carré	$A . m^2$	Électricité
Moment magnétique			
Moment d'inertie	kilogramme-mètre carré	$kg . m^2$	Préliminaires et Mécanique
Moment d'une force	newton-mètre	N.m	Préliminaires et Mécanique

Grandeur	Unité SI	Symbole de l'unité	Parties de l'ouvrage à consulter pour la définition
Moment de quantité de mouvement	kilogramme-mètre carré par seconde	$kg.m^2/s$	Mécanique
Période	seconde	s	Préliminaires et Électricité
Perméabilité	henry par mètre	H/m	Magnétisme
Perméance	henry	H	
Permittivité	farad par mètre	F/m	Électricité
Poids	newton	N	Préliminaires
Polarisation électrique	coulomb par mètre carré	C/m^2	Électricité
Polarisation magnétique	tesla	T	
Potentiel (électrique)	volt	V	Électricité
Potentiel vecteur magnétique	weber par mètre	Wb/m	Électricité
Pression et contrainte	pascal	Pa	Préliminaires et Mécanique
Puissance	watt	W	Préliminaires et Mécanique
Puissance active	watt	W	Électricité
Puissance apparente	voltampère	VA	Électricité
Puissance réactive	var	var	Électricité
Pulsation	radian par seconde	rad/s	Préliminaires et Électricité
Quantité de chaleur	joule	J	Thermodynamique
Quantité d'éclairement lumineux	lux-seconde	lx.s	Éclairage
Quantité d'électricité	coulomb	C	Électricité
Quantité de matière	mole	mol	Préliminaires
Quantité de mouvement	kilogramme-mètre par seconde	kg.m/s	Préliminaires et Mécanique
Réactance	ohm	Ω	Électricité
Réluctance	henry à la puissance moins un	H^{-1}	Électrotechnique
Résilience	joule par mètre carré	J/m^2	Mécanique
Résistance	ohm	Ω	Préliminaires et Électricité
Résistivité	ohm-mètre	$\Omega.m$	Préliminaires et Électricité
Section efficace	barn	barn	Centrales nucléaires
Susceptance	siemens	S	Électricité
Température Celsius	degré Celsius	°C	Préliminaires et Thermodynamique
Température thermodynamique	kelvin	K	Préliminaires et Thermodynamique
Temps	seconde	s	Préliminaires
Tension superficielle (capillaire)	newton par mètre	N/m	
Travail	joule	J	Préliminaires et Mécanique
Vergence des systèmes optiques	dioptrie	δ	Préliminaires et Optique
Viscosité cinématique	mètre carré par seconde	m^2/s	Préliminaires et Mécanique
Viscosité dynamique	pascal-seconde	Pa.s	
Vitesse angulaire	radian par seconde	rad/s	Préliminaires et Mécanique
Vitesse linéaire	mètre par seconde	m/s	Préliminaires et Mécanique
Volume	mètre cube	m^3	Préliminaires
Volume massique	mètre cube par kilogramme	m^3/kg	
Volume molaire	mètre cube par mole	m^3/mol	Préliminaires

4.3. Emploi des préfixes. — Les préfixes employés sont donnés dans le tableau suivant :

Préfixe à mettre avant le nom de l'unité	Symbole à mettre avant le symbole de l'unité	Facteur par lequel est multipliée l'unité
exa	E	10^{18} ou 1 000 000 000 000 000 000
peta	P	10^{15} ou 1 000 000 000 000 000
téra	T	10^{12} ou 1 000 000 000 000
giga	G	10^{9} ou 1 000 000 000
méga	M	10^{6} ou 1 000 000
kilo	k	10^{3} ou 1 000
hecto	h	10^{2} ou 100
déca	da	10^{1} ou 10
—	—	10^{0} ou 1
déci	d	10^{-1} ou 0,1
centi	c	10^{-2} ou 0,01
milli	m	10^{-3} ou 0,001
micro	μ	10^{-6} ou 0,000 001
nano	n	10^{-9} ou 0,000 000 001
pico	p	10^{-12} ou 0,000 000 000 001
femto	f	10^{-15} ou 0,000 000 000 000 001
atto	a	10^{-18} ou 0,000 000 000 000 000 001

Remarque : Le préfixe « myria », utilisé autrefois et qui correspond au facteur $10^4 = 10\,000$, n'est plus mentionné et ne doit donc plus être employé.

Si l'un de ces préfixes est accolé au nom d'une unité simple à la première puissance (ex. : un kilomètre), il doit être considéré comme un multiplicateur de cette unité ; sa valeur est la puissance de 10 indiquée dans le tableau 4.3 (ex. : 1 km = 10^3 m). Si l'unité, à laquelle est accolée le préfixe, se trouve élevée à une puissance déterminée (ex. : un kilomètre carré), il faut considérer que c'est *l'unité multiple ou sous-multiple qui doit être élevée à cette puissance :* $1\ km^2 = (1\ km)^2 = (10^3\ m)^2 = 10^6\ m^2$ (et non pas $10^3\ m^2$).

À noter que dans l'écriture des noms d'unités, le préfixe ne doit pas être séparé du nom de l'unité de base (kilojoule et non pas kilo-joule) ; il en est de même des symboles correspondants (kJ).

5. PRINCIPALES ABRÉVIATIONS

Un certain nombre d'abréviations sont couramment utilisées ; leurs significations sont données dans le tableau ci-dessous :

Abréviations	Significations
d.d.p.	différence de potentiel
f.é.m.	force électromotrice
f.c.é.m.	force contre-électromotrice
ex.	exemple
Cte	constante
NF	norme française
fig.	figure
ISO	International Organization for Standardization
AFNOR	Association française de normalisation
SI	Système international d'unités (pas de point entre les lettres, ni à la fin)
T.B.T.	Très basse tension
B.T.	Basse tension
M.T.	Moyenne tension
H.T.	Haute tension
T.H.T.	Très haute tension
T.B.F.	Très basse fréquence
B.F.	Basse fréquence
M.F.	Moyenne fréquence
H.F.	Haute fréquence
T.H.F.	Très haute fréquence
U.H.F.	Ultra haute fréquence
B.P.	Basse pression
M.P.	Moyenne pression
H.P.	Haute pression

CHAPITRE II

GRANDEURS. SYSTÈMES D'UNITÉS DE MESURE

1. GRANDEURS

Nous appelons *grandeur* tout ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution comme, par exemple, une longueur, une surface, une puissance, etc.

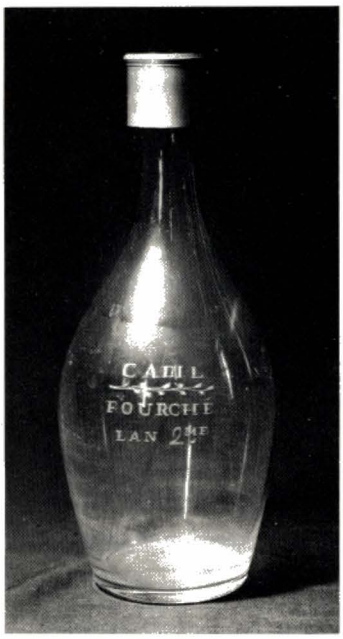
Mesurer une grandeur G (quelle que soit son espèce), *c'est la comparer à une autre grandeur U, de* **même espèce,** *choisie pour unité.* Le résultat de la mesure est un nombre entier (par ex. 5) si l'unité *U* est contenue un nombre entier de fois dans la grandeur *G* considérée (5 fois ici). C'est un nombre fractionnaire $\left(\text{par ex. } \frac{14}{15}\right)$ si *G* peut contenir un nombre entier de fois une fraction de *U* (14 fois la fraction $\frac{1}{15}$ de *U*). Dans certains cas, il n'est pas possible de trouver une fraction de *U* susceptible d'être contenue un nombre entier de fois dans *G* ; *G* et *U* sont dites incommensurables et alors il est seulement possible d'indiquer que *G* est comprise entre 2 limites $\left(\text{par ex. } \frac{13}{15} \text{ et } \frac{14}{15}\right)$. La limite inférieure constitue la *valeur approchée par défaut* de *G*, et la limite supérieure est appelée la *valeur approchée par excès*.

Le rapport de 2 grandeurs *G* et *G'* de même espèce est le nombre qui exprime la mesure de *G* lorsque nous prenons *G'* pour unité. Ce rapport est égal au quotient des 2 nombres qui correspondent aux mesures de *G* et *G'* avec la même unité *U*.

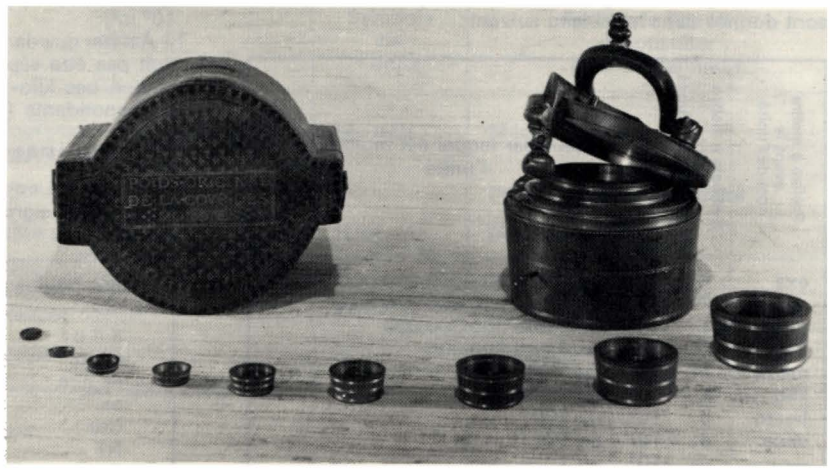
Une grandeur est *directement mesurable* quand nous pouvons *définir le rapport ou l'égalité et la somme de deux valeurs de cette grandeur.* Une longueur, une surface sont des grandeurs mesurables. En revanche, une température repérée au moyen de l'échelle thermométrique Celsius n'est pas une grandeur mesurable : nous pouvons définir l'égalité de deux températures mais nous ne pouvons en faire la somme (une température devient une grandeur mesurable si nous considérons l'échelle thermodynamique. V. t. 1, Thermodynamique, chap. 5).

2. UNITÉS DE MESURE

2.1. Définitions. — Pour mesurer les diverses grandeurs physiques, un certain nombre d'unités ont été définies. Des relations géométriques ou physiques (relation entre une surface et une longueur, relation entre une force et une masse, etc.) font que la plupart de ces unités dépendent de quelques-unes d'entre elles. Pour cette raison, dans un système d'unités de mesure, il faut distinguer les **unités de base ou unités principales** qui sont choisies arbitrairement (elles constituent les bases du système d'unités) et les **unités dérivées** définies à partir des précédentes. Les premières correspondent aux **grandeurs fondamentales** et les secondes aux **grandeurs dérivées.** À un système d'unités sont également adjointes quelques **unités hors système** ou unités **auxiliaires** d'usage courant mais limité à certains corps de métiers (l'électron-volt et le mille marin, par exemple).



Cadil : carafe en verre de 1 dm³ exécutée par Fouché en l'an II d'après le mètre provisoire. La désignation « Cadil » a été remplacée par celle de litre (*C.N.A.M.*)

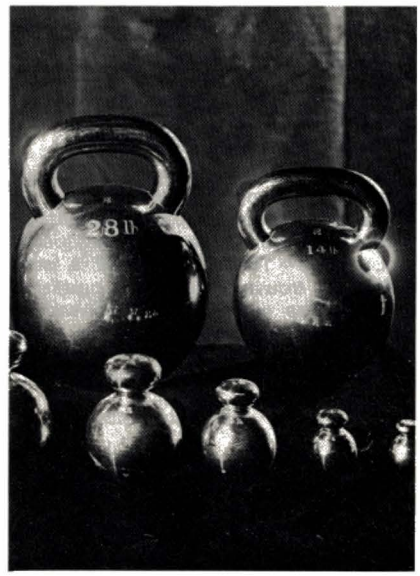


Pile de Charlemagne et son écrin ; elle aurait été utilisée pour la mesure de rations alimentaires (*C.N.A.M.*)

Minot à charbon : étalon en cuivre battu fait en exécution des arrêtés des 22 décembre 1670 et 24 juillet 1671 →

Mesures à grains 1670 (*C.N.A.M.*)

Poids anglais (*C.N.A.M.*)



2.2. Grandeurs fondamentales. — Les grandeurs fondamentales utilisées pour les divers systèmes réservés aux grandeurs géométriques et aux grandeurs mécaniques sont en général au nombre de 3 : une longueur, une masse et un temps. Les unités correspondantes diffèrent selon le système : ce sont le mètre, le kilogramme et la seconde pour le système international, le centimètre, le gramme et la seconde pour le système C.G.S. Ces systèmes ont dû être complétés pour définir des unités pour les grandeurs électriques, magnétiques, lumineuses, etc., et plusieurs grandeurs fondamentales supplémentaires ont souvent été nécessaires ; par ex., pour le système international, aux trois grandeurs fondamentales indiquées précédemment ont été ajoutées quatre autres : l'intensité du courant, la température thermodynamique, l'intensité lumineuse et la quantité de matière (V. ci-après).

Remarque : Dans certains systèmes anciens, parmi les grandeurs fondamentales se trouvait une *force* (un *poids*, précisément) au lieu d'une *masse ;* il en résultait de nombreux inconvénients et l'emploi de ces systèmes est abandonné. En effet, alors que la masse d'un corps est une grandeur bien définie, le poids dépend du point où se trouve le corps (V. chap. 3). La réalisation d'un étalon de force imposait donc de fixer un lieu où l'étalon pouvait être considéré comme tel.

3. SYSTÈME MÉTRIQUE. QUELQUES RAPPELS HISTORIQUES

L'élaboration de systèmes cohérents d'unité de mesure s'est faite progressivement à partir des unités du système métrique. Bien que les définitions de ces unités aient dû être précisées pour la mise au point des systèmes d'unités utilisés de nos jours, elles conservent néanmoins un intérêt historique certain.

Unités de longueurs et de poids. — La Convention nationale, par la loi du 18 germinal an III (7 avril 1795), a institué un système métrique comportant deux unités :

— *le mètre*, pour la mesure des longueurs ; il correspondait à la dix-millionième partie de la distance du pôle boréal à l'équateur ;

— *le kilogramme*, pour la mesure des *poids* ; il représentait le poids d'un décimètre cube d'eau distillée prise à son maximum de densité, c'est-à-dire à 4 degrés « centigrades » (dénomination actuelle : degrés Celsius). Il est à noter que le kilogramme est une unité de masse dans le système SI, et non pas une unité de poids car un poids n'est qu'une force particulière.

Des étalons en platine du mètre et du kilogramme furent déposés aux Archives à Paris, le 4 messidor an VII (22 juin 1799) par une Commission générale des poids et mesures,

puis une loi stipula que ces étalons étaient déclarés « étalons définitifs des mesures de longueur et de poids pour toute la France ».

Plus tard :

— un décret du 3 novembre 1801 rendait légal le système métrique ;

— une loi du 4 juillet 1837 le rendait obligatoire à partir du 1er janvier 1840 ;

— une loi du 11 juillet 1903 stipulait que les étalons prototypes du système métrique sont le mètre international et le kilogramme international qui ont été sanctionnés par la Conférence générale des poids et mesures tenue à Paris en 1889, et qui sont déposés au pavillon de Breteuil à Sèvres. Les copies de ces prototypes internationaux déposés aux Archives nationales sont les étalons légaux pour la France.

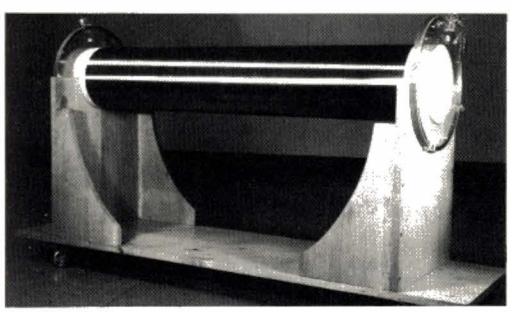
Unité de temps. — L'application du système métrique a nécessité d'adopter une unité de temps (non prévue par ce système) qui était admise couramment pour les besoins de la physique et de la mécanique, à savoir la *seconde*, égale à $\frac{1}{86\,400}$ de la durée du jour solaire moyen.

Unité de force. — Le poids d'un corps étant une force, il a été possible de prendre le poids du kilogramme étalon pour unité de force du système métrique (c'est la force avec laquelle cet étalon est attiré vers le centre de la Terre). Mais cette force d'attraction variant avec la latitude et l'altitude des points du globe, la Conférence générale des poids et mesures d'octobre 1907 a décidé que, par convention, cette unité de force n'était ainsi définie que pour tout point de latitude 45° et d'altitude zéro (niveau de la mer). La valeur correspondante de l'accélération de la pesanteur est $g = 9{,}806\,16$ m/s² alors qu'à Paris, l'accélération de la pesanteur a pour valeur 9,81 m/s².

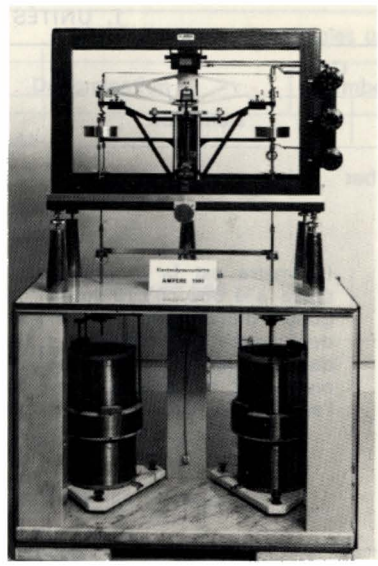
L'amélioration des moyens de mesure a imposé de définir plus précisément ces unités. Lorsqu'il a été constaté que le mètre étalon déposé au pavillon de Breteuil était inférieur de 0,2 mm à la définition, le mètre a alors été défini comme étant la longueur à 0 degré Celsius du prototype international considéré comme étalon ; cela permettait d'éviter les corrections. Puis, afin de conserver une définition précise, même si l'étalon était détruit, la longueur de l'étalon a été rattachée à une mesure purement physique, toujours reproductible : une longueur d'onde comme nous le verrons plus loin. Par ailleurs, le choix d'une unité de poids comme unité principale s'étant révélé peu pratique (en particulier, nous avons vu que la réalisation d'un étalon de force imposait de fixer le lieu répondant aux conditions indiquées ci-dessus : latitude 45 °, altitude zéro), l'unité de poids comme unité principale a été abandonnée dans les systèmes d'unités adoptés par la suite.

4. LE SYSTÈME INTERNATIONAL

4.1. Généralités. — Un certain nombre de décrets précisent les dénominations, définitions et symboles des unités du système de mesures obligatoire en France. Ce système est le *système métrique décimal à sept unités de base*, appelé, par la Conférence générale des poids et mesures, **système international d'unités (SI).**



Solénoïde à noyau de quartz pour la conservation de l'ampère au moyen de la résonance nucléaire. Une sonde à protons placée à l'intérieur du solénoïde est soumise à un champ magnétique de 800 A/m dans une sphère de 5 cm de rayon (*L.C.I.E.*)



Électrodynamomètre absolu (définition de l'ampère)

(*L.C.I.E.*)

Les unités de base sont :

— le *mètre*, unité de longueur ;
— le *kilogramme*, unité de masse ;
— la *seconde*, unité de temps ;
— l'*ampère*, unité d'intensité de courant électrique ;
— le *kelvin*, unité de température ;
— la *candela*, unité d'intensité lumineuse ;
— la *mole*, unité de quantité de matière.

Les unités définies par le décret sont les seules unités légales (décret n° 61-501 du 3 mai 1961, modifié par le décret n° 66-16 du 5 janvier 1966 et par le décret n° 75-1200 du 4 décembre 1975).

Elles comprennent les unités du système international et un certain nombre d'unités hors système.

Parmi ces dernières, il faut distinguer des unités admises définitivement en raison de leur importance pratique : l'heure, la minute, le degré d'angle..., des unités dont l'usage est réservé à des domaines particuliers : le mille, le bar, le tex, le carat métrique..., et des unités admises temporairement en raison des usages pratiques de l'industrie, mais dont l'emploi est condamné à plus ou moins brève échéance : calorie, thermie, frigorie, unités C.G.S., rad (unités des rayonnements ionisants), curie...

Des préfixes peuvent être employés pour former les multiples et sous-multiples décimaux des unités du système lorsque celles-ci se révèlent d'un emploi peu commode. La liste de ces préfixes, avec leur signification et leur symbole a été donnée au chapitre premier.

Les unités dérivées et hors système peuvent être classées en :

— unités **géométriques** (aire, volume, angle plan, angle solide) ;

— unités de **masse** (masse linéique, masse surfacique, masse volumique, concentration) ;

— unités de **temps ;**

— unités **mécaniques** (vitesse, accélération, fréquence, force, moment, énergie, puissance, pression et contrainte, viscosité dynamique, viscosité cinématique) ;

— unités **électriques** et **magnétiques** (quantité d'électricité, différence de potentiel, champ électrique, résistance électrique, conductance électrique, capacité électrique, inductance électrique, flux magnétique, induction magnétique, force magnétomotrice, champ magnétique) ;

— unités **calorifiques** (quantité de chaleur, capacité thermique, entropie, chaleur massique, conductivité thermique) ;

— unités **optiques** (luminance lumineuse, flux lumineux, éclairement lumineux, vergence des systèmes optiques) ;

— unités des **rayonnements ionisants** (activité, exposition, dose absorbée, quantité de matière) ;

— unités de **transmission.**

4.2. Tableaux des unités. — Voir page suivante.

1. UNITÉS GÉOMÉTRIQUES

Unités		Multiples et sous-multiples usuels		
Dénomination	Définition	Dénomination	Symbole	Observations
		LONGUEUR		
mètre	Le mètre est la longueur égale à 1 650 763,73 longueurs d'onde dans le vide de la radiation correspondant à la transition entre les niveaux 2 p_{10} et 5 d_5 de l'atome de krypton 86 *.	téramètre = 10^{12} m mégamètre = 10^{6} m kilomètre = 10^{3} m hectomètre = 10^{2} m décamètre = 10 m mètre décimètre = 10^{-1} m centimètre = 10^{-2} m millimètre = 10^{-3} m micromètre = 10^{-6} m nanomètre = 10^{-9} m picomètre = 10^{-12} m	Tm Mm km hm dam m dm cm mm µm nm pm	 Unité SI Unité C.G.S.
Autres unités : Le *mille* = 1 852 m. Son emploi n'est autorisé qu'en navigation maritime ou aérienne ; c'est la distance moyenne de deux points de la surface de la Terre qui ont même longitude et dont les latitudes diffèrent d'un angle d'une minute. angström : (Å) = 10^{-10} m (unité tolérée provisoirement) unité astronomique : (U.A.) = 1,5 . 10^{11} m (unité autorisée) année de lumière = 9,47 . 10^{15} m (unité interdite) parsec = 3,086 . 10^{16} m (unité autorisée)				
		AIRE OU SUPERFICIE		
mètre carré	Aire d'un carré de 1 mètre de côté.	kilomètre carré = 10^{6} m^2 hectomètre carré = 10^{4} m^2 décamètre carré = 10^{2} m^2 mètre carré décimètre carré = 10^{-2} m^2 centimètre carré = 10^{-4} m^2 millimètre carré = 10^{-6} m^2	km^2 hm^2 dam^2 m^2 dm^2 cm^2 mm^2	 Unité SI Unité C.G.S.
Unités agraires		hectare = 100 a = 10^{4} m^2 are = 10^{2} m^2	ha a	
		VOLUME		
mètre cube	Volume d'un cube de 1 mètre de côté.	kilomètre cube = 10^{9} m^3 mètre cube décimètre cube = 10^{-3} m^3 centimètre cube = 10^{-6} m^3 millimètre cube = 10^{-9} m^3	km^3 m^3 dm^3 cm^3 mm^3	 Unité SI Unité C.G.S.
	Mesure de capacité.	hectolitre = 100 l décalitre = 10 l litre = 1 dm^3 décilitre = 10^{-1} l = 100 cm^3 centilitre = 10^{-2} l = 10 cm^3 millilitre = 10^{-3} l = 1 cm^3	hl dal l dl cl ml	
	Mesure des bois de chauffage empilés.	stère = 1 m^3 décistère = 0,1 st	st dst	
Remarques : L'ancienne définition du litre était : volume de 1 kg d'eau à 4 °C et sous la pression de 76 cm de mercure (1,013 bar) ; cette valeur excède de moins de 1/30 000 le décimètre cube. *Volume massique :* Volume de l'unité de masse d'un corps homogène ; on l'exprime en mètre cube par kilogramme (symbole : m^3/kg).				

* V. t. 1, Physique nucléaire, chap. 1.

Unités		Multiples et sous-multiples usuels		
Dénomination	Définition	Dénomination	Symbole	Observations
		ANGLE PLAN		
radian	Angle plan, ayant son sommet au centre d'un cercle, interceptant, sur la circonférence de ce cercle, un arc d'une longueur égale à celle du rayon.	radian 1 radian = 57°,295 = 63,666 gr = 57° 17′ 44″	rad	Unité SI
Autres unités :	angle droit (∟)	$= \frac{\pi}{2}$ rad = 100 grades = 90 degrés		(unité non légale)
	grade (gr)	$= \frac{\pi}{200}$ rad $= \frac{1}{100}$ angle droit = 0,9 degré		
	degré (°)	$= \frac{\pi}{180}$ rad $= \frac{1}{90}$ angle droit = 1,11 grade		
	minute (′)	$= \frac{1}{60}$ degré = 60 secondes		
	seconde (″)	$= \frac{1}{60}$ minute $= \frac{1}{3\,600}$ de degré		
	tour (tr)	$= 2\pi$ rad		
	millième d'artillerie	$= \frac{\pi}{3\,200}$ rad = 0,05625 degré = 0,0625 grade.		(unité non légale)
		ANGLE SOLIDE (V. t. 1, Mathématiques, chap. 21)		
stéradian	Angle solide ayant son sommet au centre d'une sphère découpant, sur la surface de cette sphère, une aire égale à celle d'un carré ayant pour côté le rayon de la sphère.	stéradian	sr	Unité SI

Remarque : On rencontre quelquefois une unité appelée *spat* (sp), définie comme étant « l'angle solide comprenant la totalité de l'espace autour d'un point ». Il en résulte que : 1 spat = 4 π stéradians. Cette unité est interdite.

2. UNITÉS DE MASSE

Unités		Multiples et sous-multiples usuels		
Dénomination	Définition	Dénomination	Symbole	Observations
		MASSE		
kilogramme	Masse du prototype, en platine iridié, qui a été sanctionné par la Conférence générale des poids et mesures, tenue à Paris en 1889, et qui est déposé au Pavillon de Breteuil à Sèvres (Hauts-de-Seine).	tonne = 1 000 kg quintal = 100 kg kilogramme hectogramme = 100 g décagramme = 10 g gramme décigramme = 10^{-1} g centigramme = 10^{-2} g milligramme = 10^{-3} g microgramme = 10^{-6} g	t q kg hg dag g dg cg mg µg	 Unité SI Unité C.G.S.

Autre unité : Dans le commerce des pierres précieuses, on utilise le *carat métrique* qui vaut deux décigrammes, soit 0,2 g.

Pour les masses atomiques on utilise une unité appelée *unité de masse atomique* dont le symbole est u (anciennement u.m.a.) ; 1 u = 1,660 56 . 10^{-27} kg (approximativement). C'est la fraction $\frac{1}{12}$ de la masse de l'atome du nucléide de carbone 12.

Remarques : Le prototype international du kilogramme excède de 27 mg la masse du décimètre cube d'eau à son maximum de masse volumique.

Masse linéique : Pour un corps homogène, de *section uniforme*, c'est la masse de l'unité de longueur. Elle s'exprime en kilogramme par mètre (symbole : kg/m). Dans le commerce des fibres textiles et des fils on emploie une autre unité : le tex (symbole : tex) ; 1 tex = 10^{-6} kg/m.

Masse surfacique : Pour un corps homogène d'*épaisseur uniforme*, c'est la masse de l'unité de surface. Elle s'exprime en kilogramme par mètre carré (symbole : kg/m²).

Unités		Multiples et sous-multiples usuels		
Dénomination	Définition	Dénomination	Symbole	Observations
		MASSE VOLUMIQUE		
kilogramme par mètre cube	Masse volumique d'un corps homogène dont la masse est 1 kilogramme et le volume 1 mètre cube.	tonne par mètre cube = 1 kg/l = 1 kg/dm³.	t/m³	Unité M.T.S.
		kilogramme par mètre cube = 10^3kg/l.	kg/m³	Unité SI
		kilogramme par litre = 1 kg/dm³ = 1 t/m³	kg/l	
		gramme par centimètre cube = 10^3kg/m³.	g/cm³	Unité C.G.S.
		gramme par litre = 1 kg/m³	g/l	

Remarque : La *densité* d'un corps (*densité relative*) est le rapport exprimé en nombre décimal de la masse volumique de ce corps à celle d'un corps pris comme référence : en général, l'eau pour les solides et les liquides et l'air pour les gaz. C'est une grandeur sans dimension.

		CONCENTRATION		
kilogramme par mètre cube	Concentration d'un échantillon homogène contenant 1 kilogramme du corps considéré dans un volume total de 1 mètre cube.	kilogramme par mètre cube gramme par centimètre cube	kg/m³ g/cm³	Unité SI

Remarque : Le titre, en un corps donné, d'un échantillon homogène est le rapport, exprimé en nombre décimal, de la mesure relative à ce corps, d'une grandeur déterminée et de la mesure, relative à la totalité de l'échantillon, de la même grandeur. Le mot « titre » doit être accompagné d'un qualificatif, tel que « massique » ou « volumique » ; à défaut de qualificatif, le mot « titre » doit s'entendre comme « titre massique ».

3. UNITÉS DE TEMPS

Unités		Multiples et sous-multiples usuels		
Dénomination	Définition	Dénomination	Symbole	Observations
		TEMPS		
seconde	Durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental (1) de l'atome de césium 133.	jour = 24 h = 86 400 s	d	
		heure = 3 600 s = 60 min	h	
		minute = 60 s	min	
		seconde = 1 s	s	Unité SI
		milliseconde = 10^{-3} s	ms	
		microseconde = 10^{-6} s	µs	
		nanoseconde = 10^{-9} s	ns	
		picoseconde = 10^{-12} s	ps	

Remarque : Pour la minute, le symbole « m » peut être employé lorsqu'il ne saurait y avoir d'ambiguïté : par exemple dans 8 h 16 m 27 s (dans ce cas particulier les symboles s'écrivent au-dessus de la ligne).

On peut aussi employer le symbole j pour jour.

L'heure de temps universel (méridien 0) se désigne par le symbole T.U.

(1) V. t. 1, Physique nucléaire, chap. 1.

4. UNITÉS MÉCANIQUES

Unités		Multiples et sous-multiples usuels		
Dénomination	Définition	Dénomination	Symbole	Observations
		VITESSE LINÉAIRE		
mètre par seconde	Vitesse d'un mobile qui, animé d'un mouvement uniforme, parcourt, en 1 seconde, une distance de 1 mètre.	mètre par seconde	m/s	Unité SI
		centimètre par seconde = 10^{-2}m/s	cm/s	Unité C.G.S.

Autres unités : le *kilomètre par heure* (km/h) vaut $\frac{1}{3,6}$ m/s = 0,2777 m/s.

Le *nœud* est défini comme étant « la vitesse uniforme d'un navire qui, en 1 heure, parcourt 1 mille » et vaut $\frac{1\,852}{3\,600}$ = 0,514 m/s.

Unités		Multiples et sous-multiples usuels		
Dénomination	Définition	Dénomination	Symbole	Observations
		VITESSE ANGULAIRE		
radian par seconde	Vitesse angulaire d'un mobile, qui, animé d'un mouvement de rotation uniforme, effectue en 1 seconde, une rotation de 1 radian autour d'un axe.	radian par seconde	rad/s	Unité SI
		tour par seconde = 2π rad/s	tr/s	
		tour par minute = $\frac{2\pi}{60}$ rad/s $\approx$ 0,105 rad/s	tr/min	environ : 0,105 rad/s
		ACCÉLÉRATION LINÉAIRE		
mètre par seconde carrée	Accélération d'un mobile animé d'un mouvement uniformément varié, dont la vitesse varie, en une seconde, de 1 mètre par seconde.	mètre par seconde carrée	m/s^2	Unité SI
		centimètre par seconde carrée ou gal = 10^{-2} m/s^2	cm/s^2	Unité C.G.S.
		ACCÉLÉRATION ANGULAIRE		
radian par seconde carrée	Accélération angulaire d'un mobile animé d'un mouvement de rotation uniformément varié, dont la vitesse angulaire varie en une seconde de 1 radian par seconde.	radian par seconde carrée	rad/s^2	Unité SI
		FRÉQUENCE		
hertz	Fréquence d'un phénomène périodique dont la période est 1 seconde.	térahertz = 10^{12} Hz	THz	
		gigahertz = 10^9 Hz	GHz	
		mégahertz = 10^6 Hz	MHz	
		kilohertz = 10^3 Hz	kHz	
		hertz = 1 Hz	Hz	Unité SI
		FORCE		
newton	Force qui communique à un corps ayant une masse de 1 kilogramme une accélération de 1 mètre par seconde carrée.	méganewton = 10^6 N	MN	
		kilonewton = 10^3 N	kN	
		décanewton = 10^1 N	daN	
		newton	N	Unité SI
		millinewton = 10^{-3} N	mN	
		Autre unité : *dyne* (dyn) : unité C.G.S. = 10^{-5} N (emploi provisoire)		
		Unité interdite : le kilogramme-force (symbole : kgf) ; 1 kgf = 9,806 N $\approx$ 1 daN à 2 % près.		
		MOMENT D'UNE FORCE		
newton-mètre	Moment par rapport à un axe, d'une force de 1 newton, dont le support est distant de 1 mètre de l'axe et y est orthogonal.	newton-mètre	N.m	Unité SI
		Autre unité : *centimètre-dyne* (cm $\wedge$ dyn) = 10^{-7} N.m (emploi provisoire)		
		ÉNERGIE, TRAVAIL, QUANTITÉ DE CHALEUR		
joule	Travail produit par une force de 1 newton dont le point d'application se déplace de 1 mètre dans la direction de la force.	mégajoule = 10^6 J	MJ	
		kilojoule = 10^3 J	kJ	
		joule	J	Unité SI
		erg = 10^{-7} J	erg	Unité C.G.S.

Remarques : Les dénominations « périodes par seconde », « cycles par seconde » et leurs multiples sont à proscrire ; de même les expressions incomplètes « période » et « cycle » sans indication de temps.

Dans les calculs on utilise fréquemment la *pulsation* ω qui a pour valeur : $\omega = 2\pi f$ et qui s'exprime en « *radians par seconde* » car elle correspond à une vitesse angulaire.

Unités		Multiples et sous-multiples usuels		
Dénomination	Définition	Dénomination	Symbole	Observations

Autres unités :

wattheure (Wh) = 3 600 joules = $3{,}6 . 10^3$ J

kilowattheure (kWh) = $3{,}6 . 10^6$ J

calorie (cal) = 4,1855 J ; il s'agit de ce que l'on appelait autrefois la « petite calorie » : quantité de chaleur nécessaire pour élever de 1 °C la température d'une masse de 1 gramme d'un corps, dont la chaleur massique est égale à celle de l'eau à 15 °C sous la pression atmosphérique normale (101 325 pascals). La « grande calorie » valait 1 000 petites calories, soit 1 kcal.

thermie (th) 1 Mcal = 10^6 calories = $4{,}1855 . 10^6$J

frigorie (fg) en valeur absolue est égale à 1 kcal ; utilisée dans les industries frigorifiques.

électronvolt (eV) = $1{,}602 \times 10^{-19}$ J ; c'est une unité d'énergie utilisée couramment en physique nucléaire. C'est l'énergie acquise par un électron, accéléré sous une différence de potentiel de 1 volt.

Remarques : Le *kilogrammètre* (kgm) défini comme étant : « le travail produit par 1 kilogramme-force dont le point d'application se déplace de 1 mètre dans la direction de la force » est prohibé ; il correspond à 9,81 joules ou 2,34 calories. *Date d'interdiction de l'utilisation des trois unités suivantes : calorie, thermie et frigorie : le 31 décembre 1977.*

PUISSANCE

watt	Puissance d'un système énergétique dans lequel est transférée uniformément une énergie de 1 joule pendant 1 seconde.	mégawatt = 10^6 W	MW	
		kilowatt = 10^3 W	kW	
		watt	W	Unité SI
		milliwatt = 10^{-3} W	mW	
		microwatt = 10^{-6} W	µW	
		erg par seconde = 10^{-7} W	erg/s	Unité C.G.S.

Les électriciens emploient pour mesurer les puissances apparentes le *voltampère* (VA) et ses multiples, notamment le kilovoltampère (kVA) et le mégavoltampère (MVA) et pour les puissances réactives le *var* (symbole var) et ses multiples.

Remarque : Le cheval (symbole : ch) est une unité interdite : 1 ch = 736 W.

PRESSION ET CONTRAINTE

pascal	Pression uniforme qui, agissant sur une surface plane de 1 mètre carré, exerce perpendiculairement à cette surface une force totale de 1 newton.	mégapascal = 10^6 Pa	MPa	
		kilopascal = 10^3 Pa	kPa	
		pascal = 1 N/m²	Pa	Unité SI
	Contrainte qui, agissant sur une surface plane de 1 mètre carré, exerce sur cette surface une force totale de 1 newton.	bar = 10^5 Pa	bar	
		millibar = 10^2 Pa	mbar	

Autres unités (d'emploi interdit) :

L'*atmosphère* (atm) = $1{,}013 . 10^5$ pascals = 760 torrs.

Le *torr* ou millimètre de mercure = $1{,}333 . 10^2$ pascals.

Le *kilogramme-force par mètre carré* (kgf/m²) = 9,81 pascals.

Le *kilogramme-force par centimètre carré* (kgf/cm²) = $9{,}81 . 10^4$ pascals = 0,98 bar.

Le *kilogramme-force par millimètre carré* (kgf/mm²) = $9{,}81 . 10^6$ pascals.

Remarque : La pression atmosphérique normale (0,76 m de mercure) à 0 °C sous l'accélération normale de la pesanteur 9,806 65 m/s² est égale à 101 325 pascals.

VISCOSITÉ DYNAMIQUE

pascal-seconde	Viscosité dynamique d'un fluide dans lequel le mouvement rectiligne, uniforme et dans son plan d'une surface plane, solide, indéfinie, donne lieu à une force retardatrice de 1 newton par mètre carré de la surface en contact avec le fluide homogène et isotherme en écoulement relatif devenu permanent, lorsque le gradient de la vitesse du fluide à la surface du solide, et par mètre d'écartement normal à ladite surface, est de 1 mètre par seconde.	pascal-seconde	Pa.s	Unité SI
		poise = 0,1 Pa.s	Po	Unité C.G.S.

Remarques : La viscosité dynamique est aussi appelée viscosité.

L'unité de viscosité dynamique a été appelée longtemps le poiseuille (symbole : Pl) ; 1 Pl = 1 Pa.s.

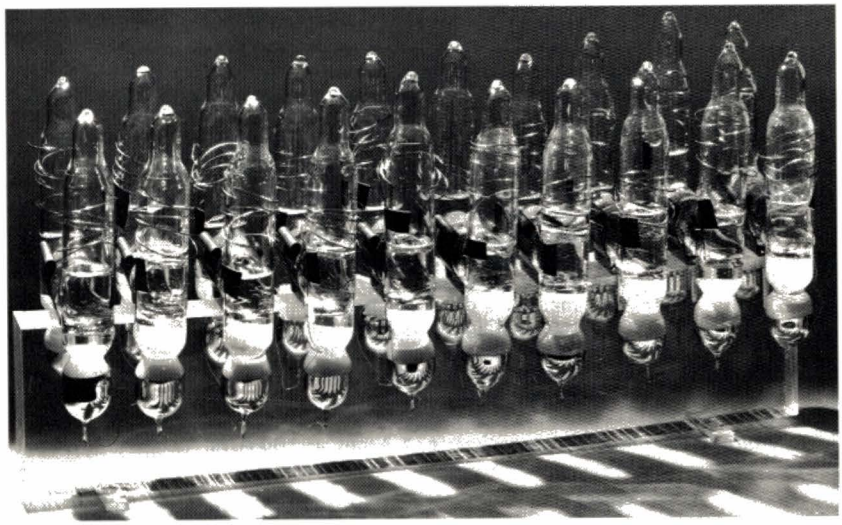
Autre unité : On rencontre parfois dans l'industrie le « *kilogramme-force seconde par mètre carré* » (kgf.s/m²) qui est égal à 9,81 Pa.s. Cette unité est prohibée.

Unités		Multiples et sous-multiples usuels		
Dénomination	Définition	Dénomination	Symbole	Observations
		VISCOSITÉ CINÉMATIQUE		
mètre carré par seconde	Viscosité cinématique d'un fluide dont la viscosité dynamique est un pascal-seconde et la masse volumique un kilogramme par mètre cube.	mètre carré par seconde centimètre carré par seconde $= 10^{-4}$ m²/s ou stokes	m²/s cm²/s St	Unité SI Unité C.G.S.

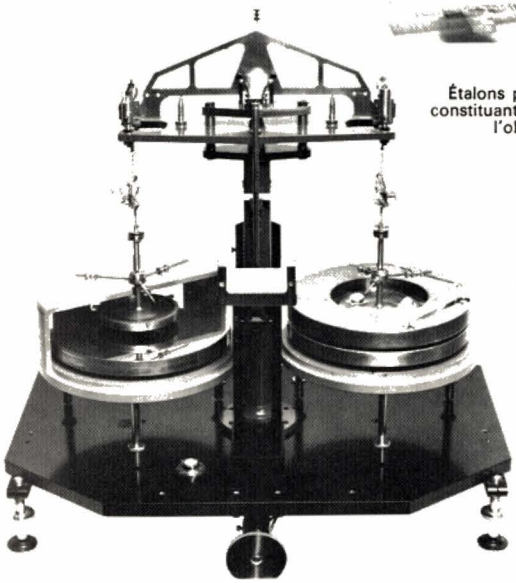
5. UNITÉS ÉLECTRIQUES ET MAGNÉTIQUES

Unités		Multiples et sous-multiples usuels		
Dénomination	Définition	Dénomination	Symbole	Observations
		INTENSITÉ DE COURANT ÉLECTRIQUE		
ampère	Intensité d'un courant constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de 1 mètre l'un de l'autre dans le vide, produit entre ces conducteurs, par mètre de longueur, une force de 2×10^{-7} newton.	kiloampère $= 10^{3}$ A ampère milliampère $= 10^{-3}$ A microampère $= 10^{-6}$ A	kA A mA μA	Unité SI
		QUANTITÉ D'ÉLECTRICITÉ		
coulomb	Quantité d'électricité transportée en 1 seconde par un courant de 1 ampère	kilocoulomb $= 10^{3}$ C coulomb millicoulomb $= 10^{-3}$ C microcoulomb $= 10^{-6}$ C	kC C mC μC	Unité SI
Autre unité : l'*ampère-heure* (Ah) vaut 3 600 coulombs.				
		DIFFÉRENCE DE POTENTIEL (OU TENSION), FORCE ÉLECTROMOTRICE		
volt	Différence de potentiel qui existe entre deux points d'un fil conducteur parcouru par un courant constant de 1 ampère, lorsque la puissance dissipée entre ces points est égale à 1 watt.	mégavolt $= 10^{6}$ V kilovolt $= 10^{3}$ V volt millivolt $= 10^{-3}$ V microvolt $= 10^{-6}$ V	MV kV V mV μV	Unité SI
Remarques : Les forces électromotrices des générateurs s'expriment en volts, bien que dans ce cas la définition du volt ne s'applique pas. Le volt est pratiquement égal à la fraction 1/1,018 6 de la force électromotrice, à la température de 20 °C, de l'élément Weston normal (neutre et saturé) au sulfate de cadmium.				
		INTENSITÉ DE CHAMP ÉLECTRIQUE		
volt par mètre	Intensité d'un champ électrique exerçant une force de 1 newton sur un corps chargé d'une quantité d'électricité de 1 coulomb.	volt par mètre millivolt par mètre $= 10^{-3}$ V/m microvolt par mètre $= 10^{-6}$ V/m	V/m mV/m μV/m	Unité SI
Remarques : Le « volt par mètre » est équivalent au « newton par coulomb ». Dans l'industrie on utilise parfois le kilovolt par millimètre (kV/mm) $= 10^{6}$ V/m.				

Unités		Multiples et sous-multiples usuels		
Dénomination	Définition	Dénomination	Symbole	Observations
		RÉSISTANCE ÉLECTRIQUE		
ohm	Résistance électrique qui existe entre deux points d'un fil conducteur, lorsqu'une différence de potentiel de 1 volt, appliquée entre ces deux points, produit dans ce conducteur un courant de 1 ampère, ledit conducteur n'étant le siège d'aucune force électromotrice.	téraohm = 10^{12} Ω mégohm = 10^{6} Ω kilohm = 10^{3} Ω ohm milliohm = 10^{-3} Ω microhm = 10^{-6} Ω nanohm = 10^{-9} Ω	TΩ MΩ kΩ Ω mΩ μΩ nΩ	Unité SI
Remarque : L'ohm est utilisé comme unité d'impédance.				
		CONDUCTANCE ÉLECTRIQUE		
siemens	Conductance électrique d'un conducteur ayant une résistance électrique de 1 ohm.	siemens millisiemens	S mS	Unité SI
Remarque : Le siemens est utilisé comme unité d'admittance.				
		CAPACITÉ ÉLECTRIQUE		
farad	Capacité d'un condensateur électrique entre les armatures duquel apparaît une différence de potentiel de 1 volt lorsqu'il est chargé d'une quantité d'électricité égale à 1 coulomb.	farad microfarad = 10^{-6} F nanofarad = 10^{-9} F picofarad = 10^{-12} F	F μF nF pF	Unité SI
		INDUCTANCE ÉLECTRIQUE		
henry	Inductance électrique d'un circuit fermé dans lequel une force électromotrice de 1 volt est produite lorsque le courant électrique qui parcourt le circuit varie uniformément de 1 ampère par seconde.	henry millihenry = 10^{-3} H microhenry = 10^{-6} H	H mH μH	Unité SI
		FLUX MAGNÉTIQUE		
weber	Flux magnétique qui, traversant un circuit d'une seule spire, y produit une force électromotrice de 1 volt, si on l'annule en une seconde par décroissance uniforme.	weber	Wb	Unité SI
		INDUCTION MAGNÉTIQUE		
tesla	Induction magnétique uniforme qui, répartie normalement sur une surface de 1 mètre carré, produit à travers cette surface un flux magnétique total de 1 weber.	tesla	T	Unité SI
		FORCE MAGNÉTOMOTRICE		
ampère	Force magnétomotrice produite le long d'une courbe fermée quelconque qui entoure une seule fois un conducteur parcouru par un courant électrique de 1 ampère.	ampère	A	Unité SI

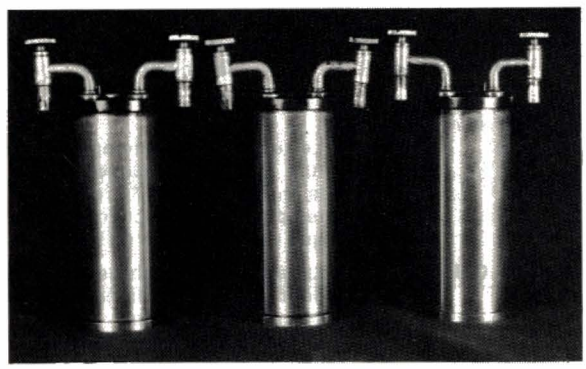


Série de piles étalons Weston (conservation de l'unité nationale de force électromotrice) *(L.C.I.E.)*

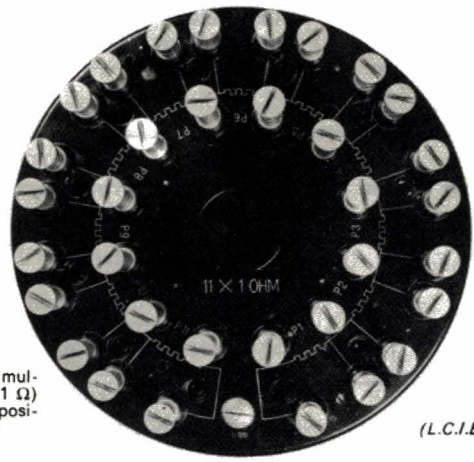


Électromètre de Kelvin utilisé pour la détermination absolue du volt (*L.C.I.E.*)

Étalons primaires constituant la base de l'ohm



(L.C.I.E.)



Étalons secondaires (multiples de l'ohm : 11 × 1 Ω) Vue montrant la disposition des bornes

(L.C.I.E.)

Condensateur de Lampard-Thomson. Ensemble des éléments

(L.C.I.E.)

Étalon primaire d'inductance de 18 mH

(L.C.I.E.)

Unités		Multiples et sous-multiples usuels		
Dénomination	Définition	Dénomination	Symbole	Observations
		INTENSITÉ DE CHAMP MAGNÉTIQUE		
ampère par mètre	Intensité du champ magnétique produit dans le vide, le long de la circonférence d'un cercle de 1 mètre de circonférence, par un courant électrique d'intensité 1 ampère maintenu dans un conducteur rectiligne, de longueur infinie, de section circulaire négligeable, formant l'axe du cercle considéré.	ampère par mètre	A/m	Unité SI
Autre unité : ampère par centimètre ; 1 A/cm = 100 A/m.				

6. UNITÉS CALORIFIQUES

Unités		Multiples et sous-multiples usuels		
Dénomination	Définition	Dénomination	Symbole	Observations
		TEMPÉRATURE		
kelvin	Le kelvin, unité de température thermodynamique, est la fraction 1/273,16 de la température thermodynamique du point triple de l'eau.	kelvin	K	Unité SI
degré Celsius	La température Celsius t est définie par la différence $t = T - T_0$ entre deux températures thermodynamiques T et T_0 avec $T_0 = 273{,}15$ kelvins. La température Celsius s'exprime en degrés Celsius.	degré Celsius 1 °C = 1 K	°C	
		QUANTITÉ DE CHALEUR Voir unités mécaniques (Énergie)		
		CAPACITÉ THERMIQUE — ENTROPIE		
joule par kelvin	Augmentation de l'entropie d'un système recevant une quantité de chaleur de 1 joule à la température thermodynamique constante de 1 kelvin, pourvu qu'aucun changement irréversible n'ait eu lieu dans le système.	joule par kelvin	J/K	Unité SI
		CHALEUR MASSIQUE — ENTROPIE MASSIQUE		
joule par kilogramme-kelvin	Chaleur massique d'un corps homogène de masse 1 kilogramme dans lequel l'apport d'une quantité de chaleur de 1 joule produit une élévation de température thermodynamique de 1 kelvin.	joule par kilogramme-kelvin	J/(kg . K)	Unité SI
		CONDUCTIVITÉ THERMIQUE		
watt par mètre-kelvin	Conductivité thermique d'un corps homogène isotrope dans lequel une différence de température de 1 kelvin produit entre deux plans parallèles, ayant une aire de 1 mètre carré et distants de 1 mètre, un flux thermique de 1 watt.	watt par mètre-kelvin	W/(m . K)	

7. UNITÉS OPTIQUES

Unités		Multiples et sous-multiples usuels		
Dénomination	Définition	Dénomination	Symbole	Observations
		INTENSITÉ LUMINEUSE		
candela	Intensité lumineuse dans la direction perpendiculaire d'une surface de 1/600 000 mètre carré d'un corps noir à la température de congélation du platine sous la pression de 101 325 pascals.	candela	cd	Unité SI
		LUMINANCE LUMINEUSE		
candela par mètre carré	Luminance d'une source dont l'intensité lumineuse est une candela et l'aire un mètre carré.	candela par mètre carré candela par centimètre carré = 10^4 cd/m²	cd/m² cd/cm²	Unité SI
		FLUX LUMINEUX		
lumen	Flux lumineux émis dans l'angle solide de 1 stéradian par une source ponctuelle uniforme, placée au sommet de l'angle solide et ayant une intensité lumineuse de 1 candela.	lumen	lm	Unité SI
		ÉCLAIREMENT LUMINEUX		
lux	Éclairement d'une surface qui reçoit normalement, d'une manière uniformément répartie, un flux lumineux de 1 lumen par mètre carré.	lux	lx	Unité SI
		VERGENCE DES SYSTÈMES OPTIQUES		
dioptrie	Vergence d'un système optique dont la distance focale est de 1 mètre dans un milieu dont l'indice de réfraction est un.	dioptrie	δ	Unité SI
un par mètre		un par mètre	m^{-1}	

Remarque : Le lux est également l'émittance d'une surface de 1 mètre carré, qui émet normalement, d'une manière uniformément répartie, un flux lumineux de 1 lumen.

8. UNITÉS DES RAYONNEMENTS IONISANTS

Unités		Multiples et sous-multiples usuels		
Dénomination	Définition	Dénomination	Symbole	Observations
		ACTIVITÉ		
becquerel	Activité d'une quantité de nucléide radioactif pour laquelle le nombre de transitions nucléaires spontanées par seconde est égal à 1.	becquerel	Bq	

Remarque : Le curie (symbole Ci) est l'activité d'une quantité de nucléides radioactifs pour laquelle le nombre de transitions nucléaires spontanées par seconde est $3{,}7 \times 10^{10}$.

Unités		Multiples et sous-multiples usuels		
Dénomination	Définition	Dénomination	Symbole	Observations
		EXPOSITION		
coulomb par kilogramme	Exposition telle que la charge de tous les ions d'un même signe produits dans l'air, lorsque les électrons (négatifs et positifs) libérés par les photons de façon uniforme dans une masse d'air égale à 1 kilogramme sont complètement arrêtés dans l'air, est égale en valeur absolue à 1 coulomb.	coulomb par kilogramme	C/kg	
Remarque : L'exposition est une grandeur physique définie pour les rayons X et γ uniquement. Le roentgen (symbole : R) est une exposition égale à $2{,}58 \times 10^{-4}$ C/kg.				
		DOSE ABSORBÉE		
gray	Dose absorbée dans un élément de matière de masse 1 kilogramme auquel les rayonnements ionisants communiquent de façon uniforme une énergie de 1 joule.	gray	Gy	
Remarque : Le rad (symbole : rd) est une unité spéciale employée pour exprimer la dose absorbée de rayonnements ionisants ; 1 rd = 10^{-2} Gy.				
		QUANTITÉ DE MATIÈRE		
mole	Quantité de matière d'un système contenant autant d'entités élémentaires qu'il y a d'atomes dans 0,012 kilogramme de carbone 12.	mole	mol	Unité SI

9. UNITÉS DE TRANSMISSION (V. chap. 4)

Unités		Multiples et sous-multiples usuels		
Dénomination	Définition	Dénomination	Symbole	Observations
néper	Le néper est l'appellation dont on fait suivre le nombre n défini par la relation suivante : $n = \log_e \frac{A_1}{A_2}$. A_1 et A_2 désignant soit 2 tensions électriques, soit 2 intensités de courants électriques, soit 2 vitesses, soit 2 pressions acoustiques. Par extension A_1 et A_2 peuvent représenter 2 racines carrées de puissances réelles ou apparentes, ou 2 racines carrées d'intensités acoustiques.	néper	Np	Le symbole N est toléré lorsqu'il n'y a pas à craindre de confusion avec le symbole N de newton. 1 Np = 8,69 dB

Unités		Multiples et sous-multiples usuels		
Dénomination	Définition	Dénomination	Symbole	Observations
décibel	Le décibel est l'appellation dont on fait suivre le nombre n' défini par la relation suivante : $n' = 10 \log_{10} \frac{B_1}{B_2}$. B_1 et B_2 désignant soit 2 puissances réelles ou apparentes, soit 2 intensités acoustiques. Par extension, ces symboles peuvent figurer soit 2 carrés de d.d.p., soit 2 carrés d'intensités de courants électriques, soit 2 carrés d'impédances, soit 2 carrés de vitesses, soit 2 carrés de pressions acoustiques.	décibel	dB	1 dB = 0,115 Np

5. AUTRES SYSTÈMES D'UNITÉS

Plusieurs systèmes d'unités ont été employés avant l'adoption du système international. Les grandeurs fondamentales et les unités principales choisies pour définir ces divers systèmes diffèrent comme le tableau suivant permet de le constater.

Autres systèmes d'unités de mesure

Dénomination (systèmes)	Caractéristiques générales	Grandeurs fondamentales	Unités principales	Observations
1 **C.G.S.** ou Centimètre Gramme Seconde	Système absolu d'unités pour les grandeurs géométriques et mécaniques. A longtemps été employé par les physiciens : mais ses unités conviennent mal aux besoins de la pratique industrielle et commerciale, car elles sont alors trop petites. Le système C.G.S. ne permet pas de déterminer d'unité électrique, aussi a-t-il été complété et cela a fourni les 2 systèmes (bien distincts) qui suivent.	Longueur Masse Temps	Centimètre Gramme Seconde	
2 **E.M.C.G.S.** s'énonce : Électro-magnétique C.G.S.	Système à 4 grandeurs fondamentales : les 3 grandeurs du système C.G.S. et une 4e, la *perméabilité magnétique* (V. t. 1, Magnétisme, chap. 1). La perméabilité magnétique du vide est choisie arbitrairement comme étant égale à 1. *Remarque :* Dans le vide la loi magnétique de Coulomb se traduit par la relation $F = \frac{mm'}{d^2}$ (F, intensité de la force s'exerçant sur les deux masses magnétiques m et m', placées dans le vide et séparées par la distance d) et la loi électrostatique de Coulomb $F = c_0^2 \frac{qq'}{d^2}$ (F intensité de la force s'exerçant sur deux charges électriques q et q', dans le vide, distantes de d, c_0 étant numériquement égale à la vitesse de la lumière dans le vide ($3 . 10^{10}$ cm/s).	Longueur Masse Temps Perméabilité magnétique	Centimètre Gramme Seconde Perméabilité magnétique de l'espace vide	Établis en 1874 à la suite des travaux d'une commission créée en 1861 par la « British Association for Advancement of Science », les systèmes C.G.S., E.M.C.G.S., et E.S.C.G.S. ont été ratifiés à Paris, en 1881, par le Congrès international des Électriciens.

Autres systèmes d'unités de mesure (suite)

Dénomination (Systèmes)	Caractéristiques générales	Grandeurs fondamentales	Unités principales	Observations
3 **E.S.C.G.S.** s'énonce : Électrostatique C.G.S.	Système à 4 grandeurs fondamentales : les 3 grandeurs du système C.G.S. et une 4e la *permittivité*. La permittivité du vide est égale à 1 (V. t. 1, Électricité, chap. 11). *Remarque :* la loi électrostatique de Coulomb se traduit par la relation $F = \frac{qq'}{d^2}$ et la loi magnétique $F = \frac{c_0^2 qq'}{d^2}$ (c_0 a la même valeur numérique que dans le système E.M.C.G.S.).	Longueur Masse Temps Constante diélectrique	Centimètre Gramme Seconde Constante diélectrique de l'espace vide	
4 **Système pratique électrique**	Système cohérent d'unités électriques qui sont des multiples ou des sous-multiples, suivant des puissances entières de 10, des unités correspondantes du système E.M.C.G.S.			
4-1. Système des unités électriques internationales. (Congrès de Chicago en 1893, puis Réunion de Londres en 1908)	L'ohm international et l'ampère international, ainsi que l'unité de force électromotrice ou de différence de potentiel ou de tension (unité secondaire) désignée « volt international » ont été matérialisés par les *étalons* définis ci-après : *Ohm international :* Résistance offerte à un courant constant par une colonne cylindrique de mercure ayant une masse de 14,4521 grammes et une longueur de 106,300 centimètres, à la température de la glace fondante (0 °C). *Ampère international :* Courant constant qui, traversant une solution aqueuse de nitrate d'argent, dépose ce métal à raison de 0,001 118 00 gramme par seconde (soit 1,118 milligramme par seconde). *Volt international* (unité secondaire) : Le volt international est la différence de potentiel entre les extrémités d'un conducteur de résistance égale à 1 ohm international et traversé par un courant de 1 ampère international. Le volt international est représenté avec une approximation suffisante pour les besoins de la pratique par la fraction 1/1,0183 de la force électromotrice, à la température de 20 °C, de la pile au sulfate de cadmium (élément Weston).	Résistance Courant	Ohm international Ampère international	Le système pratique électrique a été constitué peu à peu au cours des travaux de différents organismes. Il faut distinguer deux périodes principales d'élaboration ayant abouti respectivement aux systèmes définis aux paragraphes 4-1 et 4-2. Le premier a été élaboré de 1881 à 1908 ; ses deux unités principales ont été incluses, à ce titre, dans la loi du 2 avril 1919 et dans le décret du 26 juillet 1919 sur les unités de mesure en France (voir ci-après).
4-2. Système des unités électriques absolues. (Réunion de la Conférence générale des poids et mesures en 1947).	Les unités ont les mêmes valeurs que celles du système précédent mais les définitions de ces unités les rattachent aux unités M.K.S. (V. 6 ci-après) ;			Ce système a remplacé le précédent à dater du 1er janvier 1948 : ses unités ont été incluses comme unités secondaires dans le décret du 28 février

Autres systèmes d'unités de mesure (suite)

Dénomination (Systèmes)	Caractéristiques générales	Grandeurs fondamentales	Unités principales	Observations
4 **Système pratique électrique** (suite)	elles remplacent les représentations des unités du système précédent en ce qui concerne l'ohm, l'ampère et le volt.			1948 faisant suite à la loi du 14 janvier 1948 sur les unités de mesure françaises (V. 5-4° ci-après).
5 **Système M.T.S.** Mètre Tonne Seconde	Système d'unités géométriques, mécaniques, électriques et optiques. 1° L'unité principale de masse est le kilogramme. Cependant l'unité de masse dont sont déduites les unités mécaniques est la *tonne* (qui vaut 1 000 kilogrammes), dite *unité de base*. 2° Certaines unités (secondaires) mécaniques étaient indiquées « à titre transitoire » (leur emploi n'étant autorisé qu'à titre provisoire), — kilogramme-poids ou kilogramme-force ; — kilogrammètre ; — kilogrammètre par seconde, cheval-vapeur, poncelet, — kilogramme-poids par centimètre carré. 3° Dispositions particulières de la loi du 2 avril 1919 et du décret du 26 juillet 1919. Les unités électriques de résistance et de courant (unités principales) et de force électromotrice ou différence de potentiel ou tension (unité secondaire) étaient définies et représentées (étalons) conformément aux décisions prises à la réunion de Londres en 1908 pour fixer les unités électriques internationales (V. 4-1 ci-dessus). 4° Dispositions particulières de la loi du 14 janvier 1948 et du décret du 28 février 1948. L'ampère, le volt et l'ohm ne sont plus définis, ni représentés, comme ils l'étaient dans la législation précédente (de 1919). Ce sont les unités mécaniques du système M.T.S. qui servent à définir les unités électriques. L'ampère, le volt, l'ohm, le coulomb, le farad, l'henry, le weber sont des unités secondaires.	Longueur Masse Temps Résistance électrique Courant électrique Intervalle de température Intensité lumineuse Longueur Masse Temps Intervalle de température Intensité lumineuse	Mètre Kilogramme mais l'unité de base est la tonne Seconde Ohm Ampère Degré centésimal Bougie décimale Mètre Kilogramme Seconde Degré centésimal Bougie nouvelle	Le système M.T.S. a été institué en France par la loi du 2 avril 1919 et le décret du 26 juillet 1919 qui l'a suivie. Ces textes ont été modifiés, à dater du 1er janvier 1948, et par la loi du 14 janvier 1948 et par le décret du 28 février 1948 qui l'a suivie pour ce qui concerne les unités électriques et optiques. Le but de cette législation (en 1919 et de même en 1948) a été de permettre au commerce et à l'industrie de disposer d'unités légales de mesure appropriées à leurs besoins. Le système constitué par les unités autorisées à titre provisoire peut être représenté par le sigle M.Kp.S. (mètre, kilogramme-poids, seconde) dans lequel c'est la masse et non le poids qui est l'une des grandeurs fondamentales. L'inconvénient de ce système M.Kp.S. est d'avoir une unité de force variable d'un point à un autre du globe, suivant la valeur de l'accélération g de la pesanteur au lieu considéré. L'appellation degré centésimal est à proscrire (l'appellation légale est kelvin). Elle n'est donnée ici que parce qu'elle avait été retenue à l'époque où le système a été élaboré.
6 **Système Giorgi** a été dénommé aussi système pratique M.K.S. ou M.K.S.A.	Système cohérent d'unités géométriques, mécaniques et électriques, comportant 4 unités principales dont l'une est électrique.	Longueur Masse Temps Une grandeur électrique	Mètre Kilogramme Seconde L'une quelconque des unités pratiques électriques ci-contre	coulomb, ampère, volt, ohm farad, henry, weber. Système proposé en 1901 par le professeur G. Giorgi, avec l'ohm comme unité principale, puis adopté en 1935 par la Commission Électrotechnique Internationale (CEI) avec l'ampère comme unité principale.

Autres systèmes d'unités de mesure (suite)

Dénomination (Systèmes)	Caractéristiques générales	Grandeurs fondamentales	Unités principales	Observations
Système M.K.S.A. rationalisé Le nom de « Système Giorgi » est plus spécialement réservé à ce système	En principe, le problème de la « rationalisation » est de combiner les unités de façon que les facteurs, tels que 4π ne rentrent plus dans la majorité des formules les plus importantes rencontrées dans les calculs scientifiques et techniques.	Longueur Masse Temps Courant électrique	Mètre Kilogramme Seconde Ampère	Le système M.K.S.A. se confond avec le système M.K.S. en ce qui concerne les unités géométriques et mécaniques. Il a été décidé, en juillet 1950, par la CEI que le Système Giorgi devait être envisagé sous une forme totalement rationalisée. Un tel système a fait l'objet d'une enquête internationale et à la suite de celle-ci, le système international SI a été adopté dans différents pays, et en particulier en France (décret du 3 mai 1961). Dans le système SI la permittivité du vide est égale à $\varepsilon_0 = 8{,}854\,19 \times 10^{-12}$ F/m et la perméabilité est égale à : $\mu_0 = 4\ \pi.10^{-7}$ H/m.

6. TABLEAUX DE CORRESPONDANCE

Dans les tableaux A et B, sont indiquées les correspondances entre les unités des principaux systèmes d'unités considérés au paragraphe précédent et celles du système SI. Le tableau A est réservé aux unités électriques et magnétiques des systèmes E.S.C.G.S. et E.M.C.G.S. Le tableau B regroupe les unités géométriques, les unités de masse, les unités de temps et les unités mécaniques. À quelques exceptions près, la plupart de ces unités sont interdites et leur rappel a surtout un but historique.

Tableau A

Grandeur	U. E. S. C. G. S.			U. E. M. C. G. S.		
	Unité	Symbole	Valeur en unité SI	Unité	Symbole	Valeur en unité SI
intensité de courant électrique	statampère		$\frac{1}{3.10^9}$ A	biot ou abampère	Bi	10 A
quantité d'électricité	statcoulomb (ou franklin)	Fr	$\frac{1}{9.10^9}$ C	abcoulomb		10 C
d.d.p. (f.é.m.)	statvolt		3.10^2 V	abvolt		10^{-8} V
champ électrique	statvolt par mètre		3.10^4 V/m	abvolt par mètre		10^{-6} V/m
résistance électrique	statohm		9.10^{11} Ω	abohm		10^{-9} Ω
capacité électrique	statfarad ou centimètre		$\frac{1}{9.10^{11}}$ F = 1,11 pF	abfarad		10^9 F
inductance électrique	stathenry		9.10^{11} H	abhenry ou centimètre		10^{-3} μ H
flux magnétique			3.10^2 Wb	maxwell	Mx	10^{-8} Wb
induction magnétique			3.10^6 T	gauss	Gs	10^{-4} T
force magnétomotrice			$\frac{1}{12\pi.10^9}$ A	gilbert	Gb	$\frac{10}{4\pi}$ A
champ magnétique			$\frac{1}{12\pi.10^7}$ A/m	œrsted	Oe	$\frac{1000}{4\pi}$ A/m

Tableau B

	GRANDEURS	C. G. S.			M. T. S			M. Kp. S.		
		Unité	Symbole	Valeur en unité SI	Unité	Symbole	Valeur en unité SI	Unité	Symbole	Valeur en unité SI
Unités géométriques	Longueur	centimètre	cm	10^{-2} m	mètre	m	1 m	mètre	m	1m
	Aire (superficie)	centimètre carré	cm^2	10^{-4} m^2	mètre carré	m^2	1 m^2	mètre carré	m^2	1 m^2
	Volume	centimètre cube	cm^3	10^{-6} m^3	mètre cube	m^3	1 m^3	mètre cube	m^3	1 m^3
	Angle	mêmes unités que pour le système SI			mêmes unités que pour le système SI			mêmes unités que pour le système SI		
Unités de masse	Masse	gramme	g	10^{-3} kg	tonne	t	10^3 kg	pas de nom	pas de symbole	$\frac{1}{9,81}$ kg
	Masse volumique	gramme par centimètre cube	g/cm^3	10^3 kg/m^3	tonne par mètre cube	t/m^3	10^3 kg/m^3	pas de nom	pas de symbole	$\frac{1}{9,81}$ kg/m^3
Unités de temps	Temps	seconde	s	1 s	seconde	s	1 s	seconde	s	1 s
Unités mécaniques	Vitesse linéaire	centimètre par seconde	cm/s	10^{-2} m/s	mètre par seconde	m/s	1 m/s	mètre par seconde	m/s	1 m/s
	Vitesse angulaire	radian par seconde	rad/s	1 rad/s	radian par seconde	rad/s	1 rad/s	radian par seconde	rad/s	1 rad/s
	Accélération linéaire	centimètre par seconde ou gal	cm/s^2	10^{-2} m/s^2	mètre par seconde carrée	m/s^2	1 m/s^2	mètre par seconde carrée	m/s^2	1 m/s^2
	Accélération angulaire	radian par seconde par seconde	rad/s^2	1 rad/s^2	radian par seconde par seconde	rad/s^2	1 rad/s^2	radian par seconde par seconde	rad/s^2	1 rad/s^2
	Fréquence	hertz	Hz	1 Hz	hertz	Hz	1 Hz	hertz	Hz	1 Hz
	Force	dyne	dyn	10^{-5} N	sthène	sn	10^3 N	kilogramme-force	kgf	9,81 N
	Moment	centimètre-dyne	cm $\wedge$ dyn	10^{-7} m$\wedge$ N	mètre-sthène	m $\wedge$ sn	10^3 m $\wedge$ N	mètre-kilogramme-force	m $\wedge$ kgf	9,81 m$\wedge$N
	Énergie - Travail - quantité de chaleur	erg	erg	10^{-7} J	kilojoule	k J	10^3 J	kilogrammètre	kgm	9,81 J
	Puissance	erg par seconde	erg/s	10^{-7} W	kilowatt	kW	10^3 W	kilogrammètre par seconde	kgm/s	9,81 W
	Contrainte et pression	barye	b	10^{-1} N/m^2	pièze	pz	10^3 N/m^2	kilogramme-force par mètre carré	kgf/m^2	9,81 N/m^2
	Viscosité dynamique	poise	Po	10^{-1} N.s/m^2	sthène-seconde par mètre carré	sn.s/m^2	10^3 N.s/m^2	kilogramme-force-seconde par mètre carré	kgf-s/m^2	9,81 N.s/m^2
	Viscosité cinématique	centimètre-carré par seconde (stokes)	St	10^{-4} m^2/s	mètre carré par seconde	m^2/s	1 m^2/s	mètre carré par seconde	m^2/s	1 m^2/s

CHAPITRE III

POIDS ET MASSE

1. POIDS D'UN CORPS

À la surface de la Terre le poids P d'un corps représente l'attraction terrestre exercée sur celui-ci.

Le poids est une **force :**

— son *point d'application* est le *centre de gravité* du corps,

— sa *direction* est la *verticale* du lieu où se trouve le corps,

— son *sens* est celui d'une force *dirigée vers le centre de la Terre,*

— son *intensité* dépend du point où se trouve le corps ; elle est *fonction de l'altitude et de la latitude* de ce point. Le poids d'un corps décroît à raison de 10^{-4} N par newton lorsque l'altitude du corps croît de 300 m. Il varie également avec la latitude : en passant d'un pôle à l'équateur, le poids d'un corps diminue de $5.\ 10^{-3}$ N par newton.

2. MASSE D'UN CORPS

La masse m d'un corps représente la quantité de matière qui le constitue. L'attraction terrestre s'exerçant sur cette masse m peut varier, m ne change pas pour autant. La masse est donc une *caractéristique du corps ;* il n'en est pas de même du poids puisqu'il dépend du lieu où se trouve le corps.

Par définition, en un lieu déterminé, le rapport des masses m et m' de deux corps quelconques est égal au rapport de leurs poids P et P' :

$$\frac{m}{m'} = \frac{P}{P'}$$

Ainsi, en un même point, si deux corps ont le même poids, cela implique que leurs masses sont égales.

Une masse est donc une grandeur mesurable. L'unité de masse est le *kilogramme* (symbole : kg) dans le système SI.

3. ATTRACTION TERRESTRE

L'égalité précédente peut aussi s'écrire de la façon suivante :

$$\frac{P}{m} = \frac{P'}{m'}$$

Nous voyons que le rapport du poids d'un corps et de sa masse m est une constante en un point déterminé de la Terre. Ce rapport a la même valeur pour tous les corps ; elle est appelée *attraction terrestre,* et elle est représentée par le symbole g. En un point, la valeur de $\frac{P}{m} = g$ est numériquement égale au poids d'une masse de 1 kg. L'attraction terrestre varie avec l'altitude et avec la latitude du lieu. Le tableau suivant indique les valeurs de g en divers points à la surface de la Terre.

LATITUDE	g m/s²	LATITUDE	g m/s²	LATITUDE	g m/s²
0°	9,780	25°	9,790	45°	9,806
de 1° à 6°	9,781	26°	9,790	46°	9,807
7°	9,781	27°	9,791	47°	9,808
8°	9,781	28°	9,792	48°	9,809
9°	9,782	29°	9,793	49°	9,810
10°	9,782	30°	9,793	50°	9,811
11°	9,782	31°	9,794	51°	9,812
12°	9,783	32°	9,795	52°	9,813
13°	9,783	33°	9,796	53°	9,813
14°	9,784	34°	9,797	54°	9,814
15°	9,784	35°	9,797	55°	9,815
16°	9,784	36°	9,798	56°	9,816
17°	9,785	37°	9,799	57°	9,817
18°	9,785	38°	9,800	58°	9,818
19°	9,786	39°	9,801	59°	9,819
20°	9,787	40°	9,802	60°	9,819
21°	9,787	41°	9,803	61°	9,820
22°	9,788	42°	9,804	62°	9,821
23°	9,788	43°	9,804	63°	9,822
24°	9,789	44°	9,805	64°	9,822

Table donnant la valeur de g au niveau de la mer (Extraite des tables de W. D. LAMBERT et W. DARLING, parues dans le Bulletin géodésique n° 32 de 1931 ; ces tables donnent la valeur de g avec une erreur relative inférieure à 0,000 05).

4. APPLICATION : DÉTERMINATION DU POIDS D'UN CORPS

$$\frac{P}{m} = g \Rightarrow P = mg$$

Le poids d'un corps est donc numériquement égal au produit de deux grandeurs :

— la masse du corps, quantité indépendante du lieu où se trouve le corps,

— l'attraction terrestre variable avec le lieu.

La détermination du poids P d'un corps nécessite donc la connaissance de sa masse m et de l'attraction terrestre g au point où il est placé.

Pratiquement, pour des calculs approximatifs, la valeur de g peut être considérée comme étant égale à 9,8 m/s² et même 10 m/s². Pour des calculs précis, la valeur de g est déduite du tableau précédent ; il faut prendre la valeur cor-

respondant à la latitude du lieu et diminuer cette valeur d'une unité de la dernière décimale par 300 m d'altitude.

Ex.: À Clermont-Ferrand (latitude: 46°, altitude 358 m), la valeur de l'accélération terrestre est égale à:

$$g = 9{,}807 - 0{,}001 = 9{,}806 \text{ m/s}^2.$$

Un poids peut être mesuré au moyen d'un dynamomètre.

5. DÉTERMINATION DE LA MASSE D'UN CORPS

Nous avons vu que pour déterminer le poids d'un corps, il est nécessaire de connaître sa masse. Celle-ci peut être mesurée au moyen d'une balance, c'est-à-dire en effectuant une *pesée*. Le plus souvent, cela revient à comparer la masse du corps et celle d'étalons secondaires appelés *masses marquées*.

La masse m d'un corps peut également être calculée si son volume V et sa masse volumique ρ (masse de l'unité de volume) sont connues.

$$m = \rho V$$

Les masses volumiques des divers corps étant connues (V. tabl. Masses volumiques), ce calcul fournit souvent très rapidement le résultat désiré.

Remarque: La *densité* (anciennement *densité relative*) est le rapport de la masse volumique du corps et de celle d'un autre corps pris pour référence: en général, l'*eau* pour les solides et les liquides et l'*air* pour les gaz. La densité d'un corps par rapport à l'eau s'exprime par le même nombre que sa masse volumique lorsque l'unité adoptée pour cette dernière est le kilogramme par décimètre cube. (Masse volumique de l'eau à 4 °C: 1 000 kg/m³; masse volumique de l'air à 0 °C: 1,293 kg/m³).

Masses volumiques des liquides
en kilogrammes par mètre cube

Acide acétique	1 060
Acide azotique	1 420
Acide azotique fumant	1 520
Acide chlorhydrique	1 210
Acide sulfurique monohydraté	1 840
Alcool absolu	795
Benzine	890
Brome	3 180
Eau de mer	1 026
Esprit-de-bois	798
Essence de térébenthine	860
Éther	730
Glycérine	1 264
Huile d'olive	915
Lait	1 030
Mercure	13 600
Sulfure de carbone	1 260
Vin	990

Masses volumiques des solides
en kilogrammes par mètre cube

Métaux

Aluminium	2 750
Argent	10 530
Cuivre	8 920
Étain	7 290
Fer	7 860
Nickel	8 700
Or	19 320
Platine	21 500
Plomb	11 370
Zinc	7 142

Alliages

Acier	7 800
Bronze	8 400 à 9 200
Bronze d'aluminium	7 700
Ferro-nickel	8 400
Fonte blanche	7 400 à 7 800
Fonte grise	6 700 à 7 100
Laiton	8 300 à 8 400
Maillechort	8 300 à 8 600

Substances diverses

Albâtres et marbres	2 700
Amidon, fécule	1 500
Anthracite	1 400
Ardoise	2 900
Asphalte	1 060
Calcaires compacts	2 700
Caoutchouc, gutta-percha	980
Céruse	6 970
Charbon de bois en poudre	1 500
Charbon de chêne (morc.)	420
Charbon de cornue	1 880
Charbon de peuplier	240
Chaux	3 150
Chlorure de potassium	1 980
Chlorure de sodium	2 100
Cire	960
Corps humain (moyenne)	1 070
Cristal	3 330
Diamant	3 500
Glace à 0 °C	918
Gomme	1 300
Graisse, beurre	940
Granit-Porphyre	2 600 à 2 800
Grès	2 550 à 2 600
Gypse en poudre	2 270
Houille	1 300
Kaolin	2 260
Litharge	9 250
Minium	9 070
Naphte liquide	700 à 840
Oxyde de zinc	5 600
Porcelaine	2 500
Quartz	2 650
Sel ammoniac	1 520
Soufre	2 000
Verre (moyenne)	2 500

Bois

Acacia	780 à 820
Acajou	560 à 850
Aune	460 à 550
Bouleau	520 à 730
Buis de France	910
Buis de Hollande	1 320
Cèdre du Liban sec	490
Charme	759 à 900
Châtaignier	550 à 740
Chêne blanc	610
Chêne de démolition	730
Chêne vert	983
Cœur de chêne (60 ans)	1 170
Cormier	819
Ébène	1 120 à 1 200
Érable	560 à 840
Frêne	840
Gaïac	1 339
Hêtre	800
Hêtre (un an de coupe)	660
Liège	240
Mélèze	540 à 600
Orme	540 à 630
Peuplier	390
Pin rouge	660
Pin du Nord	740
Platane	650
Poirier	700 à 840
Pommier	730 à 800
Sapin	450
Teck	860

Masses volumiques des matériaux de construction
en kilogrammes par mètre cube

Matériaux d'origine minérale

Argile et glaise	1 656 à 1 756
Béton de cailloux	2 485
Béton de meulière	2 700
Brique de Bourgogne	1 550
Brique de Sarcelles	1 460
Cailloux	2 600
Chaux éteinte en pâte ferme	1 328 à 1 428

Chaux vive sortant du four	800 à 857
Ciment de terre cuite	1 171 à 1 228
Craie	1 214 à 1 285
Granit	2 630 à 2 750
Gravier caillouté	1 371 à 1 485
Grès dur	2 600 (moy)
Maçonn. fraîche en briques	2 170 à 2 370
Maçonn. fraîche en cailloux	2 300 à 2 400
Maçonn. fraîche en moellons	2 240
Maçonn. fraîche, pierre de taille	2 400 à 2 700
Marbre blanc	2 726 à 2 750
Marbre noir	2 823
Marne	1 570 à 1 640
Mortier de chaux et de sable	1 856 à 2 142
Mortier de ciment	1 656 à 1 713
Mortier de mâchefer	1 128 à 1 215
Pierre à plâtre crue	2 200 à 2 650
Pierre de liais	2 250 à 2 450
Pierre meulière	2 483
Pierre ponce	914
Plâtre cuit battu	1 199 à 1 228
Plâtre gâché humide	1 571 à 1 599
Plâtre gâché sec	1 399 à 1 414
Plâtre tamisé	1 242 à 1 257
Sable de rivière humide	1 771 à 1 856
Sable fin et sec	1 399 à 1 428
Sable fossile et argileux	1 713 à 1 799
Sable humide	1 900
Terre forte graveleuse	1 357 à 1 428
Terre végétale	1 214 à 1 285

	Le carreau humide	sec
Carreaux de plâtras et carreaux de plâtre de 0,50 m sur 0,33 m et de		
0,04 m d'épaisseur	16	15
0,08 m d'épaisseur	18	17
0,09 m d'épaisseur	21	20
0,11 m d'épaisseur	23	22
	Le mille	
Ardoises carrées cartelettes	220 à 230	
Ardoises carrées fines	360 à 380	
Ardoises carrées fortes	450 à 470	
Matériaux en terre cuite	Le mille	
Briques de Bourgogne 226 × 108 × 54	2 410 à 2 480	
Briques de Montereau 217 × 108 × 50	2 080	
Briques de Sarcelles 021 × 88 × 47	1 800 à 1 840	
Carreaux de 0,162 à six pans, de Bourgogne	840	
Carreaux de 0,162 à six pans, de Sarcelles	740	
Tuiles de Bourgogne grand moule 298 × 244 × 14	2 230 à 2 250	
Tuiles de Bourgogne petit moule 44 × 162 × 14	1 500 à 1 620	
Tuiles de Sarcelles 257 × 162 × 18	1 120 à 1 160	

CHAPITRE IV

DÉCIBEL ET NÉPER

1. LE DÉCIBEL

En acoustique, en téléphonie, en radioélectricité et dans bien d'autres domaines, il est souvent nécessaire de comparer entre elles des puissances ; le plus souvent il faut comparer une puissance P à une autre puissance P_0 prise comme référence et faire leur rapport $\frac{P}{P_0}$. Ainsi, en téléphonie, le rapport de la puissance reçue à l'extrémité d'une ligne et de la puissance appliquée à l'entrée de cette ligne est intéressant car il permet d'avoir une idée de l'**atténuation** de la ligne ; le rapport de la puissance de sortie d'un amplificateur et de la puissance fournie à l'entrée permet de connaître l'**amplification** fournie par l'appareil.

L'étude physiologique des sensations perçues montre que celles-ci varient approximativement selon une loi linéaire en fonction du logarithme des rapports des grandeurs provoquant l'excitation. Ainsi, un son de puissance $2P_0$, $3P_0$, $4P_0$,... ne produit pas une impression 2, 3, 4, ... fois plus forte qu'un son de puissance P_0, mais une impression qui croît de moins en moins rapidement comme les logarithmes décimaux de 2, 3, 4... Un son paraît deux fois plus intense qu'un autre s'il correspond à une puissance acoustique cent fois plus grande (lg 100 = 2). C'est cette loi physiologique dite *loi de Fechner* qui a conduit à exprimer les rapports par leur logarithme (V. t. 2, Électroacoustique).

Si le logarithme décimal du rapport est égal à n, on dit que le rapport des puissances est égal à n bels, soit :

$$\log_{10} \frac{P_1}{P_0} = n \text{ bels.}$$

Le bel est quelquefois appelé *unité logarithmique ;* en fait, par définition, une unité est une grandeur prise comme référence, et ici, c'est par extension de cette notion que le qualificatif d'unité est appliqué au bel (de même l'octave indique en musique un rapport de fréquences égal à 2, mais ne peut pas être appelée unité).

Le bel représente un rapport important égal à 10 (en effet, $\log_{10} 10 = 1$), et c'est un sous-multiple, le *décibel*, qui est couramment employé. Le décibel vaut un dixième de bel ; en acoustique, il représente le rapport entre deux puissances approximativement décelable à l'oreille.

Nous avons la relation suivante :

$$10 \log_{10} \frac{P_1}{P_0} = n' \text{ décibels (symbole : dB)}$$

En électricité, une résistance R placée sous une tension U et traversée par un courant d'intensité I absorbe une puissance P égale à :

$$P = UI = \frac{U^2}{R} = RI^2$$

Le rapport de deux puissances P_1 et P_0 (puissance de référence) correspondant à deux régimes de fonctionnement différents s'écrit :

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{\frac{U_1^2}{R_1}}{\frac{U_0^2}{R_0}} = \left(\frac{U_1}{U_0}\right)^2 \times \frac{R_0}{R_1}$$

D'où, en tenant compte des propriétés des logarithmes :

$$n' = 10 \log_{10} \frac{P_1}{P_0} = 10 \log_{10} \left(\frac{U_1}{U_0}\right)^2 + 10 \log_{10} \left(\frac{R_0}{R_1}\right)$$

$$= 20 \log_{10} \left(\frac{U_1}{U_0}\right) + 10 \log_{10} \left(\frac{R_0}{R_1}\right)$$

Si $R_1 = R_0$, nous obtenons la formule simplifiée suivante :

$$n' = 20 \log_{10} \frac{U_1}{U_0}$$

(elle est souvent donnée par erreur comme définition). Si c'est l'intensité et non la tension qui est connue, nous pouvons écrire :

$$n' = 10 \log_{10} \frac{P_1}{P_0} = 20 \log_{10} \left(\frac{I_1}{I_0}\right) + 10 \log_{10} \frac{R_1}{R_0}$$

De même si $R_1 = R_0$:

$$n' = 10 \log_{10} \frac{I_1^2}{I_0^2} = 20 \log_{10} \frac{I_1}{I_0}$$

Ces résultats expliquent pourquoi l'appellation décibel est appliquée par extension au nombre n' lorsqu'il s'agit d'un rapport de deux carrés de d.d.p., de deux carrés d'intensités de courants électriques, de deux carrés d'impédances (ou de résistances).

Exemples d'application

1° Si un amplificateur alimente une résistance constante sous une tension de 5 V à la fréquence de 10 kHz et de 1 V à 100 kHz, nous dirons que son amplification en tension subit un affaiblissement de n' décibels lorsque la fréquence croît de 10 à 100 kHz :

$$n' = 10 \lg \left(\frac{5}{1}\right)^2 = 20 \lg 5 = 20 \times 0{,}7 = 14 \text{ dB}$$

2° Considérons un amplificateur dont l'entrée peut être assimilée à une résistance R_1 de 500 $k\Omega$ alimentée sous une tension de 1 V (fréquence f) et dont la sortie est reliée à un haut-parleur. Dans les conditions de fonctionnement choisies, celui-ci se comporte comme une résistance de 10 Ω placée sous une tension de 3 V (fréquence f). Le gain en puissance est égal à :

$$n' = 20 \lg \frac{3}{1} + 10 \lg \frac{500\,000}{10} = (20 \times 0{,}5) + (10 \times 4{,}7)$$
$$= 10 + 47 = 57 \text{ dB}$$

Remarque :

$$n \text{ (décibels)} = 10 \lg \frac{P_1}{P_0}$$

Si la puissance P_1 est supérieure à P_0, $\lg \frac{P_1}{P_0}$ est positif ; si P_1 est inférieur à P_0, le logarithme du rapport est négatif. Dans le premier cas, il y a *amplification en puissance* et dans le second, *atténuation*. Il est donc important d'indiquer le **signe** devant un résultat exprimé en décibels.

2. TABLES NUMÉRIQUES DES DÉCIBELS

2.1. Tableau I. — Ce tableau permet de déduire la valeur du rapport de deux puissances et celle du rapport de deux tensions aux bornes d'une résistance déterminée (ou de deux résistances égales) lorsque nous connaissons la valeur n' de ce rapport en décibels.

Exemples : $n' = +$ 6,4 dB ; le rapport des puissances est égal à 4,365 et celui des tensions (pour une charge constante) à 2,089.

$n' = -$ 6,4 dB ; le rapport des puissances est égal à 0,2291 et celui des tensions (pour une charge constante) à 0,4786.

Tableau I

← décibels + →					← décibels + →				
Rapport de tensions	Rapport de puissances	n'	Rapport de tensions	Rapport de puissances	Rapport de tensions	Rapport de puissances	n'	Rapport de tensions	Rapport de puissances
1,0000	**1,0000**	**0**	**1,000**	**1,000**	**0,6310**	**0,3981**	**4,0**	**1,585**	**2,512**
0,9886	0,9772	0,1	1,012	1,023	0,6237	0,3890	4,1	1,603	2,570
0,9772	0,9550	0,2	1,023	1,047	0,6166	0,3802	4,2	1,622	2,630
0,9661	0,9333	0,3	1,035	1,072	0,6095	0,3715	4,3	1,641	2,692
0,9550	0,9120	0,4	1,047	1,096	0,6026	0,3631	4,4	1,660	2,754
0,9441	0,8913	0,5	1,059	1,122	0,5957	0,3548	4,5	1,679	2,818
0,9333	0,8710	0,6	1,072	1,148	0,5888	0,3467	4,6	1,698	2,884
0,9226	0,8511	0,7	1,084	1,175	0,5821	0,3388	4,7	1,718	2,951
0,9120	0,8318	0,8	1,096	1,202	0,5754	0,3311	4,8	1,738	3,020
0,9016	0,8128	0,9	1,109	1,230	0,5689	0,3236	4,9	1,758	3,090
0,8913	**0,7943**	**1,0**	**1,122**	**1,259**	**0,5623**	**0,3162**	**5,0**	**1,778**	**3,162**
0,8810	0,7762	1,1	1,135	1,288	0,5559	0,3090	5,1	1,799	3,236
0,8710	0,7586	1,2	1,148	1,318	0,5495	0,3020	5,2	1,820	3,311
0,8610	0,7413	1,3	1,161	1,349	0,5433	0,2951	5,3	1,841	3,388
0,8511	0,7244	1,4	1,175	1,380	0,5370	0,2884	5,4	1,862	3,467
0,8414	0,7079	1,5	1,189	1,413	0,5309	0,2818	5,5	1,884	3,548
0,8318	0,6918	1,6	1,202	1,445	0,5248	0,2754	5,6	1,905	3,631
0,8222	0,6761	1,7	1,216	1,479	0,5188	0,2692	5,7	1,928	3,715
0,8128	0,6607	1,8	1,230	1,514	0,5129	0,2630	5,8	1,950	3,802
0,8035	0,6457	1,9	1,245	1,549	0,5070	0,2570	5,9	1,972	3,890
0,7943	**0,6310**	**2,0**	**1,259**	**1,585**	**0,5012**	**0,2512**	**6,0**	**1,995**	**3,981**
0,7852	0,6166	2,1	1,274	1,622	0,4955	0,2455	6,1	2,018	4,074
0,7762	0,6026	2,2	1,288	1,660	0,4898	0,2399	6,2	2,042	4,169
0,7674	0,5888	2,3	1,303	1,698	0,4842	0,2344	6,3	2,065	4,266
0,7586	0,5754	2,4	1,318	1,738	0,4786	0,2291	6,4	2,089	4,365
0,7499	0,5623	2,5	1,334	1,778	0,4732	0,2239	6,5	2,113	4,467
0,7413	0,5495	2,6	1,349	1,820	0,4677	0,2188	6,6	2,138	4,571
0,7328	0,5370	2,7	1,365	1,862	0,4624	0,2138	6,7	2,163	4,677
0,7244	0,5248	2,8	1,380	1,905	0,4571	0,2089	6,8	2,188	4,786
0,7161	0,5129	2,9	1,396	1,950	0,4519	0,2042	6,9	2,213	4,898
0,7079	**0,5012**	**3,0**	**1,413**	**1,995**	**0,4467**	**0,1995**	**7,0**	**2,239**	**5,012**
0,6998	0,4898	3,1	1,429	2,042	0,4416	0,1950	7,1	2,265	5,129
0,6918	0,4786	3,2	1,445	2,089	0,4365	0,1905	7,2	2,291	5,248
0,6839	0,4677	3,3	1,462	2,138	0,4315	0,1862	7,3	2,317	5,370
0,6761	0,4571	3,4	1,479	2,188	0,4266	0,1820	7,4	2,344	5,495
0,6683	0,4467	3,5	1,496	2,239	0,4217	0,1778	7,5	2,371	5,623
0,6607	0,4365	3,6	1,514	2,291	0,4169	0,1738	7,6	2,399	5,754
0,6531	0,4266	3,7	1,531	2,344	0,4121	0,1698	7,7	2,427	5,888
0,6457	0,4169	3,8	1,549	2,399	0,4074	0,1660	7,8	2,455	6,026
0,6383	0,4074	3,9	1,567	2,455	0,4027	0,1622	7,9	2,483	6,166

Tableau I (suite)

← décibels + →					← décibels + →				
Rapport de tensions	Rapport de puissances	n'	Rapport de tensions	Rapport de puissances	Rapport de tensions	Rapport de puissances	n'	Rapport de tensions	Rapport de puissances
0,3981	**0,1585**	**8,0**	**2,512**	**6,310**	**0,1995**	**0,03981**	**14,0**	**5,012**	**25,12**
0,3936	0,1549	8,1	2,541	6,457	0,1972	0,03890	14,1	5,070	25,70
0,3890	0,1514	8,2	2,570	6,607	0,1950	0,03802	14,2	5,129	26,30
0,3846	0,1479	8,3	2,600	6,761	0,1928	0,03715	14,3	5,188	26,92
0,3802	0,1445	8,4	2,630	6,918	0,1905	0,03631	14,4	5,248	27,54
0,3758	0,1413	8,5	2,661	7,079	0,1884	0,03548	14,5	5,309	28,18
0,3715	0,1380	8,6	2,692	7,244	0,1862	0,03467	14,6	5,370	28,84
0,3673	0,1349	8,7	2,723	7,413	0,1841	0,03388	14,7	5,433	29,51
0,3631	0,1318	8,8	2,754	7,586	0,1820	0,03311	14,8	5,495	30,20
0,3589	0,1288	8,9	2,786	7,762	0,1799	0,03236	14,9	5,559	30,90
0,3548	**0,1259**	**9,0**	**2,818**	**7,943**	**0,1778**	**0,03162**	**15,0**	**5,623**	**31,62**
0,3508	0,1230	9,1	2,851	8,128	0,1758	0,03090	15,1	5,689	32,36
0,3467	0,1202	9,2	2,884	8,318	0,1738	0,03020	15,2	5,754	33,11
0,3428	0,1175	9,3	2,917	8,511	0,1718	0,02951	15,3	5,821	33,88
0,3388	0,1148	9,4	2,951	8,710	0,1698	0,02884	15,4	5,888	34,67
0,3350	0,1122	9,5	2,985	8,913	0,1679	0,02818	15,5	5,957	35,48
0,3311	0,1096	9,6	3,020	9,120	0,1660	0,02754	15,6	6,026	36,31
0,3273	0,1072	9,7	3,055	9,333	0,1641	0,02692	15,7	6,095	37,15
0,3236	0,1047	9,8	3,090	9,550	0,1622	0,02630	15,8	6,166	38,02
0,3199	0,1028	9,9	3,126	9,772	0,1603	0,02570	15,9	6,237	38,90
0,3162	**0,1000**	**10,0**	**3,162**	**10,000**	**0,1585**	**0,02512**	**16,0**	**6,310**	**39,81**
0,3126	0,09772	10,1	3,199	10,23	0,1567	0,02455	16,1	6,383	40,74
0,3090	0,09550	10,2	3,236	10,47	0,1549	0,02399	16,2	6,457	41,69
0,3055	0,09333	10,3	3,273	10,72	0,1531	0,02344	16,3	6,531	42,66
0,3020	0,09120	10,4	3,311	10,96	0,1514	0,02291	16,4	6,607	43,65
0,2985	0,08913	10,5	3,350	11,22	0,1496	0,02239	16,5	6,683	44,67
0,2951	0,08710	10,6	3,388	11,48	0,1479	0,02188	16,6	6,761	45,71
0,2917	0,08511	10,7	3,428	11,75	0,1462	0,02138	16,7	6,839	46,77
0,2884	0,08318	10,8	3,467	12,02	0,1445	0,02089	16,8	6,918	47,86
0,2851	0,08128	10,9	3,508	12,30	0,1429	0,02042	16,9	6,998	48,98
0,2818	**0,07943**	**11,0**	**3,548**	**12,59**	**0,1413**	**0,01995**	**17,0**	**7,079**	**50,12**
0,2786	0,07762	11,1	3,589	12,88	0,1396	0,01950	17,1	7,161	51,29
0,2754	0,07586	11,2	3,631	13,18	0,1380	0,01905	17,2	7,244	52,48
0,2723	0,07413	11,3	3,673	13,49	0,1365	0,01862	17,3	7,328	53,70
0,2692	0,07244	11,4	3,715	13,80	0,1349	0,01820	17,4	7,413	54,95
0,2661	0,07079	11,5	3,758	14,13	0,1334	0,01778	17,5	7,499	56,23
0,2630	0,06918	11,6	3,802	14,45	0,1318	0,01738	17,6	7,586	57,54
0,2600	0,06761	11,7	3,846	14,79	0,1303	0,01698	17,7	7,674	58,88
0,2570	0,06607	11,8	3,890	15,14	0,1288	0,01660	17,8	7,762	60,26
0,2541	0,06457	11,9	3,936	15,49	0,1274	0,01622	17,9	7,852	61,66
0,2512	**0,06310**	**12,0**	**3,981**	**15,85**	**0,1259**	**0,01585**	**18,0**	**7,943**	**63,10**
0,2483	0,06166	12,1	4,027	16,22	0,1245	0,01549	18,1	8,035	64,57
0,2455	0,06026	12,2	4,074	16,60	0,1230	0,01514	18,2	8,128	66,07
0,2427	0,05888	12,3	4,121	16,98	0,1216	0,01479	18,3	8,222	67,61
0,2399	0,05754	12,4	4,169	17,38	0,1202	0,01445	18,4	8,318	69,18
0,2371	0,05623	12,5	4,217	17,78	0,1189	0,01413	18,5	8,414	70,79
0,2344	0,05495	12,6	4,266	18,20	0,1175	0,01380	18,6	8,511	72,44
0,2317	0,05370	12,7	4,315	18,62	0,1161	0,01349	18,7	8,610	74,13
0,2291	0,05248	12,8	4,365	19,05	0,1148	0,01318	18,8	8,710	75,86
0,2265	0,05129	12,9	4,416	19,50	0,1135	0,01288	18,9	8,811	77,62
0,2239	**0,05012**	**13,0**	**4,467**	**19,95**	**0,1122**	**0,01259**	**19,0**	**8,913**	**79,43**
0,2213	0,04898	13,1	4,519	20,42	0,1109	0,01230	19,1	9,016	81,28
0,2188	0,04786	13,2	4,571	20,89	0,1096	0,01202	19,2	9,120	83,18
0,2163	0,04677	13,3	4,624	21,38	0,1084	0,01175	19,3	9,226	85,11
0,2138	0,04571	13,4	4,677	21,88	0,1072	0,01148	19,4	9,333	87,10
0,2123	0,04467	13,5	4,732	22,39	0,1059	0,01122	19,5	9,441	89,13
0,2089	0,04365	13,6	4,786	22,91	0,1047	0,01096	19,6	9,550	91,20
0,2065	0,04266	13,7	4,842	23,44	0,1035	0,01072	19,7	9,661	93,33
0,2042	0,04169	13,8	4,898	23,99	0,1023	0,01047	19,8	9,772	95,50
0,2018	0,04074	13,9	4,955	24,55	0,1012	0,01023	19,9	9,886	97,72
					0,1000	**0,01000**	**20,0**	**10,000**	**100,00**

Tableau I (suite)

— décibels + ← →				
Rapport de tensions	Rapport de puissances	n'	Rapport de tensions	Rapport de puissances
$3{,}162 \times 10^{-1}$	**10^{-1}**	**10**	**3,162**	**10**
10^{-1}	10^{-2}	20	10	10^2
$3{,}162 \times 10^{-2}$	10^{-3}	30	$3{,}162 \times 10$	10^3
10^{-2}	10^{-4}	40	10^2	10^4
$3{,}162 \times 10^{-3}$	10^{-5}	50	$3{,}162 \times 10^2$	10^5
10^{-3}	10^{-6}	60	10^3	10^6
$3{,}162 \times 10^{-4}$	10^{-7}	70	$3{,}162 \times 10^3$	10^7
10^{-4}	10^{-8}	80	10^4	10^8
$3{,}162 \times 10^{-5}$	10^{-9}	90	$3{,}162 \times 10^4$	10^9
10^{-5}	**10^{-10}**	**100**	**10^5**	**10^{10}**

Remarque: Cas où le nombre de décibels n'est pas dans la table.

1° Si le nombre de décibels est *positif*, soustraire autant de fois 20 dB qu'il sera nécessaire pour obtenir un nombre du tableau I, puis multiplier le rapport trouvé par 10 autant de fois que l'on a enlevé 20 dB s'il s'agit d'un rapport de tensions, ou multiplier le résultat trouvé par 100 autant de fois que l'on a enlevé 20 dB s'il s'agit d'un rapport de puissances.

Exemple :

$$n' = + 46{,}7 \text{ décibels}$$

Nous pouvons écrire :

$$+ 46{,}7 = + 20 + 20 + 6{,}7$$

À 6,7 dB correspond un rapport de tensions égal à 2,163. Il faut donc multiplier ce résultat deux fois par 10 : + 46,7 dB correspondent à un rapport de tensions égal à :

$$2{,}163 \times 10 \times 10 = 216{,}3$$

S'il s'agit d'un rapport de puissances nous trouvons pour + 6,7 dB le nombre 4,677, donc 46,7 dB correspondent à un rapport de puissances égal à :

$$46{,}7 \times 100 \times 100 = 467\,000$$

2° Si le nombre de décibels est *négatif* ajouter autant de fois 20 qu'il sera nécessaire pour obtenir un nombre du tableau I, puis multiplier le rapport trouvé par $\frac{1}{10}$ autant de fois que l'on a ajouté 20 dB, s'il s'agit d'un rapport de tensions, ou multiplier le résultat trouvé par $\frac{1}{100}$ autant de fois que l'on a ajouté 20 dB s'il s'agit d'un rapport de puissances.

Exemple :

$$n' = - 46{,}7 \text{ décibels}$$

Nous pouvons écrire :

$$- 46{,}7 = - 20 - 20 - 6{,}7$$

À — 6,7 dB correspond un rapport de tensions égal à 0,4624. Il faut donc multiplier ce résultat 2 fois par $\frac{1}{10}$; — 46,7 dB correspondent à un rapport de tensions de

$$0{,}4624 \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = 0{,}004624$$

S'il s'agit d'un rapport de puissances, nous trouvons pour — 6,7 dB le nombre 0,2138, donc — 46,7 dB correspondent à un rapport de puissances égal à :

$$0{,}2138 \times \frac{1}{100} \times \frac{1}{100} = 0{,}000\,021\,38$$

2.2. Tableau II. — Ce tableau permet de connaître le nombre n' de décibels correspondant au rapport de deux tensions mesurées aux bornes d'une même résistance.

Dans le cas où le rapport donné correspond à un rapport de puissances il faut considérer le cas du rapport de tensions de même valeur numérique et diviser le nombre de décibels trouvé par 2. Ainsi, à un rapport de tensions égal à 4,32 correspond un nombre n' égal à 12,710 décibels ; mais si le nombre 4,32 correspond à un rapport de puissances, nous trouvons que cela correspond à : $\frac{12{,}710}{2} = 6{,}355$ décibels.

Tableau II

Rapport de tensions	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,0	**0,000**	**0,086**	**0,172**	**0,257**	**0,341**	**0,424**	**0,506**	**0,588**	**0,668**	**0,749**
1,1	0,828	0,906	0,984	1,062	1,138	1,214	1,289	1,364	1,438	1,511
1,2	1,584	1,656	1,727	1,798	1,868	1,938	2,007	2,076	2,144	2,212
1,3	2,279	2,345	2,411	2,477	2,542	2,607	2,671	2,734	2,798	2,860
1,4	2,923	2,984	3,046	3,107	3,167	3,227	3,287	3,346	3,405	3,464
1,5	3,522	3,580	3,637	3,694	3,750	3,807	3,862	3,918	3,973	4,028
1,6	4,082	4,137	4,190	4,244	4,297	4,350	4,402	4,454	4,506	4,558
1,7	4,609	4,660	4,711	4,761	4,811	4,861	4,910	4,959	5,008	5,057
1,8	5,105	5,154	5,201	5,249	5,296	5,343	5,390	5,437	5,483	5,529
1,9	5,575	5,621	5,666	5,711	5,756	5,801	5,845	5,889	5,933	5,977
2,0	**6,021**	**6,064**	**6,107**	**6,150**	**6,193**	**6,235**	**6,277**	**6,319**	**6,361**	**6,403**
2,1	6,444	6,486	6,527	6,568	6,608	6,649	6,689	6,729	6,769	6,809
2,2	6,848	6,888	6,927	6,966	7,008	7,044	7,082	7,121	7,159	7,197
2,3	7,235	7,272	7,310	7,347	7,384	7,421	7,458	7,495	7,532	7,568
2,4	7,604	7,640	7,676	7,712	7,748	7,783	7,819	7,854	7,889	7,924
2,5	7,959	7,993	8,028	8,062	8,097	8,131	8,165	8,199	8,232	8,266
2,6	8,299	8,333	8,366	8,399	8,432	8,465	8,498	8,530	8,563	8,595
2,7	8,627	8,659	8,691	8,723	8,755	8,787	8,818	8,850	8,881	8,912
2,8	8,943	8,974	9,005	9,036	9,006	9,097	9,127	9,158	9,188	9,218
2,9	9,248	9,278	9,308	9,337	9,367	9,396	9,426	9,455	9,484	9,513
3,0	**9,542**	**9,571**	**9,600**	**9,629**	**9,657**	**9,686**	**9,714**	**9,743**	**9,771**	**9,799**
3,1	9,827	9,855	9,883	9,911	9,939	9,966	9,994	10,021	10,049	10,076
3,2	10,103	10,130	10,157	10,184	10,211	10,238	10,264	10,291	10,317	10,344
3,3	10,370	10,397	10,423	10,449	10,475	10,501	10,527	10,553	10,578	10,604
3,4	10,630	10,655	10,681	10,706	10,731	10,756	10,782	10,807	10,832	10,857
3,5	10,881	10,906	10,931	10,955	10,980	11,005	11,029	11,053	11,078	11,102

Tableau II (suite)

Rapport de tensions	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
3,6	11,126	11,150	11,174	11,198	11,222	11,246	11,270	11,293	11,317	11,341
3,7	11,364	11,387	11,411	11,434	11,457	11,481	11,504	11,527	11,550	11,573
3,8	11,596	11,618	11,641	11,664	11,687	11,709	11,732	11,754	11,777	11,799
3,9	11,821	11,844	11,866	11,888	11,910	11,932	11,954	11,976	11,998	12,019
4,0	**12,041**	**12,063**	**12,085**	**12,106**	**12,128**	**12,149**	**12,171**	**12,192**	**12,213**	**12,234**
4,1	12,256	12,277	12,298	12,319	12,340	12,361	12,382	12,403	12,424	12,444
4,2	12,465	12,486	12,506	12,527	12,547	12,568	12,588	12,609	12,629	12,649
4,3	12,669	12,690	12,710	12,730	12,750	12,770	12,790	12,810	12,829	12,849
4,4	12,869	12,889	12,908	12,928	12,948	12,967	12,987	13,006	13,026	13,045
4,5	13,064	13,084	13,103	13,122	13,141	13,160	13,179	13,198	13,217	13,236
4,6	13,255	13,274	13,293	13,312	13,330	13,349	13,368	13,386	13,405	13,423
4,7	13,442	13,460	13,479	13,497	13,516	13,534	13,552	13,570	13,589	13,607
4,8	13,625	13,643	13,661	13,679	13,697	13,715	13,733	13,751	13,768	13,786
4,9	13,804	13,822	13,839	13,857	13,875	13,892	13,910	13,927	13,945	13,962
5,0	**13,979**	**13,997**	**14,014**	**14,031**	**14,049**	**14,066**	**14,083**	**14,100**	**14,117**	**14,134**
5,1	14,151	14,168	14,185	14,202	14,219	14,236	14,253	14,270	14,287	14,303
5,2	14,320	14,337	14,353	14,370	14,387	14,403	14,420	14,436	14,453	14,469
5,3	14,486	14,502	14,518	14,535	14,551	14,567	14,583	14,599	14,616	14,632
5,4	14,648	14,664	14,680	14,696	14,712	14,728	14,744	14,760	14,776	14,791
5,5	14,807	14,823	14,839	14,855	14,870	14,886	14,902	14,917	14,933	14,948
5,6	14,964	14,979	14,995	15,010	15,026	15,041	15,056	15,072	15,087	15,102
5,7	15,117	15,133	15,148	15,163	15,178	15,193	15,208	15,224	15,239	15,254
5,8	15,269	15,284	15,298	15,313	15,328	15,343	15,358	15,373	15,388	15,402
5,9	15,417	15,432	15,446	15,461	15,476	15,490	15,505	15,519	15,534	15,549
6,0	**15,563**	**15,577**	**15,592**	**15,606**	**15,621**	**15,635**	**15,649**	**15,664**	**15,678**	**15,692**
6,1	15,707	15,721	15,735	15,749	15,763	15,778	15,792	15,806	15,820	15,834
6,2	15,848	15,862	15,876	15,890	15,904	15,918	15,931	15,945	15,959	15,973
6,3	15,987	16,001	16,014	16,028	16,042	16,055	16,069	16,083	16,096	16,110
6,4	16,124	16,137	16,151	16,164	16,178	16,191	16,205	16,218	16,232	16,245
6,5	16,258	16,272	16,285	16,298	16,312	16,325	16,338	16,351	16,365	16,378
6,6	16,391	16,404	16,417	16,430	16,443	16,456	16,469	16,483	16,496	16,509
6,7	16,521	16,534	16,547	16,560	16,573	16,586	16,599	16,612	16,625	16,637
6,8	16,650	16,663	16,676	16,688	16,701	16,714	16,726	16,739	16,752	16,764
6,9	16,777	16,790	16,802	16,815	16,827	16,840	16,852	16,865	16,877	16,890
7,0	**16,902**	**16,914**	**16,927**	**16,939**	**16,951**	**16,964**	**16,976**	**16,988**	**17,001**	**17,013**
7,1	17,025	17,037	17,050	17,062	17,074	17,086	17,098	17,110	17,122	17,135
7,2	17,147	17,159	17,171	17,183	17,195	17,207	17,219	17,231	17,243	17,255
7,3	17,266	17,278	17,290	17,302	17,314	17,326	17,338	17,349	17,361	17,373
7,4	17,385	17,396	17,408	17,420	17,431	17,443	17,455	17,466	17,478	17,490
7,5	17,501	17,513	17,524	17,536	17,547	17,559	17,570	17,582	17,593	17,605
7,6	17,616	17,628	17,639	17,650	17,662	17,673	17,685	17,696	17,707	17,719
7,7	17,730	17,741	17,752	17,764	17,775	17,786	17,797	17,808	17,820	17,831
7,8	17,842	17,853	17,864	17,875	17,886	17,897	17,908	17,919	17,931	17,942
7,9	17,953	17,964	17,975	17,985	17,996	18,007	18,018	18,029	18,040	18,051
8,0	**18,062**	**18,073**	**18,083**	**18,094**	**18,105**	**18,116**	**18,127**	**18,137**	**18,148**	**18,159**
8,1	18,170	18,180	18,191	18,202	18,212	18,223	18,234	18,244	18,255	18,266
8,2	18,276	18,287	18,297	18,308	18,319	18,329	18,340	18,350	18,361	18,371
8,3	18,382	18,392	18,402	18,413	18,423	18,434	18,444	18,455	18,465	18,475
8,4	18,486	18,496	18,506	18,517	18,527	18,537	18,547	18,558	18,568	18,578
8,5	18,588	18,599	18,609	18,619	18,629	18,639	18,649	18,660	18,670	18,680
8,6	18,690	18,700	18,710	18,720	18,730	18,740	18,750	18,760	18,770	18,780
8,7	18,790	18,800	18,810	18,820	18,830	18,840	18,850	18,860	18,870	18,880
8,8	18,890	18,900	18,909	18,919	18,929	18,939	18,949	18,958	18,968	18,978
8,9	18,988	18,998	19,007	19,017	19,027	19,036	19,046	19,056	19,066	19,075
9,0	**19,085**	**19,094**	**19,104**	**19,114**	**19,123**	**19,133**	**19,143**	**19,152**	**19,162**	**19,171**
9,1	19,181	19,190	19,200	19,209	19,219	19,228	19,238	19,247	19,257	19,226
9,2	19,276	19,285	19,295	19,304	19,313	19,323	19,332	19,342	19,351	19,360
9,3	19,370	19,379	19,388	19,398	19,407	19,416	19,426	19,435	19,444	19,453
9,4	19,463	19,472	19,481	19,490	19,499	19,509	19,518	19,527	19,536	19,545
9,5	19,554	19,564	19,573	19,582	19,591	19,600	19,609	19,618	19,627	19,636
9,6	19,645	19,654	19,664	19,673	19,682	19,691	19,700	19,709	19,718	19,726
9,7	19,735	19,744	19,753	19,762	19,771	19,780	19,789	19,798	19,807	19,816
9,8	19,825	19,833	19,842	19,851	19,860	19,869	19,878	19,886	19,895	19,904
9,9	19,913	19,921	19,930	19,939	19,948	19,956	19,965	19,974	19,983	19,991

Tableau II (suite)

Rapport de tensions	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	**20,000**	**20,828**	**21,584**	**22,279**	**22,923**	**23,522**	**24,082**	**24,609**	**25,105**	**25,575**
20	26,021	26,444	26,848	27,235	27,604	27,959	28,299	28,627	28,943	29,248
30	29,542	29,827	30,103	30,370	30,630	30,881	31,126	31,364	31,596	31,821
40	32,041	32,256	23,465	32,669	32,869	33,064	33,255	33,442	33,625	33,804
50	33,979	34,151	34,320	34,486	34,648	34,807	34,964	35,117	35,269	35,417
60	35,563	35,707	35,848	35,987	36,124	36,258	36,391	36,521	36650	36,777
70	36,902	37,025	37,147	37,266	37,385	37,501	37,616	37,730	37,842	37,953
80	38,062	38,170	38,276	38,382	38,486	38,588	38,690	38,790	38,890	38,988
90	39,085	39,181	39,276	39,370	39,463	39,554	39,645	39,735	39,825	39,913
100	**40,000**	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Remarque : Cas où le rapport de tensions n'est pas dans le tableau.

Si le rapport donné est plus petit que ceux du tableau, on multiplie par 10 autant de fois qu'il sera nécessaire pour obtenir un nombre du tableau, puis au nombre de décibels trouvé en enlève autant de fois 20 dB que l'on a multiplié par 10.

Exemple : Si le rapport de tensions est égal à 0,0118, il faut multiplier deux fois par 10 pour trouver 1,18 qui correspond d'après le tableau à 1,438 dB, donc le nombre de décibels correspondant au rapport de tensions 0,0118 sera :

$$+ 1{,}438 - 20 - 20 = - 38{,}562 \text{ dB}$$

Si le rapport donné est plus grand que ceux du tableau, on divise par 10 autant de fois qu'il sera nécessaire pour obtenir un nombre du tableau, puis au nombre de décibels trouvé on ajoutera autant de fois 20 dB que l'on a divisé par 10.

Exemple : Si le rapport de 2 tensions est égal à 637, il faut diviser deux fois par 10 pour trouver 6,37 qui correspond d'après le tableau à 16,083 dB ; donc le nombre de décibels correspondant au rapport de tensions 637 sera

$$16{,}083 + 20 + 20 = + 56{,}083 \text{ dB}.$$

3. LE NÉPER

Si les radioélectriciens et les électroniciens utilisent couramment le décibel, les téléphonistes préfèrent parler en *népers* et travaillant presque toujours sur des charges identiques, le nombre de népers a été défini comme étant égal au logarithme népérien du rapport des tensions, soit :

$$n \text{ népers} = \log_e \frac{U_1}{U_0} = 2{,}3 \log_{10} \frac{U_1}{U_0}$$

(car le logarithme népérien s'obtient en multipliant le logarithme décimal par 2,3) ; il en résulte que :

1 néper = 8,69 décibels
1 décibel = 0,115 néper

La formule générale devient :

$$n \text{ népers} = \frac{1}{2} \log_e \frac{P_1}{P_0} = \frac{1}{2} \log_e \left(\frac{U_1}{U_0}\right)^2 + \frac{1}{2} \log_e \left(\frac{R_0}{R_1}\right)$$

$$\text{soit : } n \text{ népers} = \log_e \left(\frac{U_1}{U_0}\right) + \frac{1}{2} \log_e \left(\frac{R_0}{R_1}\right)$$

Le néper (symbole Np ou N, s'il n'y a aucune possibilité d'erreur avec le newton, unité de force) correspond à 10 décinépers :

1 décinéper = 0,869 décibel (soit environ 1 décibel)
1 décibel = 1,15 décinéper.

Pour exprimer un rapport de puissances à l'aide du néper nous pouvons utiliser les tableaux précédents qui donnent le résultat en décibels et diviser par 8,69 le nombre de décibels trouvés.

CHAPITRE V
NORMALISATION

1. BUTS DE LA NORMALISATION

La normalisation définit, en fonction de catégories déterminées de besoins, des gammes correspondantes de produits ou des méthodes propres à les satisfaire, en éliminant les complications et les variétés superflues, afin de permettre une production et une utilisation rationnelles, sur la base des techniques valables du moment.

C'est une discipline qui conduit à la rationalisation des produits, mais aussi à la codification de certaines créations de l'esprit, telles que la numération, l'écriture, la symbolisation.

L'homme préhistorique, au fur et à mesure de sa civilisation, a moulé son activité dans des normes, aussi bien pour se vêtir que pour construire des huttes ou cultiver la terre. La vie en société et la nécessité des échanges entre les hommes ont déterminé de nouveaux besoins, générateurs d'une complexité croissante à laquelle il fallut faire face en créant des normes. Le langage et l'écriture sont deux normes fondamentales, parmi les plus anciennes, qui régissent les relations des hommes vivant en société.

Le XIXe siècle et surtout le XXe siècle ont vu le progrès technique subir une accélération vertigineuse. Il en résulta la mise en œuvre d'une méthodologie normalisatrice qui est essentiellement une conquête du XXe siècle. Élément indispensable du progrès technique, la normalisation est actuellement une discipline parfaitement élaborée. Elle cherche à réaliser, en tous domaines, un ordre qui mène à la simplification et à l'unification, et qui se traduit par une amélioration de la productivité, une économie de temps, de moyens et d'argent, une adaptation toujours plus parfaite à la fonction, une plus grande sécurité pour l'usager. Les grands principes de simplification et d'unification qui régissent tous les travaux de normalisation aboutissent à l'élimination des variétés superflues, à la réduction des stocks, à l'interchangeabilité des matériels ainsi qu'à l'amélioration des rapports entre producteurs, utilisateurs et services administratifs. À la base de toute normalisation, la terminologie joue un rôle de premier plan ; sa mise au point, dans chacun de ses domaines d'activité, permet une parfaite compréhension entre interlocuteurs qui doivent, avant tout, parler le même langage.

2. LA NORMALISATION FRANÇAISE

2.1. Historique - Organisation. — Bien avant que ne soit organisée la normalisation nationale, on notait, en France, un certain nombre d'activités normalisatrices, parmi lesquelles il faut citer l'élaboration du système métrique, défini par une loi de 1799 et la participation au congrès de

Zurich, en 1898, pour normaliser les filetages sur le plan international. Un décret du 10 juin 1918 instituait la *Commission permanente de standardisation*. Celle-ci, en butte à l'incompréhension, dut interrompre ses travaux après quelques années d'exercice.

Le statut actuel de la normalisation française résulte de longues recherches, au cours des années 1928 à 1941, en vue d'une organisation parfaitement adaptée aux impératifs de l'économie de notre pays. L'Association Française de Normalisation (AFNOR - Tour Europe, CEDEX 7, 92-Paris-La Défense) a été créée en 1926 avec le statut d'association privée, défini par la loi du 1er juillet 1901. Elle est déclarée d'utilité publique en 1943; la composition de son conseil d'administration fait l'objet d'un décret du 29 septembre 1967. Les attributions de l'AFNOR, définies par un décret de mai 1941, sont essentiellement les suivantes:

— Centraliser et coordonner, sous l'autorité et le contrôle du commissaire à la Normalisation, tous les travaux et études concernant la normalisation.

— Transmettre aux bureaux de normalisation les directives reçues et leur prêter son concours dans l'élaboration des projets de normes.

— En l'absence de bureau de normalisation qualifié, constituer des commissions techniques chargées d'établir des projets de normes.

— Coordonner l'ensemble des activités qui tendent au développement de la normalisation.

— Représenter la France auprès des organismes de normalisation étrangers et internationaux.

— Assurer, en matière de normalisation, la diffusion et l'information.

Le commissaire à la Normalisation remplit les fonctions de commissaire du Gouvernement auprès de l'AFNOR. Rattaché administrativement au ministère du Développement industriel et scientifique, il joue le rôle de délégué des deux ministres responsables des travaux de normalisation en France: le ministre du Développement industriel et scientifique et le ministre de l'Agriculture. Il a la charge, en particulier, de donner des directives générales aux organismes de normalisation, de faire exécuter le programme des travaux qu'il a établi, de définir le statut des normes et d'assurer, ou de faire assurer, sur le plan international, l'exécution des missions de normalisation.

Les bureaux de normalisation sont les *agents techniques d'élaboration des normes*. Leur statut juridique varie en fonction des organismes auxquels ils sont rattachés: syndicats, instituts, centres techniques, etc. Le rôle de quelques bureaux de normalisation s'est élargi à de nombreuses fonctions; c'est le cas de l'*Union technique de l'Électricité*.

Certains services ministériels ou organismes administratifs participent activement aux travaux de normalisation; c'est le cas des groupes permanents d'étude des Marchés Publics. Parmi les bureaux de normalisation, citons le *Comité de Normalisation de la Mécanique* (CNM), le *Bureau des Normes de l'Automobile* (BNA), le *Bureau de Normalisation de la Sidérurgie* (BNS), etc.

2.2. Les normes. — Nous pouvons définir une norme comme une *donnée de référence, résultant d'un choix collectif raisonné, destinée à servir de base d'entente pour la solution de problèmes répétitifs*.

Le statut des normes françaises a été défini par la Décision n° 9 du commissaire à la Normalisation, du 11 juillet 1966, relative à la nature des documents officiels de la normalisation française. Ces documents officiels peuvent être:

— *des normes françaises homologuées* par arrêté ministériel. Les marchés publics doivent obligatoirement y faire référence;

— *des normes françaises enregistrées* par décision du commissaire à la Normalisation. Les marchés publics n'y font pas nécessairement référence;

— *des feuilles ou des fascicules de documentation*, publiés sur décision du directeur général de l'AFNOR;

— *des normes expérimentales*, publiées sur décision du directeur général de l'AFNOR.

L'application de certaines normes homologuées est rendue obligatoire par un décret ou par un arrêté. C'est, par exemple, le cas des normes NF D 36-101, 102 et 103 relatives aux tuyaux à gaz.

Les documents de normalisation française sont présentés conformément à un modèle-type qui comprend essentiellement:

— en haut, à gauche, l'une des mentions: norme française homologuée, norme française enregistrée, etc.;

— en haut, à droite, l'indice alphanumérique et la date de référence;

— en haut, au centre, le titre de la norme;

— en bas à gauche, la date d'homologation ou celle de la décision d'enregistrement.

L'indice alphanumérique et la date de référence donnent les indications suivantes:

— le monogramme NF qui signifie: Normalisation Française,

— une lettre majuscule correspondant à l'indice de classe (voir ci-après),

— un ensemble de deux groupes de chiffres indiquant la sous-classe et le numéro d'ordre de la norme,

— le mois et l'année de publication.

Deux normes ayant le même indice mais des dates de référence différentes sont différentes; la dernière en date est seule valide.

Les normes françaises sont réparties en vingt et une classes qui sont les suivantes:

A - Métallurgie
B - Carrières - Céramique - Verre - Réfractaires - Bois - Liège
C - Électricité
D - Économie domestique - Hôtellerie - Ameublement - Aménagement
E - Mécanique
F - Chemins de fer
G - Textiles et cuirs
H - Emballages et transports
J - Constructions et Industries navales
K - Banque - Valeurs mobilières - Assurance
L - Aéronautique et Espace
M - Combustibles
P - Bâtiment et Génie civil
Q - Papiers et Cartons - Technologie graphique
R - Automobile - Motocycle - Cycle
S - Industries diverses (Optique, Photographie, Cinématographie, Acoustique, Éclairage, Jeux et Sports, Matériel de lutte contre l'incendie et de secours, Prévention, Protection et Sécurité, Matériel médico-chirurgical, Horlogerie)
T - Industries chimiques
U - Matières et objets utilisés en Agriculture
V - Produits de l'Agriculture, de la Pêche et des Industries alimentaires
X - Normes fondamentales - Normes générales
Z - Administration - Commerce - Documentation - Traitement de l'Information.

À titre indicatif, le lecteur trouvera ci-après la liste des normes fondamentales relatives aux unités et symboles (classe X, sous-classe X 02):

NF X 02 - 002 Mai 1966	Unités de mesure - Définitions (F. Doc.).
NF X 02 - 003 Septembre 1951	Principes de l'écriture des nombres, des unités et des grandeurs.
NF X 02 - 004 Juin 1966	Noms et symboles des unités de mesure (F. Doc.).
NF X 02 - 005 Octobre 1967	Principales dispositions concernant les principes d'écriture, les unités de mesure et les symboles de grandeurs (F. Doc.).
NF X 02 - 006 Juillet 1963	Unités de mesure - Choix d'unités usuelles (F. Doc.).
NF X 02 - 007 Novembre 1964	Unités de mesure - Aide-mémoire pour l'application du Système International d'unités (SI) (F. Doc.).
NF X 02 - 010 Avril 1963	Sous-multiples décimaux du degré (unité d'angle) (F. Doc.).
NF X 02 - 050 Janvier 1967	Principales unités de mesure américaines et britanniques (F. Doc.).
NF X 02 - 100 Décembre 1968	Avant-propos relatif à la normalisation des symboles.

NORME FRANÇAISE HOMOLOGUÉE

NORMES FONDAMENTALES

NOMBRES NORMAUX

NF X 01-001

Décembre 1967

REMARQUE IMPORTANTE

La présente norme est conforme aux Recommandations ISO/R3 : Nombres normaux - Séries de nombres normaux et ISO/R17 : Guide pour l'emploi des nombres normaux et des séries de nombres normaux.

SOMMAIRE

	Pages
HISTORIQUE DES NOMBRES NORMAUX	2
NOMBRES NORMAUX ET SÉRIES DE NOMBRES NORMAUX	3
Définition des nombres normaux	3
Terminologie	3
Séries de nombres normaux	3
Séries de base	3
Série exceptionnelle R 80	3
Tableau I — Séries de base des nombres normaux	4
Tableau II — Série exceptionnelle	5
Séries dérivées	5
Valeurs plus arrondies des nombres normaux	6
GUIDE POUR L'EMPLOI DES NOMBRES NORMAUX	6
PROGRESSIONS GÉOMÉTRIQUES ET NOMBRES NORMAUX	6
Séries numériques normalisées	6
Propriétés des progressions géométriques comprenant le nombre 1	6
Progressions géométriques comprenant le nombre 1 et dont la raison est une racine de 10	7
Progressions géométriques arrondies	7
DIRECTIVES POUR L'APPLICATION DES NOMBRES NORMAUX	8
Caractéristiques s'exprimant par des valeurs numériques	8
Échelonnement de valeurs numériques	8
Séries dérivées	8
Séries décalées	8
Valeur numérique isolée	8
Remarques sur l'échelonnement au moyen de nombres normaux	8
RECOMMANDATIONS POUR LES CALCULS AVEC LES NOMBRES NORMAUX	9
Numéros d'ordre	9
Produits et quotients	9
Puissances et racines	9
Logarithmes décimaux	10
EXEMPLES	10

Homologuée par arrêté du 23-11-67 J.O. du 30-11-67

La présente norme annule et remplace la norme de même indice, homologuée le 31 mars 1957

Principale modification : Disjonction du paragraphe relatif aux valeurs plus arrondies (voir **NF X 01-002** - décembre 1967).

ÉDITÉE PAR L'ASSOCIATION FRANÇAISE DE NORMALISATION (AFNOR), 23, rue Notre-Dame-des-Victoires, PARIS-2e. Tél. 236-95-80. Bureau de vente : 19, rue du 4-Septembre, PARIS-2e. Tél. 742-60-55.

28335. Hemmerlé, Petit et Cie. 3-68. **NF X 01-001** **2e TIRAGE** 3-68

Reproduction interdite.

Exemple de présentation de norme française homologuée (*AFNOR*)

NF X 02 - 101 Octobre 1961	Symboles algébriques.
NF X 02 - 102 Février 1955	Symboles géométriques et vectoriels.
NF X 02 - 103 Août 1962	Symboles de la mécanique rationnelle.
NF X 02 - 104 Janvier 1957	Symboles de la thermodynamique générale.
NF X 02 - 105 Août 1963	Symboles de la mécanique des fluides.
NF X 02 - 106 Janvier 1963	Symboles de la mécanique des matériaux.
NF X 02 - 107 Novembre 1968	Symboles de l'électrotechnique (F. Doc.).
NF X 02 - 108 Janvier 1962	Symboles de la chimie physique et de la physique moléculaire.
NF X 02 - 109 Février 1955	Symboles du calcul opérationnel.
NF X 02 - 110 Juillet 1969	Symboles et vocabulaire du calcul matriciel.
NF X 02 - 111 Février 1955	Symboles de l'algèbre tensorielle.
NF X 02 - 112 Octobre 1958	Symboles relatifs aux aéromoteurs (F. Doc.).
NF X 02 - 113 Août 1963	Symboles des carènes et hélices marines.
NF X 02 - 114 Décembre 1966	Symboles et vocabulaire de la théorie des ensembles.
NF X 02 - 115 Août 1970	Symboles et vocabulaire de la mécanique du vol.
NF X 02 - 116 Novembre 1971	Symboles et vocabulaire relatifs aux structures algébriques.
NF X 02 - 201 Juillet 1971	Grandeurs, unités et symboles-Acoustique.

2.3. L'élaboration des normes. — Le processus d'élaboration d'une norme peut être schématisé de la façon suivante :

1° *Travaux techniques préparatoires.* — La question est mise au programme des travaux sur suggestion reconnue valable par le Commissaire à la Normalisation. Un document de base est rédigé par un rapporteur ou un organisme qualifié.

2° *Préparation du projet de norme.* — Le document de base est examiné par une commission qui comprend des représentants des producteurs, usagers, distributeurs, administrations publiques, organismes scientifiques et techniques, personnalités qualifiées. Après une étude technique approfondie, le projet est mis au point par la Commission et par l'AFNOR.

3° *Enquête publique de l'AFNOR et mise au point du texte final.* — L'AFNOR diffuse le projet de norme auprès des établissements, organismes ou personnes désireux de participer à l'enquête ; elle publie un communiqué de presse. Le texte final est rédigé après qu'une commission ait examiné les réponses à l'enquête.

4° *Homologation.* — L'AFNOR établit un rapport de présentation à l'homologation. Celle-ci fait l'objet d'un arrêté ministériel publié au Journal Officiel, après vérification du Commissaire à la Normalisation.

Note : Des procédures simplifiées peuvent être admises pour les normes qui ne sont pas homologuées (normes enregistrées, par exemple).

3. LA MARQUE NATIONALE NF

À la fois pour encourager le respect des normes et pour donner à l'usager une indication propre à influencer son choix, il peut être utile d'accorder au produit normalisé la consécration d'une marque de conformité aux normes. Une telle marque existe dans de nombreux pays. En France, la marque nationale NF a été créée par le décret-loi du 12 novembre 1938 ; son statut actuel a été fixé par un décret du 24 mai 1941 et par un arrêté interministériel du 15 avril 1942.

L'organisation de la marque prévoit essentiellement un comité de direction de 12 membres et des comités particuliers adaptés aux branches industrielles intéressées. Les membres de ces comités sont nommés par le commissaire à la normalisation sur proposition du directeur général de l'AFNOR. Les comités particuliers instruisent les demandes, font exécuter des contrôles par des laboratoires ou des experts et proposent des sanctions éventuelles.

La marque NF, en continuelle expansion, s'applique, en 1970, à plus de quarante-trois domaines et spécialement aux appareils domestiques et aux matériaux de construction. Le souci de la qualité reste l'un des aspects les plus caractéristiques de la marque NF.

4. LA NORMALISATION INTERNATIONALE

4.1. Organisation internationale de normalisation. — La normalisation facilite considérablement les échanges internationaux. Cependant, la normalisation internationale s'est heurtée à de nombreuses difficultés et, en particulier, à la divergence des terminologies techniques et des systèmes d'unités de mesure ainsi qu'à des rivalités commerciales. En 1926, fut créée la Fédération Internationale des Associations Nationales de Normalisation (ISA, *International Standardization Association*), groupant 22 comités nationaux. Après la Deuxième Guerre mondiale, l'ISA fut remplacée, en 1947, par l'Organisation Internationale de Normalisation (ISO) qui groupe plus de 60 comités membres de différents pays, à raison d'un comité par pays. L'AFNOR est le comité membre français de l'ISO.

L'ISO a pour mission de favoriser le développement de la normalisation dans le monde, en vue de faciliter entre les nations les échanges de marchandises et les prestations de services et de réaliser une entente mutuelle dans les domaines intellectuel, scientifique, technique et économique. Pour l'ISO, l'un des moyens essentiels de remplir cette mission consiste à organiser la coordination et l'unification des normes nationales et à publier des recommandations de normalisation internationale.

4.2. Les travaux de l'ISO. — Les travaux de l'ISO sont effectués au sein d'une centaine de comités techniques. La France assurait, en 1970, le secrétariat de 28 d'entre eux et celui de 77 sous-comités. Le principal mode de recherche des accords nécessaires à la mise au point des avant-projets et des projets de recommandations consiste en réunions internationales des comités, sous-comités et groupes de travail. À l'issue des réunions, les travaux se poursuivent par correspondance, à l'initiative des secrétariats et conformément aux règles de procédure en vigueur.

Les avant-projets de normes internationales sont soumis à l'approbation des membres du Comité Technique qui en a la responsabilité, puis à enquête auprès de tous les comités membres de l'ISO sous forme de projets. Les projets de normes internationales ayant été approuvés par au moins 60 % des votes exprimés, sont soumis à l'acceptation du conseil de l'ISO pour devenir des normes internationales.

4.3. La Commission Électrotechnique Internationale (CEI). — Pour le domaine de l'électrotechnique, la CEI effectue ses travaux, selon ses propres procédures, au sein de comités d'études. Elle agit en liaison étroite avec l'ISO. Ces deux organismes couvrent tout le champ d'action de la normalisation internationale.

4.4. La normalisation européenne. — *Le Comité Européen de Coordination des Normes* (CEN), qui groupe les représentants des organismes nationaux de normalisarion des pays de la Communauté économique européenne (CEE) et de l'Association européenne de libre-échange (AELE), est né en 1961 de la transformation de la Commission de normalisation pour le Marché commun. Cet organisme établit des documents de normalisation destinés à favoriser le développement des échanges commerciaux entre les pays membres, en cherchant, chaque fois que possible, à rendre identiques leurs normes nationales sur un sujet donné. Le CEN a pour objectif l'approbation de *normes européennes* par une majorité significative de ses membres ou, au minimum, l'établissement de *rapports d'unification*. L'ap-

probation par un pays d'une norme européenne l'engage à en faire une norme nationale ou, au moins, à s'interdire l'édition d'une norme nationale différente. Les activités du CEN sont étroitement liées à celles de l'ISO.

La Communauté économique européenne (CEE-Bruxelles) a une activité, orientée vers la suppression des entraves aux échanges, qui peut entraîner des travaux de normalisation. Dans le domaine de la sidérurgie, ces travaux aboutissent à des « Euronormes ».

4.5. Les normes étrangères. — Les organismes de normalisation des différents pays procèdent à des échanges systématiques de toutes leurs normes. C'est ainsi que l'AFNOR détient une collection unique en France de 120 000 normes étrangères. Celles-ci peuvent être consultées ou achetées. Des traductions peuvent également en être établies sur demande. Association Française de Normalisation — Tour Europe, CEDEX 7, 92 - Paris-La Défense.

CHAPITRE VI

TABLEAUX DE CONVERSIONS

1. TABLEAU: UNITÉS EMPLOYÉES AUX ÉTATS-UNIS D'AMÉRIQUE ET ANCIENNEMENT EN GRANDE-BRETAGNE

Br: Unité uniquement utilisée en Grande-Bretagne. É-U: Unité uniquement utilisée aux États-Unis. Aucune indication spéciale: Mesure commune.

Dans les pays anglo-saxons, la virgule est utilisée pour séparer les nombres en tranches de 3 chiffres, le point séparant la partie entière de la partie décimale. Exemple: 3 725,127 s'écrit 3,725.127.

Remarque: Les unités électriques sont les mêmes qu'en France.

NATURE	DÉSIGNATION	ABRÉV.	RELATIONS	VALEURS ET PRINCIPALES CONCORDANCES		REMARQUES
Longueurs	mil		10^{-3} in	25,4 µm		Mesure opt.
	inch (pouce)	in ou "	$\frac{1}{12}$ ft	2,54 cm	1 cm = 0,393 7 in	
	link		$\frac{2}{3}$ ft	20,12 cm		
	foot (pied)	ft ou '	$\frac{1}{3}$ yd	0,304 8 m	1 m = 3,280 8 ft	
	yard	yd		0,914 4 m	1 m = 1,093 6 yd	
	fathom (brasse)	fth	2 yd	1,828 8 m		Mesure marine
	pole: perch (Br)	po	$5\frac{1}{2}$ yd	5,029 2 m		
	pole: rod (É-U)	po				
	chain	ch	4 po	20,117 m		Mesure d'arpentage
	furlong	fur	10 ch	201,168 m		
	statute mile	st.mi	8 fur	1,609 349 km	1 km = 0,621 31 st.mi	
	nautical mile (Br)	n.mi	6 080 ft	1 853,25 m		Mesure marine
	nautical mile (É-U)			1 853,49 m		
	league		3 mi	4,828 020 km		
Superficies	square mil		10^{-6} sq.in	$6,45 \cdot 10^{-4}$ mm²		
	circular mil	c.m		$5,067 \cdot 10^{-4}$ mm²		Sections circulaires
	square inch	sq.in	$\frac{1}{144}$ sq.ft	6,451 cm²	1 cm² = 0,155 sq.in	
	square link			4,047 dm²	1 dm² = 0,247 sq.link	
	square foot	sq.ft	$\frac{1}{9}$ sq.yd	9,2902 dm²	1 dm² = 0,107 sq.ft	
	square yard	sq.yd		0,836 1 m²	1 m² = 1,196 sq.yd	
	square pole	sq.po		25,292 m²		
	square chain	sq.ch		404,7 m²		
	rood	ro	40 sq.po	1 011,677 m²		Mesure agraire
	acre	ac	40 ro	4 046,86 m²	1 km² = 247,105 ac	
	square mile	sq.mi	640 ac	2,589 km²	1 km² = 0,386 sq.mi	
Volumes	cubic inch	cub.in	$\frac{1}{1\,728}$ cub.ft	16,387 cm³	1 dm³ = 61,024 cub.in	
	cubic foot	cub.ft	$\frac{1}{27}$ cub.yd	28,317 dm³	1 m³ = 35,314 cub.ft	
	cubic yard	cub.yd		0,764 m³	1 m³ = 1,308 cub.yd	
	barrel bulk shipping		5 cub.ft	141,55 dm³		
	measurement ton (Br)		40 cub. ft	1,132 6 m³	1 m³ = 0,883 meas. ton	Tonneau de mer
	lood		50 cub.ft	1,416 m³		
	register ton		100 cub.ft	2,832 m³	1 m³ = 0,353 reg.ton	Tonneau de douane
	cubic fathom	cub.fth	8 cub.yd	6,116 m³		
	acre foot			1 233 m³		Tonneau de jauge
	cord (É-U)	cd	80 bhl	3,265 stères		Travaux publics
Capacités	minim	mn		Br: 0,059 19 ml	É-U: 0,061 61 ml	Liquides
	fluid drachm	fl.dr	60 mn	Br: 3,551 ml	É-U: 3,696 ml	
	fluid ounce	fl.oz	8 fl. dr	Br: 28,42 ml	É-U: 29,57 ml	Il existe, en outre, des mesures spéciales pour vin, bière, huile, etc.
	gill (É-U)	gl	4 fl.oz		É-U: 0,118 l	
	gill (Br)	gl	5 fl.oz	Br: 0,142 l		
	pint	pt	4 gl	Br: 0,568 l	É-U: 0,473 l	
					1 cl = 0,017 Br pt	
	liquid quart	qt	2 pt	Br: 1,136 l	É-U: 0,946 l	
					1 l = 0,88 Br qt	

Unités employées aux États-Unis d'Amérique et anciennement en Grande-Bretagne (suite)

NATURE	DÉSIGNATION	ABRÉV.	RELATIONS	VALEURS ET PRINCIPALES CONCORDANCES		REMARQUES
Capacités (suite)	*gallon*	U.S.gal	4 qt		É-U : 3,785 l 1 l = 0,264 gal É-U	
	gallon bushel	Brit. gal bhl	4 qt 8 gal	Br : 4,546 l Br : 36,347 l	É-U : 1 l = 0,22 Br gal É-U : 35,238 l 1 hl = 2,75 Br bhl	
	barrel (Br) barrel (É-U)	bl bl	36 Br gal 42 US gal	Br : 163,6 l	1 hl = 0,612 Br bl É-U : 115,62 l 1 hl = 0,629 bl É-U	Il existe des barrels d'un nombre différent de gallons. Barrel US : mesure pour le pétrole
	hogshead (Br)	hhd	54 Br gal	Br : 286		
	solid quart (Br)	qt	$\frac{1}{32}$ bhl	Br : 1,136		Solides
	peck (Br)	pk	2 Br gal	Br : 9,087 l	É-U : 6,809 l 1 l = 0,11 pk (Br)	
	bushel	bhl		Comme pour les liquides		
	sack	sk	3 bhl	Br : 109,043 l		
	quarter (Br)		8 bhl	Br : 290,98 l	1 hl = 0,33 quarter	
	pipe (Br)		126 Br gal	Br : 572,75 l		
	tun (Br)		252 Br gal	Br : 1 145 l		
	last (Br)		80 bhl	Br : 2 909,8 l		
Masses	1° « *Avoir du pois weight* » (avdp)					
	grain	gr	$\frac{1}{7\,000}$ lb	64,799 mg	1 g = 15 423 gr	Les mesures « avoirdupois » sont utilisées pour les usages courants
	dram avdp	dr	$\frac{1}{16}$ oz	1,771 8 g	1 g = 0,565 dram	
	ounce avdp	oz	$\frac{1}{16}$ lb	28,35 g	1 g = 0,035 3 ounce	
	pound avdp (livre)	lb		453,59 g	1 kg = 2,205 pounds	
	stone	st	14 lb	6,350 kg	1 kg = 0,158 st	
	quarter	qr	2 st	12,700 kg	1 kg = 0,079 qr	
	cental	ctl	100 lb	45,359 kg	1 quintal = 2,204 6 ctl	
	hundredweight	cwt	4 qr	50,802 kg	1 quintal = 1,968 cwt	
	short ton (É-U)	sh tn	2 000 lb	907,184 kg	1 tonne métr. = 1,092 short ton	
	long ton	t	2 240 lb	1 016,047 kg	1 tonne métr. = 0,9842 long ton	Tonne Washington
	2° *Mesures spéciales : Troy*					
	grain	gr	$\frac{1}{7\,000}$ lb	64,798 mg		Mesures utilisées pour les matières précieuses
	pennyweight (denier)	dwt	24 gr	1,555 g		
	ounce troy	oz Tr	20 dwt	31,103 g		
	pound troy	lb Tr	12 oz Tr	373,241 g		
	3° *Apothecaries :*					
	grain	gr	$\frac{1}{7\,000}$ lb	64,798 mg		Mesures pour pharmacie
	scruple	scr	20 gr	1,296 g		
	dram	dr	3 scr	3,887 g		
	ounce Tr	oz Tr	20 dwt	31,103 g		
Unités calorifiques	*Intervalles de température :*			0 °C → 32 °F	100 °C → 212 °F	B.T.U. = quantité de chaleur nécessaire pour élever de 1 °F la température de 1 litre d'eau
	Degré Fahrenheit	°F		$C = (F - 32) \times \frac{5}{9}$	$F = \frac{9}{5} C + 32$	
	Quantités de chaleur : British Thermal Unit (1 °F par livre)	B.T.U.		1 B.T.U. = 0,252 kcal 1 B.T.U. ⟶ 1,052 kJ	1 kcal = 4 B.T.U.	
Unités optiques	*Intensités lumineuses :* candle (Br) candle (É-U)			0,98 candela 1,02 candela	1 candela = 1,02 candle Br 1 candela = 0,98 candle É-U	
	Flux lumineux : spherical candle power			12,57 lumens	1 lm = 0,079 5 s.c.pow	
	Éclairements : foot candle			10,764 lux	1 lx = 0,0929 ft cdle	
	Luminance : Lambert (É-U)			3180 cd/m²	1 cd/m² = 0,314 × 10⁻³ lamberts	
Quelques unités mécaniques	*Vitesses linéaires :* foot per second mile per hour knot (nœud)	ft/sec m.p.h. kt		0,304 8 m/s ou 1,097 km/h 1,609 km/h 0,514 77 m/s ou 1,853 2 km/h		
	Énergie : foot-pound	ft-lb		1,356 J		foot - pound = Travail d'une force égale au poids d'une livre dont le point d'application se déplace d'un pied dans sa direction
	Puissances : horse power	HP		745 watts		
	Pressions : pound per sq. inch ton per sq. foot	lb/sq.in t/sq.ft		6890 N/m² 107,251 × 10³ N/m²		

2. TABLEAU DE CONVERSION DES POUCES ET FRACTIONS DE POUCES EN MILLIMÈTRES

Pouce	0	1/16	1/8	3/16	1/4	5/16	3/8	7/16
0	—	1,587	3,175	4,762	6,350	7,937	9,525	11,112
1	25,400	26,987	28,574	30,162	31,749	33,337	34,924	36,512
2	50,799	52,387	53,974	55,561	57,149	58,736	60,324	61,911
3	76,199	77,786	79,374	80,961	82,549	84,136	85,723	87,311
4	101,60	103,19	104,77	106,36	107,95	109,54	111,12	112,71
5	127,00	128,59	130,17	131,76	133,35	134,94	136,52	138,11
6	152,40	153,98	155,57	157,16	158,75	160,33	161,92	163,51
7	177,80	179,38	180,97	182,56	184,15	185,73	187,32	188,91
8	203,20	204,78	206,37	207,96	209,55	211,13	212,72	214,31
9	228,60	230,18	231,77	233,36	234,95	236,53	238,12	239,71
10	254,00	255,58	257,17	258,76	260,35	261,93	263,52	265,11
11	279,39	280,98	282,57	284,16	285,74	287,33	288,92	290,51
12	304,79	306,38	307,97	309,56	311,14	312,73	314,32	315,91

Pouce	1/2	9/16	5/8	11/16	3/4	13/16	7/8	15/16
0	12,700	14,287	15,875	17,462	19,050	20,637	22,225	23,812
1	38,099	39,687	41,274	42,862	44,449	46,037	47,624	49,212
2	63,499	65,086	66,674	68,261	69,849	71,436	73,024	74,611
3	88,898	90,486	92,073	93,661	95,248	96,836	98,423	100,01
4	114,30	115,89	117,47	119,06	120,65	122,24	123,82	125,41
5	139,70	141,28	142,87	144,46	146,05	147,63	149,22	150,81
6	165,10	166,68	168,27	169,86	171,45	173,03	174,62	176,21
7	190,50	192,08	193,67	195,26	196,85	198,43	200,02	201,61
8	215,90	217,48	219,07	220,66	222,25	223,83	225,42	227,01
9	241,30	242,88	244,47	246,06	247,65	249,23	250,82	252,41
10	266,70	268,28	269,87	271,46	273,05	274,63	276,22	277,81
11	292,09	293,68	295,27	296,86	298,44	300,03	301,62	303,21
12	317,49	319,08	320,67	322,26	323,84	325,43	327,02	328,61

Pouce	0	1/8	1/4	3/8	1/2	5/8	3/4	7/8
13	330,19	333,37	336,54	339,72	342,89	346,07	349,24	352,42
14	355,59	358,77	361,94	365,12	368,29	371,47	374,64	377,82
15	380,99	384,17	387,34	390,52	393,69	396,87	400,04	403,22
16	406,39	409,57	412,74	415,92	419,09	422,27	425,44	428,62
17	431,79	434,97	438,14	441,32	444,49	447,67	450,84	454,02
18	457,19	460,37	463,54	466,72	469,89	473,07	476,24	479,42
19	482,59	486,77	488,94	492,12	495,29	498,47	501,64	504,82
20	507,99	511,17	514,34	517,54	520,69	523,87	527,04	530,22
21	533,39	536,57	539,74	542,92	546,09	549,27	552,44	555,61
22	558,79	561,96	565,14	568,31	571,49	574,66	577,84	581,01
23	584,19	587,36	590,54	593,71	596,89	600,06	603,24	606,41
24	609,59	612,76	615,94	619,11	622,29	625,46	628,64	631,81

3. TABLE NUMÉRIQUE

Carrés, cubes, racines carrées, racines cubiques, des nombres de 1 à 105 ; circonférences et surfaces des cercles de diamètres de 1 à 105

Nombre d	Carré d^2	Cube d^3	Racine carrée $\sqrt{d}$	Racine cubique $\sqrt[3]{d}$	Circonférence πd	Surface $\frac{1}{4}\pi d^2$	Nombre d	Carré d^2	Cube d^3	Racine carrée $\sqrt{d}$	Racine cubique $\sqrt[3]{d}$	Circonférence πd	Surface $\frac{1}{4}\pi d^2$	Nombre d	Carré d^2	Cube d^3	Racine carrée $\sqrt{d}$	Racine cubique $\sqrt[3]{d}$	Circonférence πd	Surface $\frac{1}{4}\pi d^2$
1	1	1	1	1	3,142	0,7854	36	1296	46656	6,0000	3,3019	113,097	1017,88	71	5041	357911	8,4261	4,1408	223,05	3959,19
2	4	8	1,4142	1,2599	6,283	3,1416	37	1369	50653	6,0828	3,3322	116,239	1075,21	72	5184	373248	8,4853	4,1602	226,19	4071,50
3	9	27	1,7321	1,4422	9,426	7,0686	38	1444	54872	6,1644	3,3620	199,381	1134,11	73	5329	389017	8,5440	4,1793	229,34	4185,39
4	16	64	2,0000	1,5874	12,566	12,5664	39	1521	59319	6,2450	3,3912	122,522	1194,59	74	5476	405224	8,6023	4,1983	232,48	4300,84
5	25	125	2,2361	1,7100	15,708	19,6350	40	1600	64000	6,3246	3,4200	125,66	1256,64	75	5625	421875	8,6603	4,2172	235,62	4417,86
6	36	216	2,4495	1,8171	18,850	28,2743	41	1681	68921	6,4031	3,4482	128,81	1320,25	76	5776	438976	8,7178	4,2358	238,76	4536,46
7	49	343	2,6458	1,9129	21,991	38,4845	42	1764	74088	6,4807	3,4760	131,95	1385,44	77	5929	456533	8,7750	4,2543	241,90	4656,63
8	64	512	2,8284	2,0000	25,133	50,2655	43	1849	79507	6,5574	3,5034	135,09	1452,20	78	6084	474552	8,8318	4,2727	245,04	4778,36
9	81	729	3,0000	2,0801	28,274	63,6173	44	1936	85184	6,6332	3,5303	138,23	1520,53	79	6241	493039	8,8882	4,2908	248,19	4901,67
10	100	1000	3,1623	2,1544	31,416	78,5398	45	2025	91125	6,7082	3,5569	141,37	1590,43	80	6400	512000	8,9443	4,3089	251,33	5026,55
11	121	1331	3,3166	2,2240	34,558	95,0332	46	2116	97336	6,7823	3,5830	144,51	1661,90	81	6561	531441	9,0000	4,3267	254,47	5153,00
12	144	1728	3,4641	2,2894	37,699	113,097	47	2209	103823	6,8557	3,6088	147,65	1734,94	82	6724	551368	9,0554	4,3445	257,61	5281,02
13	169	2197	3,6056	2,3513	40,841	132,732	48	2304	110592	6,9282	3,6342	150,80	1809,56	83	6889	571787	9,1104	4,3621	260,75	5410,61
14	196	2744	3,7417	2,4101	43,982	153,938	49	2401	117649	7,0000	3,6593	153,94	1885,74	84	7056	592704	9,1652	4,3795	263,89	5541,77
15	225	3375	3,8730	2,4662	47,124	176,715	50	2500	125000	7,0711	3,6840	157,08	1963,50	85	7225	614125	9,2195	4,3968	267,04	5674,50
16	256	4096	4,0000	2,5198	50,265	201,062	51	2601	132651	7,1414	3,7084	160,22	2042,82	86	7396	636056	9,2736	4,4140	270,18	5808,80
17	289	4913	4,1231	2,5713	53,407	226,980	52	2704	140608	7,2111	3,7325	163,36	2123,72	87	7569	658503	9,3274	4,4310	273,32	5944,68
18	324	5832	4,2426	2,6207	56,549	254,469	53	2809	148877	7,2801	3,7563	166,50	2206,18	88	7744	681472	9,3808	4,4480	276,46	6082,12
19	361	6859	4,3589	2,6684	59,690	283,529	54	2916	157464	7,3485	3,7798	169,65	2290,22	89	7921	704969	9,4340	4,4647	279,60	6221,14
20	400	8000	4,4721	2,7144	62,832	314,159	55	3025	166375	7,3162	3,8030	172,79	2375,83	90	8100	729000	9,4868	4,4814	282,74	6361,73
21	441	9261	4,5826	2,7589	65,973	346,361	56	3136	175616	7,4833	3,8259	175,93	2463,01	91	8281	753571	9,5394	4,4979	285,88	6503,88
22	484	10648	4,6904	2,8020	69,115	380,133	57	3249	185193	7,5498	3,8485	179,07	2551,76	92	8464	778688	9,5917	4,5144	289,03	6647,61
23	529	12167	4,7958	2,8439	72,257	415,476	58	3364	195112	7,6158	3,8709	182,21	2642,08	93	8649	804357	9,6437	4,5307	292,17	6792,91
24	576	13824	4,8990	2,8845	75,398	452,389	59	3481	205379	7,6811	3,8930	185,35	2733,97	94	8836	830584	9,6954	4,5468	295,31	6939,78
25	625	15625	5,0000	2,9240	78,540	490,874	60	3600	216000	7,7460	3,9149	188,50	2827,43	95	9025	857375	9,7468	4,5629	298,45	7088,22
26	676	17576	5,0990	2,9625	81,681	530,929	61	3721	226981	7,8102	3,9365	191,64	2922,47	96	9216	884736	9,7980	4,5789	301,59	7238,23
27	729	19683	5,1962	3,0000	84,823	572,555	62	3844	238328	7,8740	3,9579	194,78	3019,07	97	9409	912673	9,8489	4,5947	304,73	7389,81
28	784	21952	5,2915	3,0366	87,965	615,752	63	3969	250047	7,9373	3,9791	197,92	3117,25	98	9604	941192	9,8995	4,6104	307,88	7542,96
29	841	24389	5,3852	3,0723	91,106	660,520	64	4096	262144	8,0000	4,0000	201,06	3216,99	99	9801	970299	9,9499	4,6261	311,02	7697,69
30	900	27000	5,4772	3,1072	94,248	706,858	65	4225	274625	8,0623	4,0207	204,20	3318,31	100	10000	1000000	10,0000	4,6416	314,16	7853,98
31	961	29791	5,5678	3,1414	97,389	754,768	66	4356	287496	8,1240	4,0412	207,35	3421,19	101	10201	1030301	10,0499	4,6570	317,30	8011,85
32	1024	32768	5,6569	3,1748	100,531	804,248	67	4489	300763	8,1854	4,0615	210,49	3526,65	102	10404	1061208	10,0995	4,6723	320,44	8171,28
33	1089	35937	5,7446	3,2075	103,673	855,299	68	4624	314432	8,2462	4,0817	213,63	3631,68	103	10609	1092727	10,1488	4,6875	323,58	8332,29
34	1156	39304	5,8310	3,2396	106,814	907,920	69	4761	328509	8,3066	4,1016	216,77	3739,28	104	10816	1124864	10,1980	4,7027	326,73	8494,87
35	1225	42875	5,9161	3,2711	109,965	962,113	70	4900	343000	8,3666	4,1213	219,91	3848,45	105	11025	1157625	10,2469	4,7177	329,87	8659,01

MATHÉMATIQUES

CHAPITRE PREMIER

INTRODUCTION

1. DE L'UTILISATION DES MATHÉMATIQUES

Les premières notions de mathématiques assimilées par les hommes étaient des mathématiques « utilitaires » servant à l'arpentage et au recensement dans la société égyptienne. Par la suite, il y a toujours eu dualité entre les mathématiques considérées comme science pure se développant indépendamment de toute utilisation (par exemple, la géométrie pure depuis les philosophes grecs) et une science appliquée intervenant pour donner un nouvel élan à la physique à certains moments décisifs. Cette dualité se retrouve dans les motivations de la recherche et de l'enseignement des mathématiques. En ce qui concerne la recherche, les mathématiques ont été développées et continuent à être développées de façon autonome dans le but de résoudre les problèmes que d'autres mathématiciens ont posés ; dans le même temps, certains mathématiciens et non des moindres (Gauss et Fourier au XIXe siècle, J. von Neumann au XXe siècle) qui ont été aussi des physiciens, ont créé des mathématiques pour les besoins de la physique. De même, si pendant longtemps les mathématiques ont semblé seulement faire partie de la culture de l'honnête homme, maintenant leur connaissance est indispensable pour maîtriser certaines techniques des sciences appliquées (l'informatique étant l'exemple le plus connu).

La présentation des mathématiques appliquées peut être limitée à une suite de recettes utiles. Nous n'avons pas choisi cette méthode car il nous a semblé préférable d'exposer les notions de base indispensables à la bonne compréhension des concepts mathématiques utilisés dans le reste de l'ouvrage : nombres complexes, calcul différentiel et intégral. Nous avons démontré la plupart des résultats ; seules les démonstrations trop difficiles ou peu instructives ont été éliminées (le lecteur peut les trouver sans peine dans des manuels spécialisés). Pour ne pas commencer cet exposé (comme trop d'ouvrages de « mathématiques modernes ») par la phrase passe-partout : « Un ensemble est une collection d'objets appelés éléments », dans ce chapitre, nous avons essayé de donner une idée plus juste des ensembles et des relations sans pouvoir, bien sûr, définir rigoureusement les concepts fondamentaux.

2. ENSEMBLES ET RELATIONS

Il ne sera donné aucune définition des ensembles ou des relations, bien que ce soient des notions générales essentielles à la compréhension des mathématiques présentées dans cet ouvrage. Leurs définitions correctes, abstraites et difficiles, relèvent de la logique mathématique. Heureusement, elles ne sont pas utiles car ces notions sont relativement simples à manier et leur interprétation intuitive suffit pour beaucoup de problèmes mathématiques et en particulier pour tous ceux abordés dans l'*Encyclopédie des sciences industrielles*. Les notions intuitives d'ensembles et de relations sont maintenant couramment enseignées ; il ne s'agit pas d'une « théorie des ensembles » juxtaposée aux mathématiques « classiques » pour sacrifier à une mode mais d'idées fondamentales rendant plus cohérentes donc plus claires toutes les mathématiques, y compris les mathématiques appliquées. Nous ne définirons donc pas les ensembles comme « des collections d'objets » (simple pléonasme n'apportant rien de nouveau) et nous ne ferons pas constater au lecteur qu'une bille d'acier appartient à l'intersection de l'ensemble des corps en acier et de l'ensemble des corps sphériques, ni que les billes de terre appartiennent à la différence symétrique de ces deux ensembles. Ce type d'exercice pédagogique fournit la matière d'excellents livres scolaires ou de vulgarisation. Notre démarche sera légèrement plus abstraite : nous énoncerons une série d'affirmations qui donneront au lecteur une idée de la démarche du mathématicien.

Les objets dont traitent les mathématiques sont des *ensembles*. Le signe $\in$, qui se lit « appartient à » est utilisé pour former une *relation* à partir d'ensembles. Étant donné deux ensembles A et B, $A \in B$ est une relation qui se lit « A appartient à B » ou encore « A est un élément de B ». Intuitivement, nous considérons un ensemble comme la collection de ses éléments.

À partir de la relation « A appartient à B », il est possible de former une autre relation, négation de la précédente, qui s'énonce « A n'appartient pas à B » ; elle s'écrit $A \notin B$.

Les relations « A appartient à B » et « A appartient à C » permettent aussi de former une autre relation appelée *disjonction* des deux précédentes : « A appartient à B *ou* A appartient à C ». Nous la noterons provisoirement de la façon suivante : $(A \in B)$ *ou* $(A \in C)$. Notons à ce propos que l'usage de la parenthèse est le même qu'en mathématiques classiques : c'est une abréviation pour indiquer que ce qui est placé entre parenthèses doit être composé en tenant compte des signes opératoires suivant ou précédant la parenthèse.

Ainsi, à l'aide de cet exemple, nous avons appris à former de nouvelles relations à partir de relations données. Deux procédés ont été utilisés : la négation et la disjonction. Nous pouvons d'ailleurs composer ces procédés. Appelons R et S deux relations ; nous écrirons symboliquement *non* R et *non* S les négations correspondantes et R *ou* S la disjonction de ces relations. Par composition, nous obtenons :

— la relation *non* (*non* R *ou non* S) qui est aussi la relation R *et* S ;

— la relation (*non* R *ou* S) qui se note en abrégé $R \Rightarrow S$, ce qui se lit « R implique S » ;

— la relation $R \Rightarrow S$ et $S \Rightarrow R$ se note $R \Leftrightarrow S$ et se lit « R est logiquement équivalent à S ».

Principaux symboles utilisés en mathématiques

Symboles ou dénominations	Définitions
a) **Symboles logiques utilisés pour former des relations**	
$R(x)$	x vérifie la relation R
$R \vee S$	R ou S
$R \wedge S$	R et S
$\{x \in E : R(x)\}$	Sous-ensemble de E dont les éléments sont les éléments de E vérifiant R, par exemple : $(R \wedge S)\ (x) = \{x : R(x) \wedge S(x)\}$
$R \Rightarrow S$	R implique S
$R \Longleftrightarrow S$	R est logiquement équivalent à S
$\forall$	« Pour tout » : quantificateur universel employé dans des expressions du genre : $\forall x \in E, R(x)$ qui se lit : pour tout x appartenant à l'ensemble E, la relation R est vérifiée. Cette relation est équivalente à : $E = \{x \in E : R(x)\}$
$\exists$	« Il existe » : quantificateur existentiel employé dans des expressions du genre : $\exists x \in E, R(x)$ qui se lit : il existe un élément x de l'ensemble E qui vérifie la relation R. Cette relation est équivalente à : $\varnothing \neq \{x \in E : R(x)\}$
$\neg R$ ou *non* R	Négation de la relation R. Par exemple : *non* $(x \in E) \Longleftrightarrow x \notin E$ et *non* $(A = B) \Longleftrightarrow A \neq B$
b) **Symboles de la théorie des ensembles**	
$\in$	Appartenance $x \in A$
$\notin$	Non appartenance
$\subset$	Inclusion $A \subset B \Longleftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$
$\varnothing$	Ensemble vide $\varnothing = \{x \in E : x \notin E\}$
$\complement_E(A)$	Complémentaire de A dans E : $\complement_E(A) = \{x \in E : x \notin A\}$
(x, y)	Couple (x, y), x étant un élément d'un ensemble E, et y un élément d'un ensemble F, les ensembles E, F étant distincts ou non. Deux couples sont égaux si, et seulement si, ils ont même premier et même second élément.
$pr_1\ (x, y)$	Premier élément / Première coordonnée / Première projection } d'un couple (x, y). C'est l'élément x du couple (x, y)
$E \times F$ (peut s'énoncer : E croix F)	Produit / Produit cartésien } d'un ensemble E par un ensemble F. C'est l'ensemble des couples (x, y) dont chacun est formé d'un élément quelconque x de E et d'un élément quelconque y de F.
$A \cap B$	Intersection : $A \cap B = \{x \in A : x \in B\}$
$A \cup B$	Réunion : $x \in A \cup B \Longleftrightarrow (x \in A)$ ou $(x \in B)$
$\circ$	Composition des applications définies par : $f \circ g(x) = f[g\ (x)]$
$Im\ G\ (X)$ (image de X par le graphe G) si aucune confusion ne peut en résulter	Image d'un ensemble X par un graphe G, partie de $E \times F$, X étant une partie de l'ensemble E. C'est l'ensemble des éléments y de F tels que : $\exists\, x \in X, (x, y) \in G$.
id_E	Correspondance identique d'un ensemble E. C'est la correspondance (Δ_E, E, E) par laquelle tout élément de E correspond à lui-même.

Principaux symboles utilisés en mathématiques (suite)

Symboles ou dénominations	Définitions
$f: E \to F$ $E \xrightarrow{f} F$ (f applique E dans F)	Application f d'un ensemble E dans un ensemble F, ou fonction f, définie sur E et prenant ses valeurs dans un ensemble F. C'est la correspondance entre E et F telle qu'à tout élément de E correspond un et un seul élément de F.
$y = f(x)$ (y égale f de x) $y = f_x$ (y est l'image de x par f) . . . . . . $x \to f(x)$ $x \rightsquigarrow f(x)$ $x_1 \mapsto f(x)$ (Les trois dernières formules s'énoncent: x a pour image f de x)	Valeur d'une fonction pour un élément x de l'ensemble de départ. C'est l'élément y de l'ensemble des valeurs correspondant à l'élément x de l'ensemble de départ de la fonction ou de l'application f; f_x est appelé notation indicielle. . . . . . . Image par une fonction [par une application] d'un élément x de l'ensemble de départ.
f_A $f \mid A$	Restriction d'une application à une partie de son ensemble de départ. f étant une application d'un ensemble E dans un ensemble F, et A étant une partie de E, c'est l'application de A dans F dont la valeur pour tout élément x de A est $f(x)$.
$(x_\iota)_\iota \in I$ ou x_ι Si aucune confusion ne peut en résulter	Famille indexée d'éléments de E au moyen d'un ensemble I. Image de I dans E par l'application $\iota \to x_\iota$. On dit que I est l'ensemble des indices.
Relation binaire	E et F étant deux ensembles, c'est une relation entre un élément x de E et un élément y de F.
$x \equiv y$ (mod. R) (x équivalent à y modulo R) $x = y$ (mod. R) (x congru à y modulo R)	Relation d'équivalence définie sur un ensemble E.
$C(x)$	Classe d'équivalence d'un élément x d'un ensemble E suivant une relation d'équivalence. C'est la partie de E formée des éléments équivalents à x modulo R; R étant une relation d'équivalence définie sur E.
E/R	Ensemble quotient d'un ensemble par une relation d'équivalence. C'est l'ensemble des classes d'équivalence définies sur un ensemble E par une relation d'équivalence R sur E. C'est une partition de E.
Représentant d'une classe d'équivalence	Élément quelconque d'une classe d'équivalence.
Application canonique de E sur E/R	R étant une relation d'équivalence définie sur un ensemble E, surjection : $x \to C(x)$ qui, à tout élément x de E, fait correspondre la classe d'équivalence $C(x)$ à laquelle appartient x.
Relation d'équivalence sur E associée à une application f d'un ensemble E dans un ensemble F	Relation d'équivalence sur E : $f(x) = f(y)$ avec $x \in E$, $y \in E$.
Relation d'équivalence induite sur une partie A de l'ensemble E par une relation d'équivalence définie sur E	Relation d'équivalence entre éléments de A résultant de leur appartenance à E et de la relation d'équivalence donnée sur E.
Relation P entre $x, y, z, \ldots$ compatible en x avec une relation d'équivalence R définie sur un ensemble E	Relation P telle que, si x et x' sont des éléments de E : $[P(x, y, z, \ldots)$ et $x \equiv x'$ (mod. $R)] \Rightarrow P(x', y, z, \ldots)$

Principaux symboles utilisés en mathématiques (suite)

Symboles ou dénominations	Définitions
$[a, b]$	Intervalle fermé d'origine a et d'extrémité b ; a et b étant deux éléments d'un ensemble ordonné E tels que $a < b$. C'est la partie de E formée des éléments x tels que : $a \leqslant x \leqslant b$.
$[a, b[$	Intervalle semi-ouvert à droite d'origine a et d'extrémité b ; a et b étant deux éléments d'un ensemble ordonné E tels que $a < b$. C'est donc la partie de E formée des éléments x tels que : $a \leqslant x < b$.
$]a, b[$	Intervalle ouvert d'origine a et d'extrémité b ; a et b étant deux éléments d'un ensemble ordonné E tels que $a < b$. C'est la partie de E formée des éléments x tels que : $a < x < b$.
$]\leftarrow, a]$	Intervalle fermé illimité à gauche et d'extrémité a ; a étant un élément d'un ensemble ordonné E. C'est la partie de E formée des éléments x tels que : $x \leqslant a$.
$[a, \rightarrow[$	Intervalle fermé illimité à droite et d'origine a ; a étant un élément d'un ensemble ordonné E. C'est la partie de E formée des éléments x tels que : $x \geqslant a$.
$]\leftarrow, a[$	Intervalle ouvert, illimité à gauche et d'extrémité a, a étant un élément d'un ensemble ordonné E.
$]a, \rightarrow[$	Intervalle ouvert, illimité à droite et d'origine a, a étant un élément d'un ensemble ordonné E.
$\underset{x \in A}{\text{Sup.}}\ f(x)$ (borne supérieure de f (A) dans E)	Borne supérieure d'une application f d'un ensemble A dans un ensemble ordonné E.
N	Ensemble des entiers naturels.
Z	Ensemble des entiers relatifs.
Q	Ensemble des nombres rationnels.
R	Ensemble des nombres réels.
$\mathbf{R}^+$	Ensemble des nombres réels positifs ou nuls.
C	Ensemble des nombres complexes.
$\star$	Symbole de la dualité en algèbre linéaire. $E\star$ est l'espace dual de l'espace vectoriel E, c'est-à-dire l'espace des applications linéaires de E dans R.
$\sim$	$\widetilde{L}$ est l'application transposée de l'application linéaire L. A est la matrice transposée de la matrice A ; alors si : $A = (a_{ij})$, $\widetilde{A} = (a_{ji})$
$\overrightarrow{\text{grad}}\ f$	Gradient du scalaire f.
$\text{div}\ \vec{u}$	Divergence du vecteur $\vec{u}$.
$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{u}$	Rotationnel du vecteur $\vec{u}$.

3. LE PROCESSUS DE DÉMONSTRATION EN MATHÉMATIQUES

Sachant ce qu'est une relation, nous aurons à raisonner, c'est-à-dire à déduire des conclusions (relations dont la vérité doit être démontrée) en partant d'hypothèses (relations dont la vérité est supposée). Les règles qui permettent d'opérer ces déductions sont des règles de logique en tout point semblables à celles utilisées dans la vie courante et que nous rappellerons au moyen de deux exemples:

— le tournevis est un outil métallique; tout outil métallique est une création humaine; **donc** le tournevis est une création humaine;

— le papillon est un être vivant; on n'a jamais créé d'êtres vivants en laboratoire; **donc** le papillon n'a jamais été créé en laboratoire.

Nous nous contenterons d'énoncer certaines règles logiques que le lecteur non averti pourrait d'ailleurs considérer comme évidentes (car elles répondent à l'attente de son intuition) s'il oubliait qu'en mathématiques rien n'est admis implicitement. Il faut expliciter ces règles pour pouvoir les utiliser. Pour cela, examinons la structure des raisonnements constituant les deux exemples précédents.

Dans le premier, si R est la relation « *x est un outil métallique* » et S la relation « *x est une création humaine* », nous avons tenu le raisonnement suivant: « R est vraie; (*non* R) *ou* (S) est vraie ($R \Rightarrow S$); **donc** S est vraie ». Dans le second raisonnement, si R est la relation « *x est un être vivant* » et S la relation « *x a été créé en laboratoire* », nous avons appliqué le raisonnement suivant au papillon: « R est vraie; R *et non* S est vraie; **donc** *non* S est vraie ».

Il faut ajouter qu'en réalité, nous avons appliqué ce raisonnement à des objets explicités et non à un objet indéterminé x. Donc, nous avons formé, à partir de la relation $R(x)$, une nouvelle relation R (tournevis) en appliquant l'analogue de la règle logique de substitution: « Si la relation $R(x)$ est vraie, x étant un objet mathématique indéterminé (variable logique), la relation $R(A)$ est vraie lorsque A désigne un objet mathématique déterminé».

En conclusion, les règles utilisées sont les suivantes:

— si (R *et* $R \Rightarrow S$) est vraie, S est vraie;

— pour que la relation (R *et* S) soit vraie, il faut et il suffit que les relations R et S soient vraies;

— si l'une des deux relations R ou S est vraie, alors la relation (R ou S) est vraie.

CHAPITRE II

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES ENSEMBLES ET DES RELATIONS

1. DESCRIPTION NAÏVE DES ENSEMBLES

1.1. La notion d'ensemble. — Le lecteur que les préliminaires logiques du chapitre précédent auraient rebuté peut se faire une représentation intuitive d'un ensemble: c'est une collection d'objets. Ces objets sont les *éléments* de l'ensemble; on dit aussi qu'ils lui appartiennent. Les ensembles eux-mêmes peuvent être les objets d'une collection qui sera un ensemble d'ensembles. Lorsqu'on étudie une collection d'objets de nature déterminée (points, nombres, etc.), on lui donne le nom d'*ensemble de base* ou *référentiel* de la théorie.

Pour raisonner sur des ensembles il est commode de les représenter par des ensembles de points du plan, délimités par des courbes fermées. Cette représentation, dite *diagramme de Venn*, sera utilisée dans la suite de l'exposé.

1.2. Symboles et relations. — Les phrases mathématiques énonçant les propriétés des objets sont appelées des *relations;* ce sont des combinaisons ou *assemblages de symboles* représentant les objets concernés et leurs propriétés.

En général, les éléments simples seront symbolisés par des lettres minuscules: x, a, n, etc. Les ensembles seront désignés par des lettres majuscules: E, A, B, etc., ou au moyen d'un symbole formé d'accolades encadrant la définition ou le symbole de l'élément générique de l'ensemble. Par exemple, l'ensemble des nombres entiers naturels plus petits que 10 sera désigné par le symbole suivant:

$\{n \in \mathbf{N} : n < 10\}$ si $\mathbf{N}$ représente l'ensemble des nombres naturels; $\mathbf{N} = \{1, 2, ..., n, ...\}$. L'ensemble contenant le seul élément x est désigné par $\{x\}$; cela permet de distinguer ensemble et élément.

Le symbole d'*égalité* $=$ indique que deux éléments ou deux ensembles ont les mêmes propriétés et sont confondus: $a = b$, $A = B$. Le cas contraire est symbolisé par le signe $\neq$: $a \neq b$, se lit « a différent de b ».

Le symbole d'*appartenance* indique qu'un élément appartient à un ensemble déterminé; par exemple, pour exprimer l'appartenance d'un objet x à un ensemble E nous écrivons la relation suivante: $x \in E$ qui se lit « x appartient à E ». La propriété contraire est symbolisée par le signe $\notin$: $x \notin E$ se lit « x n'appartient pas à E ».

Le symbole logique d'*implication* $\Rightarrow$ exprime qu'une relation est la conséquence d'une autre; par exemple, si la relation R entraîne S, nous écrivons: $R \Rightarrow S$, qui se lit « R entraîne S *ou* R implique S ».

Lorsque la réciproque est aussi vraie ($S \Rightarrow R$), les deux relations R et S sont équivalentes et nous écrivons $R \Longleftrightarrow S$ qui se lit « R est logiquement équivalent à S; le signe $\Longleftrightarrow$ est le symbole de l'*équivalence*.

De nombreux autres symboles seront introduits dans la suite du texte.

1.3. Quelques définitions fondamentales

1.3.1. — Si A et B sont deux ensembles, la relation $A \subset B$, appelée *relation d'inclusion*, signifie que tout élément de A est un élément de B. Cette relation peut s'écrire aussi: $x \in A \Rightarrow x \in B$. Nous dirons alors que A est une *partie* de B ou un *sous-ensemble* de B. Évidemment, nous pouvons écrire: $E \subset E$ (la relation $A \subset B$ est parfois dite *inclusion au sens large* car elle comprend le cas de l'égalité). Deux ensembles A et B sont égaux si nous avons simultanément: $A \subset B$ et $B \subset A$; autrement dit: $(A = B) \Longleftrightarrow (A \subset B$ et $B \subset A)$.

1.3.2. — Soit E un ensemble et R une relation; il existe un sous-ensemble unique de E dont les éléments sont tous les éléments x de E pour lesquels la relation R est vraie. Il sera noté: $\{ x \in E$ tel que $R(x) \}$.

1.3.3. — Soit E un ensemble et R la relation $x \notin E$. L'ensemble des éléments de E, pour lesquels cette relation est vraie, est le *sous-ensemble vide* de E. Il ne contient aucun élément, puisque aucun élément ne peut à la fois appartenir et ne pas appartenir à un même ensemble. On le note $\varnothing_E = \{x \in E$ tel que $x \notin E\}$. On démontre l'égalité de tous les sous-ensembles vides, et on définit l'*ensemble vide* $\varnothing$ qui les représente tous.

1.3.4. — Soit E un ensemble et R la relation $F \subset E$.

L'ensemble des ensembles F pour lesquels la relation R est vraie constitue l'ensemble des parties de E. Il sera noté $P(E)$. Nous avons l'équivalence: $[F \subset E \Longleftrightarrow F \in P(E)$, en particulier: $E \in P(E)$ et $\varnothing \in P(E)$.

2. L'ALGÈBRE DE BOOLE DES PARTIES D'UN ENSEMBLE (V. planches hors-texte)

Dans les énoncés suivants nous supposerons que A et B sont des éléments de $P(E)$, c'est-à-dire des sous-ensembles de E.

2.1. Définitions

2.1.1. — Le *complémentaire de A dans E* est l'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à A; il sera noté $\complement_E A$

ou $(E - A)$ ou simplement A' : $\complement_E A = \{x \in E$ tel que $x \notin A\}$. En particulier : $\complement_E E = \{x \in E$ tel que $x \notin E\} = \varnothing$ et $\complement_E \varnothing = \{x \in E$ tel que $x \notin \varnothing\} = E$.

Posons : $A' = \complement_E A$, il vient :

$\complement_E A' = \{x \in E$ tel que $x \notin A'\} = \{x \in E$ tel que $x \in A\} = A$.

Le complémentaire du complémentaire d'un ensemble A est donc l'ensemble A.

2.1.2. — L'*intersection* de deux ensembles A et B, notée $A \cap B$ (qui se lit « A inter B »), est l'ensemble constitué par les éléments appartenant à la fois à A et à B : $A \cap B = \{x \in A$ tel que $x \in B\} = \{x \in B$ tel que $x \in A\}$.

2.1.3. — La *réunion* de deux ensembles A et B, notée $A \cup B$ (qui se lit « A union B ») est l'ensemble des éléments appartenant à l'un au moins des deux ensembles.

2.1.4. — Une *partition* d'un ensemble E est un ensemble de parties de E qui jouit des propriétés suivantes :

— si F et G sont deux sous-ensembles quelconques appartenant à la partition : $F \cap G = \varnothing$;

— la réunion de tous les sous-ensembles appartenant à la partition est égale à l'ensemble E.

Une partition intéressante est celle constituée par les sous-ensembles suivants : $A \cap B$, $A' \cap B$, $A \cap B'$, $A' \cap B'$ avec $A' = \complement_E A$ et $B' = \complement_E B$, certains d'entre eux pouvant être vides (par exemple, $A \cap B = \varnothing$). Pour simplifier l'écriture nous poserons : $A \cap B = (1)$, $A' \cap B = (2)$, $A \cap B' = (3)$, $A' \cap B' = (4)$. Nous pouvons vérifier immédiatement sur la figure que nous avons bien les propriétés suivantes : $(1) \cap (2) = \varnothing$; $(2) \cap (3) = \varnothing$; $(3) \cap (4) = \varnothing$; $(4) \cap (1) = \varnothing$; etc. ; $(1) \cup (2) \cup (3) \cup (4) = E$.

Démontrons, par exemple, la relation :

$(2) \cap (3) = \varnothing$:

$(2) = A' \cap B = \{x \in A'$ tel que $x \in B\} = \{x \notin A$ et $x \in B)$

$(3) = A \cap B' = \{x \in A$ tel que $x \in B'\} = \{x \in A$ et $x \notin B)$

Les éléments de $(2) \cap (3)$ doivent donc satisfaire simultanément aux conditions $x \in A$ et $x \notin A$, $x \in B$ et $x \notin B$; nous retrouvons la définition de l'ensemble vide. Donc $(2) \cap (3) = \varnothing$.

À l'aide de ces quatre ensembles élémentaires nous pouvons construire les ensembles définis précédemment :

$A = (1) \cup (3)$, $B = (1) \cup (2)$,

$A' = (2) \cup (4)$, $B' = (3) \cup (4)$,

$A \cup B = (1) \cup (2) \cup (3)$.

Nous pouvons généraliser en introduisant un nombre fini quelconque de sous-ensembles A, B, C, etc., de E.

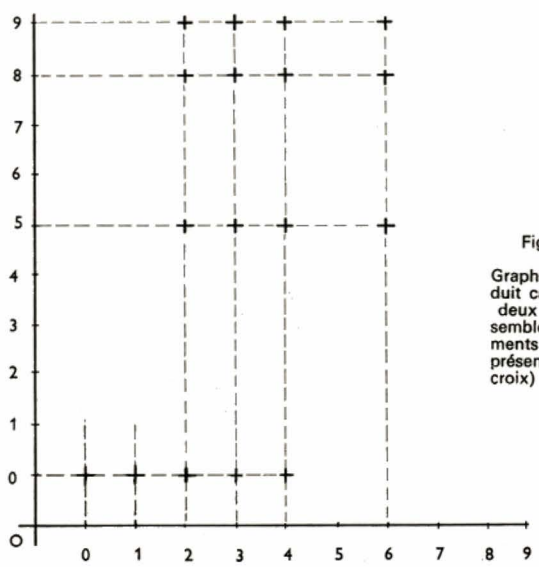


Fig. II-1a

Graphe d'un produit cartésien de deux sous-ensembles (ses éléments sont représentés par des croix)

2.2. Propriétés de la réunion et de l'intersection

2.2.1. — Les propriétés suivantes découlent immédiatement des définitions : $E \cup E = E$; $E \cap E = E$; $A \cap B = B \cap A$; $A \cup B = B \cup A$; $A \subset A \cup B$; $A \cap B \subset A$; $A \cap B \subset B$.

2.2.2. — Le lecteur pourra vérifier à titre d'exercice les équivalences logiques suivantes. Seule la première équivalence est démontrée ici.

1° $A \subset B \iff A \cap B = A \iff A \cup B = B$

En effet $(A \subset B) \iff (x \in A \Rightarrow x \in B)$ donc $\{x \in A\} \Rightarrow \{x \in A$ et $x \in B\}$ et $A \subset A \cap B$ d'où $A = A \cap B$

La première implication est démontrée :

$$A \subset B \iff \{A \cap B = A\}$$

La seconde des équivalences est démontrée de la même façon.

2° $(A \subset E$ et $B \subset E) \iff [(A \cup B) \subset E]$

3° $(x \subset A$ et $x \subset B) \iff (x \subset A \cap B)$

4° $A \subset B \iff B' \subset A'$ (A' et B' étant respectivement les complémentaires de A et de B)

5° $A \cap B = \varnothing \iff A \subset B' \iff B \subset A'$

6° $A \cup B = E \iff A' \subset B \iff B' \subset A$

2.2.3. — Les relations fondamentales suivantes sont appelées parfois relations de *Morgan :*
$(A \cup B)' = A' \cap B'$; $(A \cap B)' = A' \cup B'$; le signe $(')$ désignant le complémentaire.

2.2.4. — A, B et C désignant trois ensembles, nous pouvons écrire les relations suivantes :

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

3. LE PRODUIT CARTÉSIEN DE DEUX ENSEMBLES

3.1. Définition. — A et B désignant deux ensembles, le *produit cartésien de A et de B* (ou simplement *produit de A et B*) est l'ensemble des *couples ordonnés* (a, b), avec $a \in A$ et $b \in B$. Il est noté $A \times B$. Dire que le couple (a, b) est ordonné signifie que nous avons l'équivalence suivante : $[(a, b) = (a', b')] \iff (a = a'$ et $b = b')$. Par conséquent : $(a, b) = (b, a)$ si et seulement si $a = b$.

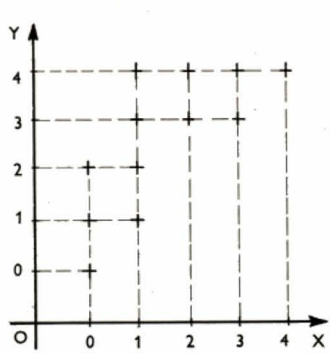
Plus généralement, nous pouvons former un ensemble produit d'un nombre quelconque d'ensembles : $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$; ses éléments sont les *n-uples ordonnés* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, avec $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, etc.

Exemple : Les nombres de deux chiffres. — L'ensemble des nombres de deux chiffres (10, 11, 12, ... 99) est le produit des deux ensembles $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ et $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,\}$. Nous pouvons former systématiquement tous les couples éléments du produit $A \times B$ en prenant, par exemple, $a = 1$ et en donnant successivement à b les valeurs de 0 à 9, puis $a = 2$, etc. Nous obtenons les couples (1, 0), (1, 1), (1, 2), ..., (1, 9), (2, 0), ... ; c'est-à-dire les nombres : 10, 11, 12, ..., 19, 20, etc.

Représentation graphique. — Si nous représentons géométriquement les ensembles A et B par des portions de droite, les éléments a et b étant des points de la droite, le

Fig. II-1b

Graphe d'un sous-ensemble de A × B qui n'est pas un produit cartésien de sous-ensemble

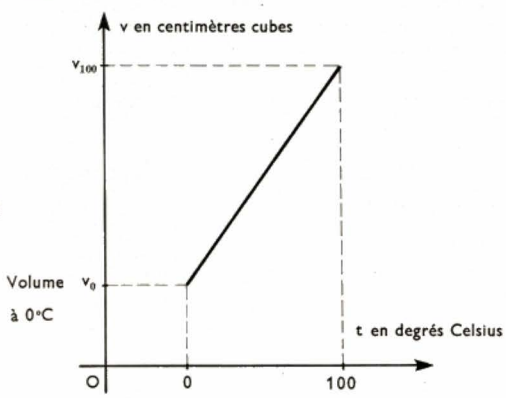


Représentation graphique du produit cartésien A × B où A = B = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

produit $A \times B$ est représenté par une portion de plan (fig. II-1a et b). Cette représentation est utilisée pour étudier le changement d'état d'un système physique, c'est-à-dire la variation d'un paramètre caractérisant son état en fonction d'un autre paramètre. Les ensembles A et B sont alors appelés *domaines de variation des paramètres d'état* a et b, $A \times B$ étant l'*espace des états;* il représente tous les états possibles du système étudié. Les droites portant les représentations de A et B sont appelées *axes de coordonnées, A et B* étant les *ensembles de coordonnées; a* est la *première coordonnée* ou *première projection* de (a, b) et b la *deuxième coordonnée* ou *deuxième projection*. Cela est noté de la façon suivante : $a = pr_1(a, b)$ et $b = pr_2(a, b)$.

Sur la figure II-2, nous avons représenté la variation du volume d'une masse d'eau (ensemble de nombres positifs) à pression constante en fonction de la température (exprimée en degrés Celsius, de 0 à 100). Sur la figure II-3, qui représente une mappemonde, figure l'ensemble des points du globe à l'exception des pôles : c'est le produit cartésien de l'ensemble des latitudes et de l'ensemble des longitudes.

Fig. II-2



L'espace des états est le produit cartésien de l'ensemble des volumes par l'ensemble des températures

Les deux pôles ne peuvent être représentés car ils n'ont pas de longitude définie. Remarquons que ce graphique permet de faire correspondre des points différents de la carte et des points différents du globe mais le rapport des distances n'est pas conservé et les régions près des pôles sont agrandies relativement aux régions équatoriales. En fait, le problème des cartes est un problème mathématique important qui ne peut être abordé qu'après avoir défini la notion de distance.

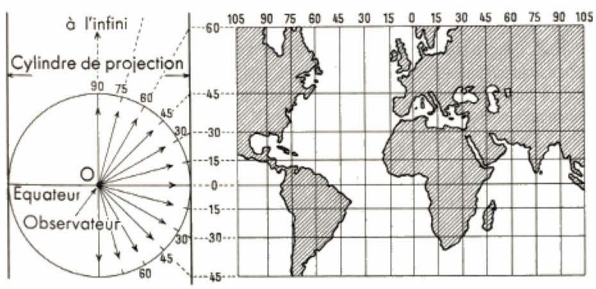


Fig. II-3 — Une mappemonde peut être interprétée comme la représentation graphique d'un produit cartésien

3.2. Propriétés. — Une condition nécessaire et suffisante pour que le produit $A \times B$ ne soit pas vide est que ni A ni B ne soient vides :

$$(A \times B \neq \varnothing) \Longleftrightarrow (A \neq \varnothing \text{ et } B \neq \varnothing)$$

ou encore : $(A \times B = \varnothing) \Longleftrightarrow (A = \varnothing \text{ ou } B = \varnothing)$.

— Si $A \times B \neq \varnothing$ nous avons l'équivalence :

$$(C \times D \subset A \times B) \Longleftrightarrow (C \subset A \text{ et } D \subset B)$$

$$(A \times B) \cap (E \times F) = (A \cap E) \times (B \cap F)$$

$$(A \times B) \cup (E \times B) = (A \cup E) \times B$$

3.3. Graphes (*)

(*) Dans le langage usuel, on désigne par « graphe » la « représentation graphique du graphe » ; cet abus de langage est à éviter en mathématiques.

3.3.1. Définition. — Soit $c = (a, b)$ l'élément générique de $A \times B$: $a = pr_1 c$, $b = pr_2 c$. À une relation $R(a, b)$ entre $a \in A$ et $b \in B$ est associée la propriété R $(pr_1 c, pr_2 c)$ de $c \in A \times B$. Le sous-ensemble G de $A \times B$ formé des éléments c pour lesquels cette propriété est vraie est l'ensemble des couples (a, b) pour lesquels $R(a, b)$ est vraie ; G est appelé graphe de la relation R. Tout sous-ensemble de $A \times B$ est le graphe d'une relation.

3.3.2. Propriétés

1° Si deux ensembles C et D sont contenus dans A et B ($C \subset A$ et $D \subset B$) alors le produit $C \times D$ est inclus dans $A \times B$ et il est le graphe de la relation ($a \in C$ et $b \in D$). En effet : $(a, b) \in C \times D \Longleftrightarrow (a \in C \text{ et } b \in D)$, or $C \subset A$ et $a \in A$, d'une part, et $D \subset B \Rightarrow b \in B$, d'autre part, donc $(a, b) \in (A \times B)$.

2° Tout graphe n'est pas un produit cartésien de sous-ensembles de A et de B. Le lecteur déterminera pourquoi le graphe de la figure II-1b n'est pas un produit cartésien alors que celui de la figure II-1a en est un.

3° Pour tout x de X on note G_x l'ensemble des y de Y tels que $(x, y) \in G$, x étant fixé. On appelle *G_x section de G selon x*. De même pour tout y de Y on définit G_y^{-1} section de G selon y (fig. II-4).

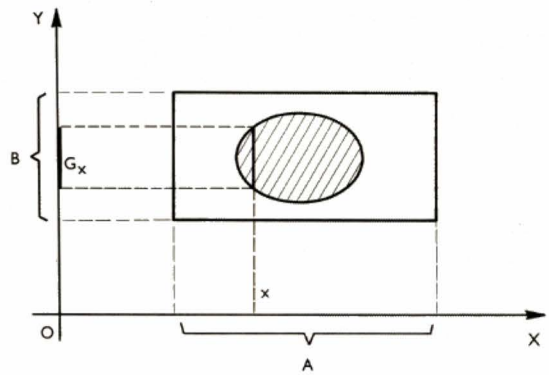


Fig. II-4 — Définition de la section d'un graphe

4. RELATIONS BINAIRES DANS UN ENSEMBLE

4.1. Définition. — Une relation binaire dans un ensemble E est une relation entre deux variables x et y de l'ensemble E. Elle sera notée de la façon suivante : ($x \in E$, $y \in E$ et $x\,R\,y$) ou en abrégé xRy qui se lit : x est en relation R avec y. L'ensemble des couples (x, y) tels que xRy, couples du produit cartésien $E \times E$, est un graphe ; par définition, c'est le *graphe de la relation R*. Réciproquement, étant donné un graphe G de $E \times E$, ($x \in E$, $y \in E$ et $(x, y) \in G$) est une relation binaire dans l'ensemble E.

Voici des relations binaires sur l'ensemble des nombres entiers naturels :

- xRy peut signifier que les entiers x et y ont même chiffre des unités (fig. II-5a).
- xRy peut signifier que la somme des entiers x et y est égale à 10 (fig. II-5b).

Fig. II-5a

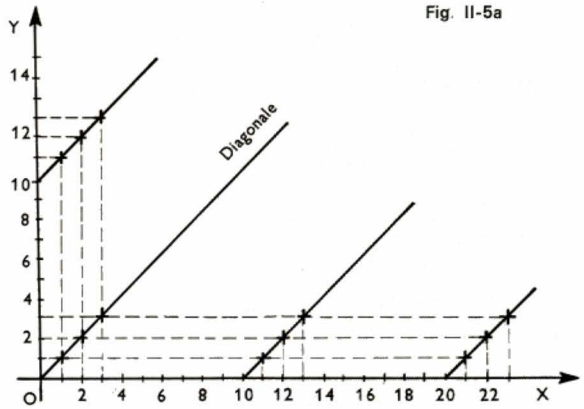
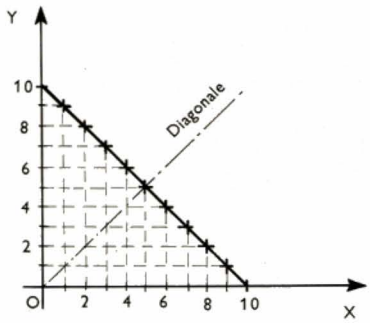


Fig. II-5b



4.2. Propriétés. — La relation binaire R est *réflexive* si, pour x élément de E, la relation xRx est vraie.

— La relation binaire R est *symétrique* si, pour x et y éléments de E, nous pouvons écrire : $xRy \Rightarrow yRx$. L'*antisymétrie* d'une relation signifie que l'on peut écrire : $[(xRy)$ et $(yRx)] \Rightarrow (x = y)$.

— La relation R est *transitive* si, pour x, y et z éléments de E, nous avons $(xRy$ et $yRz) \Rightarrow xRz$.

Les propriétés de réflexivité et de symétrie s'interprètent bien sur le graphe dont la représentation graphique a des propriétés géométriques reconnaissables : le graphe d'une représentation réflexive contient la « diagonale » — l'ensemble des couples (x, x) — ; le graphe d'une relation symétrique est symétrique par rapport à cette diagonale (fig. II-6 et II-7). Dans les exemples de relations binaires sur R données ci-dessus (V. fig. II-5 a et b) la première relation est réflexive, symétrique et transitive, et la seconde est simplement symétrique.

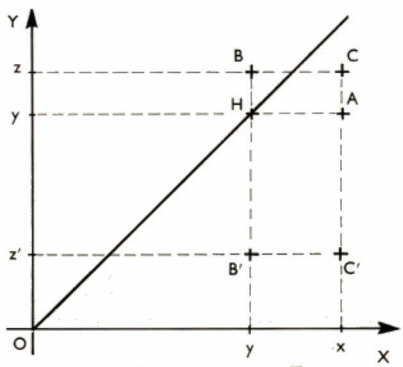


Fig. II-6 — La propriété de transitivité est difficile à interpréter graphiquement : si A et B appartiennent au graphe (la 1re ordonnée de B est égale à la 2e ordonnée de A) alors le 4e sommet C du rectangle AHBC appartient au graphe. De même si B′ appartient au graphe, C′ appartient au graphe (xRy) et (yRz) ⇒ (xRz)

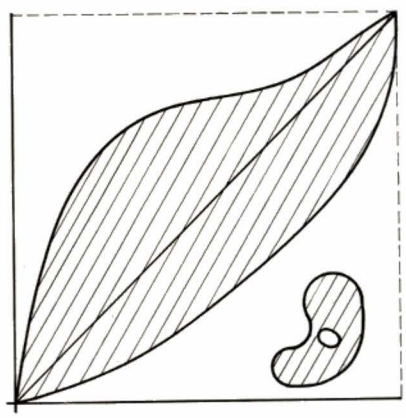


Fig. II-7
Graphe si la relation est réflexive

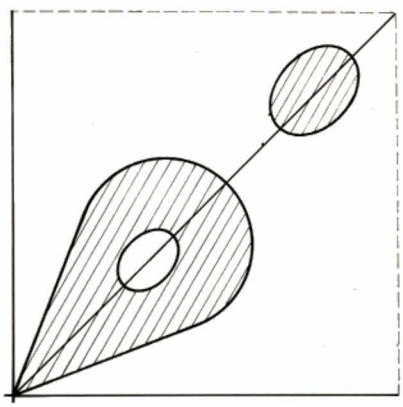


Fig. II-8 — Graphe si la relation est symétrique mais non réflexive

4.3. Définition des relations d'équivalence et des relations d'ordre. — *Une relation binaire dans un ensemble E est une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive.*

Une relation binaire dans un ensemble E est une relation d'ordre si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

Dans l'ensemble des nombres entiers « x et y ont même chiffre des unités » est une relation d'équivalence ; dans le même ensemble « x est supérieur ou égal à y », et « x est inférieur ou égal à y », sont des relations d'ordre. Pour étudier complètement les propriétés des relations d'équivalence et des relations d'ordre, pour comprendre l'importance et la généralité de ces notions nouvelles, il nous faut d'abord préciser celles de « fonction » et d'« opération » que nous désignerons par les termes d'*application* et de *loi de composition*.

5. APPLICATIONS

5.1. Définition. — Soit deux ensembles X et Y. Une application de X dans Y est une correspondance f qui associe à tout élément x de X un élément unique y de Y; y est l'image de x par f, et elle est notée $f(x)$. Les applications sont désignées au moyen de différents symboles équivalents : f, $x \xrightarrow{f} y$, $x \to f(x)$, $y = f(x)$.

Ce type de relations est constamment utilisé dans les sciences appliquées : par exemple, à un point de l'espace, nous pouvons faire correspondre la valeur d'une grandeur physique définie en ce point (pression atmosphérique, champ électrique, masse, etc.) ; à un triangle, nous pouvons associer sa surface. En arithmétique, un exemple d'application de l'ensemble des entiers naturels dans celui des chiffres consiste à associer à chaque nombre son chiffre des unités. Le lecteur familiarisé avec les mathématiques élémentaires aura reconnu dans les fonctions classiques des applications d'un ensemble de nombres dans lui-même ; par exemple, la fonction $f(x) = x^2$ associe un nombre et son carré. Les termes : application, fonction, transformation, sont synonymes.

Une application f de X dans Y est une relation dans $X \times Y$: xRy si $y = f(x)$. Son graphe G est caractérisé par le fait que pour chaque $x \in X$, il existe un élément unique $y \in Y$ tel que $(x, y) \in G$; G est l'ensemble des éléments $[x, f(x)]$. Les figures II-9a, 9b, 9c montrent l'interprétation graphique de cette propriété : les parallèles au second axe de coordonnées coupent le graphe au plus en un point. Nous appellerons X *ensemble de départ de f*, ou encore *ensemble de définition de f* (ensemble des x pour lesquels f est définie), et Y *ensemble d'arrivée de f;* le sous-ensemble de Y constitué par les éléments y images des x de X, est appelé l'*ensemble des valeurs de f* ou *ensemble image directe* de X par f et il est parfois noté $f(X)$.

5.2. Applications fondamentales. — L'identité ou application identique est l'application de X dans lui-même, qui à tout élément x de X associe ce même x; son graphe est la diagonale Δ_X du produit $X \times X$:

$$\Delta_X = \{(x, y,) \text{ tel que } x = y,\ y \in X,\ x \in X\}$$

L'identité de X est notée id_X.

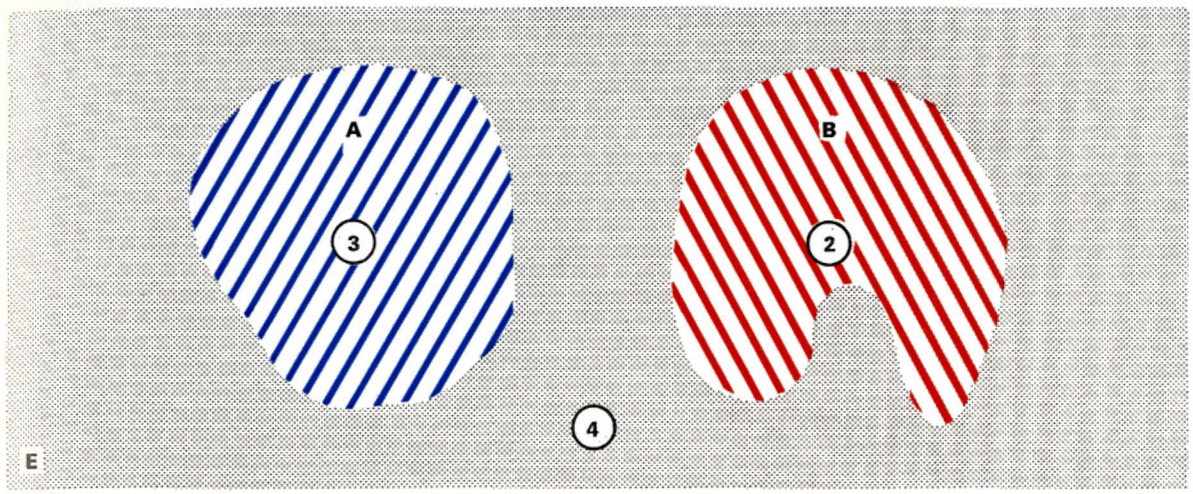
Si A est une partie de X, l'application de A dans X qui à tout élément x de A associe ce même x est appelée *injection canonique*, de A dans X; elle est notée j_A. Par exemple, nous pouvons considérer l'injection canonique de l'ensemble des nombres entiers pairs dans l'ensemble des nombres entiers. L'injection canonique est différente de l'identité car pour j_A, l'ensemble de définition est différent de l'ensemble d'arrivée.

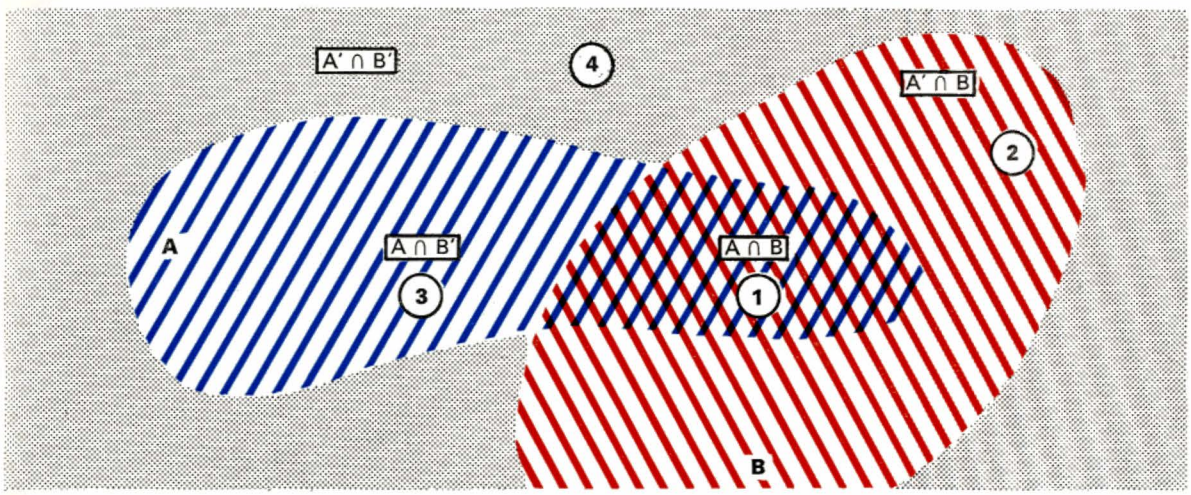
— Soit f une application de X dans Y et $A \subset X$. L'application de A dans Y définie par $x \in A \to f(x) \in Y$ est une nouvelle application dont l'ensemble de départ est A. Elle est appelée *restriction* de f à A, et est notée f_A. Par exemple, l'injection canonique j_A est la restriction à A de l'application identique de X id_X.

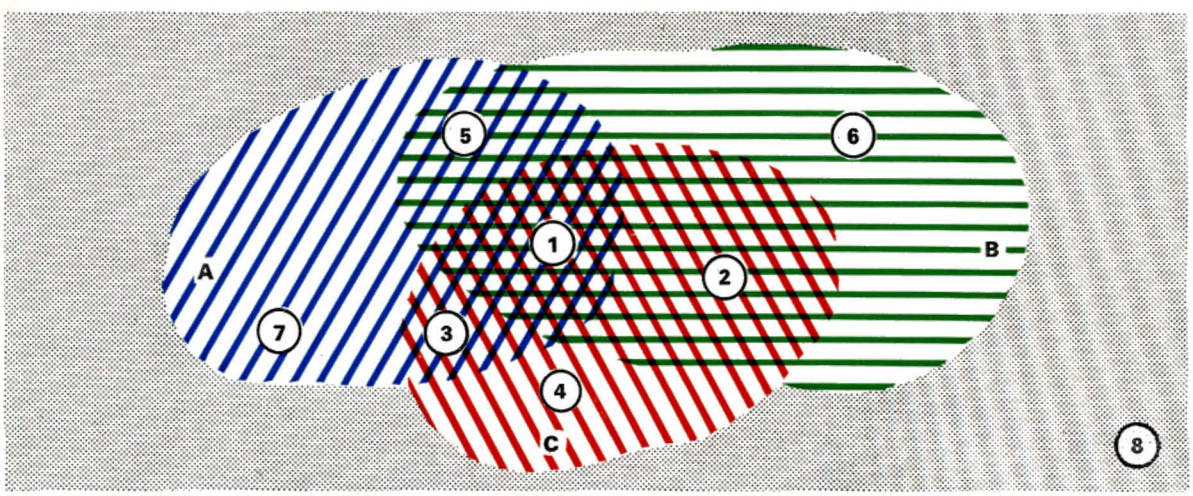
— Une application f de X dans T dont f_A est une restriction à $A \subset X$ est appelée *prolongement* à X de f_A.

— L'application qui à tout élément (x, y) du produit $X \times Y$ fait correspondre la première coordonnée x appartenant à X, s'appelle la *première projection* ou *projection sur X;* elle est notée pr_1. De même, la *deuxième projection* est l'application $(x, y) \to y = pr_2(x, y)$.

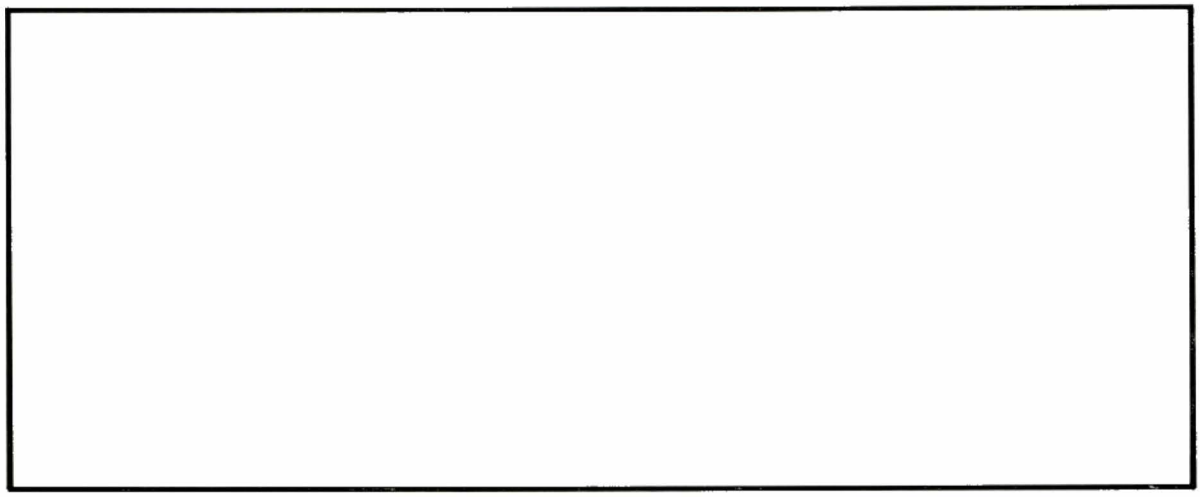
Exemples d'union et d'intersection



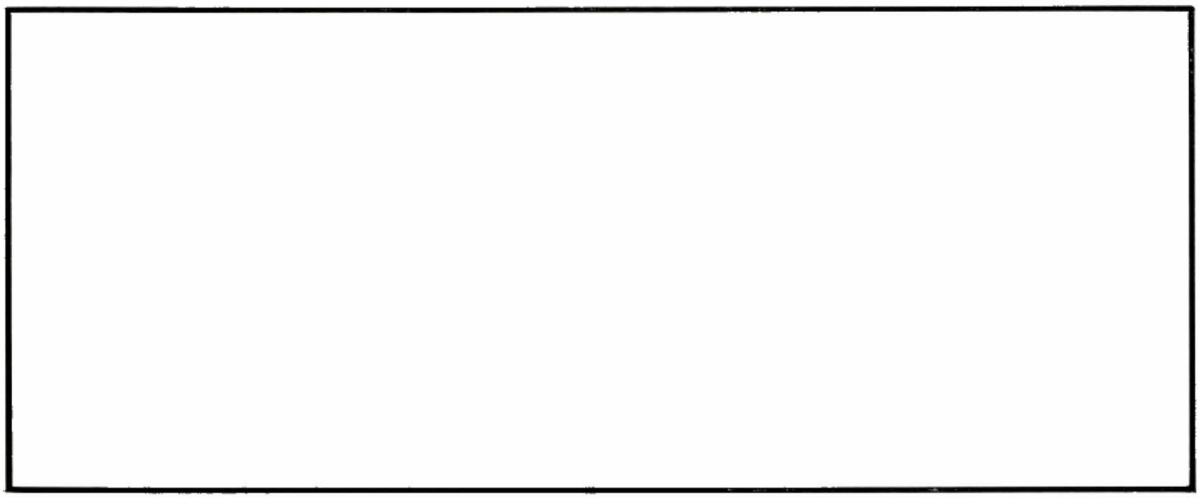




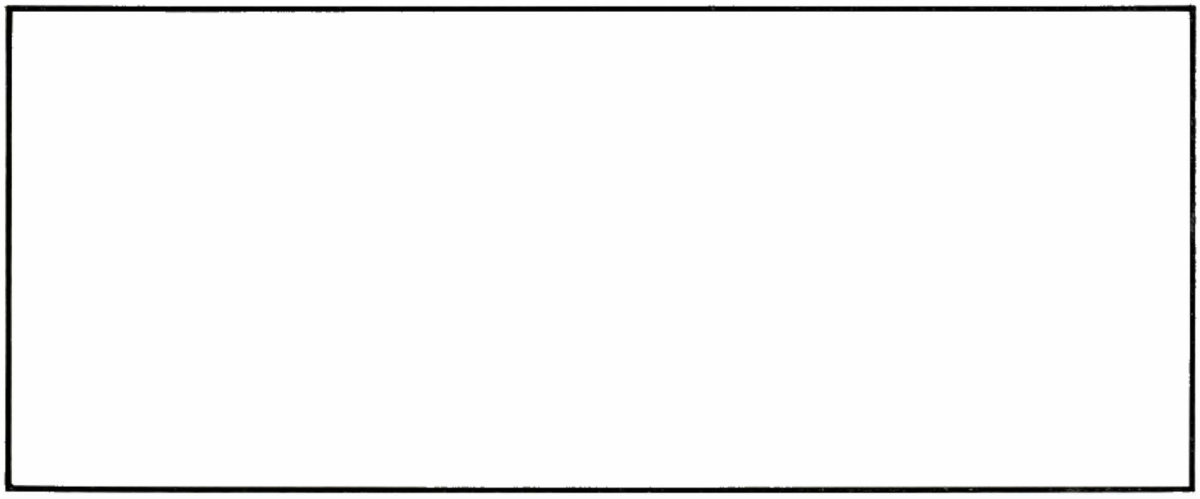
Illustrations d'équivalences logiques



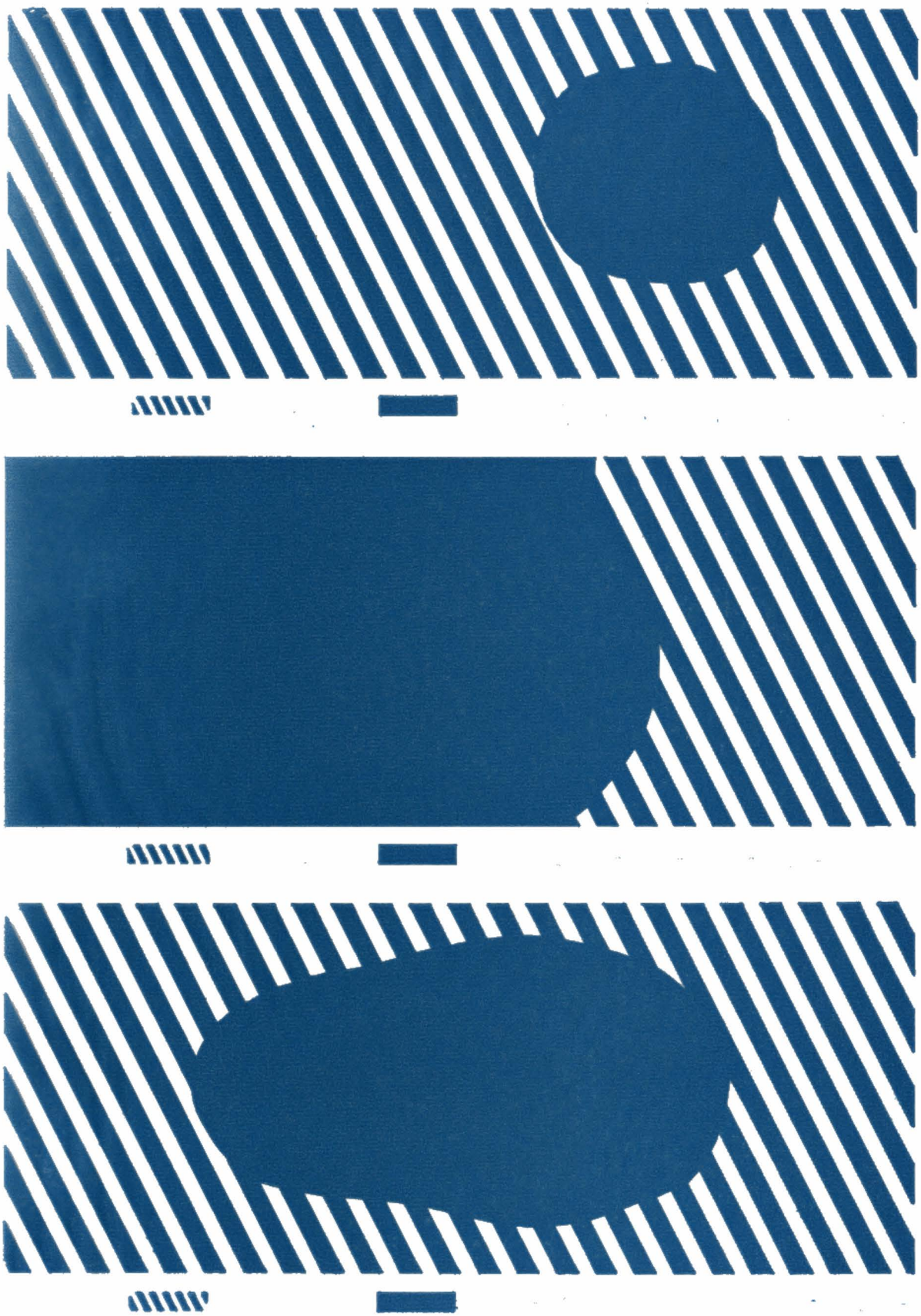
$A \cap B = \varnothing \iff A \subset B' \iff B \subset A'$ A B A′ B′

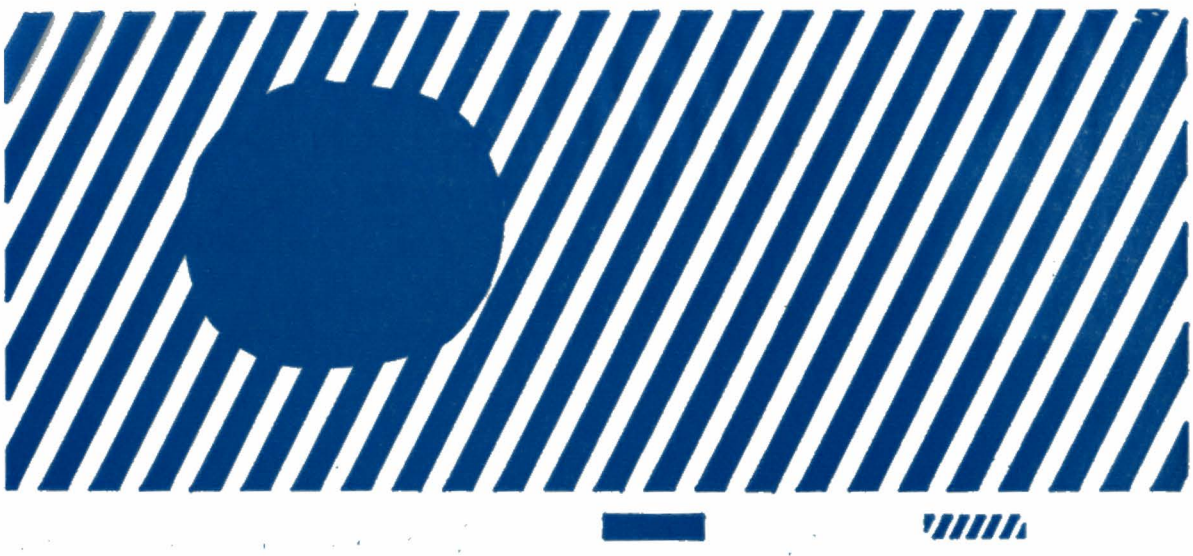


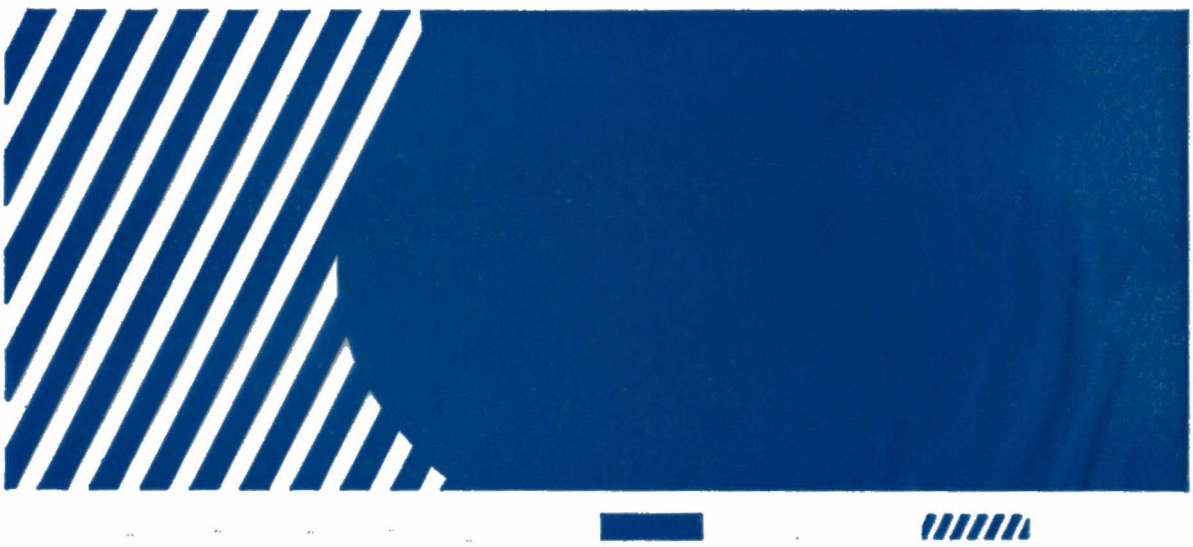
$A \cup B = E \iff A' \subset B \iff B' \subset A$ A B A′ B′

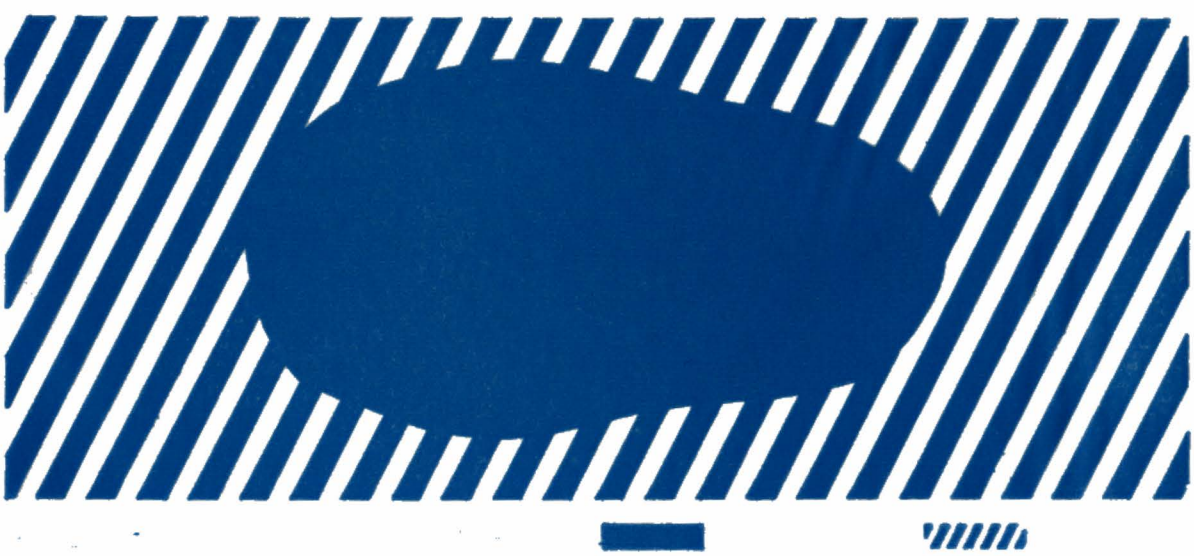


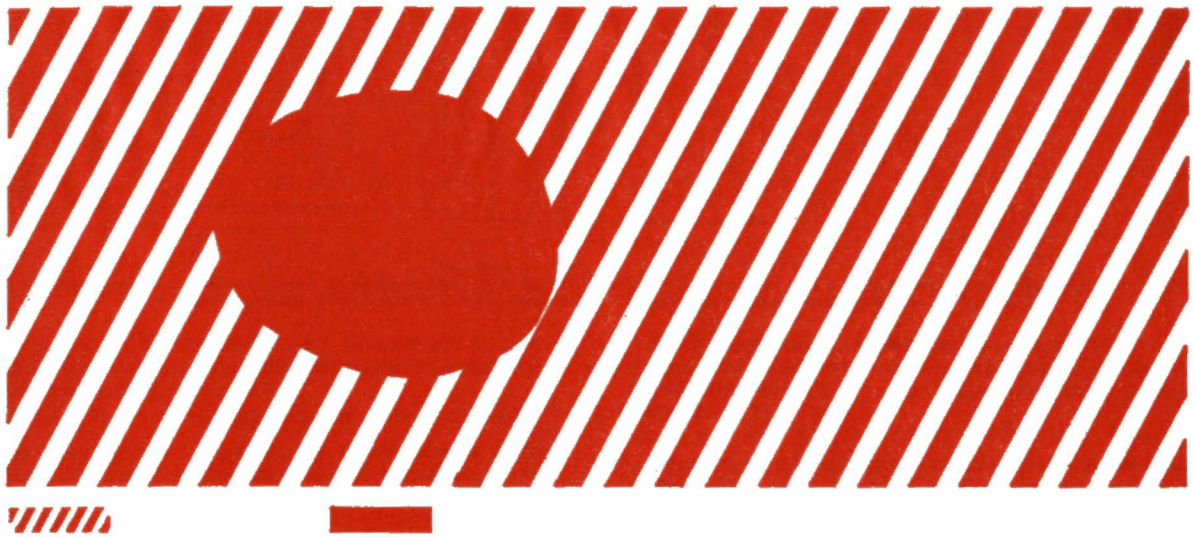
$B \subset A \iff A' \subset B'$ A B A′ B′

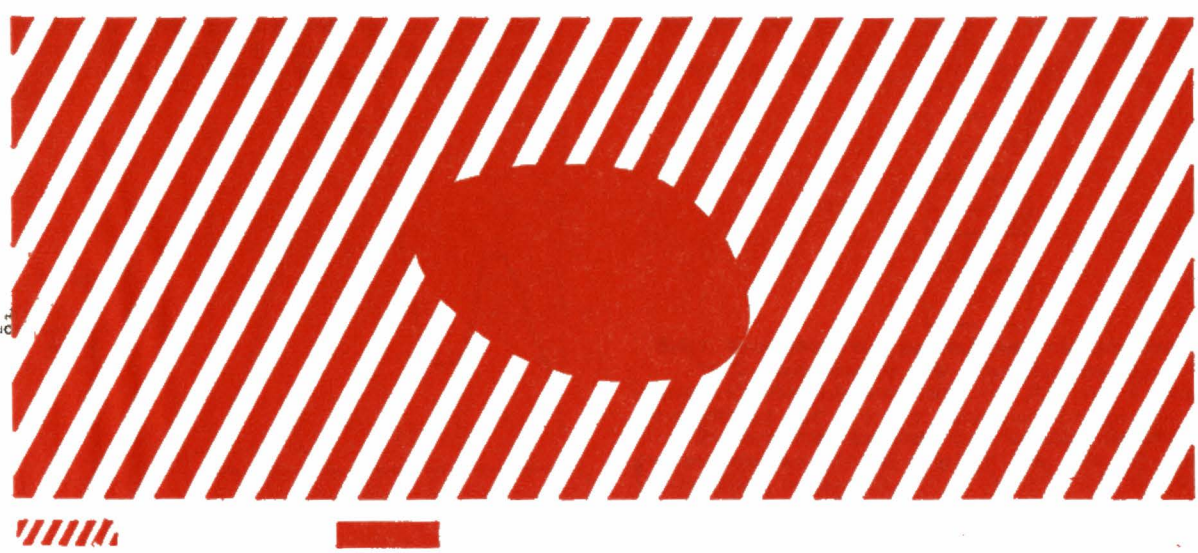












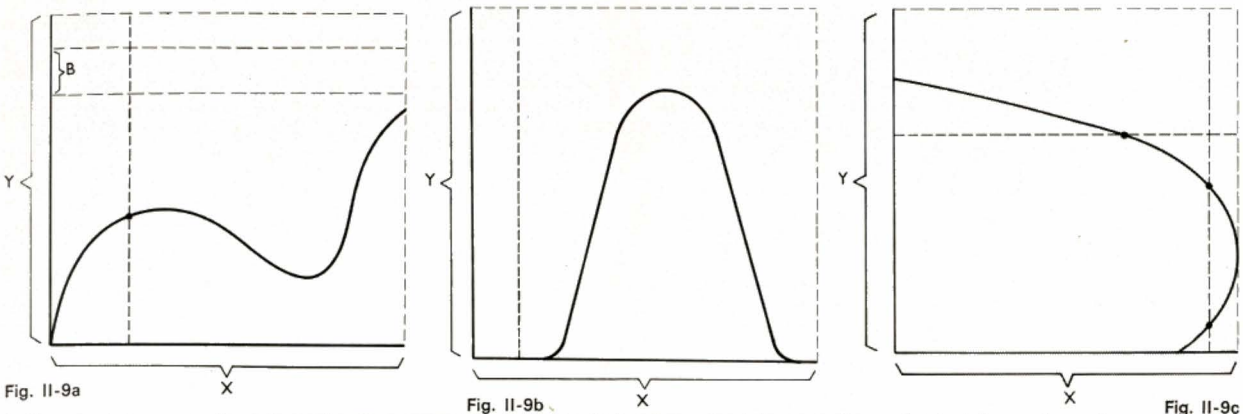


Fig. II-9a — Fig. II-9b — Fig. II-9c

La ligne dessinée en a représente le graphe d'une application de X dans Y. Les lignes dessinées en b et c représentent des graphes qui ne sont pas des graphes d'applications de X dans Y. La ligne dessinée en c représente le graphe d'une application de Y dans X

Parmi les applications de E dans F qui prennent un nombre fini de valeurs, nous pouvons distinguer les applications qui ne prennent qu'une valeur :

$\forall\, x \in E,\ f(x) = c \in F$. (Le signe $\forall$ se lit : pour tout)

Ces applications s'appellent les **applications constantes.** Elles sont notées par le même symbole que leur valeur. Remarquons que l'identité *n'est pas* une application constante.

5.3. Propriétés générales des applications

5.3.1. Image directe et image réciproque. — Soit f une application de X dans Y. À tout sous-ensemble A de X, f fait correspondre un sous-ensemble B de Y qui est l'ensemble des images par f des éléments de A. L'ensemble $B = \{y \in Y$ tel que $\exists\, x \in A : y = f(x)\}$ est l'*image directe* de A par f; il est noté $f(A)$. Réciproquement, à tout sous-ensemble D de Y correspond un sous-ensemble C de X tel que pour tout x de C, $f(x) \in D$. L'ensemble $C = \{x \in X$ tel que $f(x) \in D\}$ est l'*image réciproque* de D par f, et est noté $f^{-1}(D)$. Ces ensembles présentent les propriétés suivantes :

1° $(A \neq \varnothing) \Longleftrightarrow f(A) \neq \varnothing$.

2° Si f est une application de X dans Y; alors $f^{-1}(Y) = X$, mais la relation $f(X) = Y$ n'est pas toujours vraie (V. fig. II-9a et § 5.3.2).

3° La relation $f^{-1}(B) = \varnothing$ peut être vraie même si nous avons $B \neq \varnothing$ (V. fig. II-9a), lorsque $f(X) \neq Y$ et $B \subset \complement_Y f(X)$.

Par exemple, si f est l'application constante prenant la valeur c, $f^{-1}(D) = \varnothing$ si $c \notin D$ et $f^{-1}(D) = X$ si $c \in D$.

5.3.2. Applications surjectives. — Une application f de X dans Y est *surjective* ou est une *surjection* lorsque $f(X) = Y$. f est dite *application de X sur Y*. Dans ce cas, nous pouvons vérifier graphiquement que toute parallèle à l'axe portant X, et coupant Y, coupe le graphe de l'application (fig. II-10). La figure II-9a est un exemple du cas contraire.

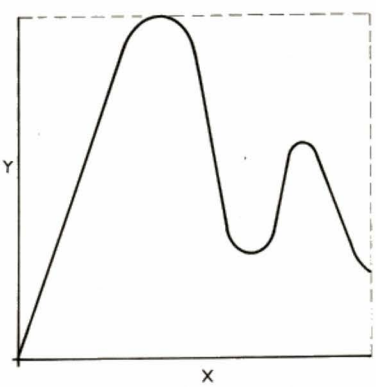


Fig. II-10

Graphe d'une application surjective de X dans Y

5.3.3. Application injectives. — Une application f de X dans Y est *injective* ou est une *injection* lorsque deux éléments distincts de X ont pour images par f deux éléments distincts de Y :

$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ soit $f(x) = f(y)) \Longleftrightarrow (x = y)$.

Nous avons déjà défini l'injection canonique : le lecteur vérifiera que cette fonction jouit de cette propriété. Si l'injection canonique est surjective, l'ensemble de départ est égal à l'ensemble d'arrivée, et nous retrouvons la définition de l'application identique (V. § 5.2).

5.3.4. Applications bijectives. — Une application est *bijective* ou est une *bijection* si elle est à la fois injective et surjective.

L'application $x \to 2x$ de l'ensemble des nombres entiers naturels dans lui-même est injective mais non surjective : l'image de l'ensemble de départ est l'ensemble des entiers pairs (l'ensemble des valeurs est différent de l'ensemble d'arrivée) ; elle n'est donc pas bijective.

L'application $x \to x^2$ de l'ensemble des nombres réels positifs dans lui-même est bijective.

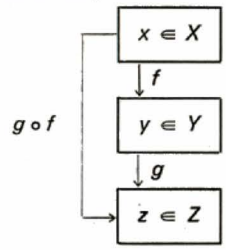
À une application bijective f de X sur Y faisant de tout y de Y l'image d'un et d'un seul élément x de X, nous pouvons associer une correspondance univoque de Y vers X, appelée *application réciproque* ou *application inverse de f*; elle est notée f^{-1} ou $y \to f^{-1}(y) = x$, et f est dite *inversible*. L'application f^{-1} est également bijective. Ces notions seront précisées au paragraphe suivant.

5.4. Composition des applications. — Soit X, Y, Z trois ensembles quelconques, f une application de X dans Y et g une application de Y dans Z. À tout élément x de X est associé un élément $y = f(x)$ de Y; à cet élément y l'application g associe un élément $z = g(y)$ de Z soit : $z = g\,[f(x)]$. L'application, qui associe à tout x de X un élément z de Z par l'intermédiaire de f et de g, est dite *application composée* de f par g.

Elle est notée $g \circ f$ (qui se lit : g *rond* f) :

$$g \circ f(x) = g[f(x)].$$

Schématiquement nous pouvons écrire :



5.4.1. Propriétés des applications composées

1° Si f est injective et si g est injective, $g \circ f$ est injective. En effet, si f est injective, $y = y' \Rightarrow x = x'$, et si g est injective, $z = z' \Rightarrow y = y'$, donc $z = z' \Rightarrow x = x'$.

2° Si $g \circ f$ est injective, f est injective. En effet, si $g \circ f$ est injective, $g[f(x)] = g[f(x')] \Rightarrow (x = x')$; donc $[f(x) = f(x')] \Rightarrow (x = x')$.

3° Si f est surjective et si g est surjective, $g \circ f$ est surjective. En effet, si f est surjective, $f(X) = Y$, et si g est surjective $g(Y) = Z$, donc $g\ [f(X)] = Z = (g \circ f)\ (X)$.

4° Si $g \circ f$ est surjective, g est surjective. En effet, si $g \circ f$ est surjective, $(g \circ f)\ (X) = Z$ et si nous appelons $Y' = f(X)$, l'ensemble de départ de g, nous avons: $Z = g\ [f\ (X)] = g(Y')$.

5° Si $g \circ f$ est surjective et g injective, f est surjective. En effet, g est surjective (V. 4°), et donc bijective. Par conséquent, si tout z de Z est l'image de x, il en est de même de tout y.

6° Si $g \circ f$ est injective et f surjective, g est injective. En effet, f est injective (V. 2°), donc bijective, et par conséquent si tout $z = (g \circ f)\ (x)$ est l'image d'un seul x, il est de même l'image d'un seul y, y étant la variable intermédiaire $f(x)$ liée à x par la bijection f.

7° Si g est bijective et f est bijective, $g \circ f$ est bijective.

8° Si f_1, f_2, f_3 désignent trois applications: $A \xrightarrow{f_1} B$, $B \xrightarrow{f_2} C$, $C \xrightarrow{f_3} D$ alors $f_3 \circ (f_2 \circ f_1) = (f_3 \circ f_2) \circ f_1 = f_3 \circ f_2 \circ f_1$.

La composition des applications est associative. À condition de conserver l'ordre des termes f_3, f_2, f_1 nous pouvons utiliser n'importe quelle composée intermédiaire. Cette propriété s'applique à la composition d'un nombre quelconque d'applications.

5.4.2. Application identique et application inversible. — Soit f une application de X dans Y.

1° a) La composée de f par l'application identique de Y est égale à f: $id_Y \circ f = f$. Schématiquement nous avons:

$$(x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{\mathrm{id}_Y} y) = (x \xrightarrow{f} y)$$

b) La composée de l'application identique de X par f est égale à f: $f \circ id_X = f$.

$$(x \xrightarrow{\mathrm{id}_X} x \xrightarrow{f} y) = (x \xrightarrow{f} y)$$

Si nous remplaçons id_X par l'injection canonique j_A d'une partie A de X (j_A est la restriction à A de id_X), la composée $f \circ j_A$ est égale à f_A qui est la restriction à A de f. D'après le paragraphe 5.4.1, 1°, si f est injective, f_A est aussi injective.

c) De la même façon, en notant f^{-1} l'application réciproque $Y \to X$, nous avons:

$$id_X \circ f^{-1} = f^{-1} \text{ et } f^{-1} \circ id_Y = f^{-1}$$

d) Dans le cas général nous avons: $X \subset f^{-1}\ [f(X)]$ et $f[f^{-1}\ (Y)] \subset Y$; si f est une surjection: $f\ [f^{-1}(Y)] = Y$ c'est-à-dire $f \circ f^{-1} = id_Y$; si f est une injection: $f^{-1}[f(X)] = X$, c'est-à-dire $f^{-1} \circ f = id_Y$. En conclusion, si f est une bijection, nous pouvons écrire: $f \circ f^{-1} = id_Y$ et: $f^{-1} \circ f = id_X$.

2° Une application f de X dans Y est *inversible* s'il existe une application f^{-1} telle que $f \circ f^{-1} = id_Y$ et $f^{-1} \circ f = id_X$; cette condition est équivalente à la bijectivité de f, ce qui revient à dire que f^{-1} n'est définie que si f est bijective.

a) *Unicité de f^{-1}:* s'il existait deux applications réciproques g et h de f telles que $g \neq h$, il existerait un élément y de Y tel que $g\ (y) \neq h(y)$, ce qui n'est pas. En effet, $f \circ g = id_Y$ et $(f \circ g)\ (y) = y$, et donc:

$$h\ (y) = h \circ (f \circ g)\ (y) = (h \circ f) \circ g(y) = id_X \circ g(y) = g(y)$$

b) Si f est bijective, par définition, tout élément y n'est l'image que d'un seul x; par conséquent, il existe une application qui à tout y fait correspondre un élément x bien déterminé: c'est f^{-1}. Réciproquement, si f^{-1} est définie, pour tout y de Y, il existe un élément $x = f^{-1}(y)$, et: $f\ (x) = f \circ f^{-1}(y) = id_Y\ (y) = y$, c'est-à-dire que $f\ (X) = Y$: f est surjective. D'autre part, si

$$f\ (x) = f(x'),$$

alors:

$$f^{-1}\ [f(x)] = f^{-1}\ [f(x')],$$

$$(f^{-1} \circ f)\ (x) = (f^{-1} \circ f)\ (x')$$

et: $f^{-1} \circ f = id_X$, ce qui implique $x = x'$. L'application f est donc injective.

Il y a donc bien équivalence: f^{-1} définie $\iff$ f bijective.

Une bijection f de x sur X telle que $f = f^{-1}$ est appelée *application involutive*.

5.5. Familles d'éléments. Indices. Familles d'ensembles. — Soit f une application d'un ensemble I, appelé *ensemble des indices*, dans un ensemble E. Le graphe de f s'appelle une *famille* à valeurs dans E. Par abus de langage, E est appelé l'ensemble des éléments de la famille. Une famille à valeurs dans E est, en fait, un ensemble d'éléments de $I \times E$, appelés aussi *termes*, de la forme (i, x), où i *est* l'indice, et x la *valeur* du terme de la famille (plus précisément, ce sous-ensemble de $(I \times E)$ est le graphe de f; (V. § 3.3). Pour simplifier nous l'écrirons x_i (lire « x indice i »), et nous désignerons la famille entière par $(x_i)_{i \in I}$, ou, s'il n'y a pas de confusion possible par (x_i). Il faut distinguer le terme x_i de sa valeur x dans E, car plusieurs termes ayant des indices différents peuvent avoir pour valeur le même élément x de E. De même, il faut distinguer la famille $(x_i)_{i \in I}$ de $f(I)$ qui est l'ensemble de ses valeurs distinctes dans E.

— Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles. La *réunion* de cette famille désignée par $\bigcup_{i \in I} X_i$ est l'ensemble des x qui appartiennent à un ensemble au moins de la famille $(X_i)_{i \in I}$.

— Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles dont l'ensemble des indices I *n'est pas vide*. L'intersection de cette famille désignée par $\bigcap_{i \in I} X_i$ est l'ensemble des x qui appartiennent à tous les ensembles de la famille $(X_i)_{i \in I}$.

— La réunion et l'intersection d'une famille d'ensemble jouissent des mêmes propriétés que la réunion et l'intersection de deux ensembles.

En particulier:

1° $\complement_E\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) = \bigcap_{i \in I}\left(\complement_E X_i\right)$ et $\complement_E\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) = \bigcup_{i \in I}\left(\complement_E X_i\right)$, si $(X_i)_{i \in I}$ est une famille de sous-ensembles de E.

2° $\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} Y_j\right) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (X_i \cap Y_j)$, où I et J sont deux ensembles d'indices différents définissant les familles $(X_i)_{i \in I}$ et $(Y_j)_{j \in J}$.

3° $\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) \cup \left(\bigcap_{j \in J} Y_j\right) = \bigcap_{(i,j) \in I \times J} (X_i \cup Y_j)$.

— Soit A un sous-ensemble de X et $(X_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles de X. Si $A \subset \bigcup_{i \in I} X_i$, $(X_i)_{i \in I}$ est appelé *recouvrement* de A. Si la famille de sous-ensembles $(X_i)_{i \in I}$ est un recouvrement de X tel que pour tout $k \in I$ et $j \in I$ nous ayons $X_j \cap X_k = \varnothing$ si $k \neq j$, nous dirons que c'est une *partition* de X.

Remarque : Évidemment, ces *définitions* ne sont pas rigoureuses. Comme nous ne pouvons donner de la logique, donc de la théorie des ensembles, autre chose que des *notions*, nous nous contentons de *descriptions* pour les introduire. Le lecteur aura une intuition de ces notions mais cela suffit pour les manier correctement.

6. RELATIONS D'ÉQUIVALENCE

Cette notion a été définie au paragraphe 4.3 et nous étudierons ici ses principales propriétés.

6.1. Classes d'équivalence. — Lorsqu'un ensemble E est muni d'une relation d'équivalence R nous pouvons considérer le sous-ensemble de E constitué par les éléments $y \in E$ équivalents à un élément $x \in E$ donné; ce sous-ensemble est appelé *classe d'équivalence* de x, et il est noté C_x:

$C_x = \{y \in E \text{ tel que } yRx\}$. Du fait de la réflexivité xRx nous pouvons écrire: $x \in C_x$.

Deux éléments équivalents x et y ont des classes d'équivalence confondues

$$\boxed{\begin{array}{c} x\,R\,y \\ \text{et} \\ z \in C_x \end{array}} \iff \boxed{\begin{array}{c} x\,R\,y \\ z\,R\,x \end{array}} \iff \boxed{\begin{array}{c} x\,R\,y \\ z\,R\,y \end{array}} \iff \boxed{\begin{array}{c} x\,R\,y \\ z \in C_y \end{array}}$$

La première et la troisième équivalence expriment la définition d'une classe d'équivalence ; la seconde provient de la transitivité et de la symétrie d'une relation d'équivalence.

Lorsque deux éléments vérifient une relation d'équivalence R ils sont dits équivalents *modulo* R (ou *suivant* R) ; de même, C_x est la classe d'équivalence de x modulo R.

Deux classes d'équivalence quelconques sont soit disjointes, soit confondues, c'est-à-dire que deux classes d'équivalence différentes n'ont aucun élément en commun. En effet, soit y un élément de E non équivalent à x, si C_x et C_y avaient un élément commun z on aurait : xRz et zRy, d'où d'après la transitivité de R, xRy, ce qui est contraire à l'hypothèse. Tout élément de E n'appartient donc qu'à une seule classe d'équivalence et l'ensemble des classes d'équivalence constitue une partition de E définie par la donnée de R (V. § 2.1.4 et 5.5). Inversement, étant donnée une partition de E, nous pouvons lui associer une relation d'équivalence R en considérant comme équivalents deux éléments appartenant à un même sous-ensemble de la partition.

6.2. Ensemble quotient. — L'ensemble de toutes les classes d'équivalence de E modulo R s'appelle : *ensemble quotient de E par R*, il est noté : E/R.

L'application j qui à tout élément x de E fait correspondre $C_x \in E/R$ s'appelle l'application canonique de E sur E/R.

Remarquons, par ailleurs, que $j^{-1}(j(x)) = \{y \in E \text{ tel que } xRy\} = C_x$ (C_x étant considéré dans cette égalité comme un sous-ensemble de E et non comme un élément de E/R).

6.3. Relations compatibles avec une relation d'équivalence

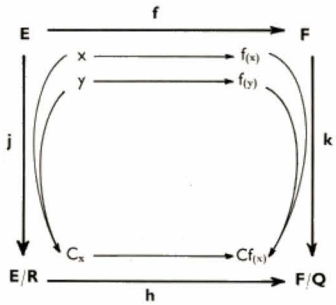
6.3.1. Définition. — Soit R une relation d'équivalence et Q une relation. Q est compatible avec R si : $(Q(x) \text{ et } xRy) \Rightarrow Q(y)$, c'est-à-dire que si Q est vraie pour x et si y est équivalent à x modulo R, Q est vraie pour y.

6.3.2. Applications compatibles avec une relation d'équivalence. — Soit R une relation d'équivalence dans un ensemble E, et f une fonction définie sur E. Cette fonction est dite compatible avec R si la relation $y = f(x)$ est compatible avec R : $(y = f(x) \text{ et } xRz) \Rightarrow y = f(z)$, c'est-à-dire que si x et z sont équivalents modulo R, ils sont même image par f, ce qui revient à dire que la restriction de f à toute classe d'équivalence est constante (sur cette classe d'équivalence).

Théorème. — Soit R une relation d'équivalence dans un ensemble E, et j l'application canonique (§ 6.2) de E sur E/R. Pour qu'une application f de E dans F soit compatible avec R, il faut et il suffit que f puisse se mettre sous la forme $h \circ j$, h étant une application de E/R dans F.

Nous dirons que h, qui est uniquement déterminée par f, est l'application déduite par *passage au quotient* suivant R.

Appelons f une application de E dans F, R une relation d'équivalence dans E, Q une relation d'équivalence dans F, j l'application canonique de E sur E/R et k l'application canonique de F sur F/Q. L'application f est compatible avec R et Q si $k \circ f$ est compatible avec R, ce qui revient à dire que $xRy \Rightarrow f(x)\, Qf\, (y)$ donc que l'équivalence modulo R de x et y entraîne l'équivalence modulo Q de leurs images par f dans F. Il existe alors une application h de E/R dans F/Q déduite de $k \circ f$ par passage au quotient suivant R qui s'appelle *application déduite de f* par passage aux quotients suivant R et Q. Nous avons donc $k \circ f = h \circ j$.



7. RELATIONS D'ORDRE

Cette notion, qui a été introduite au paragraphe 4.3, va être précisée ici.

7.1. Ordre strict et ordre large. — La définition donnée au paragraphe 4.3 (relation réflexive, antisymétrique et transitive) est celle d'une relation d'ordre au « sens large » (notée $\leqslant$ ou $<$). Il faut parfois considérer des relations sur un ensemble E qui ne sont définies que pour des éléments distincts de E, et pour lesquelles, par conséquent, la propriété de réflexivité n'intervient pas. Il n'est pas possible d'avoir simultanément xRy et yRx ainsi que xRx. Ce sont des relations d'ordre au sens strict ; elles sont équivalentes à $(x < y \text{ et } x \neq y)$. Par exemple, sur l'ensemble des parties de E, nous pouvons définir une relation d'inclusion telle que pour tout couple (A, B) de parties de E, vérifiant la relation, nous ayons $A \subset B$ avec $\complement_B A \neq \varnothing$, donc jamais $(A = B)$. Dans ce cas, il faut distinguer l'inclusion au sens large notée alors $\subseteq$ (inclusion comprenant l'égalité) et l'inclusion au sens strict notée $\subset$ (inclusion excluant l'égalité). De même pour les relations d'ordre définies sur des ensembles de nombres, nous utiliserons les symboles $\leqslant$ (ou $\geqslant$) et $<$ (ou $>$). Cependant, à défaut de symbole spécial, nous utiliserons les notations $a < b$ (qui se lit « a inférieur à b ») et $b > a$ (qui se lit « b supérieur à a ») aussi bien pour les relations d'ordre que pour les relations d'ordre au sens strict. La relation $a < b$ se lit « a strictement inférieur à b » et la relation $b > a$ se lit « b strictement supérieur à a ».

7.2. Ordre total. — Lorsqu'un ensemble E est muni d'une relation d'ordre R, nous constituons un couple (E, R) qui est appelé *ensemble ordonné ;* généralement il est désigné simplement par E. Deux éléments, pour lesquels une relation d'ordre R est définie, sont dits *comparables* par R. Si, quels que soient les éléments x et y de E, nous avons soit $x = y$, soit xRy, soit yRx, c'est-à-dire si tous les éléments de E sont comparables deux à deux par R, nous disons que E est *totalement ordonné*. La relation d'inclusion (au sens large) n'est pas une *relation d'ordre total* sur l'ensemble des parties d'un ensemble E car il existe des parties de E disjointes. Toutefois, la relation d'inégalité définie sur l'ensemble des nombres entiers naturels $x \leqslant y$ est une relation d'ordre total, de même que $x < y$, puisque nous pouvons dire si un nombre est égal, plus grand ou plus petit qu'un autre nombre.

7.3. Propriétés des éléments d'un ensemble ordonné

7.3.1. Éléments extrémaux. — Un *élément minimal* d'un ensemble ordonné E est un élément $a \in E$ tel que $x \leqslant a \Rightarrow x = a$. De même un *élément maximal* est un élément b vérifiant la relation $x \geqslant b \Rightarrow x = b$. Par exemple, dans l'ensemble des parties *non vides* de E ordonné par inclusion, les éléments minimaux, sont les parties ne contenant qu'un élément : $\{x\}$.

7.3.2. Plus petit élément et plus grand élément. — Le *plus petit élément* d'un ensemble ordonné E est un élément a tel que pour *tout* $x \in E$ nous ayons $a \leqslant x$. S'il existe, cet élément est *unique ;* en effet, si un autre élément a' était tel que $a' \leqslant x$ pour tout x, nous aurions $a' \leqslant a$ et $a \leqslant a'$, c'est-à-dire $a = a'$. De même, le *plus grand élément* de E est un élément b tel que $b \geqslant x$ pour tout $x \in E$.

7.3.3. Minorants et majorants. — Soit X une partie d'un ensemble ordonné E. Un *minorant* de X dans E est un élément $y \in E$ tel que pour tout $x \in X$ nous ayons $y \leqslant x$. Nous disons que y *minore* X, et que X est minorée si l'ensemble des minorants de X est non vide. De même, un *majorant* de X dans E est un élément $z \in E$ tel que pour tout $x \in X$ nous ayons $z \geqslant x$. Lorsqu'une partie X de E est à la fois minorée et majorée, elle est dite bornée dans E.

7.3.4. Borne inférieure et borne supérieure. — Soit X une partie d'un ensemble ordonné E. La *borne inférieure* de X dans E, est le plus grand élément de l'ensemble des minorants de X dans E. De même, la borne supérieure de X dans E est le plus petit élément de l'ensemble des majorants de X dans E.

7.4. Ensembles filtrants. — Un ensemble ordonné E est filtrant à gauche si toute partie à deux éléments de E est minorée. De même, E est filtrant à droite si toute partie à deux éléments est majorée.

Ensembles réticulés. — Un ensemble ordonné E est réticulé si toute partie à deux éléments admet une borne supétieure et une borne inférieure dans E.

7.5. Intervalles. — Soit E un ensemble ordonné par une relation d'ordre total, a et b deux éléments de E, avec $a \leqslant b$.

— Un *intervalle fermé* $[a, b]$, est un ensemble d'éléments x de E tels que : $a \leqslant x \leqslant b$; a est l'*origine* de l'intervalle, b est son *extrémité*. Cet intervalle n'est jamais vide puisque par définition il contient au moins a et b, et *si* $a = b$, il se réduit à $[a, a] = \{a\}$.

— Un *intervalle ouvert* $]a, b[$ est un ensemble d'éléments x de E tels que : $a < x < b$. Cet intervalle peut être vide même si $a < b$, ou si $a = b$. En effet, dans ce cas $]a, a[= \varnothing$ car un intervalle ouvert ne contient ni son origine, ni son extrémité.

— Un *intervalle semi-ouvert à droite* $[a, b[$ est un ensemble d'éléments x de E tels que : $a \leqslant x < b$. Cet intervalle est aussi semi-fermé à gauche. Si $a = b$, $[a, a[= \varnothing$.

— *Un intervalle semi-ouvert à gauche* $]a, b]$ est un ensemble d'éléments x de E tels que : $a < x \leqslant b$. Il est aussi semi-fermé à droite. Si $a = b$, $]a, a] = \varnothing$.

— Un *intervalle fermé illimité à gauche* $]\leftarrow, a]$ est un ensemble d'éléments x de E tels que : $x \leqslant a$. L'ensemble $]\leftarrow, a[$ défini par $x < a$ est appelé intervalle *ouvert illimité à gauche; a* est l'extrémité de ces deux intervalles.

— Un *intervalle fermé illimité à droite* $[a, \rightarrow[$ est un ensemble d'éléments de E tels que $x \geqslant a$. L'ensemble $]a, \rightarrow[$ défini par $x > a$ est appelé *intervalle ouvert illimité à droite; a* est l'origine de ces deux intervalles.

CHAPITRE III

LES NOMBRES ENTIERS NATURELS

Ce chapitre et les deux suivants sont consacrés à l'étude des *propriétés des ensembles de nombres* utilisés pour « compter », c'est-à-dire les *nombres entiers* et les *nombres fractionnaires* très familiers au lecteur. Prolongement naturel du précédent, ces chapitres présentent des exemples concrets de propriétés d'ensembles, de lois de composition, de relations qui ont déjà été définies. Parmi celles-ci, nous rencontrerons les règles de calcul qui sont traditionnellement assimilées et appliquées « mécaniquement » ; nous étudierons leurs rapports et la façon dont elles découlent les unes des autres. Ce sera l'occasion d'esquisser une étude des structures algébriques les plus usuelles qui se retrouvent en mathématiques pures et appliquées, dans bien d'autres domaines que l'arithmétique.

1. DÉFINITION DES NOMBRES ENTIERS NATURELS

Pour exposer les propriétés de l'**ensemble des nombres entiers naturels**, nous pouvons choisir cinq propriétés de base et les utiliser pour déduire toutes les autres (notamment les théorèmes de l'arithmétique). L'axiomatique choisie ici a été trouvée par le mathématicien **Peano** au début de ce siècle.

1er axiome : 0 (*zéro*) *est un entier.* L'ensemble des nombres entiers naturels (que nous désignerons dans la suite par la lettre **N**) n'est donc pas vide. Par ailleurs, cet axiome désigne explicitement un nombre dont une propriété particulière sera énoncée au troisième axiome.

2e axiome : il existe une application de **N** *dans lui-même :* à tout entier, nous sommes en mesure de faire correspondre son *successeur.* Cet axiome nous permet de nommer les nombres entiers naturels : ainsi, nous nommerons 1 (*un*) le successeur de 0, 2 (*deux*) le successeur de 1 et ainsi de suite.

3e axiome : 0 *n'est le successeur d'aucun entier;* l'application de **N** dans lui-même n'est donc pas *surjective.*

4e axiome : deux entiers ayant des successeurs égaux sont égaux. L'application définie dans le second axiome est donc *injective.*

5e axiome : un sous-ensemble de **N** *contenant* 0 *et le successeur de chacun de ses éléments s'identifie avec* **N**. Cet axiome exprime que nous pouvons atteindre tous les nombres entiers naturels par le procédé du successeur.

Est-ce que la relation binaire sur **N** *: « l'entier m est le successeur de l'entier n » est une relation d'ordre ?* Nous allons montrer que la réponse à cette question est négative : la relation ci-dessus n'est en effet ni réflexive, ni transitive mais elle est antisymétrique.

— *Elle n'est pas réflexive.* Considérons l'*ensemble des entiers distincts de leurs successeurs :* il contient 0 qui n'est le successeur d'aucun entier. Soit m un élément de cet ensemble et m' son successeur ; si m' était son propre successeur, d'après le quatrième axiome nous aurions $m = m'$. Or, m est distinct de son successeur m'. Ainsi, l'ensemble considéré contient le successeur de chacun de ses éléments ; il s'identifie avec **N** d'après le cinquième axiome. Nous avons ainsi montré que tout entier est distinct de son successeur.

— *La relation étudiée n'est pas transitive.* Si nous avons mRn et nRp nous ne pouvons écrire mRp car les entiers distincts m et n ne peuvent avoir le même successeur p (troisième axiome).

Nous allons maintenant montrer qu'elle est antisymétrique, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'entiers m et n tels que m soit le successeur de n et n le successeur de m. Nous appellerons *ensemble des entiers issus de m* l'ensemble constitué par le successeur de m, le successeur du successeur de m et de façon générale le successeur de tout entier ainsi formé. Considérons l'ensemble A des entiers qui ont la propriété de ne pas appartenir à l'ensemble des entiers issus de m ; A contient zéro. Soit n un élément quelconque de cet ensemble et soit n' son successeur ; si n' était issu de lui-même, n et n' auraient le même successeur, ce qui est contradictoire avec la propriété caractérisant les éléments de l'ensemble considéré. D'après le cinquième axiome, cet ensemble s'identifie donc à **N** et nous avons ainsi montré une propriété plus importante que la propriété d'antisymétrie : nous pouvons dire maintenant que le *procédé du successeur permet d'engendrer* **N** *à partir de* 0 *sans répétition.*

Nous allons montrer maintenant que *tout entier différent de* 0 *est le successeur d'un nombre entier unique* en utilisant une fois de plus le cinquième axiome. Considérons l'ensemble des entiers dont les éléments sont 0 et les successeurs d'entiers. Il contient évidemment le successeur de chacun de ses éléments ; il s'identifie donc avec **N**. D'après le troisième axiome, nous pouvons même préciser que *tout nombre entier différent de* 0 *est le successeur d'un nombre entier unique.*

Nous allons définir avec précision, la relation d'ordre « naturelle » sur les entiers : *supérieur ou égal* à celle qui a été prise comme exemple de relation d'ordre total au chapitre précédent. Nous dirons que le nombre entier n est supérieur ou égal au nombre entier m si n est issu de m ou si $n = m$ (cette relation sera notée : $m \leqslant n$). D'après les démonstrations précédentes et les définitions, il est clair que cette relation binaire sur **N** est réflexive, antisymétrique et transitive : c'est une *relation d'ordre.* En utilisant le cinquième axiome, il est possible de démontrer que c'est une relation d'ordre total, c'est-à-dire que de deux nombres entiers m et n, l'un est toujours supérieur ou égal à l'autre.

2. LE COMPTAGE : FONDEMENTS MATHÉMATIQUES

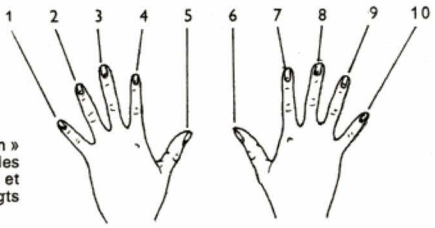
Historiquement, les nombres entiers ont été introduits pour compter « le nombre d'éléments d'un ensemble »,

Un	deux	trois	quatre	cinq	six	sept	huit	neuf
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX

dix	cinquante	cent	cinq cents	mille
X	L	C	D	M

Chiffres romains

appelé aussi nombre cardinal de l'ensemble; mais que signifie mathématiquement l'acte de compter? Lorsque nous comptons le nombre de fruits d'une corbeille à l'aide de doigts, nous établissons une bijection entre l'ensemble des fruits de la corbeille et un sous-ensemble de l'ensemble de référence formé des nombres de 1 à 10 concrétisé, dans ce cas, par l'ensemble des doigts des deux mains.



Il y a une « bijection » entre l'ensemble des nombres de 1 à 10 et l'ensemble des doigts des deux mains

D'une façon générale, compter le nombre d'éléments d'un ensemble, *c'est établir une bijection entre cet ensemble et un sous-ensemble de l'ensemble des entiers.* L'existence de cette bijection n'est pas automatique: c'est une propriété de l'ensemble étudié; il est alors dit **dénombrable.** Nous verrons par la suite que l'ensemble des fractions est dénombrable, tandis que l'ensemble des points d'une droite réelle n'est pas dénombrable. Dans les problèmes pratiques de dénombrement (comptage du nombre de fruits d'une corbeille, comptage de la population d'une ville), les ensembles considérés sont non seulement dénombrables mais aussi *finis*, c'est-à-dire qu'ils satisfont les deux propriétés équivalentes suivantes:

— Il existe une bijection entre l'ensemble étudié et l'ensemble des entiers inférieurs à n, entier donné qui sera appelé *nombre d'éléments de l'ensemble.*

— Il n'existe pas de bijection entre l'ensemble étudié et un de ses sous-ensembles stricts.

L'équivalence de ces deux propriétés est un théorème important, que nous admettrons sans démonstration. Nous pouvons maintenant affirmer que **N** *est un ensemble infini.* Comme, d'une part, l'application qui à un nombre entier associe son successeur est une application injective (troisième axiome) et que, d'autre part, tout nombre entier différent de 0 est le successeur d'un nombre entier, l'application considérée est donc bien une bijection de l'ensemble des nombres entiers sur l'ensemble des nombres entiers différents de 0 qui est un sous-ensemble strict du précédent.

Ainsi, dans les mathématiques usuelles:

— L'infini n'est pas un nombre entier.

— Nous pouvons rencontrer des ensembles infinis: l'ensemble des entiers naturels en est un exemple.

Cela est la réponse du mathématicien à l'interrogation angoissée du philosophe sur l'existence de l'infini. Signalons d'ailleurs que le philosophe a tort de poser une telle question au mathématicien; pour ce dernier, l'infini est un symbole qu'il peut inclure par convention dans un ensemble de nombres quand il en a besoin. La question que le philosophe devrait se poser, c'est comment et pourquoi le mathématicien a été amené à envisager, puis à définir la notion d'infini.

Pour résumer les résultats de ce paragraphe, nous pouvons remarquer que nous avons appris à compter et à comparer deux nombres. Le plus important reste à faire: il faut définir les *quatre opérations:* addition, soustraction, multiplication et division. Nous avons laissé de côté, pour le moment, l'importante question des systèmes de numération et il n'est donc pas utile de justifier l'appellation 24 (vingt-quatre) pour le nombre entier successeur de 23 (vingt-trois) ou 50 (cinquante) pour le nombre entier successeur de 49 (quarante-neuf). Cette omission ne nuit en rien à la cohérence de notre exposé.

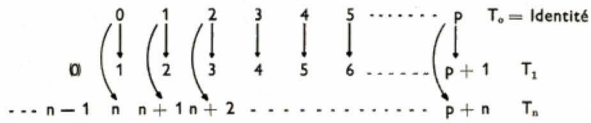
3. L'ADDITION

3.1. La translation. — Nous connaissons déjà deux applications injectives de l'ensemble des entiers naturels dans lui-même, la première est l'*identité* et la seconde est l'*application qui, à tout nombre entier, associe son successeur.* De façon plus générale, à tout entier n, nous pouvons associer l'injection suivante de **N** dans lui-même:

— à 0 nous associons n;

— à 1 nous associons le successeur de n;

— à 2 (successeur de 1), nous associons le successeur du successeur de n.



Une telle application est appelée *translation de* **N** et sera notée T_n. Nous pouvons remarquer que les deux applications citées ci-dessus sont des translations de **N** correspondant respectivement aux nombres 0 et 1 et nous les désignerons par les lettres T_0 et T_1.

Propriété fondamentale: la composition de deux translations est une translation. La composition des applications est une loi de composition interne de l'ensemble des translations. Nous avons vu (V. chap. 2 § 5) qu'elle est associative et que l'identité est l'élément neutre de cette loi. Nous dirons que l'ensemble des translations est muni par la composition des applications d'une structure de *semi-groupe.* Ce semi-groupe est dit *commutatif* ou *abélien,* car la composition des translations est commutative, comme nous pouvons l'établir au moyen du cinquième axiome de Peano.

Nous utilisons les propriétés suivantes de T_1: $T_1 \circ T_m = T_m \circ T_1 = T_{m'}$, m' étant le successeur de m. Ces égalités se vérifient facilement comme conséquences de la définition de la translation T_m. Il nous faut donc vérifier l'égalité $T_m \circ T_n = T_n \circ T_m$ quels que soient les entiers m et n. Étant donné l'entier m, considérons l'ensemble des entiers tels que la translation associée commute avec T_m; cet ensemble contient 0 et 1. Soit n un élément de cet ensemble et m' le successeur de m; nous avons:

$$T_n \circ T_{m'} = T_n \circ T_m \circ T_1 = T_1 \circ T_n \circ T_m$$

d'après les propriétés de T_1. Puisque par hypothèse, T_m et T_n peuvent être commutées, le résultat précédent s'écrit: $T_n \circ T_{m'} = T_1 \circ T_m \circ T_n = T_{m'} \circ T_n$

L'ensemble considéré contient donc le successeur de m et, d'après le cinquième axiome de Peano, il s'identifie avec **N**. La commutativité de la composition des translations est donc démontrée. Ce type de raisonnement utilisant le cinquième axiome de Peano est très courant en mathématiques, il est appelé *raisonnement par récurrence.*

Il nous est facile maintenant de retrouver l'addition usuelle et ses principales propriétés démontrées (et non constatées expérimentalement) en identifiant l'ensemble des translations et l'ensemble des entiers naturels. En effet, nous avons construit T_n à partir de l'entier naturel n. Cette correspondance est injective: comme $n = T_n$ (0), $n \neq m \Rightarrow T_n \neq T_m$. Elle est surjective, car toute translation est construite à partir d'un entier. C'est donc une bijection entre l'ensemble des entiers et l'ensemble des translations. L'opération correspondant à la composition des translations sur l'ensemble des entiers sera appelée **addition,** c'est-à-dire que l'entier auquel correspond la translation $T_m \circ T_n$ sera appelé *somme des entiers m et n* et noté $(m + n)$.

Les propriétés de la composition des translations se reportent sur l'ensemble des entiers comme propriétés de l'addition: l'addition est donc associative, commutative et elle admet l'entier 0 pour élément neutre. L'addition munit donc l'ensemble des entiers de la structure de semi-groupe.

L'ensemble des translations muni de la composition sera dit isomorphe à l'ensemble des entiers muni de l'addition. Il faut d'ailleurs remarquer que, suivant notre démarche, nous avons défini l'addition pour qu'il en soit ainsi: c'est un *isomorphisme de construction.*

Le successeur de a sera désormais désigné par $(a + 1)$ ....

3.2. Somme de deux nombres. — Nous nous proposons maintenant de retrouver la définition classique de la somme des entiers a et b comme étant le nombre d'éléments de l'ensemble formé par la réunion de deux ensembles disjoints possédant respectivement a et b éléments.

Si l'ensemble E compte a éléments, il existe une bijection A entre E et l'ensemble des entiers inférieurs à a: $\{0, 1, \ldots, 'a\}$ (si a est différent de 0, nous convenons de désigner par $'a$ l'entier dont a est le successeur). Si l'ensemble F compte b éléments, il existe une bijection B entre l'ensemble F et l'ensemble des entiers inférieurs à b: $\{0, 1, \ldots, 'b\}$. Soit x un élément de $E \cup F$: s'il appartient à E, nous lui associons $A(x)$, s'il appartient à F, nous lui associons $T_a \circ B(x)$. Cette application est définie sans ambiguïté, car les ensembles E et F sont disjoints. L'image par cette application de E est $\{0, 1, \ldots, 'a\}$, l'image par cette application de F est $\{a, a+1, \ldots, a+'b\}$. L'image de la réunion des ensembles E et F est la réunion de ces deux ensembles disjoints, c'est-à-dire l'ensemble $\{0, 1, \ldots, a+'b\}$. Nous pouvons vérifier que l'application ainsi construite est injective; c'est donc une bijection entre $E \cup F$ et l'ensemble $\{0, 1, \ldots, '(a+b)\}$. L'entier $(a+b)$ somme des entiers a et b est donc le nombre d'éléments de la réunion disjointe des ensembles E et F.

Nous allons maintenant montrer une autre propriété importante de l'addition, celle qui rend possible une simplification:

$$a = b \iff a + n = b + n$$

Les mathématiciens disent que l'élément n est *régulier* pour l'addition. En effet, si nous avons: $a + n = b + n$, alors: $T_n(a) = T_n(b)$ et $a = b$ d'après l'injectivité de la translation T_n.

Tous les entiers sont réguliers pour l'addition; elle possède la propriété de *régularité*.

3.3. Problème de la soustraction. — Nous terminerons cette étude du semi-groupe des entiers naturels en résolvant le problème de la soustraction. Il s'énonce ainsi: « étant donné deux entiers a et b, existe-t-il un entier c qui vérifie l'égalité $c + a = b$ »? Nous pouvons tout d'abord affirmer que, s'il existe un entier c satisfaisant cette condition, il est unique d'après la régularité de a pour l'addition.

Voici un énoncé équivalent du problème posé: existe-t-il un entier c vérifiant $T_a(c) = b$? Pour que b appartienne à l'image par la translation T_a de l'ensemble des entiers naturels, il faut qu'il soit supérieur ou égal à a. Dans ce cas, la réponse à la question posée est affirmative et l'unique entier c répondant à la question sera appelé *différence de a et de b* et noté $(b - a)$. La soustraction n'est donc pas une loi de composition interne de l'ensemble des entiers naturels puisqu'elle n'est pas partout définie: c'est un abus de langage que d'en faire une opération, à moins de construire un ensemble contenant $\mathbf{N}$ et où le prolongement de la soustraction de $\mathbf{N}$ serait partout défini. Nous sommes ainsi amenés à introduire les nombres « négatifs » (V. chap. 4).

CHAPITRE IV

ARITHMÉTIQUE SUR L'ANNEAU DES ENTIERS RELATIFS

1. LE GROUPE ABÉLIEN DES ENTIERS RELATIFS

1.1. Définition d'une relation d'équivalence sur $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$. — Dans le chapitre précédent, nous avons caractérisé une translation T_a par le transformé de zéro, autrement dit par un couple d'entiers *homologues* $(0, a)$, c'est-à-dire qui se correspondent dans la translation. Si les couples d'entiers (a, b) et (a', b') sont homologues pour la même translation, alors:

$$b - a = b' - a' \iff (b - a) + a + a' = (b' - a') + a' + a \iff b + a' = b' + a$$

Plus généralement, sur l'ensemble $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ des couples de nombres entiers naturels, nous pouvons définir la relation binaire R entre les couples d'entiers (a, b) et (a', b') par $b + a' = b' + a$. Nous vérifions aisément que cette relation est réflexive, symétrique et transitive: c'est une relation d'équivalence.

Deux cas sont possibles:

— Ou b est supérieur ou égal à a, alors le couple (a, b) et tous les couples d'entiers équivalents déterminent la translation $T_{(b-a)}$.

— Ou a est supérieur ou égal à b et le couple (b, a) et tous les couples d'entiers équivalents déterminent la translation $T_{(a-b)}$.

Nous allons maintenant définir une loi de composition sur l'ensemble $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, stable pour la relation d'équivalence.

Posons:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

Cette opération est stable.

$$\left.\begin{array}{l}(a, b)\ R\ (a', b') \iff a + b' = b + a' \\ (c, d)\ R\ (c', d') \iff c + d' = d + c'\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a + b' + c + d' = b + a' + d + c' \\ \Updownarrow \\ (a + c, b + d)\ R\ (a' + c', b' + d')\end{array}\right.$$

1.2. Structure de groupe commutatif sur l'ensemble quotient. — L'addition définie ci-dessus étant stable pour la relation d'équivalence, elle induit une opération sur l'ensemble quotient par la relation d'équivalence suivante: la somme de la classe d'équivalence du couple (a, b) et de la classe du couple (c, d) sera la classe du couple $(a + c, b + d)$. Dire que l'opération est stable, c'est dire que la classe du couple somme est indépendante des représentants respectifs choisis dans les classes de (a, b) et de (c, d). La somme ainsi définie sur l'ensemble quotient $(\mathbf{N} \times \mathbf{N})/R$ est associative et commutative, car l'addition possède ces propriétés sur les entiers. Elle admet un élément neutre qui est la classe nulle, ensemble des couples d'entiers du type (a, a): en effet, le couple $(a + c, a + d)$ est équivalent au couple (c, d). Nous avons vu qu'à toute translation T_n, nous pouvons associer la classe d'équivalence des couples d'entiers homologues dans cette translation qui sont du type $(n, a + n)$, en particulier à l'identité T_0, correspond la classe nulle. Cette correspondance est injective et à la composition des translations correspond la somme des classes. L'ensemble des entiers naturels est isomorphe à l'ensemble des translations et il existe un morphisme injectif de l'ensemble des translations dans l'ensemble des classes $(\mathbf{N} \times \mathbf{N})/R$. Nous avons vu que l'isomorphisme permettait d'identifier l'ensemble des translations et l'ensemble des entiers naturels; de même le morphisme injectif permet de considérer cet ensemble comme un sous-ensemble de l'ensemble des classes $(\mathbf{N} \times \mathbf{N})/R$. Nous dirons que nous avons plongé l'ensemble des entiers naturels dans un ensemble plus vaste. Nous allons montrer que, dans ce nouvel ensemble, le problème de la soustraction admet une solution unique. En effet, toute classe admet un élément inverse pour l'addition, l'inverse de la classe du couple (a, b) est la classe du couple (b, a):

$$(a, b) + (b, a) = (a + b, a + b)$$

Reformulons le problème de la soustraction pour l'ensemble quotient $(\mathbf{N} \times \mathbf{N})/R$: étant donné deux classes

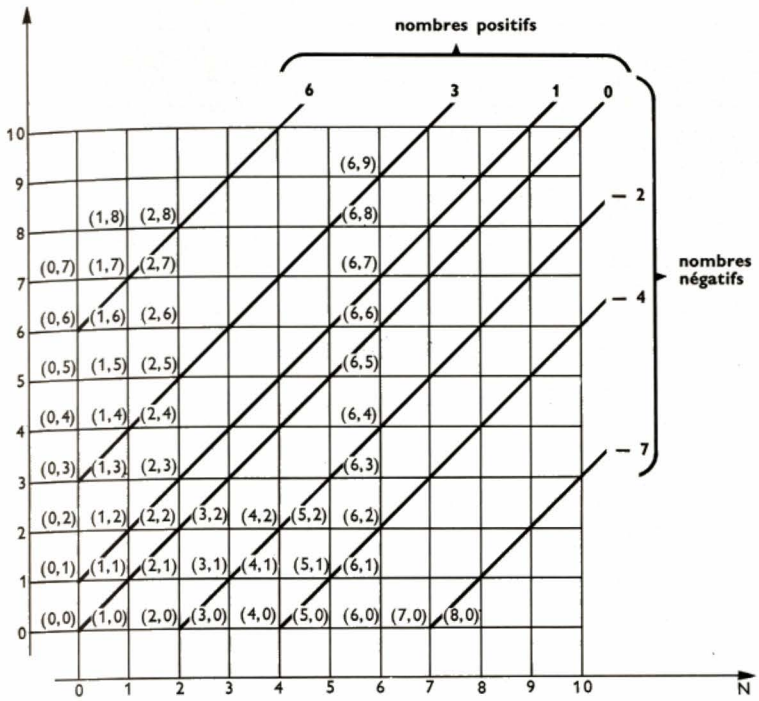


Fig. IV-1 — Constructions des nombres relatifs : chaque sommet du quadrillage représente un couple d'entiers naturels et chaque diagonale représente une classe d'équivalence donc un entier relatif (deux points sont équivalents s'ils sont situés sur la même diagonale)

x et y, existe-t-il une classe z telle que $z + x = y$? Soit $\widehat{x}$ l'inverse de x, la classe $y \neq \widehat{x}$ satisfait à la relation précédente : $y + \widehat{x} + x = y$. Cet ensemble contenant l'ensemble des entiers naturels est appelé l'ensemble des entiers relatifs et est désigné symboliquement par la lettre **Z**. Considérons un entier relatif, c'est-à-dire une classe d'équivalence dont un élément est (a, b), si b est supérieur ou égal à a, notre entier relatif n'est autre que l'entier naturel $(b - a)$, sinon l'opposé de cet entier relatif est la classe dont un représentant est (b, a) avec a supérieur ou égal à b, c'est-à-dire un entier relatif identifiable à l'entier naturel $(a - b)$. En conclusion, tout entier relatif est identifiable à un entier naturel ou est l'opposé d'un entier relatif identifiable à un entier naturel ; le seul entier relatif cumulant ces deux propriétés et qui est égal à son opposé est zéro.

Nous appellerons entiers *positifs*, les entiers relatifs identifiables à des entiers naturels et entiers *négatifs*, les entiers relatifs dont les opposés sont identifiables à des entiers naturels. Nous noterons un entier positif de la même façon qu'un entier naturel correspondant et un entier négatif en faisant précéder l'entier naturel, dont il est l'opposé, d'un signe — (moins).

L'ensemble des entiers relatif est muni d'une loi de composition interne admettant un élément neutre et telle que tout élément ait un inverse pour cette loi. On dit que l'addition munit l'ensemble des entiers relatifs de la structure de groupe. De plus, l'addition étant *commutative*, le groupe est dit *commutatif* ou *abélien*. Cela est le premier exemple de groupe que nous rencontrons ; cette structure est absolument fondamentale en mathématique et nous la rencontrerons souvent. Nous comprenons ainsi pourquoi la structure de l'ensemble des entiers naturels a été appelé semi-groupe. Le procédé qui nous a permis de plonger le semi-groupe des entiers naturels dans le groupe des entiers relatifs est souvent utilisé et nous le réutiliserons pour construire les nombres rationnels à partir des entiers relatifs : il est appelé **symétrisation.**

Nous retrouvons les règles de calcul usuelles connues sous le nom de règles des signes en adoptant la convention suivante : pour écrire l'opposé d'un entier relatif, il faut placer un signe moins devant l'expression de ce nombre mise entre parenthèses pour être considérée globalement. D'autre part, le signe + (plus) n'est pas placé devant le signe — (moins). Il est facile de vérifier que l'opposé d'une somme de deux entiers est la somme des opposés de ces entiers et que l'opposé de l'opposé d'un entier est cet entier lui-même, propriétés vraies pour tout groupe commutatif.

Alors :

$a + (b - c) = a + b + (-c) = a + b - c$, d'après l'associativité de l'addition ;

$a - (b - c) = a - b - (-c) = a - b + c$ car c est l'opposé de son opposé ;

$a - (b + c) = a - b - c$: l'opposé de la somme est égal à la somme des opposés.

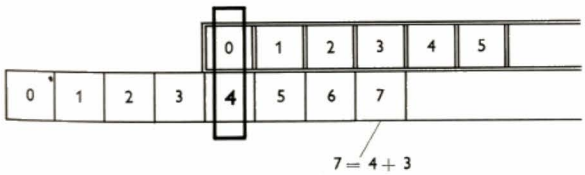


Fig. IV-2 — Addition sur les entiers

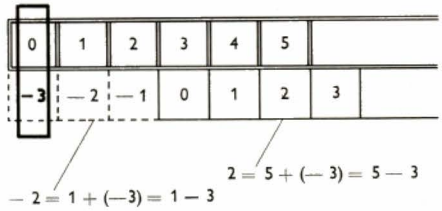


Fig. VI-3 Translation sur les entiers

2. LA MULTIPLICATION : DÉFINITION DE L'ANNEAU DES ENTIERS RELATIFS

2.1. Définition de la multiplication par un entier sur un groupe quelconque. — Donnons-nous un groupe G quelconque, c'est-à-dire un ensemble muni d'une loi de composition associative notée $\star$ telle qu'il existe un élément neutre et que tout élément admette un symétrique. Nous allons définir un morphisme de groupe du groupe **Z** des entiers relatifs dans le groupe G à partir d'un élément quelconque a de G :

— à 0 nous associons l'élément neutre e de G
— à 1 nous associons a
— à 2 nous associons $a \star a$
— à 3 nous associons $a \star a \star a$
— à — 1 nous associons $\hat{a}$; symétrique de a pour $\star$
— à — 2 nous associons $\hat{a} \star \hat{a}$, etc.

Soit $n.a$ le transformé d'un entier relatif n dans cette transformation. Nous écrirons $0.a = e$, $1.a = a$, $(-1).a = \hat{a}$.

On démontre, par récurrence, que la transformation est un morphisme de groupe, c'est-à-dire que, quels que soient les entiers relatifs m et n, l'égalité

$$(m + n).a = (m.a) \star (n.a)$$

est vraie.

L'image par cette transformation du groupe commutatif **Z** est l'ensemble des éléments de G qui peuvent se mettre sous la forme $m.a$ où m est un entier relatif : *c'est un sous-ensemble de G contenant l'élément neutre et qui a une structure de groupe commutatif pour la loi de composition de G. Nous avons ainsi défini un sous-groupe commutatif de G.* Ce n'est pas une loi de composition *interne* sur G puisque cette loi est définie sur $\mathbf{Z} \times G$ et non pas sur $G \times G$: on dit que c'est une loi de composition *externe*.

2.2. Définition et propriétés de la multiplication sur Z. — Nous allons maintenant supposer que G est **Z** lui-même pour définir la multiplication. L'étude précédente n'est cependant pas un simple artifice de construction. Dans le paragraphe suivant, nous présenterons un exemple où G n'est pas le groupe des entiers relatifs, mais un groupe géométrique. Donc, si G est **Z** lui-même, l'opération . est dans ce cas une loi de composition *interne* : elle est appelée *multiplication* et est notée $\times$, signe que nous n'utiliserons pas, car nous le réservons au produit cartésien d'ensembles.

Les égalités suivantes sont vraies quels que soient les entiers relatifs m, n et p :

$$m.(n + p) = (m.n) + (m.p)$$

et

$$(m + n).p = (m.p) + (n.p)$$

Cette propriété s'appelle la *distributivité* de la multiplication par rapport à l'addition. Nous allons maintenant prouver que la multiplication munit l'ensemble $\mathbf{Z} - (0)$ contenant tous les éléments de **Z** sauf 0, de la structure de semi-groupe commutatif. Un raisonnement par récurrence, utilisant la distributivité, permet de montrer que 1 est l'élément neutre de la multiplication et que la multiplication est associative et commutative ; ces raisonnements par récurrence se faisant sur l'ensemble des entiers naturels, nous distinguerons le cas où le nombre est positif et le cas où il est négatif. Du fait qu'un nombre est l'opposé de son opposé, nous retrouvons les règles de signe classique « $+ \times + = +$, $- \times + = -$, $- \times - = +$ ». Le morphisme de groupe défini au début de ce paragraphe de **Z** dans G n'est généralement pas injectif (V. § suivant). Dans le cas où $\mathbf{Z} = G$, ce morphisme est injectif pour la même raison que la translation, car le procédé du successeur engendre **N** *sans répétition* (V. § 1). La conséquence immédiate de cela est que tout élément de l'ensemble $\mathbf{Z} - (0)$ est *régulier* pour la multiplication. Zéro n'est pas régulier pour la multiplication et c'est pourquoi nous symétriserons l'ensemble $\mathbf{Z} - (0)$ dans la suite de ce chapitre pour obtenir l'ensemble des fractions ou ensemble des nombres rationnels.

En résumé, nous avons défini sur l'ensemble **Z** *deux lois de composition associatives et commutatives : l'addition et la multiplication. L'addition munit* **Z** *de la structure de groupe, la multiplication est distributive par rapport à l'addition. On dit que ces deux lois munissent* **Z** *de la structure d'anneau.*

2.3. Relation d'ordre sur Z. — Définissons sur **Z** une relation d'ordre total qui prolonge la relation d'ordre définie sur l'ensemble des entiers naturels en posant qu'un *entier négatif est toujours inférieur à* 0 *qui est toujours inférieur à un entier positif.* Pour comparer deux nombres négatifs $(-a)$ et $(-b)$, nous comparons leurs opposés, les entiers positifs a et b, si $a \leqslant b$, nous posons $(-a) \geqslant (-b)$. Il est alors possible de démontrer les propriétés suivantes :

— La relation binaire ainsi définie est une relation d'ordre total qui prolonge la relation d'ordre définie sur l'ensemble des entiers naturels.

— Les inégalités de même sens peuvent être additionnées membre à membre.

— Une inégalité est conservée si ses deux membres sont multipliés par un même nombre positif ; elle change de sens s'ils sont multipliés par un nombre négatif pour qu'elle demeure vraie. Par exemple, $-3 \leqslant -2$ est vraie ; en multipliant les deux membres de cette inégalité par 5, nous obtenons l'inégalité $-15 \leqslant -10$ qui est vraie ; en multipliant les deux membres de cette inégalité par -4 et en changeant le sens de l'inégalité, elle devient $8 < 12$ qui est également vraie. Dans le cas où le signe du multiplicateur est inconnu (expression littérale), il faut prendre la précaution d'envisager a priori les deux cas ; par exemple, de l'inégalité $2 \leqslant 3$, nous déduisons que l'inégalité $2x \leqslant 3x$ est vraie si x est positif, tandis que c'est l'inégalité $3x \leqslant 2x$ qui est vraie si x est négatif.

3. AUTRE EXEMPLE DE GROUPE : LE GROUPE TERNAIRE

Nous allons construire un groupe à trois éléments. L'un d'eux sera l'élément neutre e, nous désignerons les deux autres par a et b et nous représenterons la loi de composition interne du groupe au moyen du symbole suivant : $\star$. Comme e est l'élément neutre du groupe, nous nous imposons les relations suivantes :

$$e \star a = a \star e = a,\ e \star b = b \star e = b \text{ et } e \star e = e$$

Comme chaque élément d'un groupe est régulier (c'est-à-dire simplifiable), il vient : $a \star b = b \star a = e$; en effet, si $a \star b = a$, comme $a \star e = a$, nous aurions $b = e$, ce qui est contraire à l'hypothèse de trois éléments distincts. De plus, la régularité de a et de b impose deux égalités supplémentaires $a \star a = b$ et $b \star b = a$. Rangeons ces résultats dans un tableau que nous construisons de la même façon qu'une table de multiplication :

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Nous remarquons que ce tableau est symétrique par rapport à sa diagonale ; ce fait exprime que la loi de composition du groupe est commutative. Sur une ligne ou une colonne, aucun élément ne figure deux fois et tous les éléments figurent ; ces deux propriétés, d'ailleurs équivalentes dans le cas d'un nombre fini d'éléments, expriment l'une que tout élément est régulier et l'autre que l'opération inverse est toujours possible. Quels sont les résultats de la loi de composition externe définie au paragraphe précédent ? Nous avons, par exemple : $3.b = b \star b \star b = a \star b = e$. Ces résultats sont regroupés dans le tableau suivant :

	...	-2	-1	0	1	2	3	...
e	...	e	e	e	e	e	e	...
a	...	a	b	e	a	b	e	...
b	...	b	a	e	b	a	e	...

Nous constatons que toutes les trois colonnes, le même nombre apparaît dans la suite des *multiples* de a ou de b. Le morphisme correspondant de **Z** dans G n'est pas injectif. Voici une interprétation géométrique de ce groupe : sur la figure IV-4, le groupe G est le groupe des rotations qui la laissent globalement invariante ; ces rotations sont au nombre de trois : celle dans laquelle la figure tourne d'un tiers de tour, celle dans laquelle la figure tourne de deux tiers de tour, celle dans laquelle la figure tourne d'un tour complet ou ne bouge pas (ce qui revient au même). La composition des deux premières rotations est égale à la troisième et ainsi de suite. Nous vérifions tous les résultats inscrits dans la table de multiplication du groupe.

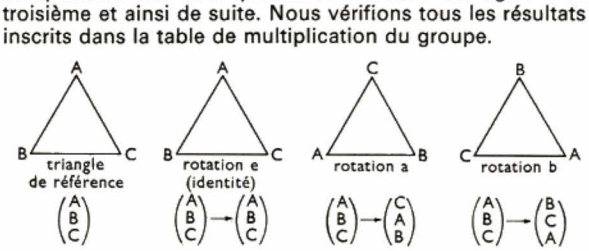


Fig. IV-4 — Groupe ternaire

4. LES CONGRUENCES ET LA DIVISION DES ENTIERS

Sur **Z**, jusqu'à présent nous avons défini trois opérations : l'addition, la soustraction et la multiplication. Pour savoir « compter », il nous faut à présent définir la division, la quatrième des opérations. Comme cette opération est connue, au lieu de citer des recettes permettant d'obtenir le quotient et le reste, nous l'utiliserons comme prétexte pour approfondir des notions mathématiques, pour introduire des structures algébriques nouvelles qui nous permettront de traiter, avec plus d'élégance qu'à l'accoutumée, les questions classiques de plus grand commun diviseur et de plus petit commun multiple. Nous commencerons ce paragraphe par l'étude des relations d'équivalence sur **Z** compatibles avec la structure d'anneau.

4.1. Relations d'équivalence compatibles avec la structure d'anneau. — *Une relation d'équivalence R définie sur un anneau est compatible avec la structure d'anneau si nous pouvons ajouter et multiplier membre à membre, deux relations d'équivalence,* c'est-à-dire si :

$$aRa' \text{ et } bRb' \Rightarrow (a+b)R(a'+b') \text{ et } (ab)R(a'b')$$

Par exemple, il est évident que l'égalité est une relation d'équivalence compatible. Nous noterons $+$ et $.$ les opérations de l'anneau que nous supposons commutatif ; 0 désignera l'élément neutre de l'addition et nous représenterons par $\widehat{a}$ l'opposé d'un élément a de l'anneau. Il est clair que l'exemple intéressant pour nous ici est l'exemple de **Z** mais l'étude qui suit est vraie dans un cadre plus général et sera utilisée par la suite.

Une relation d'équivalence, compatible sur un anneau, est complètement déterminée par la donnée de la classe d'équivalence de 0 ; $aRb \iff (a+\widehat{b})\ R(b+\widehat{b})$ soit $(a+\widehat{b})R0$, ainsi pour que a soit équivalent à b, il faut et il suffit que $(a+\widehat{b})$ appartienne à la classe d'équivalence de 0. La classe d'équivalence de 0 est un sous-groupe additif : elle contient 0, $aR0$ et $bR0 \Rightarrow (a+b)R(0+0) = 0$, $aR0 \Rightarrow \widehat{a}R0$; par ailleurs, si a est un élément de la classe d'équivalence de 0, le produit de a par un élément quelconque de l'anneau est encore équivalent à 0 : $aR0 \Rightarrow (a.b)R(0.b) = 0$.

Un sous-groupe additif I d'un anneau A possédant la propriété :

$$x \in I \text{ et } a \in A \Rightarrow xa \in I$$

est appelé un idéal. Nous avons démontré que, pour n'importe quelle relation d'équivalence compatible, la classe d'équivalence de 0 est un idéal. Nous allons démontrer la réciproque de cette proposition : tout idéal est tel qu'il existe une relation d'équivalence compatible dont il est la classe de 0. Soit un idéal I, nous définissons la relation binaire R par aRb, ce qui signifie que $a+\widehat{b}$ appartient à I. R est une relation d'équivalence car elle est :

— réflexive : aRa car $a+\widehat{a} = 0$ appartient à I ;

— symétrique : aRb : $(a+\widehat{b})$ appartient à I donc son opposé $(\widehat{a}+b)$ appartient à I car I est un groupe ;

— transitive : $\left.\begin{array}{l}(a+\widehat{b}) \text{ appartient à } I \\ (b+\widehat{c}) \text{ appartient à } I\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}(a+\widehat{b}+b+\widehat{c}) \\ = (a+\widehat{c}) \text{ appartient à } I\end{array}$

car I est un groupe.

R est compatible avec l'addition :

« $(a+\widehat{b})$ appartient à I » et « $(c+\widehat{d})$ appartient à I » impliquent que la somme de ces deux nombres $(a+c) + (\widehat{b}+\widehat{d})$ appartient à I, donc que $(a+c)\ R\ (b+d)$.

R est compatible avec la multiplication :

aRb : $(a+\widehat{b})$ appartient à I, comme I est un idéal $(a+\widehat{b}).c = (a.c) + (\widehat{b}.c)$ appartient à I ; comme $\widehat{b}.c$ est l'opposé de $b.c$, on en déduit que $(a.c)R(b.c)$.

Nous avons donc complètement déterminé les relations d'équivalence définies sur un anneau commutatif et compatibles avec la structure d'anneau en caractérisant les classes d'équivalence de l'élément nul. Appliquons les résultats de cette étude à **Z** : les relations d'équivalence compatibles s'appellent des *congruences;* nous allons les préciser en déterminant tous les idéaux de **Z**. Remarquons que, dans un anneau commutatif quelconque, l'ensemble des multiples d'un élément a (ensemble des éléments du type $a.x$ où x est un élément quelconque de l'anneau) est un idéal. En effet, nous avons vu (§ 4) que c'est un sous-groupe additif et que $(a.x).y = a.(x.y)$ est aussi un multiple de a.

4.2. Théorème : Z est un anneau principal. — **Z** possède cette propriété importante que tous les idéaux de **Z** sont des ensembles de multiples des éléments de **Z**, on dit que **Z** est un *anneau principal.* Soit un idéal I de **Z** et a le plus petit élément positif de l'idéal, nous allons montrer que l'idéal est l'ensemble des multiples de a. Soit b un élément de l'idéal I, nous pouvons l'encadrer entre deux multiples consécutifs de a : $(a.x) \leqslant b < a.(x+1)$, comme a appartient à I, les multiples de a appartiennent à I donc $b - (a.x)$ appartient à I ; or, nous déduisons des inégalités précédentes que $0 \leqslant b-(a.x) < a$ (strictement inférieur), comme a est le plus petit élément positif de l'idéal, nous avons $b-(a.x) = 0$, ce qui prouve que b est un multiple de a. Pour prouver que **Z** est un anneau principal, nous avons ainsi effectué la division de b par a, c'est-à-dire que nous avons écrit b comme somme d'un multiple de a et d'un *reste* positif strictement inférieur à a ; nous avons prouvé que si b appartient à un idéal contenant a, le reste aussi et donc si a est le plus petit élément positif de l'idéal, le reste doit être nul. Si un nombre est multiple de a, il est aussi multiple de $(-a)$, nous pouvons donc nous limiter au cas a positif.

4.3. Étude des congruences modulo un entier relatif. — Une relation d'équivalence R compatible sur **Z** est donc de la forme bRc si $(b-c)$ est un multiple de a entier positif donné. Cette relation d'équivalence sera appelée la congruence modulo a et elle sera notée parfois $b \equiv c(a)$.

b est congru à c modulo a si et seulement si les restes des divisions de b et de c par a sont égaux: divisons b et c par a : $b = (a.x) + b_0$ avec $0 \leqslant b_0 < a$

$c = (a.y) + c_0$ avec $0 \leqslant c_0 < a$

Si b est congru à c modulo a, $b-c = a.(x-y)+(b_0-c_0)$ est un multiple de a donc $b_0 - c_0$ est un multiple de a compris entre $(-a)$ et a d'après les inégalités ci-dessus, donc $b_0 = c_0$. La classe d'équivalence modulo a d'un entier relatif est donc caractérisée par le reste de la division de cet entier par a. Il y a a nombres entiers naturels compris entre 0 et l'entier positif a, il y a donc a classes d'équivalence distinctes modulo a. Par exemple, dans le cas $a = 3$, il y a trois classes d'équivalence distinctes, la première contient les entiers relatifs qui peuvent se mettre sous la forme $3.x$ comme ... — 6, — 3, 0, 3, 6, 9, ..., la seconde ceux qui peuvent se mettre sous la forme $(3x+1)$ comme ... — 5, — 2, 1, 4, 7, ..., la troisième, ceux qui peuvent se mettre sous la forme $(3.x+2)$ comme ... — 4, — 1, 2, 5, ... Nous retrouvons la périodicité de 3 en 3 constatée au paragraphe précédent.

La relation d'équivalence étant compatible avec les opérations de l'anneau, nous pouvons munir l'ensemble des classes d'équivalence pour la congruence modulo a de la structure d'anneau, cet anneau est dit anneau quotient (nous ne nous étendrons pas sur le passage de l'anneau à l'anneau quotient expliqué dans le cas des groupes au paragraphe 3). Nous dresserons les tables d'addition et de multiplication des anneaux quotients par la congruence modulo 3 et par la congruence modulo 4 respectivement notés **Z**/3 et **Z**/4.

Z/3 addition

	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Z/3 multiplication

	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Z/4 addition

	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Z/4 multiplication

	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Ces tables sont symétriques par rapport à la diagonale, ce qui exprime le fait que tous ces anneaux quotients sont commutatifs. De plus, les tables d'addition ont la forme caractéristique d'une table de groupe décrite au paragraphe 5. Les différences entre 3 et 4 apparaissent dans les tables de multiplication : $\mathbf{Z}/3$ vérifie cette propriété de $\mathbf{Z}$ que, pour que le produit de deux nombres soit nul, l'un au moins des deux nombres doit être nul, au contraire $\mathbf{Z}/4$ est tel que $2.2. = 0$. Nous dirons que $\mathbf{Z}/4$ admet des diviseurs de 0. L'égalité $2.2. = 0$ dans $\mathbf{Z}/4$ provient du passage aux classes d'équivalence dans la relation sur $\mathbf{Z}$: $2.2 = 4$ étant congru à 0 modulo 4. Ainsi, un anneau quotient $\mathbf{Z}/a$ admettra des diviseurs de 0 si a est un multiple d'un entier positif distinct de 1 et de lui-même. Dans le cas contraire, a est appelé *nombre premier*. Ainsi, 2, 3, 5, 7, 23, 37 sont des nombres premiers, 4, 6, 8, 9, 21, 38 ne sont pas des nombres premiers. Un diviseur de 0 n'est pas régulier pour la multiplication ; réciproquement, dans un anneau sans diviseur de 0, tous les éléments non nuls sont réguliers pour la multiplication : $a.x = a.y$, $a.(x - y) = 0$ et donc si $a \neq 0$, $x = y$: a est régulier pour la multiplication. Pour la pratique du calcul sur un anneau (simplification), il est donc important de savoir si tous les éléments sont réguliers pour la multiplication ou non. Pour démontrer le théorème important que si a est premier, l'anneau $\mathbf{Z}/a$ n'admet pas de diviseur de 0, des compléments d'arithmétique sont nécessaires.

5. COMPLÉMENTS D'ARITHMÉTIQUE

5.1. Plus grand commun diviseur et plus petit commun multiple. — Nous avons vu, au paragraphe précédent, que l'ensemble des multiples d'un nombre entier a a une structure d'idéal et que tout idéal de $\mathbf{Z}$ est l'ensemble des multiples d'un nombre entier a. Considérons deux nombres entiers a et b et les idéaux qu'ils engendrent. Il est facile de voir que l'intersection de deux idéaux est un idéal, mais que leur réunion n'est pas un idéal. Par exemple, prenons $a = 6$ et $b = 4$; l'ensemble des multiples commun à 6 et à 4 est un idéal car, pour l'addition et pour la multiplication, il est fermé par un entier quelconque ; au contraire, si nous additionnions un multiple quelconque de 6 et un multiple quelconque de 4, nous ne serions pas assurés de trouver un multiple de 6 ou 4 : ainsi $6 + 4 = 10$ n'est un multiple ni de 4, ni de 6. Nous sommes amenés à chercher le plus petit idéal qui contienne à la fois les multiples de a et les multiples de b. Cet idéal contient toutes les sommes possibles de multiples de a et de multiples de b, c'est-à-dire tous les nombres qui peuvent se mettre sous la forme $(a.x + b.y)$. Or, l'ensemble dont les éléments sont les nombres de cette forme est un idéal, sous-groupe additif fermé pour la multiplication par un entier quelconque ; cet ensemble est donc bien le plus petit idéal contenant les multiples de a et les multiples de b : on dit que c'est l'idéal *engendré* par a et b. Cet idéal de $\mathbf{Z}$ est l'ensemble des multiples d'un nombre entier d ; par exemple, nous allons montrer que *d est le plus grand des diviseurs communs aux deux nombres a et b* (par abréviation p.g.c.d.). Un diviseur commun à a et b divise tous les nombres de la forme $a.x + b.y$ donc divise d mais d divise tous les éléments de l'idéal donc en particulier a et b obtenus respectivement avec $\begin{matrix} x = 1 \\ y = 0 \end{matrix}$ et $\begin{matrix} x = 0 \\ y = 1 \end{matrix}$; d est donc le plus grand des diviseurs communs à a et à b.

L'idéal intersection des idéaux engendrés par a et par b est l'ensemble des multiples d'un nombre entier dont il est évident que c'est le plus petit des multiples communs à a et à b (par abréviation p.p.c.m.).

5.2. Nombres premiers entre eux. — Si deux nombres n'ont pas de diviseur commun différent de 1, ils sont dits *premiers entre eux ;* dans ce cas, leur p.g.c.d. est égal à 1.

Un nombre premier est premier avec tous les nombres qui ne sont pas ses multiples.

Théorème de Bezout : *Pour que deux nombres a et b soient premiers entre eux, il faut et il suffit qu'il existe deux nombres x et y tels que $(a.x + b.y) = 1$.*

Remarquons que la relation binaire définie sur $\mathbf{Z}$ « a divise b » est réflexive, antisymétrique et transitive : c'est une relation d'ordre sur $\mathbf{Z}$ mais elle n'est pas totale. Le plus petit commun multiple de deux nombres est le plus petit des majorants de l'ensemble formé par ces deux éléments pour la relation d'ordre « divise » (*borne supérieure*) et le plus grand commun diviseur, le plus grand des minorants de cet ensemble (*borne inférieure*). C'est un autre exemple de structure d'ordre (V. chap. 2). Remarquons qu'on définit sans difficulté supplémentaire p.g.c.d. et p.p.c.m. d'un nombre fini quelconque d'entiers. L'ensemble des entiers relatifs est réticulé inférieurement et supérieurement pour la relation d'ordre *divise*.

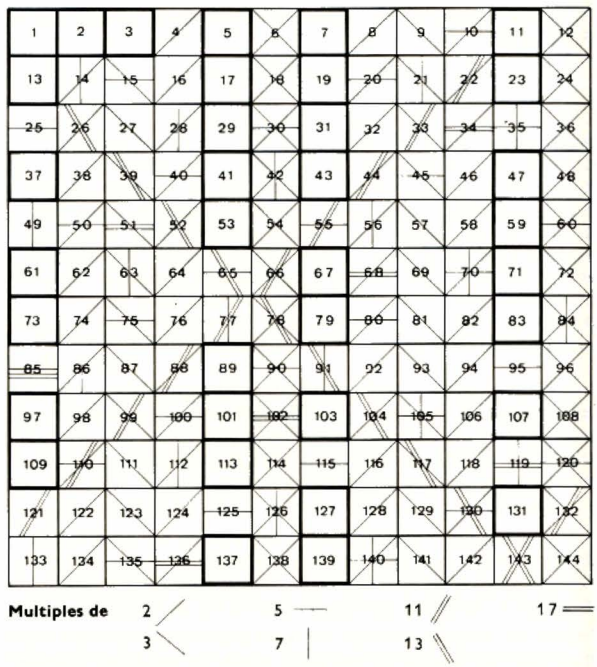


Fig. IV-5 — Crible d'Erathostène, procédé pour trouver les nombres premiers

À l'aide du théorème de Bezout, nous allons démontrer un autre théorème d'arithmétique, le *théorème de Gauss :* si un nombre a premier avec b divise le produit $b.c$, il divise c. En effet, si a est premier avec b, il existe deux nombres entiers x et y tels que $a.x + b.y = 1$ d'où $a.c.x - b.c.y = c$, comme a divise $a.c.x.$ et $b.c.y.$, il divise c. Comme conséquence immédiate du théorème de Gauss, si a est un nombre premier qui divise le produit $b.c$, nous pouvons conclure que b ou c est un multiple de a. Nous en déduisons le résultat annoncé à la fin du paragraphe précédent que si a est premier, l'anneau quotient $\mathbf{Z}/a$ n'admet pas de diviseur de 0.

5.3. Décomposition en produit de facteurs premiers. — Dans l'étude précédente, si l'existence est montrée de façon plus claire et plus élégante, toutefois aucun procédé pratique n'est donné par le théorème de Bezout pour permettre de calculer p.g.c.d. et p.p.c.m. Pour le calcul effectif, il nous faut donc exposer les résultats classiques sur la décomposition en facteurs premiers. Le théorème fondamental de la théorie est le suivant : *tout nombre entier peut être décomposé de façon unique en un produit de facteurs premiers.* L'existence d'une décomposition en un produit de facteurs premiers est évidente par récurrence : étant donné un entier naturel, nous essayons tous les nombres entiers premiers inférieurs comme diviseurs possibles :

— Si nous en trouvons un, nous divisons le nombre par ce diviseur et cela fournit un entier naturel plus petit auquel nous appliquons à nouveau ce procédé.

— Si nous n'en trouvons pas, le nombre est premier : en effet, le plus petit diviseur différent de 1 d'un nombre entier est premier, sinon il admettrait un diviseur plus petit qui serait aussi un diviseur du premier nombre.

La suite d'opérations permettant d'obtenir les facteurs premiers d'un nombre est finie car les quotients partiels sont des nombres positifs de plus en plus petits. Par

exemple, cherchons la décomposition en facteurs premiers du nombre 1 482 :

$1\,482 = 2 \times 741$, $741 = 3 \times 247$ et $247 = 13 \times 19$

Les nombres 13 et 19 sont premiers, les calculs sont achevés et la décomposition est la suivante : $1\,482 = 2 \times 3 \times 13 \times 19$. Il peut arriver que plusieurs facteurs premiers sont identiques, ainsi $54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3$. Nous écrivons aussi $54 = 2 \times 3^3$. Le symbole 3^3 se lit « trois puissance trois » et indique que nous avons multiplié trois par lui-même deux fois, le chiffre écrit en haut s'appelle l'exposant et indique le nombre de facteurs identiques dans le produit. Les propriétés des puissances très importantes en mathématiques et dans les applications diverses seront étudiées dans le chapitre suivant.

Il reste à démontrer l'unicité de la décomposition en facteurs premiers. Montrons que deux décompositions différentes d'un même nombre $a_1^{n_1} . a_2^{n_2} \ldots = b_1^{p_1} . b_2^{p_2} \ldots$ sont égales. $a_1^{n_1}$, par exemple, divise un produit de facteurs premiers entre eux, il divise donc l'un d'eux d'après le théorème de Gauss ; supposons qu'il divise $b_1^{p_1}$, les seuls diviseurs de $b_1^{p_1}$ sont des puissances de b_1, comme a_1 est premier, $a_1 = b_1$. Donc, $n_1 \leqslant p_1$ mais un raisonnement analogue montrerait que $p_1 \geqslant n_1$ et donc $p_1 = n_1$ et ainsi successivement nous pouvons montrer que tous les facteurs premiers des deux décompositions sont égaux ainsi que leurs exposants respectifs dans les deux décompositions.

Théorème : *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre entier a divise le nombre entier b est que tous les facteurs premiers de la décomposition de a figurent dans la décomposition de b avec un exposant supérieur ou égal à l'exposant avec lequel ils figurent dans la décomposition de a.*

En effet, si a divise b, il existe un entier c tel que $b = a . c$. Le produit des décompositions de a et de c en facteurs premiers fournit la décomposition de b en facteurs premiers, ce qui démontre le théorème.

De ce théorème se déduisent les règles de formation du p.g.c.d. et du p.p.c.m. Pour former la décomposition en facteurs premiers du p.g.c.d. de deux ou de plusieurs nombres, il faut faire le produit des facteurs premiers communs aux décompositions de ces nombres en prenant le plus petit des exposants avec lequel ils figurent dans ces décompositions. Pour former la décomposition en facteurs premiers du p.p.c.m. de deux ou de plusieurs nombres, il faut faire le produit de tous les facteurs premiers des décompositions de ces nombres en prenant le plus grand des exposants avec lequel ils figurent dans ces décompositions. Par exemple, considérons les nombres 504 et 540 dont nous voulons calculer le p.g.c.d. et le p.p.c.m. :

$$504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$$
$$540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$$

Le p.g.c.d. est égal à $2^2 \times 3^2 = 36$

Le p.p.c.m. est égal à $2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7 = 7\,560$

Il est alors facile de montrer les règles suivantes : soit a et b deux entiers naturels, d leur p.g.c.d. et m leur p.p.c.m., si x et y sont tels que $a = d . x$ et $b = d . y$, alors x et y sont premiers entre eux, $m = d . x . y$ et $m . d = a . b$. Constatons ces résultats sur l'exemple ci-dessus : $504 = 36 \times 14$ et $540 = 36 \times 15$, 14 et 15 sont premiers entre eux et $7\,560 = 504 \times 15 = 540 \times 14$. Nous laissons le lecteur démontrer les règles ci-dessus en utilisant les décompositions en facteurs premiers ; nous allons démontrer ces règles en utilisant le théorème de Bezout. d étant le p.g.c.d. de a et de b, il existe deux entiers u et v tels que $a . u + b . v = d$ soit $d . x . u + d . y . v = d$ et en simplifiant par d, $x . u + y . v = 1$ ce qui prouve que x et y sont premiers entre eux. Supposons maintenant qu'un nombre soit un multiple commun de $a = d . x$ et de $b = d . y$. Nous pouvons l'écrire $d . x . w$; $d . y$ divise $d . x . w$, donc y divise $x . w$. Comme y est premier avec x, d'après le théorème de Gauss, y divise w et tout multiple commun de a et de b est un multiple de $d . x . y$; nous en déduisons que le p.p.c.m. de a et de b est $d . x . y$.

CHAPITRE V

FRACTIONS ET NOMBRES RATIONNELS

1. DÉFINITION DU CORPS DES NOMBRES RATIONNELS

1.1. Symétrisation du semi-groupe multiplicatif Z-{0}.

— Considérons le semi-groupe **Z**-{0} muni de la multiplication. La multiplication est une loi de composition interne associative et commutative et tous les éléments sont réguliers pour la multiplication ; 1 est l'élément neutre de la multiplication. Il est possible de symétriser ce semi-groupe pour construire un groupe commutatif comme nous avons symétrisé le semi-groupe des entiers naturels pour l'addition en obtenant **Z** le groupe des entiers relatifs.

Un couple d'entiers relatifs non nuls s'appelle une fraction, le premier élément du couple s'appelle le dénominateur et le second élément, le numérateur. La relation d'équivalence entre deux fractions est analogue à celle définie au chapitre précédent : (a, b) est équivalent à (c, d) si et seulement si $a . d = b . c$.

La multiplication de deux couples est définie par la relation suivante : $(a, b) . (c, d) = (a . c, b . d)$; c'est une loi de composition interne et la relation d'équivalence ci-dessus est compatible avec cette loi. Les classes d'équivalence s'appellent des nombres rationnels et l'ensemble quotient est muni par la multiplication d'une structure de groupe commutatif, en particulier l'inverse de la classe de l'élément (a, b) est l'élément (b, a).

La notation en couple a été utilisée ici pour souligner l'analogie avec la construction des entiers naturels ; avec la notation usuelle, le numérateur est au-dessus d'un trait horizontal, dit trait de fraction et le dénominateur au-dessous. Par exemple, l'élément (a, b) s'écrira $\frac{b}{a}$. Les fractions $\frac{b}{a}$ et $\frac{d}{c}$ seront équivalentes et représenteront le même entier rationnel si $a . d = b . c$; la multiplication des deux fractions s'écrit : $\frac{b}{a} . \frac{d}{c} = \frac{b . d.}{a . c.}$.

De même que **N** est isomorphe à un sous-ensemble de **Z** avec quoi on le confond ultérieurement, **Z** - {0} est isomorphe à un sous-ensemble des nombres rationnels, l'ensemble des classes d'équivalence admettant des représentants de la forme $(1, a)$. Nous allons caractériser toutes les fractions appartenant à de telles classes d'équivalence : ce sont les fractions $\frac{y}{x}$ pour lesquelles nous pouvons trouver un nombre entier a vérifiant $y . 1 = x . a$; ce sont donc les fractions dont le numérateur est un multiple du dénominateur. La bijection entre les nombres rationnels de ce type et les entiers relatifs est un isomorphisme pour la multiplication ; en effet $(1, a) . (1, b) = (1, a . b)$. De la même façon que dans **Z**, l'opération inverse de l'addition est toujours possible, dans l'ensemble des nombres rationnels l'opération inverse de la multiplication est également toujours possible : le problème est de trouver un couple (x, y) qui, multiplié par le couple (a, b), soit égal au couple (c, d).

$$\frac{y}{x} . \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \Rightarrow y . b . c = x . a . d$$

Cette égalité est satisfaite en choisissant $x = b . c$ et $y = a . d$.

L'opération inverse est possible car l'ensemble a une structure de groupe multiplicatif : pour diviser par $\frac{b}{a}$, il suffit donc de multiplier par l'inverse de $\frac{b}{a}$, c'est-à-dire par le nombre rationnel $\frac{a}{b}$.

1.2. Expressions fractionnaires des nombres rationnels. — Dans la pratique, nous confondrons les nombres rationnels et leurs représentants, les fractions, en écrivant par exemple : $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ alors que ces deux fractions sont simplement équivalentes, c'est-à-dire qu'elles représentent des nombres rationnels égaux. Il n'existe pas, à proprement parler, d'écriture canonique des nombres rationnels associant à chaque nombre rationnel un et un seul symbole mathématique ; cependant, il est des expressions plus pratiques que d'autres : la fraction $\frac{1}{3}$ est plus maniable que la fraction $\frac{12\,345}{37\,035}$ qui représente pourtant le même nombre rationnel.

Dans les calculs, il faut s'efforcer d'écrire les fractions sous leur forme « irréductible » que nous définirons ci-après.

Si le dénominateur et le numérateur d'une fraction ont même signe, la fraction est équivalente à une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont tous deux positifs ; dans le cas contraire, il faut écrire le signe — devant le trait de fraction. Ainsi, nous désignerons $\frac{1}{-2} = \frac{-1}{2}$ par le symbole $-\frac{1}{2}$ et $\frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$ par le symbole $\frac{1}{2}$.

Nous allons définir la forme irréductible d'une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont positifs : *une fraction est dite* **irréductible** *si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux*. Un nombre rationnel ne possède qu'un représentant qui soit une fraction irréductible. En effet, écrivons l'équivalence de deux fractions irréductibles $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ soit $b.c = a.d$; comme b est premier avec a, il divise d et comme d est premier avec c, il divise b, donc $b = d$ et pour la même raison, $a = c$. Les deux fractions sont identiques. En conclusion, étant donné une fraction, pour obtenir la fraction irréductible qui lui est équivalente, il faut diviser le numérateur et le dénominateur de la fraction par leur plus grand commun diviseur.

1.3. Addition - réduction au plus petit commun dénominateur. — Pour définir l'addition sur l'ensemble des nombres rationnels qui prolonge l'addition sur **Z**, nous allons munir l'ensemble des nombres rationnels de l'élément 0 ; 0 sera désormais considéré comme un nombre rationnel et l'ensemble des nombres rationnels ainsi défini est noté **Q**. Remarquons qu'il est possible de donner une écriture fractionnaire de 0 en convenant que le numérateur d'une fraction peut prendre la valeur 0 et que, dans ce cas, la fraction représente le nombre rationnel nul. Cette convention est cohérente avec nos notations. Ainsi, le produit d'une fraction représentant 0 avec une fraction quelconque est une fraction représentant 0 ; sur l'ensemble des rationnels, 0 conserve donc les propriétés qu'il avait dans **Z** : il n'est pas régulier pour la multiplication. Le groupe multiplicatif est donc l'ensemble $\mathbf{Q}-\{0\}$.

Nous pouvons maintenant identifier **Z** à un sous-ensemble de l'ensemble **Q** des nombres rationnels. Sur ce sous-ensemble, nous avons défini une addition ; nous savons donc additionner les fractions de dénominateur 1 : $(1, a) + (1, b) = (1, a + b)$. Si nous imposons à l'addition la propriété d'être distributive pour la multiplication, avec des fractions ayant même dénominateur, nous pouvons écrire :

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{a} = \left(\frac{1}{a}\cdot\frac{b}{1}\right) + \left(\frac{1}{a}\cdot\frac{c}{1}\right) = \frac{1}{a}\cdot\left(\frac{b+c}{1}\right)$$
$$= \frac{1}{a}\cdot\frac{b+c}{1} = \frac{b+c}{a}$$

soit : $\frac{b}{a} + \frac{c}{a} = \frac{b+c}{a}$

Cela est général puisque, pour représenter des nombres rationnels, nous pouvons toujours choisir des fractions ayant même dénominateur, le plus petit commun dénominateur étant le plus petit commun multiple des dénominateurs.

Il reste à montrer que la formule définissant l'addition de fractions ayant même dénominateur est stable pour la relation d'équivalence des fractions :

$$\left[\begin{array}{l}\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} \text{ ou } b_1.a_2 = a_1.b_2 \\ \frac{c_1}{a_1} = \frac{c_2}{a_2} \text{ ou } c_1.a_2 = a_1.c_2\end{array}\right] \Rightarrow \frac{b_1+c_1}{a_1} = \frac{b_2+c_2}{a_2}$$

ou $b_1 a_2 + c_1 a_2 = a_1 b_2 + a_1 c_2$

Nous avons donc défini l'addition comme loi de composition interne sur l'ensemble des rationnels ; elle possède les mêmes propriétés que sur **Z** : elle est commutative et associative, 0 est élément neutre et tout élément possède un opposé. L'ensemble **Q** est donc un groupe additif. Un tel ensemble, anneau commutatif qui, privé de l'élément nul, est muni d'une structure de groupe par la multiplication, est appelé un *corps*. **Q** est le corps commutatif des rationnels.

1.4. Structure d'ordre sur Q. — Au paragraphe 1.2 nous avons vu que le signe d'un nombre rationnel coïncide avec le signe des entiers. De même, le produit de deux rationnels de même signe est positif et le produit de deux rationnels de signe contraire est négatif. Nous dirons qu'un rationnel a est supérieur ou égal à un rationnel b et nous écrirons $b \geqslant a$ si $(a - b)$ est un nombre positif ou nul. Cette relation est réflexive ($a - a$ est nul), antisymétrique (si $(b - a)$ et $(a - b)$ sont positifs ou nuls, alors $a = b$) et transitive (car la somme de deux rationnels positifs est un rationnel positif). Ainsi, nous définissons donc une relation d'ordre qui coïncide sur les entiers avec la relation d'ordre déjà définie : elle en est une extension. En réduisant les fractions au même dénominateur pour les additionner et les soustraire, nous voyons que la somme membre à membre, d'inégalités de même sens, fournit une inégalité de même sens et que le produit des membres d'une inégalité par un même nombre positif fournit une inégalité de même sens ; il faut changer le sens de l'inégalité si ce multiplicateur est négatif. À titre d'exercice, le lecteur pourra faire cette démonstration à partir des propriétés analogues des entiers relatifs.

Nous avons construit l'ensemble des entiers à partir de la notion de successeur, c'est-à-dire d'entiers consécutifs ; entre deux entiers consécutifs, nous ne pouvons pas encadrer de nombre entier. Pouvons-nous parler de deux rationnels (distincts) consécutifs ? Non. Nous allons montrer que $r < s \Rightarrow r < \frac{r+s}{2} < s$, en effet $s - \frac{r+s}{2} = \frac{r+s}{2} - r = \frac{s-r}{2}$ est positif car son numérateur est positif par hypothèse et 2 est un entier positif. Comme nous pouvons répéter ce procédé autant de fois que nous voulons, en fait, entre deux rationnels, nous intercalons autant de rationnels que nous désirons.

L'ordre du corps des rationnels est *archimédien*, c'est-à-dire qu'étant donné deux nombres rationnels a et b, il existe toujours des multiples de a plus grands que b. Cette propriété provient d'une propriété analogue de l'anneau des entiers relatifs résultant du fait que le procédé du successeur engendre **N** tout entier sans répétition.

2. CALCUL SUR UN ANNEAU ET SUR UN CORPS — PUISSANCE ENTIÈRE D'UNE SOMME — IDENTITÉS REMARQUABLES

Les égalités qui figurent sous le nom d'*identités remarquables* ne sont pas seulement vraies sur les ensembles de nombres usuels mais sur n'importe quel anneau commutatif. Si n et p sont des nombres entiers positifs : $x^n . x^p = x^{n+p}$ sur un anneau quelconque. Nous pouvons le démontrer facilement par récurrence. Une conséquence immédiate de ce résultat est que $(x^n)^p = x^{n.p}$ si n et p sont encore des nombres entiers positifs. Nous conviendrons que, quel que soit x, $x^0 = 1$; cette convention est cohérente avec les règles d'opération précédentes : ainsi $x^0 . x^p = 1 . x^p = x^{p+0}$. Toutes ces règles de calcul des puissances positives s'appliquent sur un anneau quelconque, commutatif ou non.

Nous allons maintenant donner des règles de calcul qui sont seulement vraies sur un anneau commutatif.

Soit la somme $s = a + b + c$ à élever au carré ; nous appliquons la règle de distributivité et nous obtenons (désormais, afin de simplifier l'écriture, nous n'écrirons pas le point de la multiplication quand il n'y aura pas d'ambiguïté) :

$$(a + b + c)\ (a + b + c) = a^2 + ab + ac + ba + b^2 + bc + ca + cb + c^2$$

Comme nous nous sommes placés dans un anneau commutatif, nous pouvons regrouper les termes égaux $ab + ba = 2ab$; remarquons que, dans un anneau quelconque, la multiplication $2 \times ab$ est une loi de composition externe alors que dans Q, c'est une loi de composition interne car **Z** est un sous-ensemble de **Q**. Nous obtenons donc :

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Le carré de la somme est donc égal à la somme des carrés des termes de la somme et des doubles produits deux à deux. En remplaçant b par $-b$, nous obtenons la formule donnant le carré d'une différence :

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

Les formules donnant toutes les puissances entières d'une somme peuvent être obtenues de cette façon ; comme elles sont relativement peu utilisées dans la pratique, nous n'en ferons pas l'étude et nous donnerons seulement la formule suivante :

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2c + 3ab^2 + 3ac^2 + 3bc^2 + 6abc$$

Reprenons la notation des puissances d'un nombre rationnel en nous plaçant cette fois-ci dans un corps. Ci-dessus, nous avons mis en évidence un morphisme entre **N** muni de l'addition et l'ensemble des puissances positives d'un nombre rationnel muni de la multiplication : $x^n \cdot x^p = x^{n+p}$. Ce dernier ensemble est donc un semi-groupe admettant un élément neutre et dont tous les éléments sont réguliers pour la multiplication. Nous pouvons donc le symétriser pour obtenir un groupe multiplicatif image de **Z** muni de l'addition et qui soit un sous-groupe multiplicatif du corps privé de l'élément nul : $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$. Nous avons ainsi défini les exposants négatifs. Nous verrons au chapitre suivant qu'il n'est pas possible de définir les exposants fractionnaires dans **Q** et qu'il faut construire un nouveau surensemble de **Q**, le *corps des nombres réels*.

Sans nous étendre, pour le moment, sur la notion de polynôme dans **Q**, nous savons résoudre toute **équation du premier degré,** c'est-à-dire tout problème mathématique consistant à trouver tous les nombres rationnels qui peuvent être substitués au symbole x pour vérifier l'égalité suivante : $(a \cdot x) + b = c$; a, b et c étant des nombres rationnels déterminés. Cette égalité est équivalente à $a \cdot x = c - b$. Si *a est nul*, tous les nombres rationnels sont substituables à x dans l'égalité ci-dessus lorsque $b = c$ (réponse dite *indéterminée*) et aucun lorsque $b \neq c$ (réponse dite *impossible*). Si *a n'est pas nul*, un seul nombre rationnel est substituable à x dans l'égalité : c'est le nombre $(c - b)\left(\frac{1}{a}\right)$. Le symbole $\frac{1}{a}$ représente le nombre rationnel inverse pour la multiplication du nombre rationnel a. On convient de représenter le nombre $(c - b)\left(\frac{1}{a}\right)$ par le symbole $\frac{c-b}{a}$ en utilisant des fractions à termes rationnels, ce qui généralise la notation en fraction. Il n'est pas toujours possible de résoudre dans **Q** des équations de degré supérieur à 1 ; cette question est étroitement liée à celle des exposants fractionnaires et sera abordée dans les chapitres suivants.

3. NUMÉRATION, NOMBRES DÉCIMAUX ET CALCUL APPROCHÉ

3.1. Système de numération des entiers. — Nous allons tout d'abord expliquer le système de numération que tout un chacun a assimilé dès le plus jeune âge quand il a appris à compter : le système décimal. Il comporte dix symboles ou *chiffres* représentant les dix premiers entiers naturels ; pour écrire un nombre entier naturel x, il faut le diviser par dix et noter le reste (entier naturel inférieur à dix donc qui peut être écrit) et le quotient x'. La même opération est recommencée avec x' et ainsi de suite jusqu'à ce que nous trouvions un quotient nul. Les restes successifs sont placés les uns à côté des autres en allant de la droite vers la gauche ; la suite de chiffres obtenue constitue le symbole mathématique représentant le nombre x. Par exemple, x est le nombre 123, si nous avons fait les opérations suivantes :

$$\begin{aligned} x &= x_1 \,.\, (\text{dix}) + 3 \\ x_1 &= x_2 \,.\, (\text{dix}) + 2 \\ x_2 &= 0 \,.\, (\text{dix}) + 1 \end{aligned}$$

nous pouvons aussi écrire :

$$x = 1 \,.\, (\text{dix}) \,.\, (\text{dix}) + 2 \,.\, (\text{dix}) + 3$$

Pour trouver le symbole, nous avons donc effectué une *décomposition du nombre selon les puissances successives de dix*. Cela est général et, dans un système de numération de base a, la *décomposition se fait alors suivant les puissances successives de a*. Par exemple, écrivons 123 dans un système de numération à base 6 : $123 = 3 \times 6^2 + 2 \times 6 + 3$. Le nombre entier naturel qui s'écrit 123 dans le système de numération décimal est représenté par le symbole 323 dans un système de numération à base 6. L'importance pratique des systèmes de numération est devenue grande quand, les moyens de calcul évoluant, le système de numération décimale s'est révélé moins pratique que d'autres systèmes de numération. Par exemple, dans les machines à calculer électroniques, le système de numération le plus adapté est le système de numération *binaire* utilisant deux chiffres 0 et 1 (V. t. 2, Informatique, chap. 1). Pour écrire 123 dans le système de numération binaire (à base 2), il faut décomposer ce nombre suivant les puissances successives de 2 :

$$123 = 64 + 32 + 16 + 8 + 2 + 1 = 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1$$

Dans le système binaire, le symbole correspondant à 123 est donc 1 111 011. Il est facile de concevoir que, dans le système binaire, les calculs sont plus longs à exécuter et l'écriture des nombres demande plus de temps que dans le système décimal mais, avec une machine électronique, cet inconvénient est secondaire devant l'énorme avantage technique de la représentation d'un système à deux éléments.

3.2. Nombres décimaux. — Un entier se représente commodément par une somme de puissances positives de la base de numération (dix, par exemple). Est-il donc possible de représenter les nombres rationnels comme somme de puissances positives et négatives de 10 ? Il est clair qu'un nombre rationnel qui peut s'écrire ainsi peut se représenter par une fraction dont le dénominateur est une puissance positive de 10 : ainsi $10^4 + 5.10^2 + 3.10^{-3} = 10^{-3}\ (10^7 + 5.10^5 + 3)$ peut se représenter par la fraction $\frac{10\,500\,003}{1\,000}$. Réciproquement, tout nombre rationnel représenté par une fraction dont le dénominateur est une puissance positive de 10 peut se mettre sous la forme d'une somme de puissances positives et négatives de 10. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que le dénominateur de la fraction irréductible représentant ce nombre rationnel divise une puissance positive de 10, c'est-à-dire que les facteurs premiers de sa décomposition soient uniquement, et à un exposant quelconque, les facteurs premiers de la décomposition de 10 (soit 5 et 2). De telles fractions sont appelées *fractions décimales ;* ces fractions représentent des nombres rationnels appelés *nombres décimaux*. Le lecteur connaît l'écriture des nombres rationnels décimaux utilisant une virgule pour séparer la partie de la somme représentant les puissances positives de 10 (partie *entière*) de celle représentant les puissances négatives de 10 (partie *décimale*). Ainsi, le nombre décimal considéré ci-dessus s'écrit 10 500,003.

La partie entière du nombre décimal représente le plus grand nombre entier plus petit que le nombre rationnel

décimal. De la même façon, la **partie entière** *d'un nombre rationnel quelconque se définit comme le plus grand nombre entier plus petit que ce nombre rationnel* (il existe, car le corps des nombres rationnels est archimédien). Cette partie entière d'un nombre rationnel quelconque s'obtient en divisant (division arithmétique) le numérateur par le dénominateur d'une fraction représentant ce nombre. En effet, pour la fraction $\frac{b}{a}$, si nous divisons b par a, il vient : $b = aq + r$ avec $r < a$. En divisant par a, nous pouvons écrire : $\frac{b}{a} = q + \frac{r}{a}$ où $\frac{r}{a}$ est un nombre rationnel positif inférieur à 1 ; ainsi, q est la partie entière de la fraction $\frac{b}{a}$.

3.3. Division décimale et expression décimale d'un nombre rationnel. — Le principe de la division décimale est connu : au lieu de diviser le nombre b par a, nous divisons le nombre $10^n . b$ par a, n représentant le nombre de chiffres que nous placerons après la virgule. Nous obtenons ainsi $10^n b = aq + r$ avec $r < a$ et nous déduisons : $b = a . 10^{-n} q + 10^{-n} r$. Le reste de la division $10^{-n} r < 10^{-n} a$ est ainsi majoré par un nombre plus petit que le reste de la division entière. Dans ce sens, le quotient $10^{-n} q$, qui lui aussi est un nombre décimal, peut être considéré comme un quotient plus « approché » que le quotient de la division entière et effectivement, la différence entre le nombre rationnel $\frac{b}{a}$ et le quotient $10^{-n} q$ est majoré par $10^{-n} \frac{r}{a}$ donc par 10^{-n} puisque $\frac{r}{a}$ est inférieur à 1. Quand n augmente, le quotient approché se « rapproche de plus en plus » du nombre rationnel $\frac{b}{a}$, ce qui justifie son nom d'**approximation décimale à 10^{-n} près.** Par exemple, le nombre rationnel représenté par la fraction irréductible $\frac{1}{3}$ est approché successivement par les nombres décimaux 0,3 ; 0,33 ; 0,333... C'est donc une écriture décimale illimitée qui représente un nombre rationnel.

Toutes les écritures décimales illimitées représentent-elles des nombres rationnels ? La réponse est négative. Au chapitre suivant, en introduisant les nombres réels, nous donnerons une réponse complète à la question de savoir ce que représente une écriture décimale illimitée quelconque. Pour le moment, nous allons démontrer les résultats suivants qui règlent la question en ce qui concerne les nombres rationnels : *l'écriture décimale illimitée représentant un nombre rationnel reproduit une « période » numérique finie et toute écriture décimale illimitée périodique (c'est-à-dire reproduisant une période finie) représente un nombre rationnel.* On dit qu'une écriture décimale illimitée reproduit une période finie quand la succession des chiffres placés après la virgule reproduit toujours le même nombre entier. Par exemple, dans l'écriture décimale illimitée représentant le nombre $\frac{1}{3}$, la période est 3. La période est, en général, un nombre de plusieurs chiffres : ainsi, l'écriture décimale illimitée représentant le nombre rationnel $\frac{13}{99}$ est 0,131 313 13... et la période de cette écriture est le nombre 13. D'une façon générale, l'écriture décimale illimitée représentant un nombre rationnel est périodique à partir d'un certain rang car l'ensemble des restes possibles de la division est fini (en nombre égal au diviseur) et un reste partiel déterminé est obligatoirement retrouvé après un certain nombre d'opérations. À partir de ce moment-là, les opérations se reproduisent exactement de la même façon pour donner le même résultat. Remarquons d'ailleurs que l'écriture décimale illimitée d'un nombre rationnel est indépendante de la fraction choisie pour effectuer la division : en effet, il n'y a qu'un seul nombre décimal comportant n chiffres après la virgule et qui approche, par valeur inférieure à 10^{-n} près, un nombre rationnel déterminé. Réciproquement, considérons une écriture décimale illimitée périodique à partir d'un certain rang : nous distinguons la partie entière et la partie décimale non périodique qui forment un nombre décimal r et la période qui forme le nombre entier s. De plus, nous supposons que l'écriture devienne périodique à partir du rang n et que s comporte m chiffres. Les nombres décimaux r ; $r + 10^{-n-m} s$; $r + 10^{-n-2m} s$; $r + 10^{-n-3m} s$... sont des approximations décimales du nombre rationnel $r + 10^{-n} s \frac{10^{-m}}{1 - 10^{-m}}$. Nous pouvons admettre ce résultat car il sera démontré complètement au chapitre 7 § 4 en utilisant l'identité remarquable suivante :

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2} b + \ldots + a b^{n-2} + b^{n-1})$$

Nous terminons ainsi ce chapitre dont le but était d'utiliser les réflexes de calcul du lecteur pour qu'il assimile les propriétés de structures algébriques parmi les plus importantes des mathématiques. Les règles de calcul, notamment celles concernant le calcul approché, ont été citées quand elles pouvaient être fructueusement analysées et repensées.

CHAPITRE VI

ÉTUDE DE L'ENSEMBLE DES NOMBRES RÉELS

1. OBJET DE LA CONSTRUCTION DES NOMBRES RÉELS

Nous avons successivement construit et étudié l'ensemble des nombres entiers naturels **N**, l'ensemble des nombres entiers relatifs **Z**, l'ensemble des nombres fractionnaires ou rationnels **Q**. Nous avons enfin mentionné un ensemble moins important mathématiquement, l'ensemble des nombres décimaux dont l'écriture décimale est « finie ». Nous avons principalement étudié les structures algébriques de ces ensembles et nous avons démontré qu'entre deux nombres rationnels donnés, nous pouvions toujours intercaler un nombre rationnel. Cette propriété n'est pas une propriété algébrique : elle provient de la structure d'ordre mais elle a une « nature différente » : elle signifie

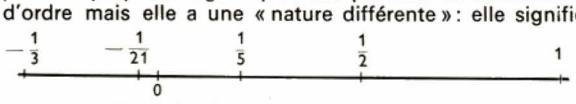


Fig. VI-1 — 0 n'est pas un nombre isolé de Q

aussi que 0 n'est pas un nombre « isolé » (fig. VI-1) sur la droite rationnelle. Comme toujours en mathématiques, nous allons poser une axiomatique cohérente qui « rende compte » de ces propriétés intuitives et nous construirons des ensembles satisfaisant cette axiomatique. Le type de structure dont nous allons aborder l'étude dans ce chapitre, s'appelle **structure topologique.** Au XIXe siècle, la topologie s'appelait d'un nom plus parlant « analysus situs » (analyse des lieux). Nous étudierons ces structures beaucoup moins complètement et moins généralement que nous avons étudié les structures algébriques.

Une bonne compréhension des problèmes topologiques nécessite une intuition géométrique beaucoup plus « fine » que l'intuition nécessaire à l'assimilation des structures algébriques dont les propriétés sont appliquées quotidiennement par tout un chacun sachant compter. Pourtant, les mathématiques, la physique et l'économie utilisent quotidiennement les propriétés topologiques, en particulier dans les raisonnements à base d'infiniment petit ou d'infiniment grand, à base de limite et de passage à la limite, ce qui inclut les questions de graphique, d'interpolation, de tangente, etc. En fait, la structure topologique est la structure de base de toute l'analyse mathématique, notamment celle du calcul différentiel et intégral. Alors que ces structures ont été dégagées et axiomatisées entre 1910 et

1940, il y a plus de trente ans, nous avons jugé utile et possible de les mentionner au niveau que nous nous sommes fixé et plutôt que de faire de la topologie sans le savoir, de faire un peu de topologie en le sachant. Penchons-nous maintenant sur les « lacunes » algébriques de la structure d'ordre qui, historiquement comme didactiquement, ont rendu nécessaire l'introduction d'un nouvel ensemble de nombres.

Nous avons vu que la puissance d'un nombre rationnel est un morphisme du groupe additif des entiers relatifs dans le groupe multiplicatif des rationnels. Ce morphisme peut-il être étendu au groupe additif des nombres rationnels ? Si nous étudions l'ensemble des puissances de 2 par exemple, est-il possible de définir $2^{1/2}$? Si ce nombre existe, il satisfait à la propriété suivante caractérisant l'exposant $1/2 : 2^{1/2} \times 2^{1/2} = 2^{1/2 + 1/2} = 2$. Cherchons donc une fraction irréductible $\frac{p}{q}$ satisfaisant l'égalité suivante :

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q} = 2 \text{ soit : } p^2 = 2\,q^2$$

L'existence de deux nombres premiers entre eux p et q vérifiant cette égalité est impossible :

— si p *est pair*, q est impair et p^2 est divisible par 4 alors que $2\,q^2$ ne l'est pas ;

— si p *est impair*, $2\,q^2$ qui est un nombre pair ne peut être égal au nombre impair p^2.

Il n'existe donc pas de nombre rationnel dont le carré soit égal à 2. Nous allons montrer maintenant que cette lacune algébrique est aussi une lacune de la structure d'ordre.

Nous allons séparer les nombres rationnels en deux classes : dans la première, nous mettrons tous les nombres rationnels négatifs et tous les nombres rationnels positifs dont le carré est inférieur à 2 ; la seconde comprendra les nombres rationnels positifs dont le carré est supérieur à 2. Étant donné qu'il n'existe pas de nombre rationnel dont le carré est égal à 2, il est clair que tous les nombres rationnels sont ainsi classés. Tous les nombres de la première classe sont inférieurs aux nombres de la seconde classe. C'est évident pour les nombres rationnels négatifs : ils sont obligatoirement inférieurs aux nombres de la seconde classe qui sont positifs. Nous allons montrer que c'est également vrai pour les nombres positifs. Considérons deux nombres positifs a et b, tels que $a^2 < 2$ et $b^2 > 2$. Du fait de la transitivité de la relation d'ordre, il vient : $a^2 < b^2$ et $a < b$. En effet, si nous avions $b \geqslant a$, en multipliant cette inégalité successivement par les rationnels positifs a et b, nous obtiendrions $b^2 \leqslant ab \leqslant a^2$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse.

Définition : Une classification des nombres rationnels en deux classes satisfaisant les deux propriétés suivantes :

— tous les rationnels sont classés,

— tous les rationnels de la première classe sont inférieurs à tous les rationnels de la seconde classe,

est appelée *coupure*.

Dans une représentation de l'ensemble des rationnels par une droite, la coupure que nous venons de définir apparaît effectivement comme une « coupure » en deux de la droite, chaque partie correspondant à une classe. À cette coupure, l'intuition géométrique nous conduit à présupposer l'existence d'un point défini de la droite. Il serait tel que tous les nombres de la première classe soient inférieurs ou égaux au nombre dont ce point est l'image et tous les nombres de la seconde classe soient supérieurs ou égaux à ce nombre.

Nous allons montrer que tous les nombres rationnels définissent ainsi des coupures et qu'au contraire certaines coupures, et en particulier celle que nous avons d'abord prise comme exemple, ne peuvent être définies par un nombre rationnel.

Si un nombre rationnel r est tel que tous les éléments de la première classe de la coupure sont inférieurs ou égaux à ce nombre et tous les éléments de la seconde classe supérieurs ou égaux à ce nombre, il est clair, puisque tous les rationnels sont classés, que seules deux coupures satisfont à cette propriété : la première est définie par : « x appartient à la première classe si nous avons : $x \leqslant r$ » et la seconde par « x appartient à la seconde classe si $x \geqslant r$ ».

Nous vérifierons, par ailleurs, que les deux partitions de réels ainsi définies satisfont bien les propriétés caractérisant les coupures. Ainsi, tout nombre rationnel définit deux coupures qui ne diffèrent entre elles que par la classe de ce nombre. Nous pouvons maintenant nous poser la question de savoir si toutes les coupures de l'ensemble des nombres rationnels sont ainsi engendrées. Nous allons montrer qu'il n'en est rien et qu'en particulier, la coupure prise comme exemple au début de ce chapitre ne peut être ainsi définie à partir d'un nombre rationnel. Supposons en effet qu'existe un tel nombre rationnel r (positif car $1^2 < 2$) et qu'en outre r^2 soit inférieur à 2 ; r appartient ainsi à la première classe de la coupure et il n'existerait pas de nombre rationnel de carré inférieur à 2 et supérieur à r : tout nombre rationnel supérieur à r serait de la seconde classe, r définissant cette coupure. Cherchons s'il existe des nombres rationnels *positifs* substituables à x dans l'inégalité suivante : $(r + x)^2 \leqslant 2$ (il faut donc que $x < 2$ car $(r + 2)^2 \geqslant 4$). En développant, cette inégalité s'écrit :

$$r^2 + 2\,xr + x^2 \leqslant 2$$

et en factorisant :

$$x\,(2\,r + x) \leqslant 2 - r^2$$

Si nous prenons un nombre x tel que :

$$0 < x < \frac{2 - r^2}{2r + 2} < 1$$

(entre 0 et le nombre rationnel $\frac{2 - r^2}{2\,r + 2}$, il est toujours possible d'intercaler un nombre rationnel x), le nombre rationnel $(r + x)$ est un rationnel positif plus grand que r et qui est la première classe de la coupure. Il n'existe donc pas de nombre rationnel r appartenant à la première classe de la coupure et définissant celle-ci. Par un raisonnement analogue, nous pouvons montrer qu'il n'existe pas de nombre rationnel r appartenant à la seconde classe de la coupure et la définissant ; $2 < (r - x)^2$, r étant certainement inférieur ou égal à 2 et x inférieur ou égal à 1 s'écrit :

$$2 < r^2 - 2\,rx + x^2$$

$$x\,(2\,r - x) < r^2 - 2$$

$2\,r - x$ étant inférieur ou égal à $2\,r$, si $x < \frac{r^2 - 2}{2r}$, il existe un rationnel x positif qui satisfait l'inégalité.

Ainsi, sur la « droite rationnelle, il n'existe pas de « point » définissant la coupure considérée. Pourtant, cette coupure désigne bien une « longueur » géométrique concrète, celle de la diagonale du carré de côté 1 (fig. VI-2). C'est d'ailleurs cet exemple qui a montré l'insuffisance des nombres fractionnaires aux mathématiciens grecs de l'Antiquité.

Par ailleurs, nous avons vu qu'à tout nombre rationnel, nous pouvons associer une notation décimale illimitée et périodique et que, réciproquement, toute notation décimale illimitée périodique peut être considérée comme la

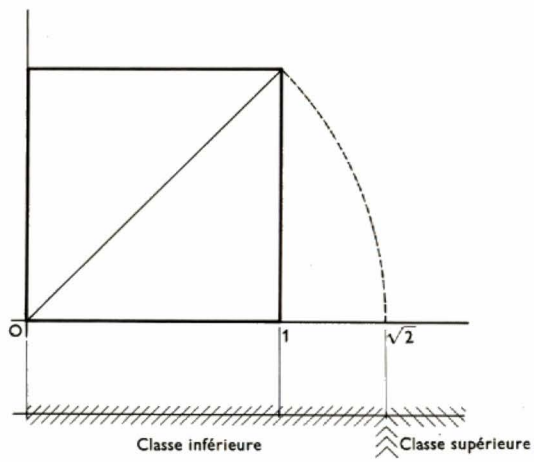


Fig. VI-2 — La coupure $\sqrt{2}$ (longueur de la diagonale du carré)

représentation d'un nombre rationnel. Avec une notation décimale illimitée quelconque, si nous considérons les approximations décimales successives obtenues en tronquant la notation illimitée, nous constatons que ces nombres décimaux successifs sont de plus en plus approchés, pourtant, ces « approximations » décimales n'approchent aucun nombre rationnel.

Le but de ces différentes remarques était de faire comprendre au lecteur la nécessité de l'introduction d'un nouvel ensemble de nombres pour combler les « trous » de l'ensemble des rationnels. Il existe plusieurs méthodes pour introduire cet ensemble, l'une d'elles est fondée sur la notion de coupure, l'autre sur l'idée de suite de nombres rationnels « de plus en plus proches ». Étant donné que nous n'avons pas étudié les propriétés des suites (ce sera l'objet du chapitre suivant), nous avons choisi la première méthode d'exposition, par ailleurs plus « parlante », bien qu'elle présente l'inconvénient d'être moins générale que la seconde car elle nécessite la connaissance des propriétés de la structure d'ordre.

2. CONSTRUCTION DU CORPS DES NOMBRES RÉELS PAR LES COUPURES

2.1. Définition de l'ensemble des nombres réels. — Dans la suite de ce paragraphe, nous confondrons les coupures qui ne diffèrent entre elles que par la classe d'un nombre rationnel (nombre rationnel qui définit la coupure). Avec cette convention, tout nombre rationnel définit une coupure et une seule ; l'ensemble des nombres rationnels est donc en bijection avec un sous-ensemble de l'ensemble des coupures. Une coupure est appelée *nombre réel* et nous identifierons l'ensemble des nombres rationnels $\mathbf{Q}$ au sous-ensemble de l'ensemble des nombres réels avec lequel il est en bijection. Il s'agit maintenant de prolonger la structure d'ordre et les opérations de $\mathbf{Q}$ à l'ensemble des nombres réels pour le munir de la structure de corps ordonné. Nous désignerons désormais l'ensemble des nombres réels par le symbole $\mathbf{R}$.

2.2. Somme de deux nombres réels (définition et propriétés). — La coupure-somme de deux coupures est définie par sa classe inférieure dont les éléments sont toutes les sommes d'éléments de la classe inférieure de la première coupure et d'éléments de la classe inférieure de la seconde coupure (il est facile de vérifier que la classification définie ci-dessus possède toutes les propriétés d'une coupure). Montrons d'abord que, dans le cas où les deux coupures représentent des nombres rationnels, la coupure-somme ainsi définie caractérise un nombre rationnel qui est bien la somme dans $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels termes de la somme. Soit r et s ces nombres rationnels ; montrons que la coupure-somme caractérise le nombre rationnel $(r + s)$, c'est-à-dire que tous les éléments de la classe inférieure sont inférieurs ou égaux à $(r + s)$ et que tous les éléments de la classe supérieure sont supérieurs à $(r + s)$.

— Si un rationnel appartient à la classe inférieure, nous pouvons l'écrire comme somme de deux rationnels a et b appartenant aux classes inférieures des coupures définies par r et s :

$$a \leqslant r \text{ et } b \leqslant s \Rightarrow a + b \leqslant r + s$$

— Si un rationnel x appartient à la classe supérieure, nous ne pouvons pas l'écrire comme somme de deux éléments a et b inférieurs ou égaux respectivement à r et s, ce qui est exprimé dans la relation suivante : $a \leqslant r \Rightarrow x - a > s$, en particulier : $x - r > s$, soit : $x > r + s$. La coupure-somme définit donc le rationnel $(r + s)$ somme dans $\mathbf{Q}$ des rationnels r et s. L'associativité et la commutativité de l'addition des nombres rationnels éléments de la classe inférieure entraînent l'associativité et la commutativité de la somme des nombres réels. De même, la coupure caractérisant le nombre rationnel 0 est élément neutre de cette somme : en ajoutant des nombres négatifs ou nuls aux éléments de la classe inférieure, nous obtenons des rationnels inférieurs ou égaux donc appartenant toujours à cette classe inférieure. Soit un nombre réel défini par une coupure C de l'ensemble des rationnels. Soit $\overline{C}$ la coupure dont les éléments de la classe supérieure sont les opposés des éléments de la classe inférieure de C. Géométriquement, il s'agit de la coupure de la droite rationnelle « symétrique » par rapport au point 0 de la coupure C (fig. VI-3). Nous allons prouver que la somme des coupures C et $\overline{C}$ est la coupure nulle, élément neutre de l'addition. Si a appartient à la classe inférieure de C et si b appartient à la classe inférieure de $\overline{C}$, donc $-b$ à la classe supérieure de C, il vient : $a < -b$ donc : $a + b < -b + b = 0$. Si le nombre rationnel x est négatif, x peut s'écrire comme somme d'éléments des classes inférieures de C et de $\overline{C}$. Soit, en effet, p un élément de la classe inférieure de C, dans la suite $p, p - x, p - 2x, p - 3x \ldots$ qui est une suite croissante de rationnels, il existe un plus petit terme qui appartient à la classe supérieure de C, soit $[p - (n + 1)x]$ car le corps Q est archimédien (V. chap. 5) ; $p - nx = a$ appartient donc à la classe inférieure de C et $(a - x)$ appartient à la classe supérieure de C, donc $(x - a)$ appartient à la classe inférieure de $\overline{C}$ et $x = a + (x - a)$ appartient à la classe inférieure de $C + \overline{C}$ puisqu'on l'a écrit sous la forme d'une somme d'un élément de la classe inférieure de C et d'un élément de la classe inférieure de $\overline{C}$. La classe inférieure de la coupure $C + \overline{C}$ étant l'ensemble des nombres négatifs, la coupure $C + \overline{C}$ définit donc le nombre rationnel 0.

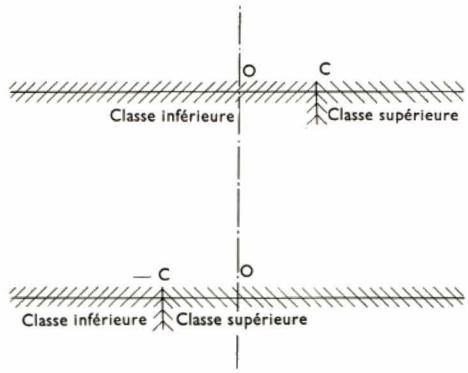


Fig. VI-3 — Coupures opposées pour l'addition

En conclusion, nous avons prolongé l'addition des rationnels par une opération commutative et associative qui munit l'ensemble $\mathbf{R}$ *des nombres réels de la structure de* **groupe additif.**

2.3. Relation d'ordre sur R. — Nous pouvons définir maintenant une relation d'ordre total sur $\mathbf{R}$.

Définition : *Une coupure est dite positive si* 0 *appartient à sa classe inférieure, négative si* 0 *appartient à sa classe supérieure.* Il est évident que cette définition associe à tout nombre rationnel une coupure de même signe : l'ensemble des rationnels positifs est inclus dans l'ensemble des nombres réels positifs et l'ensemble des rationnels négatifs dans l'ensemble des nombres réels négatifs.

Définition : *a est dit inférieur ou égal à b* $(a \leqslant b)$ *si* $(a - b)$ *est un nombre négatif ou nul.* Cette relation est réflexive, antisymétrique et transitive. C'est une relation d'ordre qui prolonge la relation d'ordre définie sur les nombres rationnels et, pour les mêmes raisons, c'est une relation d'ordre total : *si* $(b - a)$ *n'est pas négatif ou nul, il est positif et son opposé* $(a - b)$ *est négatif.*

2.4. Multiplication de deux nombres réels (définition et propriétés). — Nous allons définir une multiplication ou un produit sur l'ensemble des nombres réels positifs qui prolonge le produit défini sur les rationnels. Il n'y aura aucune difficulté par la suite pour définir un produit sur l'ensemble des nombres réels en appliquant les règles usuelles des signes : $a.(-b) = (-a).b = -(ab)$ et $(-a).(-b) = ab$.

Définition : Le *produit* de deux nombres réels positifs r et s est caractérisé par une coupure dont les éléments de la classe inférieure sont les nombres négatifs et les produits d'éléments positifs des classes inférieures respectives de r et de s. Nous pouvons vérifier qu'il s'agit bien d'une coupure. Cette opération prolonge le produit des nombres rationnels positifs car :

$$a \leqslant r \text{ et } b \leqslant s \Rightarrow ab \leqslant rs$$

$$x \leqslant rs \Rightarrow x = \frac{x}{s} . s \text{ et } \frac{x}{s} \leqslant r$$

Donc la coupure caractérisée par rs est bien le produit (ci-dessus défini) des coupures caractérisant r et s.

Il faut remarquer au passage pourquoi nous définissons d'abord seulement la multiplication sur l'ensemble des coupures positives : le produit de deux nombres négatifs et inférieurs aux rationnels r et s peut être un nombre positif « grand » supérieur au rationnel rs : la définition de la multiplication par produit d'éléments des classes ne prolonge correctement la multiplication des rationnels que dans le cas de nombres positifs. Pour une raison analogue : *il faut changer le sens d'une inégalité lorsqu'on multiplie ses deux membres par un nombre négatif.* La multiplication ainsi définie sur l'ensemble des nombres réels positifs est une loi de composition interne associative et commutative d'après les propriétés analogues de la multiplication sur l'ensemble des rationnels. Elle admet 1 comme élément neutre.

L'inverse d'un nombre réel pour la multiplication est défini par la coupure dont les éléments de la classe supérieure sont les inverses des éléments positifs de la classe inférieure du nombre réel. La multiplication munit donc l'ensemble des nombres réels positifs de la structure de groupe multiplicatif. La propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, les règles de compatibilité de ces deux opérations avec la relation d'ordre sont les mêmes que sur l'ensemble des nombres rationnels.

L'addition et la multiplication munissent donc l'ensemble des nombres réels de la structure de corps commutatif et ordonné. L'ensemble **R** est un corps archimédien, c'est-à-dire qu'étant donné deux nombres réels positifs z et b, il existe toujours un nombre entier positif n tel que $z \leqslant n . b$.

2.5. Toutes les coupures sur R sont caractérisées par des nombres réels. — Il est intéressant de montrer que l'ensemble des nombres réels est sans « lacune » pour la structure d'ordre, c'est-à-dire qu'une coupure sur l'ensemble des nombres réels est toujours définie par un nombre réel.

Or, une coupure sur l'ensemble des nombres réels induit par restriction une coupure sur l'ensemble des nombres rationnels, sous-ensemble de l'ensemble des nombres réels. Cette coupure sur l'ensemble des nombres rationnels définit un nombre réel. Pour montrer que ce nombre réel caractérise aussi la première coupure sur l'ensemble des nombres réels, il faut prouver un important lemme préliminaire.

Lemme : *Entre deux nombres réels quelconques, il est toujours possible d'intercaler un nombre rationnel.* Cette propriété généralise un résultat analogue sur l'ensemble des rationnels. Deux nombres réels distincts définissent des coupures distinctes sur l'ensemble des rationnels ; il existe donc un nombre rationnel qui appartient à la classe inférieure de l'une des coupures et à la classe supérieure de l'autre. Ce nombre rationnel est donc inférieur au premier de ces réels et inférieur au second.

Considérons maintenant une coupure C sur l'ensemble des nombres réels (définie par sa classe supérieure S et par sa classe inférieure I) et la coupure C^0, induite sur l'ensemble des nombres rationnels $\mathbf{Q}$ par C, définie par sa classe inférieure $I^0 = I \cap \mathbf{Q}$, sa classe supérieure étant $S^0 = S \cap \mathbf{Q}$. Cette coupure C^0 définit un nombre réel r. Nous allons montrer que r caractérise aussi la coupure C sur **R**. Il faut, pour cela, prouver les implications suivantes : $x \in \mathbf{R}$: $(x \in I \Rightarrow x \leqslant r)$ et $(x \leqslant r \Rightarrow x \in I)$. Or, si nous avons $x < r$, nous pouvons trouver un nombre rationnel a tel que $x < a < r$, donc $a \in I^0$ et donc $a \in I$, et x inférieur à un nombre de la classe inférieure I de C appartient à I, ce qui démontre la seconde implication. De même si $x > r$, nous pouvons trouver un nombre rationnel b tel que $x > b > r$, donc $b \in S^0$ et donc $b \in S$, et x supérieur ou égal à un nombre de la classe supérieure S de la coupure C appartient lui-même à S. Nous avons ainsi démontré par l'absurde la première des implications. Le nombre réel r caractérise la coupure C. *Toutes les coupures sur* **R** *sont caractérisées par des éléments de* **R**, *il n'y a donc pas de « lacune » sur* **R**.

3. PROPRIÉTÉS DES ENSEMBLES DE LA DROITE RÉELLE

3.1. Un sous-ensemble de R majoré est borné supérieurement. — Ce théorème méritait d'être cité en tête de paragraphe car il est fondamental dans l'utilisation des nombres réels. Il est d'ailleurs facile de voir qu'il provient immédiatement de la notion de coupure. Rappelons cependant (V. chap. 2, § 7) que le majorant d'un sous-ensemble de **R** est un nombre réel supérieur ou égal à tous les éléments de ce sous-ensemble de **R** et que la *borne supérieure d'un sous-ensemble de* **R** *est le plus petit de ses majorants s'il existe*. Le théorème que nous voulons démontrer n'est pas vrai sur l'ensemble des rationnels. À un ensemble majoré de rationnels, nous associons, en effet, la coupure dont la classe supérieure est constituée par les majorants de cet ensemble et la classe inférieure par le complémentaire de la classe supérieure. Tous les rationnels sont ainsi classés et cette classification est bien une coupure car un nombre rationnel quelconque majorant d'un ensemble E est plus grand qu'un nombre rationnel quelconque qui n'est pas un majorant de E. S'il existe un plus petit majorant, ce sera le nombre défini par cette coupure, or nous savons que certaines coupures de l'ensemble des rationnels ne définissent pas de nombre rationnel. En revanche, sur l'ensemble des nombres réels, le théorème énoncé est vrai car, sur cet ensemble, toute coupure définit un nombre réel.

On démontre de même que *tout ensemble minoré est borné inférieurement sur l'ensemble des nombres réels.*

3.2. Construction axiomatique de la droite réelle. — À plusieurs reprises, nous avons parlé de la « droite rationnelle » ; nous venons de préciser les « lacunes de cette droite » en construisant **R**, surensemble des rationnels qui est toujours totalement ordonné et que nous représenterons donc par une droite. Nous allons préciser cette représentation : une droite orientée ou axe est un ensemble de « points » tel qu'il existe entre ces points une relation binaire qui soit une relation d'ordre, appelée *précède* (nous dirons que le point A *précède* le point B et nous noterons $A < B$). Pratiquement, dans la représentation graphique, nous placerons A à la gauche de B.

Nous appelons *segment* (AB) l'ensemble des points M compris entre A et B, c'est-à-dire tels que A précède M et M précède B si A précède B ou tels que B précède M et M précède A si B précède A. Enfin, nous supposons que, sur l'ensemble des couples d'éléments ou *segments de la droite*, il est défini une relation d'équivalence, appelée **congruence**, satisfaisant les axiomes suivants :

(1) *Symétrie :* (AB) est congru à (BA) noté $(AB) = (BA)$

(2) *Transport :*
$$\left.\begin{array}{l} A < B < C \text{ et } A' < B' < C' \\ (AB) = (A'B') \text{ et } (BC = B'C') \end{array}\right\} \Rightarrow (AC) = (A'C')$$

(3) *Glissement :* $\forall (A, B, C), \exists (D, D') : (CD) = (CD') = (AB)$ et $D < C < D'$

(4) *Egalité :* $(AB) = (AB')$ et $(A < B)$ et $(A < B') \Rightarrow B = B'$: les points B et B' sont confondus.

La relation de congruence entre les segments est ce que nous appelons l'égalité, c'est-à-dire l'égalité des longueurs. Le premier axiome signifie donc que la « longueur » d'un segment ne dépend pas de son orientation, le second qu'en mettant bout à bout des segments égaux deux à deux respectivement, nous obtenons des segments égaux, et le troisième que par un point, il est toujours possible de mener deux segments égaux à un troisième. Remarquons que nous avons ainsi défini l'égalité des longueurs et que nous allons maintenant définir l'inégalité des longueurs sans

avoir défini les longueurs elles-mêmes. Cela n'a rien d'étonnant pour un mathématicien. En effet, nous pouvons comparer les longueurs de segments de la droite sans préciser l'ensemble de nombres dans lequel est définie cette longueur. Pour comparer deux segments S_1 et S_2, à partir d'un point O de la droite, nous menons les deux segments (OC) et (OC') respectivement congrus aux deux segments à comparer et orientés dans le même sens en utilisant l'axiome de glissement (par exemple, $O < C$ et $O < C'$). Si les points C et C' sont confondus, les segments S_1 et S_2 sont congrus par transitivité de la congruence. Si C précède C', nous dirons que le segment S_1 est de longueur plus petite que le segment S_2. Cette relation est une relation d'ordre; en utilisant les axiomes (2), (3) et (4), il est possible de démontrer qu'elle est indépendante de l'origine choisie O.

Tout ce que nous avons dit jusqu'ici reste vrai sur n'importe quelle droite orientée, c'est-à-dire n'importe quel ensemble vérifiant les axiomes énoncés ci-dessus.

L'ensemble ordonné des entiers relatifs, l'ensemble ordonné des nombres rationnels, l'ensemble ordonné des nombres réels peuvent être munis de la structure de droite orientée.

Nous pouvons nous représenter une droite orientée par des points d'une « ligne ouverte » (en particulier, nous pouvons tracer cette ligne avec une règle quoique rien dans les axiomes ne fasse allusion au fait que la droite orientée soit « droite »).

Nous nous donnons une origine O et un segment de référence (OA) que nous appellerons *segment unitaire*. L'axiome de glissement nous permet de construire tous les « multiples entiers » de ce segment: pour construire, par exemple, le segment égal à 2 (OA), nous considérerons le segment (AB) congru à (OA) et de même sens et nous dirons que le segment (OB) est le double du segment (OA); le segment $(-1).(OA)$ est défini comme le segment (OA') congru à (OA) et de sens opposé. Nous obtenons donc sur la droite orientée, un ensemble de points en correspondance bijective avec les éléments de l'ensemble des entiers relatifs. L'entier relatif, associé à un point de cet ensemble, est dit l'abscisse de ce point. Par exemple, 0 est l'abscisse de O et 1 est l'abscisse de A.

Nous voulons associer maintenant une abscisse, non plus seulement à quelques points de la droite, mais à *tous* les points de la droite. Les propriétés particulières de l'ensemble des nombres réels permettent d'associer à tout point de la droite orientée une abscisse réelle, si cette droite orientée vérifie un axiome supplémentaire (axiome 5): *quel que soit le segment* (AB), *il existe un point M appelé* **milieu du segment (AB)** *tel que* $(MA) = (MB)$ *et tel que les segments* (MA) *et* (MB) *soient de sens opposé.*

Alors, à partir de l'ensemble des points à abscisse entière, nous pouvons obtenir un ensemble de points plus vastes à abscisses « binaires », c'est-à-dire rationnelles du type $\frac{p}{2^n}$ où p est un entier relatif et n un entier naturel. Par exemple, le milieu de (OA) sera le point M d'abscisse 1/2, le milieu de (OA') sera le point d'abscisse $(-1/2)$, le milieu de (AB) sera le point d'abscisse $\left(\frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}\right)$, le milieu de (OM) sera le point d'abscisse $\left(\frac{0+1/2}{2} = 1/4\right)$.

On obtient le résultat cherché en montrant que tout point de la droite définit une coupure sur l'ensemble des points à abscisse binaire donc sur l'ensemble de leurs abscisses.

3.3. Valeur absolue, notion de distance sur la droite réelle

Définition : *La valeur absolue du nombre réel a*, notée $|a|$, est le nombre réel positif qui est égal à a ou à son opposé $-a$. Ainsi $|a| = a$ si $a \geqslant 0$ et $|a| = -a$ si $a \leqslant 0$. Cette notion est intéressante car elle va nous permettre de définir la longueur d'un segment. Au segment (AB) (A et B étant d'abscisses respectives a et b), nous associons le nombre réel positif $|b - a|$ que nous appellerons *longueur du segment* (AB).

Il vérifie les propriétés suivantes:

— Si les segments (AB) et (CD) ont des longueurs égales, ils sont congrus et réciproquement;

— Si $A < B < C$, la longueur du segment (AB) est inférieure ou égale à la longueur du segment (AC).

Nous appellerons *distance entre les points A et B de la droite réelle* la longueur du segment (AB); elle sera parfois désignée par le symbole $d(A, B)$.

Propriétés fondamentales des « distances »

(1) $d(A, B) = 0 \iff A = B$. En effet $d(A, B) = 0 \Rightarrow b - a = 0$: les nombres réels a et b sont donc égaux; comme l'abscisse est une application injective, nous déduisons que les points A et B sont confondus.

(2) $d(A, B) = d(B, A)$. Cette propriété est évidente car les valeurs absolues d'un nombre réel et de son opposé sont égales; par définition, $|a - b| = |b - a|$.

(3) $d(A, C) \leqslant d(A, B) + d(B, C)$. Cette propriété traduite par des inégalités entre les nombres réels a, b et c est vérifiée quelles que soient les positions relatives des points A, B et C. Six cas correspondant à toutes les permutations possibles des trois lettres A, B et C doivent être envisagés:

$A < B < C$: $d(A, C) = c - a$, $d(A, B) = b - a$, $d(B, C) = c - b$ et: $c - a \leqslant (b - a) + (c - b)$

$A < C < B$: $d(A, C) = c - a$, $d(A, B) = b - a$, $d(B, C) = b - c$ et: $c - a \leqslant (b - a) + (b - c)$
car $c - a \leqslant b - a$ puisque $c \leqslant b$

$B < A < C$: $d(A, C) = c - a$, $d(A, B) = a - b$, $d(B, C) = c - b$ et: $c - a \leqslant (a - b) + (c - b)$
car $a \geqslant b$

Les trois autres cas $B < C < A$, $C < A < B$ et $C < B < A$ sont analogues aux trois cas précédents en inversant l'ordre des lettres donc les signes des expressions.

Sur la droite réelle l'expression de distance est souvent inutile, la notion de longueur du segment (A, B) étant la distance la mieux adaptée à la plupart des problèmes. Mais, quand nous généraliserons l'analyse à des ensembles plus vastes que la droite réelle, « espaces à plusieurs dimensions », espaces de fonctions et d'applications, il faudra construire sur ces ensembles des distances possédant les trois propriétés fondamentales ci-dessus qui seront prises pour axiomes et toute l'analyse « de la variable réelle » sera facilement transposable dans des cas plus généraux. C'est la raison pour laquelle nous introduisons, dès maintenant, la notion de distance.

3.4. Structure topologique sur la droite réelle. — Le paradoxe d'Achille et de la tortue était très goûté des Grecs anciens (fig. VI-4). Achille aux pieds légers court

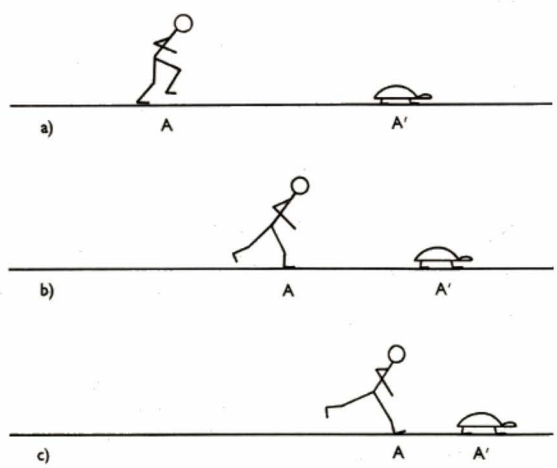


Fig. VI-4 — Paradoxe d'Achille et de la tortue

à la suite d'une tortue: au départ, la tortue est au lieu A et Achille se dirige rapidement vers A; quand il arrive en A la tortue a eu le temps d'arriver un peu plus loin en A'. De même quand Achille arrivera en A', la tortue sera un peu plus loin, etc. Achille a beau être le plus rapide des humains et la tortue le moins rapide des animaux, il ne rattrapera jamais la tortue! Un peu de réflexion sur ce paradoxe convaincra chacun que c'est la notion d'infiniment petit qui est

incorrectement employée ici : il s'agit d'une infinité de lieux, *de plus en plus proches* d'un point qui sera le lieu où Achille rattrapera la tortue. Le concept mathématique correspondant est appelé *convergence*. Pour définir la *convergence*, il nous faut d'abord analyser la notion de « voisinage» étroitement liée à la notion de distance qui vient d'être définie.

Un *intervalle ouvert* de la droite réelle est un segment (AB) privé de ses extrémités, c'est-à-dire l'ensemble des points M différents de A et de B tels que $A < M < B$ et nous l'écrirons $]AB[$. Par ailleurs, comme nous étudions la droite réelle, que nous avons identifiée à l'ensemble des nombres réels, nous écrirons le segment (a, b) et l'intervalle ouvert $]a, b[$. Remarquons que l'intervalle ouvert $]a - r, a + r[$ est l'ensemble des points dont la distance à a est inférieure à r ; nous dirons que a est le centre de l'intervalle et r le rayon de l'intervalle.

Tout sous-ensemble de la droite réelle qui contient un intervalle de centre a est un voisinage du point a. Un ensemble ouvert est un sous-ensemble de la droite réelle qui est voisinage de chacun de ses points. Par exemple, démontrons qu'un intervalle ouvert est un ensemble ouvert. Soit c un point de l'intervalle ouvert $]a, b[$ et supposons qu'il soit plus près de b que de a : $b - c \leqslant c - a$, on a donc :

$$a < \frac{3c - b}{2} < \frac{c + b}{2} < b \qquad \text{(fig. VI-5)}$$

Il est possible de trouver un intervalle ouvert de centre c contenu dans]a,b[

Il est impossible de trouver un intervalle ouvert de centre a contenu dans]a, b[ni même dans (a, b)

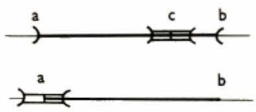


Fig. VI-5
Topologie de la droite réelle $a < c < b$

l'intervalle ouvert de centre c et de rayon $\frac{b - c}{2}$ soit $\left]\frac{3c - b}{2}, \frac{c + b}{2}\right[$ est inclus dans l'intervalle ouvert $]a, b[$; l'intervalle ouvert $]a, b[$ contient donc des intervalles ouverts ayant pour centre chacun de ses points et, par définition des voisinages, il est voisinage de chacun de ses points ; c'est un ensemble ouvert. (Si c est plus près de a que de b, $c - a \leqslant b - c$: nous considérons l'intervalle $\left]\frac{a + c}{2}, \frac{3c - a}{2}\right[$).

Un segment n'est pas un ensemble ouvert : aucun intervalle ouvert, ayant pour centre les extrémités du segment, n'est inclus dans le segment (a, b) (fig. VI-5). De même, le point a, qui peut d'ailleurs être considéré comme un cas particulier de segment dont les extrémités seraient confondues, n'est pas un ensemble ouvert. L'ensemble des nombres réels strictement inférieurs à a, l'ensemble des nombres réels strictement supérieurs à a sont des ensembles ouverts (pour la démonstration de ce résultat, il faut s'inspirer de la démonstration ci-dessus pour les segments ouverts) ; ces ensembles sont appelés des *demi-droites ouvertes*. La réunion de ces deux ensembles qui n'est autre que le complémentaire du point a dans l'ensemble des réels est un ensemble ouvert.

D'une façon générale, une réunion quelconque d'ensembles ouverts, une intersection finie d'ensembles ouverts sont des ensembles ouverts. Cette propriété est évidente pour la réunion ; pour l'intersection, il faut utiliser la propriété suivante : *l'intersection finie d'intervalles ouverts de centre c est un intervalle ouvert de centre c, dont le rayon est le plus petit des rayons des intervalles considérés*. Remarquons que cette propriété n'est pas vraie pour une intersection « infinie » d'intervalles ouverts de même centre. Par exemple, l'intersection des intervalles $\left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$, où $n \in \mathbf{N}$ est le point O qui n'est ni un intervalle ouvert ni un ensemble ouvert. Voici un exemple d'ensemble ouvert légèrement plus compliqué : le complémentaire de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{R}$ ou l'ensemble des nombres réels qui ne sont pas des entiers relatifs constitue un ensemble ouvert car c'est la réunion des intervalles ouverts $]0, 1[$, $]1, 2[$, $]-1, 0[$...

Nous allons nous rapprocher maintenant du problème d'Achille et de la tortue en définissant un point d'accumulation d'un ensemble de réels. Nous dirons que le réel a est point d'accumulation de l'ensemble E si tout voisinage de a contient des points de E différents de a. Remarquons tout d'abord, que cette définition ne fait pas intervenir le fait que a appartienne à E ou pas. La définition du point d'accumulation d'un ensemble traduit en termes rigoureux qu'il existe des points de E différents de a et aussi proches de a que nous le voulons. En effet, d'après la définition d'un voisinage, nous pouvons exprimer ainsi la définition du point d'accumulation d'un ensemble : tout intervalle ouvert contenant a rencontre des points de E, soit en utilisant les quantificateurs :

$$\forall \varepsilon,\ \exists x \in E, \text{ tel que } a - \varepsilon \leqslant x \leqslant a + \varepsilon$$

Par exemple, tous les points d'un ensemble ouvert sont des points d'accumulation de cet ensemble. Nous allons voir que ce ne sont pas les seuls : les extrémités d'un intervalle ouvert $]a, b[$ sont des points d'accumulation de cet ensemble ; tout intervalle ouvert de centre a une intersection non vide avec $]a, b[$. Plus précisément, l'ensemble des points d'accumulation de l'intervalle ouvert $]a, b[$ est le segment $[a, b]$.

Dans le problème d'Achille, le lieu où Achille rattrape la tortue est un point d'accumulation, d'ailleurs le seul de l'ensemble des point A, A', A''... Nous avons démontré que tout ensemble E de réels majoré admet une borne supérieure soit b. Nous allons maintenant démontrer que, si b n'appartient pas à E, b est point d'accumulation de E : considérons l'intervalle ouvert de centre b et de rayon quelconque r : $]b - r, b + r[$; il existe un élément de E supérieur à $(b - r)$ sinon $(b - r)$ serait un majorant de E et b ne serait pas le plus petit des majorants de E.

Nous allons démontrer une propriété fondamentale et naturelle de l'ensemble des nombres réels : *tout ensemble de réels infini borné a au moins un point d'accumulation* (théorème dit de Bolzano-Weierstrass). Il exprime que, si une infinité de points sont considérés dans un ensemble borné (ou dans un segment, celui dont les extrémités sont les bornes de l'ensemble), ils s'accumulent en au moins un endroit du segment. Cette propriété est d'ailleurs liée à la propriété de la droite réelle de ne pas avoir de lacune, sinon les points pourraient fort bien s'accumuler sans avoir de point d'accumulation. La démonstration suit d'ailleurs d'assez près l'idée intuitive que l'on peut avoir du résultat. Elle consiste en des dichotomies successives : nous supposons donc que l'ensemble E est borné, donc inclus dans un segment (a_0, b_0), réunion des deux segments $\left(a_0, \frac{a_0 + b_0}{2}\right)$ et $\left(\frac{a_0 + b_0}{2}, b_0\right)$; au moins l'un de ces deux segments contient une infinité de points de E. Sélectionnons-le et appelons-le (a_1, b_1). En répétant cette opération, nous obtenons une succession d'intervalles (a_n, b_n) de longueur $\frac{b - a}{2^n}$ et emboîtés les uns dans les autres, chacun contenant une infinité de points de E. Il faut alors repérer « l'endroit » où s'accumulent les points de E. Nous obtenons deux ensembles de points $\{a_0, a_1, a_2, ...\}$ et $\{b_0, b_1, b_2, ...\}$ tels que, d'une part, tout point du premier ensemble est inférieur à tout point du second et que, d'autre part, la distance entre un point du premier ensemble et un point du second ensemble peut être rendue aussi petite que désiré. On démontre que ces ensembles définissent une coupure dont la classe supérieure est l'ensemble des majorants des (a_n) et la classe inférieure, l'ensemble des minorants des (b_n). À cette coupure est associée le nombre réel qui est le point d'accumulation cherché : tout intervalle ouvert contenant ce point contient un segment $[a_n, b_n]$ pour n assez grand, donc une infinité de points de E.

Ouvert, voisinage, point d'accumulation, toutes les notions utiles sont en place pour pouvoir définir la convergence.

Avant d'étudier la limite d'une fonction réelle de variable réelle, nous allons étudier les limites des suites ; remarquons que nous avons déjà rencontré des suites et, en particulier, dans la démonstration de ce théorème.

CHAPITRE VII

ÉTUDE DES SUITES À VALEURS RÉELLES

1. DÉFINITION D'UNE SUITE

La notion de suite est très facile à saisir intuitivement. Considérons un ensemble E et numérotons ses éléments; ils forment une suite et E est appelé ensemble des valeurs de la suite. Le numéro de l'élément est appelé son rang. Cet ensemble E peut être formé des nombres premiers à valeurs dans l'ensemble des entiers naturels. Ainsi, le premier nombre de la suite sera 2, le second 3, le troisième 5 le quatrième 7, le cinquième 11, le sixième 13, le septième 17... Cet ensemble des valeurs d'une suite est dénombrable. *Une suite à valeurs dans un ensemble E est, par définition, une application de l'ensemble des nombres entiers naturels dans l'ensemble E.* Dans la pratique, nous envisageons souvent des suites finies: classement d'objets d'une collection par ordre d'importance, classement des communes selon la population ou classement des départements selon la superficie. Dans le cas le plus général, la suite est une application de **N** tout entier dans un ensemble fini ou non (il est facile de définir une suite infinie à partir d'une suite finie en égalant à 0 tous les éléments dont le rang est supérieur au nombre d'éléments de la suite finie).

Nous désignerons une suite par le symbole mathématique suivant: (u_n) où u_n représentera le terme de rang n de la suite. Se donner u_n pour tout entier naturel n équivaudra donc à définir complètement la suite. Les valeurs de la suite peuvent être définies par récurrence en se donnant u_0 puis u_n en fonction de u_{n-1}. Il est aussi possible d'exprimer u_n par des opérations algébriques à partir de n; par exemple, la suite $u_n = \dfrac{1}{10^n}$ est une suite dont les premiers termes sont: 1, 0,1, 0,01, 0,001, etc. Cette suite peut être considérée comme étant à valeurs dans l'ensemble des nombres rationnels ou dans l'ensemble des nombres réels.

2. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS DE LA LIMITE D'UNE SUITE

2.1. Limite d'une suite. — Considérons la suite donnée en exemple ci-dessus: $u_n = \dfrac{1}{10^n}$. Comment donner un sens précis aux expressions « la suite (u_n) tend vers 0 quand n tend vers l'infini » ou encore « il existe des valeurs de la suite aussi proches de 0 que l'on veut »? La seconde expression est traduite par la proposition mathématique suivante: 0 est point d'accumulation de l'ensemble des valeurs de la suite (fig. VII-1a et b).

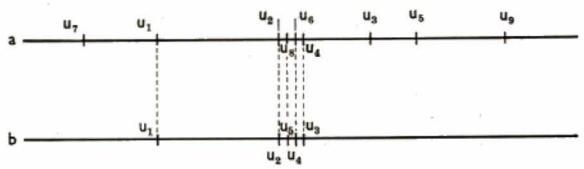


Fig. VII-1

a - Suite dont l'ensemble des valeurs possède un point d'accumulation
b - Suite extraite de la précédente et tendant vers une limite

Pour une suite (u_n) à valeurs dans l'ensemble des nombres réels **R**, nous dirons que *le nombre réel a est* ***limite*** *de la suite, ou encore que cette suite tend vers a, ou encore que cette suite converge vers a si, quel que soit le voisinage de a, tous les points de la suite appartiennent à ce voisinage à partir d'un certain rang.* En utilisant les quantificateurs nous écrirons:

$$\forall \varepsilon,\ \exists N : n \geqslant N \Rightarrow |\, u_n - a \,| < \varepsilon$$

La première propriété intéressante des limites des suites est leur **unicité**: *si une suite converge vers une limite, cette limite est la seule que peut admettre cette suite.* Cette propriété provient de ce qu'étant donnés deux points distincts a et b de la droite réelle, il existe un voisinage de a et un voisinage de b distincts et tous les points de la suite, à partir d'un certain rang, ne peuvent donc appartenir aux deux voisinages à la fois.

L'ensemble des suites à valeurs réelles peut être muni de lois de composition internes: la somme de deux suites de terme général (u_n) et (v_n) est la suite de terme général $(u_n + v_n)$, leur produit est la suite de terme général $(u_n v_n)$.

Ces opérations munissent l'ensemble des suites convergentes de la structure d'anneau commutatif. En particulier, l'élément nul ou élément neutre de l'addition est la suite dont le terme général est la constante 0. L'anneau des suites admet des diviseurs de 0; en effet, si nous faisons le produit d'une suite dont tous les termes de rang pair sont nuls, par une suite dont tous les termes de rang impair sont nuls, nous obtenons la suite nulle sans qu'aucun facteur du produit soit la suite nulle.

Les opérations que nous venons de définir sur les suites permettent le passage aux limites.

2.2. Théorèmes

(1) *Si la suite* (u_n) *tend vers a et la suite* (v_n) *tend vers b, la suite* $(u_n + v_n)$ *tend vers* $a + b$.

$$\forall \frac{\varepsilon}{2},\ \exists N,\ \forall n \geqslant N,\ |\, u_n - a \,| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists P,\ \forall p \geqslant P,\ |\, v_p - b \,| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall n \geqslant \sup(N, P),\ \left|\, (u_n + v_p) - (a + b) \,\right| < |\, u_n - a \,| + |\, v_p - b \,| < \varepsilon$$

(2) *Si la suite* (u_n) *tend vers a, la suite* $(-u_n)$ *tend vers* $(-a)$ (résultat évident qu'on peut d'ailleurs considérer comme un cas particulier du théorème suivant).

(3) *Si la suite* (u_n) *tend vers a et la suite* (v_n) *tend vers b, la suite* $(u_n v_n)$ *tend vers ab.*

Ce théorème sera démontré après l'important lemme suivant: *toute suite convergente a son ensemble de valeurs borné.*

Choisissons un voisinage borné de la limite de la suite: il contient toutes les valeurs de la suite à partir d'un certain rang, les valeurs de la suite qu'il ne contient pas sont en nombre fini et un ensemble fini est toujours borné dans un ensemble totalement ordonné. L'ensemble des valeurs de la suite est donc inclus dans la réunion de cet ensemble borné et du voisinage borné: cet ensemble est borné.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème sur le produit des limites: $u_n v_n - ab = u_n (v_n - b) + b (u_n - a)$

Soit A la borne de la suite convergente u_n: $A = \sup |\, u_n \,|$.

$$\forall \varepsilon,\ \exists N,\ n \geqslant N \Rightarrow |\, u_n - a \,| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\,|\, b \,|}$$

$$\exists P,\ n \geqslant P \Rightarrow |\, v_n - b \,| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\,|\, A \,|}$$

$$n \geqslant \sup(N, P) \Rightarrow |\, u_n v_n - ab \,| \leqslant |\, A \,| \frac{\varepsilon}{2\,|\, A \,|} + |\, b \,| \frac{\varepsilon}{2\,|\, b \,|} = \varepsilon$$

(4) *Si la suite* u_n *tend vers a, et si* $a \neq 0$, *la suite* $\dfrac{1}{u_n}$ *tend vers* $\dfrac{1}{a}$. Comme a est différent de 0, il existe des voisinages de 0 et de a distincts; par exemple, nous pouvons prendre l'intervalle ouvert de centre a et de rayon $\dfrac{|\, a \,|}{2}$: $\left]\dfrac{a}{2}, \dfrac{3a}{2}\right[$ si a est positif, $\left]\dfrac{3a}{2}, \dfrac{a}{2}\right[$ si a est négatif. Toutes les valeurs de la suite à partir d'un certain rang se trouvent dans ce voisi-

nage. Leurs inverses $\frac{1}{a_n}$ se trouvent donc dans l'intervalle ouvert $\left]\frac{2}{3a}, \frac{2}{a}\right[$ si a est positif et dans l'intervalle ouvert $\left]\frac{2}{a}, \frac{2}{3a}\right[$ si a est négatif.

$$\forall \varepsilon, \exists N, n \geqslant N \Rightarrow |u_n - a| \leqslant \frac{2\varepsilon}{3}$$

$|u_n - a| \leqslant |a| \cdot \frac{2}{3|a|} \cdot \varepsilon$; comme $\frac{2}{3|a|} \leqslant |u_n|$, il vient:

$$|u_n - a| \leqslant |a \cdot u_n| \cdot \varepsilon, \text{ soit } \left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{a}\right| \leqslant \varepsilon.$$

Nous avons ainsi démontré que l'application de l'ensemble des suites convergentes dans l'ensemble des nombres réels qui, à chaque suite, associe sa limite est un morphisme du sous-anneau des suites convergentes dans l'anneau des nombres réels.

La structure d'ordre total se transporte en une structure d'ordre partiel sur l'ensemble des suites: la suite de terme général (u_n) est inférieure ou égale à la suite de terme général (v_n) si, quel que soit n, nous avons: $u_n \leqslant v_n$.

Cette relation binaire sur l'ensemble des suites est transitive, réflexive et antisymétrique, mais elle n'est pas partout définie. Il existe un *théorème de passage à la limite des inégalités :*

(5) *Si la suite de terme général (u_n) est inférieure à la suite de terme général (v_n) et que ces deux suites sont convergentes vers les limites respectives a et b, a est inférieur ou égal à b.*

Démontrons-le par l'absurde: supposons $b < a$. Dans l'intervalle ouvert de centre b et de rayon $\frac{b-a}{3}$, nous trouvons tous les termes de la suite (v_n) à partir d'un certain rang N. Dans l'intervalle ouvert de centre a et de rayon $\frac{b-a}{3}$, nous trouvons tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang M. Pour un rang n supérieur à N et à M, le terme u_n se trouve dans ce dernier intervalle et le terme v_n dans l'intervalle de centre b, donc $u_n > v_n$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Remarquons que l'ensemble des suites est réticulé. Par exemple, le sup de deux suites (u_n) et (v_n) est la suite de terme général $w_n = \sup(u_n, v_n)$. Si les deux suites (u_n) et (v_n) convergent vers des limites a et b, la suite (w_n) est convergente et tend vers $\sup(a, b)$, le plus grand des deux nombres a et b. En effet, en reprenant les notations de la démonstration ci-dessus et en supposant a supérieur à b, à partir d'un certain rang, u_n et v_n appartiennent aux intervalles ouverts disjoints de centres respectifs a et b et donc $w_n = u_n$ à partir d'un certain rang. La suite de terme général w_n converge donc vers a.

3. SUITES MONOTONES ET INTERVALLES EMBOÎTÉS

Une suite est monotone croissante si $m < n \Rightarrow u_m \leqslant u_n$. Dans ce cas, nous avons $u_0 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \ldots$ Une suite est majorée si l'ensemble de ses valeurs est majoré.

Démontrons qu'*une suite monotone croissante majorée converge*. Soit l la borne supérieure de l'ensemble des valeurs de la suite; montrons que ce nombre réel est la limite de la suite: d'une part, comme l est la borne supérieure de l'ensemble des valeurs de la suite:

$$\exists N, l - \varepsilon \leqslant u_N \leqslant l$$

d'autre part, comme la suite est croissante:

$$n \geqslant N \Rightarrow l - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant l$$

et l est donc bien la limite de la suite. Nous démontrerions, de la même façon, qu'une suite monotone décroissante minorée converge.

Si nous considérons maintenant la démonstration par dichotomies du théorème de Bolzano-Weierstrass (fig. VII-2), nous avons effectivement deux suites monotones qui interviennent dans la démonstration, la suite monotone croissante des a_n et la suite monotone décroissante des b_n.

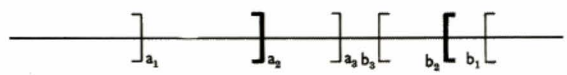


Fig. VII-2 — Théorème de Bolzano-Weierstrass: une suite d'intervalles emboîtés dont la longueur tend vers zéro converge vers une limite

Ces suites, respectivement majorée et minorée l'une par l'autre, convergent vers des limites l et l' avec passage de l'inégalité à la limite: $\forall n, a_n \leqslant l \leqslant l' \leqslant b_n$. Comme la différence $b_n - a_n$ tend vers 0, $l' - l$, inférieur à toutes les différences $b_n - a_n$, est nul et $l = l'$. Ainsi, sans utiliser les coupures, nous avons démontré le théorème de Bolzano-Weierstrass et un résultat plus général qui admet deux énoncés équivalents:

— Si une suite d'intervalles emboîtés $]a_n, b_n[$ est telle que la limite de la longueur de l'intervalle est nulle, l'intersection de ces intervalles se réduit à un point l. Toute suite de points dont le terme général u_n appartient au segment (a_n, b_n) converge vers l.

— Deux suites (u_n) et (v_n), la première monotone et croissante et la seconde monotone et décroissante, telles que tout terme de la première soit inférieur ou égal à tout terme de la seconde: $\forall n, \forall p, u_n \leqslant v_p$ (nous dirons que ces deux suites sont adjacentes) convergent vers la même limite.

Nous ne démontrerons pas ces deux résultats importants, tous les éléments constitutifs de leurs démonstrations ont été soulignés à l'occasion des deux démonstrations du théorème de Bolzano-Weierstrass.

4. PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES. SÉRIES

4.1. Progressions. — Les progressions sont des suites dont le terme général est donné par une loi de récurrence très simple. Une *progression arithmétique* de raison a est une suite dont le terme général u_n doit satisfaire l'égalité $u_{n+1} = u_n + a$. Une *progression géométrique* de raison a est une suite dont le terme général u_n doit satisfaire l'égalité $u_{n+1} = au_n$. Remarquons que la raison de la progression étant fixée, la donnée du terme initial de la progression suffit à déterminer tous les termes de la progression: pour une progression arithmétique $u_n = u_0 + na$, pour une progression géométrique $u_n = u_0 a^n$.

Le corps des réels étant archimédien, le terme général d'une progression arithmétique devient plus grand que tout nombre positif donné si a est positif, plus petit que tout entier négatif donné si a est négatif. Au contraire, le terme général d'une progression géométrique tend vers 0 si la raison de la progression est inférieure à 1 en valeur absolue.

En effet, supposons a et u_0 positif (le raisonnement est analogue quel que soit leur signe), si a est inférieur à 1, la progression géométrique est une suite monotone décroissante minorée par 0 qui converge donc vers une limite h. Comme $u_{n+1} = a \cdot u_n$ et que u_{n+1} tend vers h tandis que $a \cdot u_n$ tend vers ah, d'après l'unicité de la limite d'une suite, nous devons avoir $h = a \cdot h$; cette égalité n'est satisfaite quand a est différent de 1 que si $h = 0$. Désormais, nous ne considérerons, dans la suite de ce paragraphe, que des progressions géométriques dont le terme général tend vers 0.

4.2. Séries. — Les sommes des termes d'une progression forment une suite de terme général $s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$. *Une telle suite est appelée* **série** *de terme général u_n.*

Chercher si une série converge, c'est chercher si la suite des sommes converge. Dans le cas de la progression géométrique, le problème se résout très simplement puisque nous avons l'identité remarquable suivante:

$$(a^n - b^n) = (a - b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2} b + a^{n-3} b^2 + \ldots + b^{n-1})$$

Si nous appliquons cette égalité aux nombres réels 1 et a, nous obtenons l'égalité:

$$(1 - a^n) = (1 - a)(1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1})$$

soit en multipliant par u_0 et en divisant par $(1 - a)$:

$$s_{n-1} = u_0 (1 + \ldots + a^{n-1}) = u_0 \cdot \frac{1 - a^n}{1 - a}$$

Quand n tend vers l'infini, a^n tend vers 0 et s_n tend vers $\frac{u_0}{1 - a}$, si $|a| < 1$.

À ce propos, il faut signaler que c'est une faute de raisonnement de dire que, puisque $s_{n+1} - s_n = u_{n+1}$ tend vers 0, s_n converge. C'est la réciproque qui est vraie : si s_n converge, $s_{n+1} - s_n$ tend vers 0. Il existe des séries dont le terme général tend vers 0 et qui ne convergent pas ; citons comme exemple, sans pouvoir le justifier pour le moment, la série de terme général $\frac{1}{n}$. Nous ne pouvons *rien* dire d'une « somme infinie d'infiniment petits ». D'une façon générale, le physicien, l'utilisateur des mathématiques est toujours contraint, du fait même des limites des mathématiques, de faire des approximations à un moment ou à un autre. C'est précisément à ce moment que, loin d'abandonner la rigueur mathématique, il faut faire appel à elle pour *justifier* ces approximations faute de quoi, d'approximation en approximation, les résultats deviendront rapidement aberrants. La branche de l'analyse mathématique justifiant les approximations du calcul s'est beaucoup développée ces dernières années, étant nourrie sans arrêt de problèmes pratiques nouveaux : c'est l'*analyse numérique*.

5. VALEURS D'ADHÉRENCE D'UNE SUITE

5.1. Définition. — Considérons la suite $u_n = 10^n$ si n est un entier pair et $u_n = 10^{-n}$ si n est un entier impair. Cette suite ne tend pas vers 0. En effet, dans un voisinage quelconque de 0, nous trouverons tous les termes de rang impair à partir d'un certain rang mais non pas les termes de rang pair. Le nombre 0 est cependant point d'accumulation des valeurs de la suite. Cherchons à traduire cette situation directement à partir de la donnée du terme général u_n en utilisant les quantificateurs :

$$\forall \varepsilon, \forall N, \exists n > N : |u_n - a| < \varepsilon$$

Un point a satisfaisant la relation ci-dessus n'est pas nécessairement point d'accumulation de l'ensemble des valeurs de la suite car le terme général de la suite peut prendre une infinité de fois la valeur a sans que a soit point d'accumulation de la suite. Par exemple, pour la suite dont le terme général $u_n = (-1)^n$, u_n est égal à 1 si n est pair et à (-1) si n est impair. L'ensemble des valeurs de la suite est l'ensemble à deux éléments 1 et -1 ; cet ensemble n'a pas de point d'accumulation : tous ses points sont « isolés ». Pourtant 1 et -1 satisfont la relation ci-dessus. Nous dirons que ce sont des **valeurs d'adhérence** de la suite.

Une valeur d'adhérence d'une suite de terme général u_n est un nombre a satisfaisant la relation ci-dessus. La limite d'une suite convergente, un point d'accumulation de l'ensemble des valeurs d'une suite, une valeur prise une infinité de fois par le terme général d'une suite sont des valeurs d'adhérence de cette suite.

5.2. Rapport entre limite d'une suite et valeur d'adhérence de cette suite

Théorème : *Si un nombre a est valeur d'adhérence de la suite u_n, il est possible d'extraire de cette suite une sous-suite convergente dont la limite soit a.*

La réciproque de cette propriété est évidemment vraie : si a est limite d'une sous-suite extraite de la suite, tout voisinage de a contient tous les termes de la sous-suite à partir d'un certain rang donc une infinité de termes de la suite et c'est une valeur d'adhérence de cette suite.

Preuve. — Si a est une valeur d'adhérence de la suite, nous construisons une suite d'intervalles emboîtés d'intersection a, chacun de ces intervalles I_k — étant un voisinage de a — contient, à partir de n'importe quel rang, au moins une valeur de la suite u_{n_k} (nous choisirons n_k pour que la suite d'indices n_0, n_1 ... soit strictement croissante).

Tout voisinage de a contient un intervalle I_r donc tous les intervalles emboîtés de rang k supérieur à r, soit tous les termes de la suite $v_k = u_{n_k}$ extraite de la suite de terme général u_n, à partir du rang r. Le nombre a est donc bien limite de la suite v_k.

Comme toutes les sous-suites que nous pouvons extraire d'une suite convergente de limite a, convergent aussi vers a, nous déduisons de la proposition ci-dessus que *la limite d'une suite convergente est la seule valeur d'adhérence de cette suite* ou, ce qui est équivalent, qu'*une suite convergente ne peut avoir qu'une valeur d'adhérence : sa limite.*

La réciproque n'est pas toujours vraie : la suite que nous avons citée en exemple au début de cet alinéa $u_n = 10^n$ ou 10^{-n} selon la parité de n, n'a qu'une valeur d'adhérence 0 et pourtant elle ne converge pas vers 0. Au contraire, la réciproque devient vraie si nous imposons à l'ensemble des valeurs de la suite d'être borné ; nous démontrerons ce résultat par l'absurde. Supposons que l'unique valeur d'adhérence a de la suite bornée de terme général u_n ne soit pas limite de cette suite, c'est-à-dire qu'il existe un voisinage de a assez petit pour qu'à l'extérieur de ce voisinage, la suite prenne ses valeurs une infinité de fois. Considérons l'ensemble des valeurs prises par la suite à l'extérieur de ce voisinage : soit c'est un ensemble fini, ce qui signifie que la suite revient sur un de ses éléments une infinité de fois et cet élément est valeur d'adhérence de la suite, soit c'est un ensemble infini borné et d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il admet un point d'accumulation qui est une valeur d'adhérence de la suite. Dans les deux cas, nous avons trouvé une valeur d'adhérence de la suite distincte de a, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse adoptée.

Les notions de point d'adhérence et de point d'accumulation sont plus subtiles que la notion de limite. La nécessité de leur introduction se fait sentir dès qu'on entreprend l'étude de fonctions qui ne sont pas « continues ».

6. SUITES DE CAUCHY ET APPROXIMATION DÉCIMALE D'UN NOMBRE RÉEL

Dans le problème de l'approximation décimale d'un nombre réel, il est facile de définir une écriture décimale illimitée d'un nombre réel : l'approximation décimale à 10^{-n} près par défaut d'un nombre réel sera le plus grand nombre décimal avec n chiffres après la virgule appartenant à la classe inférieure de la coupure définie par le nombre réel (ou plus simplement inférieur ou égal à ce nombre réel). La suite, dont le terme général est l'approximation décimale à 10^{-n} près d'un nombre réel, est une suite convergente vers ce nombre réel. Réciproquement, soit une écriture décimale illimitée, converge-t-elle toujours vers un nombre réel ? Si nous considérons la suite des approximations décimales par défaut à 10^{-n} près définie par cette écriture décimale illimitée, nous constatons que la distance entre deux termes de la suite tend vers 0 quand le rang de ces termes tend vers l'infini. Plus précisément, cette suite satisfait la relation suivante, connue sous le nom de *critère de Cauchy :*

$$\forall \varepsilon, \exists N / (m \geqslant N) \text{ et } (n \geqslant N) \Rightarrow |u_m - u_n| < \varepsilon$$

Une suite satisfaisant cette relation est appelée une **suite de Cauchy.** Nous savons que, sur le corps des rationnels, il existe des suites de Cauchy qui ne convergent pas : approximation décimale d'un nombre irrationnel (réel et non rationnel).

— *Toute suite de Cauchy est bornée.* L'ensemble des valeurs de la suite est, en effet, constitué de la réunion d'un nombre fini d'éléments, les termes de rang inférieur à N et d'un sous-ensemble de l'intervalle ouvert de centre u_N et de rayon r. Or, la réunion de deux ensembles bornés est un ensemble borné.

— *Toute suite de Cauchy admettant une valeur d'adhérence converge.* Exprimons que le nombre réel a est une valeur d'adhérence de la suite de terme général (u_n) :

$$\forall \varepsilon, \forall N \exists n \geqslant N \mid u_n - a \mid < \varepsilon$$

En rapprochant cette relation du critère de Cauchy, nous pouvons écrire :
$\forall \varepsilon, \exists N\, m \geqslant N \Rightarrow |a - u_m| \leqslant |a - u_n| + |u_n - u_m| < 2\varepsilon$
ce qui exprime que la suite converge vers la limite a.

— *Sur l'ensemble des nombres réels, toute suite de Cauchy converge.* On exprime encore ce résultat en disant que le corps des réels est un *espace complet*. Pour montrer cette propriété fondamentale, il suffit d'appliquer à toute suite de Cauchy une variante du théorème de Bolzano-Weierstrass qui affirme que toute suite bornée a une valeur d'adhérence. Comme toute suite de Cauchy est bornée sur l'ensemble des nombres réels, elle a une valeur d'adhérence et, d'après la démonstration précédente, converge vers cette valeur d'adhérence. Ce théorème caractérise l'ensemble des nombres réels comme « complétion » de l'ensemble des rationnels : nous aurions pu construire l'ensemble des nombres réels à partir de l'ensemble des suites de Cauchy à valeurs rationnelles. Sachant que toute suite de Cauchy converge, nous en concluons que toute écriture décimale illimitée définissant une suite de Cauchy converge vers un nombre réel représenté par l'écriture décimale illimitée.

CHAPITRE VIII

ÉTUDE DES FONCTIONS RÉELLES D'UNE VARIABLE RÉELLE

1. REPRÉSENTATION GRAPHIQUE D'UNE FONCTION $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$

La pratique des graphiques est courante en technique et en sciences appliquées ; elle permet de « visualiser » les variations d'une variable par rapport à une autre variable qui est souvent le temps. Un sismogramme, une courbe de température sont des graphiques représentant respectivement les variations de l'activité terrestre et une température en fonction du temps.

Le « modèle » mathématique correspondant est le graphe d'une application de **R** dans **R**. En effet, quand nous étudions un paramètre physique, deux cas se produisent :

— Il prend ses valeurs dans un ensemble dénombrable, numérotable, alors en général, cet ensemble peut être identifié à **N** ou à **Z** et nous disons que l'ensemble est discret.

— Il ne prend pas ses valeurs dans un ensemble dénombrable : cependant, si nous pouvons définir une structure d'ordre total et la notion de rapport ou de quotient, nous prenons alors comme ensemble des valeurs un sous-ensemble borné ou non du corps des réels. Ainsi, les paramètres longueur, temps, poids, intensité électrique prennent leurs valeurs sur l'ensemble des nombres réels.

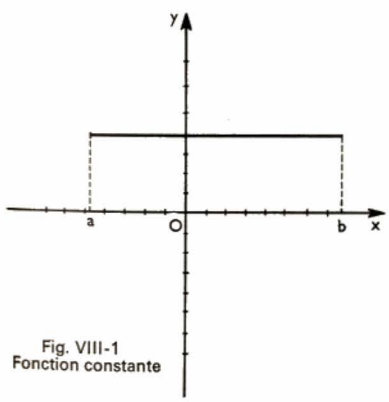


Fig. VIII-1
Fonction constante

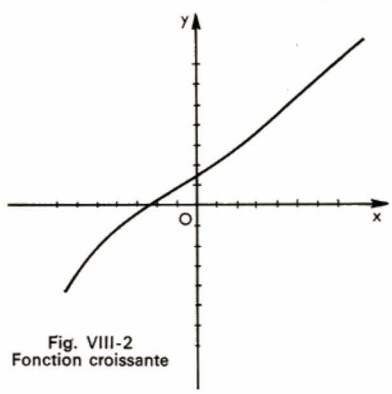


Fig. VIII-2
Fonction croissante

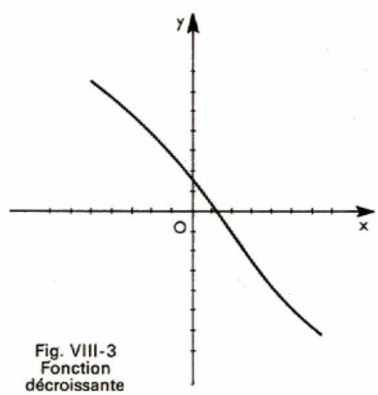


Fig. VIII-3
Fonction décroissante

Le graphe obtenu ainsi expérimentalement est comparé au graphe théorique quand la loi du phénomène est connue. Le « modèle » de la loi du phénomène est une application de **R** dans **R**, calculée d'après la théorie physique ; la représentation graphique constitue le graphe théorique.

Dans le présent paragraphe, nous donnerons des indications permettant de prévoir l'allure du graphe d'une application de **R** dans **R** (fonction réelle de variable réelle). Nous ne ferons pas une étude théorique des propriétés des fonctions continues réelles de la variable réelle car ce problème sera traité ultérieurement dans un cadre plus général, celui des espaces métriques (V. chap. 18). Nous étudierons ici les propriétés les plus immédiates des fonctions en corrélation avec leur interprétation graphique.

2. SENS DE VARIATION D'UNE FONCTION

2.1. Généralités. — Une fonction réelle $f(x)$ de variable réelle x est *croissante* sur un segment (a, b) si :

$$a \leqslant x \leqslant y \leqslant b \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$$

Elle est *décroissante* si, dans les mêmes conditions, $f(y) \leqslant f(x)$. Une fonction $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une fonction *constante* sur le segment (a, b) si l'image par f du segment (a, b) est un ensemble à un élément. Une fonction croissante, décroissante ou constante sur l'intervalle (a, b) est appelée *fonction monotone sur l'intervalle* (a, b).

Le graphe d'une fonction $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ constante sur un intervalle (a, b) est constitué par un segment de droite parallèle à l'axe de la variable (fig. VIII-1). Une fonction monotone croissante sera représentée par une ligne allant du bas à gauche vers le haut à droite (fig. VIII-2) et une fonction monotone décroissante par une ligne allant du haut à gauche vers le bas à droite (fig. VIII-3).

La composition de deux fonctions croissantes est une fonction croissante. La composition de deux fonctions décroissantes est une fonction croissante. La composition d'une fonction décroissante et d'une fonction croissante ou d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante (la composition des applications n'est pas commutative) est une fonction décroissante. Montrons, par exemple, que le produit de composition d'une fonction croissante f et d'une fonction décroissante g est décroissant :

$$x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y) \Rightarrow g[f(x)] \geqslant g[f(y)]$$

Les autres résultats énoncés ci-dessus se démontrent de la même façon.

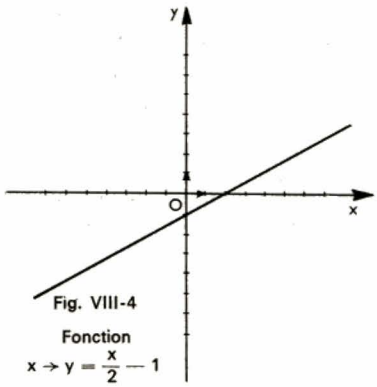


Fig. VIII-4

Fonction
$x \to y = \frac{x}{2} - 1$

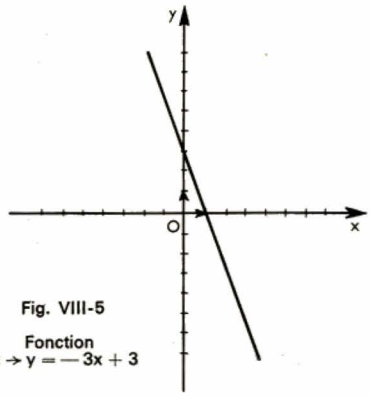


Fig. VIII-5

Fonction
$x \to y = -3x + 3$

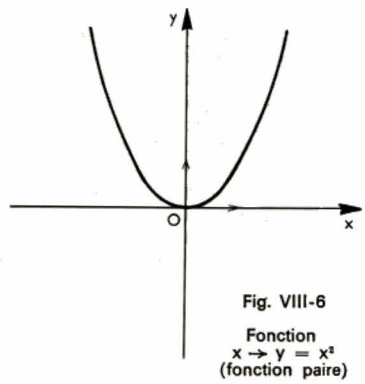


Fig. VIII-6

Fonction
$x \to y = x^2$
(fonction paire)

2.2. Exemples divers. — La fonction identique de **R** dans **R** qui, au nombre x associe le nombre x, est évidemment une fonction croissante.

Nous verrons au chapitre suivant que le graphe de la fonction affine qui au nombre x associe le nombre réel $ax + b$, a et b étant des constantes réelles données, est une droite de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Pour étudier la variation de cette fonction, considérons deux nombres x et x' tels que $x \leqslant x'$ et cherchons le signe de la quantité :

$$(ax' + b) - (ax + b) = a\,(x' - x)$$

Comme $(x' - x)$ est positif, le signe de la différence est le même que celui de a : si a est positif, la fonction affine est croissante (fig. VIII-4) ; si a est nul, la fonction affine est constante ; si a est négatif, la fonction affine est décroissante (fig. VIII-5).

Étudions maintenant les variations de la fonction de **R** dans **R** qui, à tout nombre réel, associe son carré. Étant donnés deux nombres réels x et x', calculons le signe de la différence $x'^2 - x^2 = (x' - x)(x' + x)$. Si nous choisissons $x' \geqslant x$, cette différence a le même signe que $(x' + x)$. Donc, sur l'ensemble des réels positifs cette fonction est croissante et sur l'ensemble des réels négatifs elle est décroissante (fig. VIII-6).

Les variations de la fonction qui, à tout nombre réel x, associe son inverse $\frac{1}{x}$ peuvent être déterminées en considérant deux nombres réels x et x' $(x \leqslant x')$. La différence $\frac{1}{x'} - \frac{1}{x} = \frac{x - x'}{xx'}$ est négative quand x et x' sont de même signe (appartenant à l'ensemble des réels positifs ou à l'ensemble des réels négatifs) ; la fonction est donc décroissante sur l'ensemble des réels positifs et sur l'ensemble des réels négatifs (fig. VIII-7). À ce propos, remarquons que, si une fonction est définie sur un ensemble de réels non connexe (en plusieurs « morceaux »), il convient d'étudier la fonction séparément sur chacun des morceaux.

Le sens de variation de la fonction $y = \frac{1}{x^2}$ sera étudié sur l'ensemble des nombres positifs. Cette fonction est le produit de composition commutatif de la fonction $f(x) = x^2$ qui, à tout nombre réel, associe son carré et de la fonction $g(x) = \frac{1}{x}$ qui, à tout nombre réel non nul, associe son inverse. Sur l'ensemble des nombres réels positifs, la fonction f est croissante et la fonction g est décroissante, leur produit de composition est donc décroissant. Sur l'ensemble des réels négatifs, les fonctions f et g sont décroissantes, leur produit de composition est croissant (fig. VIII-8). Nous démontrerions de la même façon que la fonction $y = \frac{x + 2}{x - 1}$ est décroissante (fig. VIII-9).

3. SYMÉTRIE DU GRAPHE D'UNE FONCTION

Une fonction définie sur un sous-ensemble I de l'ensemble des réels est **paire** quand $f(x) = f(-x)$ pour tout $x \in I$. (Cette définition impliquant que $-x \in I$ entraîne que O est centre de symétrie de I.) Dans ce cas, si le couple $[x, f(x)]$ appartient au graphe de la fonction, il en est de même du couple $[-x, f(x)]$, x et $-x$ appartenant à l'ensemble de définition. Le graphique présente alors une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées (V. fig. VIII-7).

Une fonction définie sur un sous-ensemble I de l'ensemble des réels est **impaire** quand pour tout x réel, élément de I, $f(-x) = -f(x)$. Dans ce cas, si le couple $[x, f(x)]$ appartient au graphe de l'application f, il en est de même du couple $[-x, -f(x)]$. Le graphique présente une symétrie par rapport à l'origine des coordonnées, point du plan de coordonnées (0,0) (V. fig. VIII-8).

Par exemple, les fonctions $f(x) = x^2$ et $f(x) = \frac{1}{x^2}$ sont paires alors que la fonction $g(x) = \frac{1}{x}$ est impaire. Le lecteur pourra démontrer les règles de composition suivantes :

— Si la fonction f est paire, quelle que soit la fonction g, la fonction $g \circ f$ est paire.

— Si la fonction f est impaire, la fonction $g \circ f$ est impaire si g est impaire, et elle est paire si g est paire.

Il est possible de décomposer toute fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Nous allons d'abord montrer que si une telle décomposition est possible, elle est unique. Supposons que la fonction f soit la somme d'une fonction paire g et d'une fonction impaire h. Nous pouvons écrire :

$$f(x) = g(x) + h(x),$$
$$f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$$

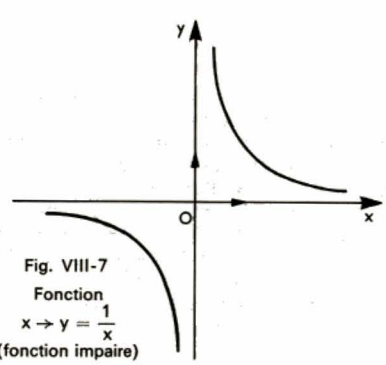


Fig. VIII-7

Fonction
$x \to y = \frac{1}{x}$
(fonction impaire)

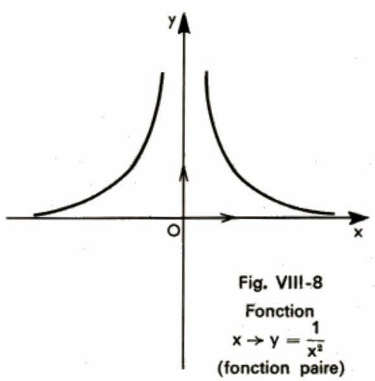
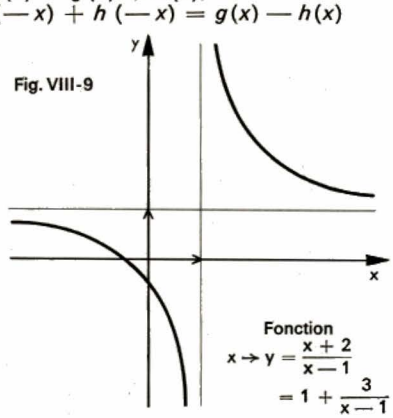


Fig. VIII-8

Fonction
$x \to y = \frac{1}{x^2}$
(fonction paire)

Fig. VIII-9



Fonction
$x \to y = \frac{x + 2}{x - 1}$
$= 1 + \frac{3}{x - 1}$

Nous déduisons une détermination unique des fonctions g et h.

$$g(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \text{ et } h(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$$

Quelle que soit la fonction f, les formules ci-dessus définissent une fonction paire pour g et une fonction impaire pour h. En effet :

$$g(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) + f(x)] = g(x)$$

et : $$h(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) - f(x)]$$

$$= \frac{-1}{2}[f(x) - f(-x)] = -h(x)$$

Nous avons ainsi montré qu'il est toujours possible de décomposer toute fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire et que cette décomposition est unique.

4. DÉFINITION ET GRAPHE D'UNE FONCTION PÉRIODIQUE

Une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est périodique de période a si, quel que soit le nombre réel x, $f(x + a) = f(x)$.

Si f est une fonction périodique de période a, il est évident que c'est aussi une fonction périodique de période ka, k étant un entier relatif quelconque. Par exemple :

$$f(x + 2a) = f(x + a + a) = f(x + a) = f(x)$$

et $$f(x - a + a) = f(x - a)$$

Nous démontrons ainsi par récurrence que pour tout entier relatif k, nous avons : $f(x + ka) = f(x)$. Cela nous conduit à préciser que, si une fonction est dite périodique de période a, a représente la plus petite période positive de la fonction f. L'ensemble des périodes de la fonction f forme alors un sous-groupe additif des réels engendré par a.

Les exemples les plus classiques de fonctions périodiques sont les fonctions trigonométriques (V. chap. 17). Nous donnerons un autre exemple de fonction périodique à l'aide de la fonction dite « partie entière de x », notée $E(x)$ (fig. VIII-10), qui à tout nombre réel x associe le plus grand nombre entier relatif inférieur ou égal à x. La partie entière d'un nombre rationnel représenté par la fraction $\frac{p}{q}$ est le quotient entier du nombre entier p par le nombre entier q, par exemple. La fonction f définie par $f(x) = x - E(x)$ est périodique de période 1 (fig. VIII-11). Il est clair que si la fonction f est périodique de période 1, pour toute fonction g la fonction $g \circ f$ est périodique de période égale à 1 (ou à un sous-multiple de 1) : $g[f(x+1)] = g[f(x)]$.

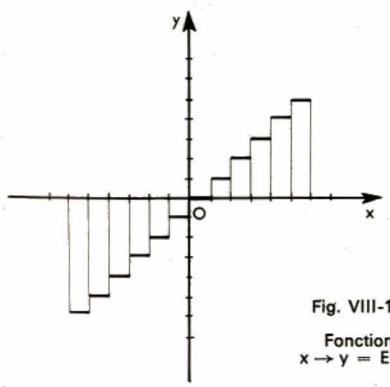


Fig. VIII-10

Fonction
$x \to y = E(x)$

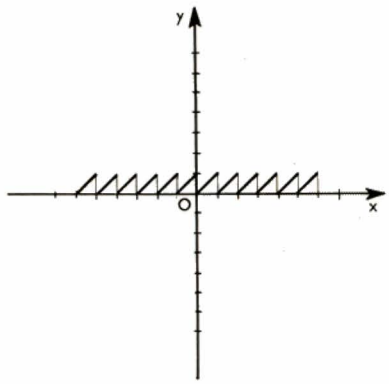


Fig. VIII-11

Fonction
$x \to y = x - E(x)$
(période 1)

Si une fonction est périodique de période a, son graphe est invariant par la translation de vecteur directeur $(a, 0)$ (la définition de la translation sera donnée au chapitre suivant) c'est-à-dire que, comme le couple $[x, f(x)]$ appartient au graphe de f, il en est de même du couple $[x + a, f(x) + 0]$. Pour déterminer complètement le graphe d'une fonction périodique de période a, il est donc suffisant de le déterminer sur un intervalle d'amplitude a (de longueur a). Par des translations successives, cette partie du graphe déterminera le graphe tout entier.

Pour l'étude d'une fonction périodique, il importe de connaître la plus petite période positive. Les variations de la fonction sont étudiées sur un intervalle ayant pour amplitude cette plus petite période positive ; éventuellement, cette amplitude peut être réduite en tenant compte de la parité de la fonction.

5. FONCTIONS CONTINUES

5.1. Notion de limite pour une fonction

Définition : Une fonction f tend vers la limite l quand x tend vers a si

$$\forall \varepsilon, \exists \eta / |x - a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Théorème : Pour qu'une fonction f tende vers l quand x tend vers a, il faut et il suffit que, pour toute suite x_n tendant vers x, la suite numérique $f(x_n)$ tende vers l.

La condition nécessaire est évidente, la condition suffisante se démontre par l'absurde.

Les propriétés de la notion de limite pour une fonction sont analogues à celles de la notion de limite pour les suites et se démontrent de la même manière.

— Quand x tend vers a, si $f_1(x)$ tend vers l_1 et $f_2(x)$ tend vers l_2, la fonction-somme $[f_1(x) + f_2(x)]$ tend vers $(l_1 + l_2)$.

— Quand x tend vers a, si $f_1(x)$ tend vers l_1 et $f_2(x)$ tend vers l_2, la fonction-produit $[f_1(x) . f_2(x)]$ tend vers $(l_1 l_2)$.

— Quand x tend vers a, si la fonction f tend vers l, réel non nul, la fonction qui à x associe $\frac{1}{f(x)}$ tend vers $\frac{1}{l}$.

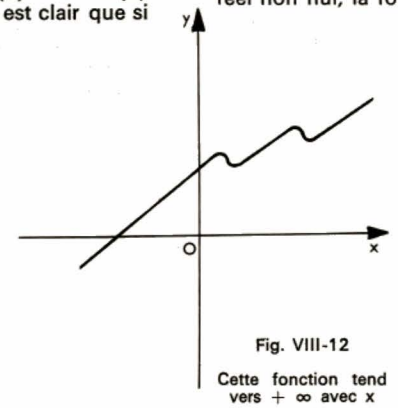


Fig. VIII-12

Cette fonction tend vers $+\infty$ avec x

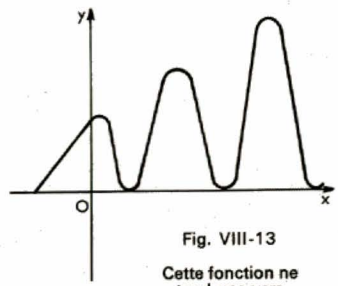


Fig. VIII-13

Cette fonction ne tend pas vers $+\infty$ avec x

Extension de la notion de limite

Une fonction f tend vers $+\infty$, quand x tend vers a si :

$$\forall A, \exists \eta / |x - a| \leqslant \eta \Rightarrow f(x) > A$$

Une fonction f tend vers l quand x tend vers $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon, \exists B / x \geqslant B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Une fonction f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si :

$\forall A, \exists B / x \geqslant B \Rightarrow f(x) \geqslant A$ (fig. VIII-12 et VIII-13)

Les définitions correspondantes pour $-\infty$ se déduisent sans difficulté.

Les théorèmes sur les limites peuvent s'étendre aux

« valeurs infinies » des limites en tenant compte des règles suivantes :

$$\forall l \in \mathbf{R} + \infty + l = + \infty$$
$$\forall l \in \mathbf{R} - \infty + l = - \infty$$
$$\forall l \in \mathbf{R}\ l > 0 \Rightarrow \begin{cases} (+\infty).l = +\infty \\ (-\infty).l = -\infty \end{cases}$$
$$l < 0 \Rightarrow \begin{cases} (+\infty).l = -\infty \\ (-\infty).l = +\infty \end{cases}$$

Nous ne pouvons rien dire dans deux cas :

$$[(+\infty) + (-\infty)] \text{ et } [(\pm\infty).0].$$

5.2. Définition et propriétés des fonctions continues

Définition : Une fonction réelle de variable réelle $x \in \mathbf{R} \to f(x) \in \mathbf{R}$ est continue au point x_0 si $f(x) \to f(x_0)$ quand $x \to x_0$ c'est-à-dire si :

$$\forall \varepsilon, \exists \eta\ /\ |x - x_0| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Nous étudierons ultérieurement (V. chap. 18), plus complètement, les propriétés des fonctions continues d'un espace métrique (muni d'une distance) dans un autre espace métrique dont la définition ci-dessus ne fournit qu'un cas particulier. Nous n'en rappellerons ici que les principales propriétés pour les appliquer à l'étude pratique des fonctions.

Propriétés fondamentales : Ces propriétés seront démontrées au chapitre 18.

— Si une fonction est continue en tout point d'un intervalle fermé borné, l'ensemble de ses valeurs sur cet intervalle est borné ; les bornes inférieure et supérieure appartiennent à cet ensemble ainsi que tout réel compris entre ces bornes. Autrement dit, l'image par une fonction continue d'un intervalle fermé borné est un intervalle fermé borné.

— Étant donné deux fonctions réelles f et g de variable réelle, f continue au point x_0, g continue au point $f(x_0)$, $g \circ f$ est alors une fonction réelle de variable réelle continue au point x_0. Comme $x \to |x|$ est une fonction continue, nous en déduisons que : $x \to f(x)$ continue $\Rightarrow x \to |f(x)|$ continue.

— *La somme de deux fonctions continues au point x_0 est une fonction continue au point x_0 :*

$$\begin{cases} \forall \varepsilon\ \exists \eta_1 : |x - x_0| \leqslant \eta_1 \Rightarrow |f_1(x) - f_1(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{2} \\ \forall \varepsilon\ \exists \eta_2 : |x - x_0| \leqslant \eta_2 \Rightarrow |f_2(x) - f_2(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Donc si : $|x - x_0| \leqslant \inf(\eta_1, \eta_2)$

alors :

$$|f_1(x) + f_2(x) - f_1(x_0) - f_2(x_0)| \leqslant |f_1(x) - f_1(x_0)| + |f_2(x) - f_2(x_0)| < \varepsilon$$

— *Le produit de deux fonctions continues au point x_0 est une fonction continue au point x_0 :*

$$f_1(x)\,f_2(x) - f_1(x_0)\,f_2(x_0) = f_1(x)\,[f_2(x) - f_2(x_0)] + f_2(x_0)\,[f_1(x) - f_1(x_0)]$$

$$\forall \varepsilon, \exists \eta_1 : |x - x_0| \leqslant \eta_1 \Rightarrow |f_1(x) - f_1(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2|f_2(x_0)|},$$

$|f_1(x)|$ est majorée par M sur $(x_0 - \eta_1, x_0 + \eta_1)$

$$\exists \eta_2 : |x - x_0| \leqslant \eta_2 \Rightarrow |f_2(x) - f_2(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

Donc si : $|x - x_0| \leqslant \inf(\eta_1, \eta_2)$

alors :

$$|f_1(x)\,f_2(x) - f_1(x_0)\,f_2(x_0)| \leqslant M\,|f_2(x) - f_2(x_0)| + |f_2(x_0)|\,|f_1(x) - f_1(x_0)| < \varepsilon$$

— *L'inverse d'une fonction continue et non nulle au point x_0 est une fonction continue au point x_0.*

$$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)} = \frac{-f(x) + f(x_0)}{f(x)\,f(x_0)}$$

$$\exists a, \exists \eta : |x - x_0| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x)| > a$$

d'où : $|f(x)\,f(x_0)| > a^2$ et : $\dfrac{1}{|f(x)\,f(x_0)|} < \dfrac{1}{a^2}$

$$\forall \varepsilon, \exists \eta' : |x - x_0| \leqslant \eta' \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon a^2$$

Donc si : $|x - x_0| \leqslant \inf(\eta, \eta')$

alors : $\left|\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{f(x_0)}\right| < \varepsilon a^2 \times \dfrac{1}{a^2} = \varepsilon$

— *Si $x \in (a, b) \to f(x) \in \mathbf{R}$ est une fonction continue monotone strictement croissante (resp. décroissante), f est une bijection de (a, b) sur $[f(a), f(b)]$ et l'application inverse f^{-1} est une fonction monotone croissante (resp. décroissante) continue sur l'intervalle $[f(a), f(b)]$:*

$$\forall \varepsilon', \forall x_0 \in]a, b[, \exists \varepsilon < \varepsilon' :]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset [a, b]$$

Posons : $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$, $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$

L'intervalle ouvert $]y_1, y_2[$ contient $f(x_0)$ et donc il existe un nombre η tel que $]f(x_0) - \eta, f(x_0) + \eta[\subset]y_1, y_2[$

Donc : $|y - f(x_0)| < \eta \Rightarrow y_1 < y < y_2$
$\Rightarrow x_0 - \varepsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon$
$\Rightarrow |f^{-1}(y) - x_0| < \varepsilon'$

6. DÉRIVÉE D'UNE FONCTION RÉELLE DE VARIABLE RÉELLE

Comme la notion de continuité, la notion de dérivée se généralise à un cadre beaucoup plus vaste que celui des fonctions réelles de variable réelle. L'étude élémentaire entreprise dans ce paragraphe sera complétée au chapitre 19.

6.1. Définition et premières propriétés. — Définition :

Une fonction réelle de variable réelle est dérivable au point x_0 si le rapport $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ tend vers une limite quand $x \to x_0$; cette limite est appelée la **dérivée de f au point x_0**. Remarquons que cette définition implique qu'une fonction dérivable au point x_0 doit être continue puisque $f(x) \to f(x_0)$ quand $x \to x_0$. Si f est dérivable en tout point de son ensemble de définition, nous désignerons par $f'(x)$ ou $\dfrac{df}{dx}$ la fonction qui à x associe la dérivée de f au point x. De même, si f' est dérivable, nous noterons f'' ou $\dfrac{d^2f}{dx^2}$ la fonction qui à x associe la dérivée de f' au point x.

Propriétés

— La dérivée d'une somme de fonctions dérivables en un point x_0 est égale à la somme des dérivées des fonctions en ce point (théorème sur la somme des limites).

— La dérivée du produit de deux fonctions f et g dérivables en un point x_0 est égale à $f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0)$ car :

$$\frac{f(x)\,g(x) - f(x_0)\,g(x_0)}{x - x_0} = f(x)\,\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x_0)\,\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

— La dérivée de l'inverse d'une fonction dérivable f différente de 0 en x_0 est $-\dfrac{f'(x)}{f(x_0)^2}$:

$$\left[\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}\right]\frac{1}{x - x_0} = \frac{f(x_0) - f(x)}{x - x_0}\,\frac{1}{f(x)\,f(x_0)}$$

dont la limite est $(-f'(x_0)) \times \dfrac{1}{f(x_0)^2}$ quand $x \to x_0$

— La dérivée du quotient de deux fonctions dérivables f et g au point x_0 tel que $g(x_0) \neq 0$ s'en déduit :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{g(x_0)}\,\frac{f(x_0)\,g'(x_0)}{g(x_0)^2} = \frac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

— Si f est dérivable en x_0 et g en $f(x_0)$, $g \circ f$ est dérivable en x_0 et il vient :

$$(g \circ f)'(x) = f'(x_0).g'[f(x_0)]$$

(démontrée au chapitre 19).

— De même si f est bijective et que g est sa fonction réciproque, si f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) \neq 0$, g est

dérivable en $f(x_0)$ et sa dérivée est l'inverse de la dérivée de f en x_0 :

$$f'(x_0) \cdot g'[f(x_0)] = 1$$

$$g'[f(x_0)] = \frac{1}{f'(x_0)}$$

6.2. Formule des accroissements finis. Formule de Taylor. — Théorème de Rolle : Soit f une fonction réelle, définie et continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$, dérivable en tout point de l'intervalle ouvert $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe un point c de l'intervalle ouvert $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Preuve. La fonction f étant continue sur $[a, b]$ est bornée ; si elle n'est pas constante, elle atteint un maximum supérieur à $f(a)$, ou un minimum inférieur à $f(a)$. Soit c un point où elle atteint son maximum, alors $f'(c) = 0$. En effet, supposons que $f(c)$ soit un maximum. Pour $x > c$, $\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ est négatif et pour $x < 0$, $\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ est positif. Leur limite commune est $f'(c)$; elle ne peut qu'être nulle. On pourrait faire une démonstration analogue si $f(c)$ est un minimum.

Formule des accroissements finis :

Soit f une fonction réelle, définie et continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. Alors, il existe un point c de l'intervalle ouvert $]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)\, f'(c)$. Pour obtenir la formule des accroissements finis, il suffit d'appliquer le théorème de Rolle à la fonction suivante :

$$F(x) = f(b) - f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(b - x)$$

En effet : $F'(x) = -f'(x) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

donc : $F'(c) = 0 \iff f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Application à l'étude du sens de variation d'une fonction :

Si une fonction f est définie, continue sur l'intervalle $[a, b]$, dérivable sur l'intervalle $]a, b[$ et que sa dérivée est positive (resp. négative) sur cet intervalle, elle est croissante (resp. décroissante) sur cet intervalle. Pour le montrer, il suffit d'étudier le signe de la différence $f(b_1) - f(a_1)$ pour $b_1 \in]a, b[$ et $a_1 \in]a, b[$ en appliquant la formule des accroissements finis à f sur l'intervalle $[a_1, b_1]$.

Formule de Taylor : Soit f une fonction réelle, définie, continue sur l'intervalle $[a, b]$ et telle que sa dérivée d'ordre $(n + 1)$ existe en tout point de l'intervalle ouvert $]a, b[$. Alors il existe un point c de l'intervalle ouvert $]a, b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + (b - a)\, f'(a) + \ldots + \frac{(b - a)^n}{n\,!} f^{(n)}(a) + \frac{(b - a)^{n+1}}{(n+1)\,!} f^{(n+1)}(c)$$

Cette formule est utilisée pour obtenir une valeur approchée de f au voisinage de a, connaissant les valeurs en a de la fonction f et de ses dérivées (V. chap. 16). Elle se démontre de façon analogue à la formule des accroissements finis en appliquant le théorème de Rolle à la fonction

$$F(x) = f(b) - f(x) - (b - x)\, f'(x) - \ldots - \frac{(b - x)^n}{n\,!} f^{(n)}(x) - \frac{(b - x)^{n+1}}{(n+1)\,!}\,\lambda$$

avec λ tel que $F(a) = 0$.

7. LES FONCTIONS PUISSANCE ET L'EXPONENTIELLE

7.1. Racine n-ième d'un nombre réel positif. — Nous allons répondre maintenant à la dernière des questions que nous nous étions posées avant d'introduire les nombres réels. Existe-t-il toujours des nombres réels dont le carré est égal à un entier positif donné ? De façon générale, nous chercherons les nombres réels x qui satisfont la relation $x^n = a$ (n désignant un entier positif). Si n est pair et si x_0 est solution de « l'équation » ci-dessus, — x_0 est aussi solution de cette équation ; il suffit donc de chercher les nombres positifs solutions de l'équation si a est positif ; si a est négatif, l'équation n'admet pas de solution car la puissance paire d'un nombre réel est toujours positive. Supposons maintenant que n soit impair : x_0 doit être du même signe que a pour être solution de l'équation $x^n = a$, si x_0 est solution de cette équation, — x_0 est solution de l'équation $x^n = -a$. Dans tous les cas, le problème se ramène à chercher les nombres réels positifs x qui satisfont la relation $x^n = a$ où n est un entier positif donné et a un réel positif donné.

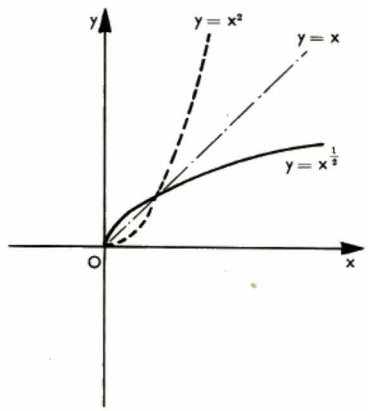


Fig. VIII-14
Fonction
$x \to y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$
(graphe symétrique du graphe de la fonction $x \to y = x^2$)

La relation $x^n = a$ définit dans ces conditions une coupure sur l'ensemble des nombres rationnels et sur l'ensemble des nombres réels. La classe inférieure de cette coupure est constituée par les nombres négatifs et par les nombres positifs tels que $x^n \leqslant a$; la classe supérieure de la coupure est constituée par les nombres positifs tels que $x^n > a$. La classification précédente constitue bien une coupure et *nous montrerons qu'elle définit un nombre réel qui est la seule solution positive de l'équation* $x^n = a$.

L'unicité de la solution est assurée en effet par l'injectivité de l'application $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ qui à x associe le nombre x^n : $x_1^n - x_2^n = (x_1 - x_2)(x_1^{n-1} + \ldots + x_2^{n-1})$. Comme x_1 et x_2 sont strictement positifs, le second facteur est strictement positif et la nullité du produit a lieu si, et seulement si le premier facteur est nul, c'est-à-dire si $x_1 = x_2$.

L'existence de la solution est un peu plus délicate à montrer. Soit x_0 le nombre réel défini par la coupure précédente : il nous faut montrer que $x_0^n = a$. Soit x_1 un nombre réel de la classe inférieure de la coupure et x_2 un nombre réel de la classe supérieure de la coupure. Nous pouvons écrire : $x_1 \leqslant x_0 < x_2$ soit : $x_1^n \leqslant x_0^n < x_2^n$; par ailleurs, par définition de la coupure : $x_1^n \leqslant a < x_2^n$. Nous allons montrer que nous pouvons choisir x_1 et x_2 de façon que la différence $x_2^n - x_1^n$ soit aussi petite que nous le désirons. Dans ce cas, comme d'après les inégalités précédentes, nous avons : $|x_0^n - a| \leqslant x_2^n - x_1^n$, donc $|x_0^n - a|$ est nul (ce que nous devions démontrer).

Or, $x_2^n - x_1^n = (x_2 - x_1)(x_2^{n-1} + x_1 x_2^{n-2} + \ldots + x_1^{n-1}) < (x_2 - x_1)\, n\, x_2^{n-1}$ car $x_1 < x_2$.

Il faut prendre $x_2 \leqslant A$ (A entier quelconque de la classe supérieure de la coupure) et $x_2 - x_1 \leqslant \frac{h}{nA^{n-1}}$ (ce qui est possible car nous pouvons choisir x_1 et x_2 aussi proches que nous voulons d'après les propriétés des coupures). Alors $x_2^n - x_1^n \leqslant h$ quel que soit h donné à l'avance.

Le nombre réel x_0 est appelé racine n-ième du nombre réel positif a et il sera noté $\sqrt[n]{a}$ (si $n = 2$ on écrit souvent $\sqrt{a}$ au lieu de $\sqrt[2]{a}$; fig. VIII-14). Il est important de comprendre que, par conséquent, la relation entre nombres réels : $x_0^n = a \iff x_0 = \sqrt[n]{a}$ est *fausse* en général ; elle n'est vraie d'après notre définition que si les nombres x_0 et a sont positifs. De même, nous n'utiliserons pas le symbole $\pm\sqrt{a}$. Cette écriture est, en effet, peu commode malgré les apparences ; en particulier, nous ne pouvons pas définir d'opération sur ces symboles. Par exemple, le symbole

$(\pm\sqrt{a} + \pm\sqrt{b})$ pourrait prendre non plus seulement deux valeurs possibles mais quatre valeurs possibles !

7.2. L'équation du second degré et le trinôme. — Signalons d'emblée que nous ne traiterons que l'équation du *second* degré, car sa résolution explicite est *utile* et sera utilisée dans la suite. Nous renonçons à résoudre explicitement les équations du troisième et du quatrième degré, calculs intéressants certes mais dépourvus de tout intérêt pratique, étant donné la rapidité des méthodes approchées qui seront employées préférentiellement par l'utilisateur. Les généralités sur les polynômes seront brièvement exposées au chapitre 12. Dans ce paragraphe, nous répondrons simplement à la question : « Existe-t-il des nombres réels x qui satisfont la relation $ax^2 + bx + c = 0$, a étant un nombre réel non nul, b et c des nombres réels quelconques ? »

Les lignes suivantes sont équivalentes l'une à l'autre :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = 0$$

$$a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) = 0$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Trois cas différents peuvent se produire :

● $(b^2 - 4ac) > 0$. Deux nombres réels satisfont donc à la relation ; ils sont donnés par les formules :

$$\boxed{x_1 = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}}$$

et

$$\boxed{x_2 = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}}$$

● $(b^2 - 4ac) = 0$. Un nombre réel satisfait à la relation :

$$\boxed{x = -\frac{b}{2a}}$$

Il est appelé racine double, pour exprimer que, dans ce cas, les deux racines habituelles sont confondues.

● $b^2 - 4ac) < 0$. Il n'y a pas de nombres réels satisfaisant la relation.

Le nombre de racines réelles dépend donc du signe de la quantité $(b^2 - 4ac)$ qui est appelée *discriminant* de l'équation.

7.3. Les exposants fractionnaires. — Nous allons maintenant envisager l'opération d'élévation à la puissance n d'un autre point de vue en considérant l'application de **N** dans $\mathbf{R}^+$: $n \to a^n$ pour un nombre a réel positif donné une fois pour toutes.

Cette application est appelée **exponentielle** de base a et elle est représentée par le symbole $\exp_a$.

Rappelons :

— que l'exponentielle est un morphisme de l'addition de **N** dans la multiplication de $\mathbf{R}^+$:

$$\boxed{\exp_a(n_1 + n_2) = \exp_a n_1 . \exp_a n_2}$$

ou

$$\boxed{a^{n_1 + n_2} = a^{n_1} . a^{n_2}}$$

— qu'il est possible d'étendre ce morphisme en un morphisme du groupe additif **Z** dans le groupe multiplicatif $\mathbf{R}^+$ par la formule $\exp_a(-n) = \dfrac{1}{\exp_a(n)}$.

Par ce morphisme, la multiplication par un élément de **Z** est transformée en élévation à la puissance : $[\exp_a(n)]^p = [\exp_a(p)]^n = \exp_a(np)$, ou, ce qui est peut-être plus « parlant » : $(a^n)^p = (a^p)^n = a^{np}$.

Nous avons vu au paragraphe 7.1 qu'il existe un nombre positif x et un seul tel que $x^p = \exp_a(n)$. Il est naturel de poser alors $x = \exp_a\left(\dfrac{n}{p}\right) = a^{n/p}$.

Nous avons prolongé le morphisme de **Z** dans $\mathbf{R}^+$ en un morphisme de **Q** dans $\mathbf{R}^+$. Nous allons réaliser un nouveau prolongement en étendant l'exponentielle en un morphisme de **R** dans $\mathbf{R}^+$. Pour ce faire, nous pouvons utiliser la structure topologique de **R** (prolongement par continuité) ou la structure d'ordre ; nous choisirons cette seconde méthode.

La démonstration repose sur le fait que l'exponentielle est une application *monotone;* il faut donc distinguer deux cas :

— Si le nombre a, base de l'exponentielle, est supérieur à 1, l'exponentielle est une application croissante. C'est évident comme application de **N** dans $\mathbf{R}^+$ et donc comme application de **Z** dans $\mathbf{R}^+$. En tant qu'application de **Q** dans $\mathbf{R}^+$, nous déduisons ce résultat par « réduction des fractions au même dénominateur ».

Montrons d'abord que, si le rationnel $\dfrac{p}{q}$ est positif, alors $\exp_a\left(\dfrac{p}{q}\right) \geqslant 1$. En effet, $p \geqslant 0 \Rightarrow \exp_a = a^p \geqslant 1$. Or, la racine q-ième d'un nombre supérieur ou égal à 1 est supérieure ou égale à 1 car $1^q = 1$; nous en déduisons la suite d'équivalences suivantes :

$x \geqslant y \iff x - y \geqslant 0 \iff \exp_a(x - y) \geqslant 1 \iff \exp_a(x) \geqslant \exp_a(y)$

L'application exponentielle est donc une application **croissante** de **Q** dans $\mathbf{R}^+$.

— Si $a < 1$, nous pouvons montrer que l'exponentielle est une application décroissante. Les deux cas étant symétriques, nous envisagerons le premier.

7.4. Prolongement à R de l'exponentielle

7.4.1. Définition du prolongement. — Soit un nombre réel t. Définissons une partition de l'ensemble $\{\exp_a(r)/r \in \mathbf{Q}\}$ en deux classes : la première est constituée par l'ensemble $\{\exp_a(r_1)/r_1 \in \mathbf{Q}$ et $r_1 \leqslant t\}$, la seconde est constituée par l'ensemble $\{\exp_a(r_2)/r_2 \in \mathbf{Q}$ et $r_2 \geqslant t\}$. D'après la croissance de l'exponentielle, tout nombre de la première classe est inférieur à tout nombre de la seconde. Cette classification détermine sur l'ensemble des réels une classification nouvelle : la première classe est constituée des nombres inférieurs ou égaux à au moins un nombre de la première classe $\{\exp_a(r_1)/r_1 \in \mathbf{Q}$ et $r_1 \leqslant t\}$, la seconde classe est constituée des autres nombres réels. Cette classification est une coupure. Elle détermine un nombre que nous notons $\overline{\exp_a}(t)$; d'après la définition :

$$\overline{\exp_a}(t) = \sup_{\substack{r \in \mathbf{Q} \\ r \leqslant t}} \exp_a(r)$$

Remarquons tout d'abord que lorsque t est rationnel, $\overline{\exp_a}(t) = \exp_a(t)$; l'application $\overline{\exp_a}$ prolonge sur le corps des réels l'application $\exp_a$ définie sur le corps des rationnels. Il reste à montrer que l'application $\overline{\exp_a}$ possède sur le corps des réels les mêmes propriétés que l'application $\exp_a$ sur le corps des rationnels.

7.4.2. L'application $\overline{\exp_a}$ est croissante. — Soit deux nombres réels t et t' avec $t < t'$. Entre les nombres réels t et t', nous pouvons intercaler un rationnel r tel que $t < r < t'$. D'après la définition de $\overline{\exp_a}$, $\overline{\exp_a}(r) > \overline{\exp}\ (t)$ car $\exp_a(r)$ est plus grand que tous les réels déterminant la coupure $\overline{\exp_a}(t)$; de même, $\overline{\exp_a}(r) < \overline{\exp_a}\ (t')$ car $\exp_a\ (t')$ est plus grand que tous les réels déterminant la coupure $\overline{\exp_a}(r)$; donc $\overline{\exp_a}(t) < \overline{\exp_a}(t')$. Donc : $\exp(t) < \exp(t')$.

7.4.3. L'application $\exp_a$ est un morphisme du groupe additif R sur le groupe multiplicatif $\mathbf{R}^+$. — Pour retrouver les propriétés classiques de l'exponentielle,

il suffit de démontrer que, quels que soient les réels t et t', nous avons : $\overline{\exp_a}(t+t') = \overline{\exp_a}(t).\overline{\exp_a}(t')$.

$$\overline{\exp_a}(t+t') = \sup_{\substack{r \leqslant t \\ r' \leqslant t'}} \exp(r+r') = \sup_{\substack{r \leqslant t \\ r' \leqslant t'}} \exp(r)\exp(r')$$

$$= \sup_{r \leqslant t} \exp(r) . \sup_{r' \leqslant t'} \exp(r')$$

Donc : $\overline{\exp_a}(t+t') = \overline{\exp_a}(t).\overline{\exp_a}(t')$

Nous confondrons désormais les symboles $\overline{\exp_a}$ et $\exp_a$ (V. fig. VIII-16 : représentation graphique de l'exponentielle).

7.5. La règle à calcul. — La propriété de morphisme du groupe additif **R** dans le groupe multiplicatif $\mathbf{R}^+$ de l'exponentielle est à la base d'un instrument de calcul usuel : la règle à calcul qui permet de faire rapidement des multiplications approchées (fig. VIII-15).

Supposons qu'à la place d'une graduation en t, nous inscrivions une graduation en $\exp_a(t)$. Quand nous ferons coïncider $\exp_a(x)$ de la réglette mobile avec $\exp(0) = 1$ de la réglette fixe, alors $\exp_a(y)$ de la réglette mobile coïncidera avec la division de la réglette fixe graduée $\exp_a(x+y) = \exp_a(x)\exp_a(y)$. Nous obtiendrons ainsi le résultat de la multiplication de $\exp_a(x)$ par $\exp_a(y)$. En général, les calculs sont approchés : il ne peut y avoir de graduation pour tous les nombres réels sur la règle ni même pour tous les nombres rationnels ; il faut souvent prendre la graduation la plus proche du nombre désiré. Ce résultat concret, justifiant le calcul approché sur la règle à calcul, est une conséquence de la continuité des opérations et de l'application exponentielle.

8. LA FONCTION LOGARITHME - DÉRIVÉES DES FONCTIONS PUISSANCES ET EXPONENTIELLES

8.1. Étude de la fonction $x \to x^{\frac{p}{q}}$. — La fonction de **R** dans **R**, $x \to x^n$ (n entier positif) est continue et dérivable en tout point et sa dérivée au point x est nx^{n-1} ; ce résultat provient de l'identité remarquable :

$$x^n - {x_0}^n = (x - x_0)\,(x^{n-1} + \ldots + {x_0}^{n-1})$$

$$\Rightarrow \frac{x^n - {x_0}^n}{x - x_0} \to n{x_0}^{n-1}$$

D'après le théorème sur la continuité et la dérivabilité de l'inverse d'une fonction non nulle, nous déduisons la dérivée de $x \to \frac{1}{x^n} = x^{-n}\,(x \neq 0)$; elle est égale à :

$$\frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = (-n)x^{-n-1}$$

Dans tous les cas, la fonction puissance $x \to x^n$ d'un entier relatif n est continue et monotone sur l'ensemble des réels positifs ; elle admet donc une fonction réciproque continue de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}^+$ telle que :

$$(x^n)^{1/n} = (x^{1/n})^n = x$$

D'après le théorème sur la dérivation de la fonction réciproque d'une fonction dérivable $(x^{1/n})' . n\,(x^{1/n})^{n-1} = 1$

soit : $$(x^{1/n})' = \frac{1}{n}\,x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n}\,x^{\frac{1}{n}-1}$$

En composant les fonctions $x \to x^p$ et $x \to x^{1/q}$, nous déduisons que la fonction $x \to x^{p/q}$ est continue et dérivable et que sa dérivée est égale à :

$$px^{p-1} . \frac{1}{q}\,(x^p)^{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q}\,x^{p-1+\frac{p}{q}-p} = \frac{p}{q}\,x^{\frac{p}{q}-1}$$

La dérivée de la fonction $x \in \mathbf{R}^+ \to x^r \in \mathbf{R}^+$ est donc rx^{r-1}, r désignant un rationnel quelconque. Nous verrons dans la suite du chapitre que cette formule est vraie pour r réel quelconque.

8.2. Continuité et dérivabilité de l'exponentielle

Lemme. — *La suite* $u_n = a^{\frac{1}{n}}$ *tend vers* 1 *quel que soit* a *réel positif.*

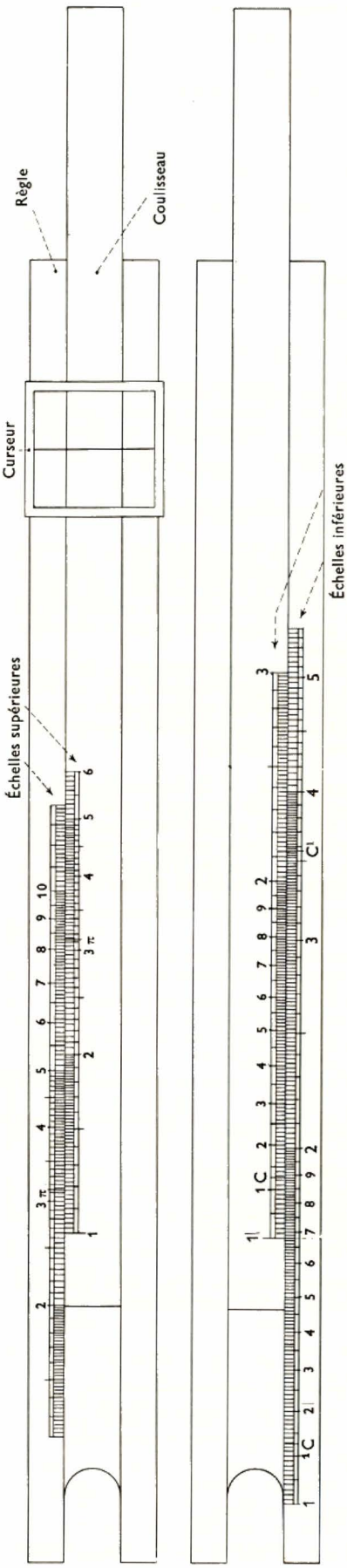


Fig. VIII-15 — Règle à calcul

La règle à calcul se compose :
1° d'une partie fixe appelée *règle* ;
2° d'une partie mobile pouvant être déplacée dans des glissières ménagées dans la règle : c'est la *réglette* (autres appellations : coulisseau et tiroir) ;

Multiplication. — Exemple : multiplier 2,65 par 4.
Pour obtenir le résultat de cette multiplication, il faut opérer de la façon suivante :
1° placer 1 de la réglette devant 2,65 de l'échelle supérieure de la règle,
2° amener le repère central du curseur devant 4 sur l'échelle supérieure de la réglette,
3° lire le résultat sur l'échelle supérieure de la règle, au-dessous du repère central du curseur.
Dans l'exemple considéré, ce résultat est 10,60.
La multiplication peut également être faite en utilisant les échelles inférieures de la réglette et de la règle. Le mode opératoire est exactement le même (dans le texte, remplacer *supérieure* par *inférieure*). La précision obtenue est plus grande.

Division. — Exemple : diviser 4,2 par 2,5.
1° placer 2,5 de l'échelle inférieure de la réglette devant 4,2 de l'échelle inférieure de la règle,
2° amener le repère central du curseur devant 1 sur la réglette et lire le résultat, sous ce repère, sur l'échelle inférieure de la règle. Dans l'exemple choisi, ce résultat est 1,68.
Pour la division, il est également possible d'utiliser les échelles supérieures mais, comme pour la multiplication, la précision est moins grande.

Preuve. La démonstration est faite pour $a > 1$; le cas $a<1$ sera déduit en considérant la suite $v_n = \frac{1}{u_n} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$. Pour $a > 1$ la suite u_n est décroissante et minorée par 1. Elle converge donc vers une limite supérieure ou égale à 1, soit h, tel que $\forall n, h < u_n = \sqrt[n]{a}$ soit $h^n < a$. Donc : $h = 1$, car si nous avions $h > 1$, alors $h^n \to \infty$.

Théorème. *L'application* $\exp_a$ de **R** dans $\mathbf{R}^+$ *est continue.*

$$\exp_a(x + h) - \exp_a x = \exp_a x\,(\exp_a h - 1)$$

Quand $x + h \to x$ ou $h \to 0$, alors, quel que soit a, $\exp_a(h) \to 1$.

En effet d'après le lemme $\forall \varepsilon, \exists N / n \geqslant N \Rightarrow |\exp_a\left(\frac{1}{n}\right) - 1| < \varepsilon$; comme $\exp_a$ est monotone :

$$|h| < \frac{1}{N} \Rightarrow |\exp_a(h) - 1| < \varepsilon$$

On montre d'ailleurs que le prolongement à **R** de l'exponentielle définie dans **Q** est le *seul prolongement continu.*

Cherchons maintenant si l'exponentielle est dérivable :

$$\frac{\exp_a(x + h) - \exp_a(x)}{h} = \exp_a x \frac{\exp_a h - 1}{h}$$

Nous voyons que la dérivabilité de l'exponentielle dépend de la dérivabilité au point 0.

Nous montrerons (V. chap. 17) qu'il existe un nombre réel positif **e** tel que $\exp_e$ soit dérivable au point 0 et que sa dérivée en ce point soit égale à 1. Ce nombre e est approximativement égal à 2,718. Nous noterons $\exp(x)$ ou $\mathbf{e}^x$ l'application $\exp_e(x)$. L'application exp est donc dérivable et égale à sa propre dérivée.

Nous allons obtenir la dérivée des fonctions $x \to \exp_a x = a^x$, $x \to x^n$ (réel) et plus généralement $x \to u(x)^{v(x)}$ par la considération de la fonction réciproque de la fonction exponentielle de base **e** (exp) : elle est appelée *fonction logarithme népérien* ($\log_e$ ou ln).

8.3. Fonction logarithme. — La fonction exponentielle est une bijection continue monotone, croissante et dérivable de **R** dans $\mathbf{R}^+$. Nous en déduisons que l'application réciproque est une bijection monotone, croissante, continue et dérivable de $\mathbf{R}^+$ dans **R**. Nous l'appelons la fonction logarithme népérien et nous la notons $\log_e$. Des continues, en prolongeant l'égalité ci-dessus à **R** tout entier, nous pouvons écrire :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \forall a > 0 \qquad \boxed{\log_e a^x = x \log_e a}$$

(Le principe de prolongement d'une égalité entre fonctions continues sur un ensemble dense est établi au chapitre 18).

La dérivée de la fonction logarithme népérien est l'inverse de celle de la fonction exponentielle :

$$\exp[\log_e x] = x \Rightarrow (\log_e x)' \cdot \exp[\log_e x] = 1$$

d'où $(\log_e x)' = \frac{1}{\exp[\log_e x]} = \frac{1}{x}$, c'est donc la fonction $\frac{1}{x}$.

D'après le théorème de la dérivation des fonctions composées, la dérivée de $\log_e f(x)$ pour $f(x) > 0$ est égale à :

$$\boxed{\{\log_e [f(x)]\}' = f'(x) \cdot \frac{1}{f(x)}}$$

$\frac{f'(x)}{f(x)}$ est appelée *dérivée logarithmique* de f. Dans certains cas, la considération de la dérivée logarithmique de f est plus utile que celle de la dérivée de f.

Pour calculer la dérivée de $f(x) = u(x)^{v(x)}$ [$u(x) > 0$ et v dérivable], nous commencerons par calculer la dérivée de $\log_e f(x) = v(x) \log_e[u(x)]$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = v'(x) \log_e u(x) + \frac{v(x)\,u'(x)}{u(x)}$$

D'où : $$f'(x) = v'(x) \log_e u(x)\, u(x)^{v(x)} + v(x)u'(x)u(x)^{v(x)-1}$$

Exemples :

— *fonction exponentielle de base a :*

$$\boxed{x \to \exp_a(x) = a^x}$$

$\log_e a^x = x \log_e a$. D'où la valeur de la dérivée : $\log_e a \cdot a^x$

— *fonction puissance d'un réel r :*

$$\boxed{x \to x^r}$$

$\log_e x^r = r \log_e x$. D'où la valeur de la dérivée : rx^{r-1}

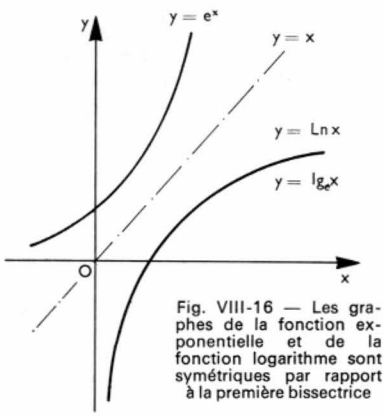


Fig. VIII-16 — Les graphes de la fonction exponentielle et de la fonction logarithme sont symétriques par rapport à la première bissectrice

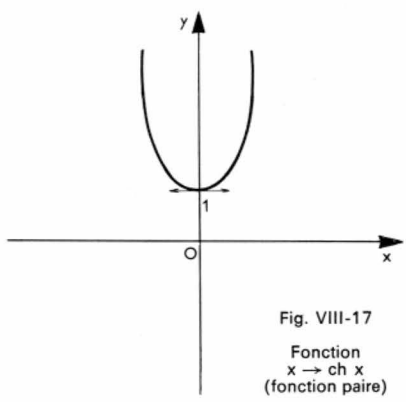


Fig. VIII-17

Fonction
x → ch x
(fonction paire)

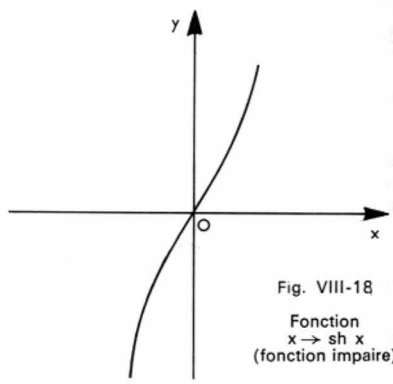


Fig. VIII-18

Fonction
x → sh x
(fonction impaire)

propriétés de la fonction exponentielle, nous pouvons déduire les propriétés de la fonction logarithme népérien (fig. VIII-16) :

$$\left.\begin{array}{l} c = \log_e a \\ d = \log_e b \end{array}\right\} \Rightarrow e^c \cdot e^d = a \cdot b = e^{c+d}$$

$$\boxed{\log_e(a \cdot b) = c + d = \log_e a + \log_e b}$$

Nous en déduisons :

$$\log_e a^n = n \log_e a$$

$$\log_e a^{p/q} = \frac{p}{q} \log_e a$$

et comme les fonctions $b \to \log_e b$ et $x \to a^x = \exp_a(x)$ sont

9. FONCTIONS HYPERBOLIQUES

On appelle cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique respectivement les parties paire et impaire de l'exponentielle. Le cosinus hyperbolique représenté par le symbole ch est défini par la formule suivante (fig. VIII-17) :

$$\text{ch } x = \frac{1}{2}[\exp(x) + \exp(-x)]$$

Le sinus hyperbolique représenté par le symbole sh est défini par la formule suivante (fig. VIII-18) :

$$\text{sh } x = \frac{1}{2}[\exp(x) - \exp(-x)]$$

Ces fonctions tirent leur nom et leur intérêt d'une analogie avec les fonctions trigonométriques usuelles (V. chap. 17). De plus, elles interviennent comme écriture possible de l'exponentielle dans certains problèmes d'équations différentielles fournis par la physique. Signalons, par exemple, qu'on démontre que la forme prise par un fil homogène suspendu à ses deux extrémités est une portion du graphe d'un cosinus hyperbolique. Pour cette raison, ce graphe est appelé *chaînette*.

— *Dérivées des fonctions hyperboliques :*

$$(\operatorname{ch} x)' = \frac{1}{2}[\exp(x) - \exp(-x)] = \operatorname{sh} x$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \frac{1}{2}[\exp(x) + \exp(-x)] = \operatorname{ch} x$$

De plus, ces fonctions sont liées par la relation suivante : $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$. Elle peut être vérifiée par un calcul direct.

CHAPITRE IX

ESPACES VECTORIELS

1. ESPACES VECTORIELS

1.1. Structure linéaire de l'espace usuel. — En géométrie usuelle sont étudiées les propriétés de sous-ensembles particuliers (lignes, surfaces, volumes) d'un ensemble dit *espace,* dont les éléments sont appelés *points*. En géométrie, on avait toujours distingué les *principes* et les *postulats,* indémontrables mais vérifiés par l'expérience, des *théorèmes* déduits de ces principes aux moyens de règles logiques (postulat d'Euclide, théorème d'Euler). À la fin du siècle dernier, un pas en avant a été fait dans la voie axiomatique, en étudiant les postulats non pas d'un point de vue « expérimental », sans signification mathématique, mais du point de vue de leur cohérence et de leur nécessité (éliminer les postulats inutiles, tenter de démontrer qu'il n'y a pas de contradiction entre un postulat et un autre, classer les postulats). On a abouti à plusieurs axiomatisations de la géométrie dont l'exposé dépasse largement la portée de cet ouvrage. Nous n'énoncerons donc pas de postulat géométrique ; nous étudierons une *structure algébrique :* l'*espace vectoriel* et l'*espace affine associé,* en soulignant que cette structure est le modèle approprié de l'espace géométrique usuel.

Considérons l'espace géométrique usuel. Sur cet espace sont définis l'ensemble des *segments orientés* ou couples de points ordonnés (on employait le terme de *vecteur lié* par opposition à celui de *vecteur libre* défini comme classe d'équivalence d'un vecteur lié) et une relation d'équivalence appelée *équipollence*. L'énoncé géométrique de cette relation est le suivant : les segments orientés équipollents ont des supports parallèles de même orientation et de même longueur. On les appelle *classes d'équivalence des vecteurs*. Pour définir la somme de deux vecteurs, il suffit d'utiliser la relation de Chasles étendue aux classes d'équivalence (fig. IX-1) : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ tandis que pour le rapport de deux vecteurs ayant des supports parallèles, il faut employer divers moyens détournés (similitude, théorème de Thalès). Cette géométrie n'est pas plus « rigoureuse » que celle à base de construction de triangles car elle possède le même vice de construction : elle se fonde sur l'évidence des postulats pour éviter de préciser clairement ce qui est admis au départ et qui sert de base pour ériger l'édifice. Cette géométrie « vectorielle » a du moins le mérite de préciser les deux opérations fondamentales définies sur l'ensemble des vecteurs du plan ou de l'espace : l'addition des vecteurs qui est une loi de composition interne et la multiplication par un nombre réel qui est une loi de composition externe (fig. IX-2 et 3).

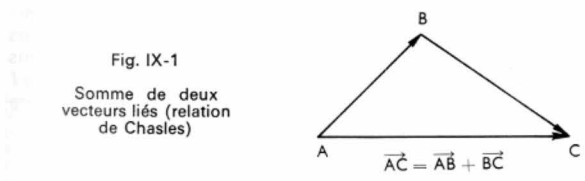


Fig. IX-1

Somme de deux vecteurs liés (relation de Chasles)

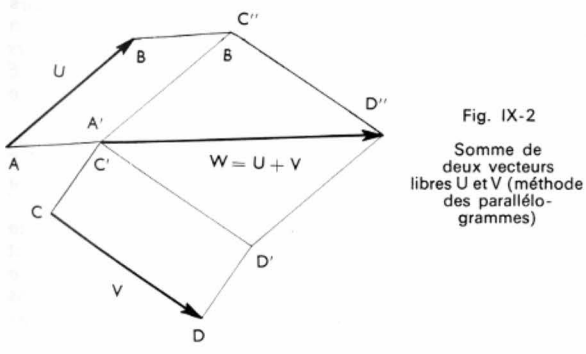


Fig. IX-2

Somme de deux vecteurs libres U et V (méthode des parallélogrammes)

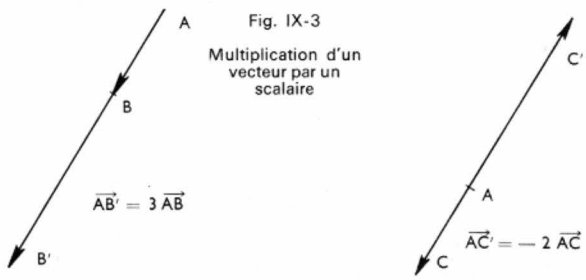


Fig. IX-3

Multiplication d'un vecteur par un scalaire

1.2. Définition de la structure d'espace vectoriel.

Un espace vectoriel sur un corps K est un ensemble E tel qu'il existe :

— une loi de composition interne notée $+$ qui munisse l'ensemble E de la structure de groupe commutatif,

— une loi de composition externe faisant opérer K sur E (application de $K \times E$ dans E qui, au couple (k, x) de $K \times E$, associe un élément de E noté $k.x$) associative et doublement distributive, c'est-à-dire vérifiant les égalités suivantes quels que soient les éléments h et k de $\mathbf{R}$ et x et y de E :

$$h.(k.x) = (hk).x$$
$$h.(x + y) = (h.x) + (h.y)$$
$$(h + k).x = (h.x) + (k.y)$$

Quel que soit le vecteur x de E, l'élément unité du corps K doit aussi vérifier : $1.x = x$. L'ensemble K est appelé *corps de scalaires de l'espace vectoriel E.*

Si nous désignons par 0 l'élément nul du corps K et par $\underline{0}$ l'élément neutre du groupe commutatif E, nous vérifions immédiatement :

$$k.x = \underline{0} \iff (k = 0) \quad \text{ou} \quad (x = \underline{0})$$

En effet : $0.x + 1.x = (0 + 1).x = 1.x$

et donc : $0.x = \underline{0}$

$$k.\underline{0} = k.(0.\underline{0}) = (k.0).\underline{0} = \underline{0}.\underline{0} = \underline{0}$$

d'après le résultat précédent.

Si k est différent de 0, soit h l'inverse de k, il vient : $x = (hk).x = h.(k.x)$, donc : $k.x = \underline{0}$ et $k \neq 0 \Rightarrow x = \underline{0}$

Nous confondrons désormais les notations 0 et $\underline{0}$; le lecteur doit cependant apprendre à les distinguer mentalement d'après le contexte dans lequel le symbole 0 intervient. Il importe de ne pas confondre les scalaires (éléments du corps) et les vecteurs (éléments de l'espace vectoriel).

Remarquons d'ailleurs que le corps K est un espace vectoriel sur lui-même.

Nous appellerons sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E, tout sous-ensemble F de E muni de la structure d'espace vectoriel par la somme vectorielle et par la multiplication par un scalaire. L'ensemble **R** est un espace vectoriel sur **Q** et **Q** en est un sous-espace vectoriel ; cependant, **Q** n'est pas un sous-espace vectoriel sur **R**, car en multipliant le rationnel 1 par un scalaire irrationnel, nous n'obtenons pas un rationnel. Cet exemple montre que la structure d'espace vectoriel ne dépend pas seulement de l'ensemble E, mais aussi de l'ensemble de scalaires.

1.3. Espace affine et géométrie usuelle. — Un ensemble $E_\bullet$ est dit muni de la structure d'espace affine s'il existe un espace vectoriel E sur un corps K et une application de $E_\bullet \times E_\bullet$ dans E qui, au couple de points (A, B), associe le vecteur $\overrightarrow{AB}$ (*) élément de E, telle que les trois axiomes suivants soient vérifiés :

(1) $\overrightarrow{AB} = 0 \Longleftrightarrow A = B$ (axiome d'identification).

(2) $\forall x \in E, \forall A \in E_\bullet, \exists B \in E_\bullet$ tel que $\overrightarrow{AB} = x$ (axiome de glissement) (fig. IX-4).

(3) Pour tous A, B et C éléments de $E_\bullet$: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (relation de Chasles).

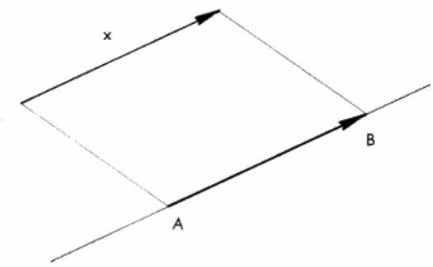


Fig. IX-4

Axiome de glissement

Pour employer un langage géométrique, nous pouvons dire que l'application ci-dessus associe au segment orienté AB, sa classe d'équipollence : le vecteur $\overrightarrow{AB}$. On distinguait couramment le vecteur lié (A, B) (lié à son origine) et le vecteur libre (libéré de son origine et déplaçable parallèlement à lui-même) $\overrightarrow{AB}$. Cette terminologie est à éviter, étant donné le sens précis du terme « lié » en algèbre linéaire (V. § 2).

Pour illustrer par un exemple concret la distinction entre les notions d'espace vectoriel et d'espace affine, considérons le cas simple de la droite réelle. Nous avons vu (V. chap. 6) que, moyennant le choix d'une origine et d'un vecteur unitaire, nous pouvions mettre une droite orientée satisfaisant certains axiomes en correspondance bijective avec le corps des nombres réels qui est un espace vectoriel sur **R**. Nous allons maintenant munir la droite réelle d'une structure d'espace affine, en associant au couple de réels (a, b) le nombre réel $(b - a)$. Cette application vérifie les trois axiomes (1), (2) et (3) et nous pouvons montrer qu'elle ne dépend pas de l'origine O. En effet, changeons d'origine en conservant le même vecteur unitaire $\vec{u}$; soit O' la nouvelle origine d'abscisse p : $\overrightarrow{OO'} = p \cdot \vec{u}$; comme a est l'ancienne abscisse du point A et b celle de B, nous avons : $\overrightarrow{OA} = a \cdot \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = b \cdot \vec{u}$. La relation de Chasles s'écrit : $\overrightarrow{O'A} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA}$ et comme $\overrightarrow{O'O} = -(\overrightarrow{OO'})$, il vient : $\overrightarrow{O'A} = -p \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{u}$; la nouvelle abscisse du point A est donc : $a' = -p + a$. De même, la nouvelle abscisse du point B est : $b' = -p + b$. La différence des abscisses des points A et B est donc invariante par changement d'origine. De même, le rapport entre deux vecteurs de la droite est constant quand le vecteur unitaire change. En étudiant l'ensemble ponctuel défini comme étant la droite, il peut sembler arbitraire de privilégier un de ses points en le choisissant comme origine pour munir cette droite de la structure d'espace vectoriel. La structure d'espace affine qui ne privilégie aucun point paraît plus « naturelle » que la structure d'espace vectoriel.

Réciproquement, étant donné un espace affine (la droite réelle, par exemple), comment lui associer un espace vectoriel ? Étant donné un point A, nous allons montrer que l'application qui, au point B, associe le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est une application bijective de l'espace affine $E_\bullet$ sur l'espace vectoriel E. L'axiome (2) montre que cette application est surjective et elle est injective car si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$, comme d'après la relation de Chasles $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, il vient : $0 = \overrightarrow{BC}$, donc B est confondu avec C d'après l'axiome (1).

1.4. Espace vectoriel des suites à valeurs dans un corps. — Considérons l'ensemble des suites à valeurs dans un corps K. La somme de deux suites et le produit d'une suite par un scalaire du corps ont été définis au chapitre 7 : $(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$ et $k \cdot (u_n) = (ku_n)$. Par ces deux opérations, l'ensemble des suites à valeurs dans un corps K est doté d'une structure d'espace vectoriel.

Considérons maintenant que l'ensemble d'indices n'est plus **N** tout entier mais un sous-ensemble fini de **N** : l'ensemble des entiers de 1 à n. Une suite à valeur dans K se réduit à un n-uple ordonné d'éléments de K soit à un élément du produit cartésien $\underbrace{K \times K \times \ldots \times K}_{n \text{ fois}}$, qui est noté K^n. Ainsi, $\mathbf{R}^2$ est l'espace vectoriel des couples ordonnés de nombres réels.

Envisageons à nouveau le cas plus général où les suites sont indexées par un sous-ensemble quelconque M de **N** (fini ou égal à **N** tout entier). Étant donné un sous-ensemble L de M, considérons l'ensemble des suites à valeurs dans K et telles que $u_n = 0$ si $n \notin L$; il est facile de montrer que cet ensemble est stable pour la somme des suites et la multiplication par un scalaire : c'est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites indexées par M. Ainsi, $\mathbf{R}^p$ peut être identifié pour $n > p$ au sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ des suites de n termes dont les $(n - p)$ derniers termes sont nuls.

Nous avons défini une suite comme une application de **N** dans l'ensemble des valeurs de la suite et nous venons de montrer que, lorsque l'ensemble des valeurs de la suite est un corps, l'ensemble des suites à valeurs dans ce corps peut être muni de la structure d'espace vectoriel. Cela peut être généralisé à l'ensemble des applications d'un ensemble quelconque I dans un corps K. Nous définissons la somme de deux applications f et g de I dans K par l'application qui associe $[f(n) + g(n)]$ à tout élément n de I et le produit de l'application f de I dans K par un scalaire k de K comme l'application qui associe $kf(n)$ à tout élément n de I. Remarquons que ces définitions sont de simples généralisations des opérations analogues sur les suites ; pour les mêmes raisons que dans le cas particulier où $I = \mathbf{N}$, l'ensemble des applications de I dans un corps K peut être muni de la structure d'espace vectoriel par les opérations qui viennent d'être définies.

2. DÉPENDANCE LINÉAIRE (fig. IX-5 et IX-6 a et b)

2.1. Systèmes de vecteurs et sous-espaces engendrés. — Dans un espace vectoriel E, considérons un sous-ensemble S quelconque, appelé *système de vecteurs* et caractérisons le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant S qui est, par définition, le sous-espace engendré par S.

Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des éléments de S et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres réels. Tout sous-espace vectoriel contenant S contient les vecteurs $a_1 \cdot x_1, \ldots, a_n \cdot x_n$ donc leur somme $(a_1 \cdot x_1 + \ldots + a_n \cdot x_n)$.

Des combinaisons de multiplications par un scalaire et de sommes vectorielles à partir d'éléments de S s'appellent des *combinaisons linéaires* d'éléments de S. L'espace vectoriel engendré par S contient toutes les combinaisons linéaires d'éléments de S mais cet ensemble de combi-

(*) Nous réservons l'emploi de la flèche pour les bipoints $\overrightarrow{AB}$ et tous les éléments des espaces vectoriels sont représentés par des lettres (minuscules ou majuscules) non surmontées de flèches.

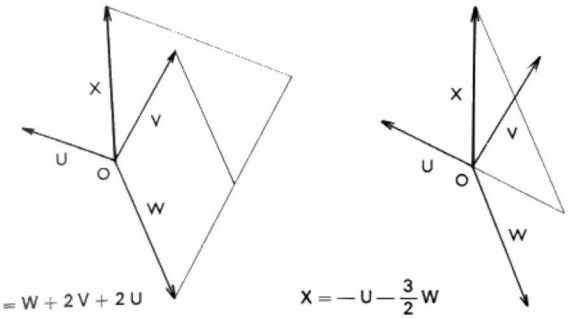


Fig. IV-5 — Le système de vecteurs du plan (U, V, W) n'est pas libre (on dit qu'il est lié) ; le vecteur X ne s'exprime pas de façon unique comme combinaison linéaire de vecteurs du système

naisons est fermé pour la somme vectorielle et la multiplication par un scalaire et c'est donc un sous-espace vectoriel (sous-espace vectoriel engendré par S). Tout élément de ce sous-espace peut donc s'écrire comme une combinaison linéaire d'éléments de S.

Cette écriture est-elle unique ? Par exemple, dans l'ensemble des vecteurs du plan affine, nous pouvons écrire : $\underline{0} = 0.\overrightarrow{AB} + 0.\overrightarrow{BC} + 0.\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$ d'après la relation de Chasles.

La décomposition de $\underline{0}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ n'est pas unique. Supposons maintenant que $\underline{0}$ soit combinaison linéaire de deux vecteurs du plan affine x et y : $\underline{0} = a.x + b.y$. Nous en déduisons l'égalité : $a.x = -b.y$ (en géométrie usuelle, ce résultat est interprété en disant que les deux vecteurs x et y ont même direction).

Nous dirons qu'un système S de vecteurs est *libre* ou que les vecteurs de S sont indépendants, si tout élément du sous-espace engendré par S s'écrit d'une façon unique comme combinaison linéaire de vecteurs de S. Nous montrerons que cette définition est équivalente à une condition plus faible : pour que le système S soit libre, il faut et il suffit que $\underline{0}$ s'écrive d'une façon unique comme combinaison linéaire de vecteurs de S. La condition nécessaire est évidente : ce qui est vrai pour tout élément du sous-espace engendré doit l'être pour $\underline{0}$. Il faut donc montrer qu'il est suffisant que la seule expression de $\underline{0}$ comme combinaison linéaire d'éléments de S soit la combinaison linéaire nulle :

$$\underline{0} = a_1.x_1 + \ldots + a_n.x_n \Rightarrow a_1 = \ldots = a_n = 0$$

Supposons, en effet, qu'un vecteur x du sous-espace engendré par S s'écrive de deux façons comme combinaison linéaire d'éléments de S :

$$x = a_1.x_1 + \ldots + a_n.x_n = b_1.x_1 + \ldots + b_n.x_n$$

En faisant tout passer dans le second membre, il vient :

$$(a_1 - b_1).x_1 + \ldots + (a_n - b_n).x_n = \underline{0}$$

Le système de vecteurs (U, V) du plan (U, V, W) de l'espace, est libre, le vecteur X s'exprime de façon unique comme combinaison linéaire de vecteurs du système

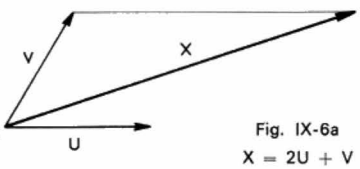


Fig. IX-6a

X = 2U + V

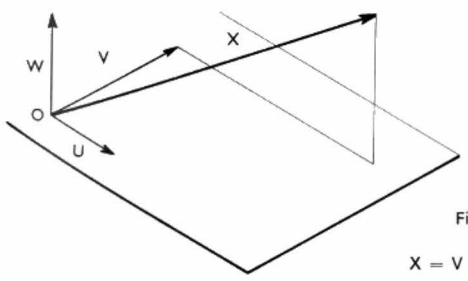


Fig. IX-6b

$X = V + 3V + \frac{3}{2} W$

Comme la seule expression de $\underline{0}$ est la combinaison linéaire nulle : $a_1 = b_1 \ldots a_n = b_n$. S est donc un système libre.

Ainsi, les systèmes de vecteurs du plan constitués par les trois vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$ ou par deux vecteurs de même direction ne sont pas libres. Si le vecteur nul appartient à un système de vecteurs, ce système n'est pas libre car dans une combinaison linéaire d'éléments de S, nous pouvons changer la valeur du coefficient de 0 sans changer la valeur de la combinaison linéaire.

2.2. Base d'un espace vectoriel. — Si le système de vecteurs S d'un espace vectoriel E engendre le sous-espace F, S est dit *générateur* de F. Si S est générateur de E, nous dirons simplement que c'est un système générateur.

Tout système générateur et libre de vecteurs de E s'appelle une **base** de E. Ainsi, une base de E est un système de vecteurs de E tel que la décomposition de tout vecteur de E comme combinaison linéaire d'éléments du système existe (système générateur) et soit unique (système libre). Par exemple, tout élément non nul de **R** est une base de **R**. Un système de deux éléments de **R** n'est pas une base de **R** car il n'est pas libre.

Plus généralement, tout sous-ensemble d'une base de E n'est pas un système générateur et tout sur-ensemble d'une base de E n'est pas un système libre.

— Supposons que le système S soit générateur et appelons T un sur-ensemble de S. Si 0 est un élément de T, T n'est pas libre, sinon un élément x non nul de T, n'appartenant pas à S, s'écrit comme combinaison linéaire d'éléments de S (puisque S est générateur) :

$$x = a_1.x_1 + \ldots + a_n.x_n$$

Donc $0 = (-1).x + a_1.x_1 \ldots + a_n.x_n$. Le sur-ensemble T n'est pas un système libre.

— Si un système S est un sous-ensemble d'une base de E, il ne peut être générateur, sinon la base de E qui est un sur-ensemble d'un système générateur, ne serait pas libre.

Nous admettrons le résultat fondamental suivant : *si une base de E a un nombre fini de vecteurs, toute autre base de E a le même nombre de vecteurs.* Nous dirons alors que E est un *espace vectoriel de dimension finie* et le nombre de vecteurs de la base est la **dimension** de E.

2.3. Étude de l'espace vectoriel réel de dimension n. — Considérons l'espace vectoriel des n-uples de nombres réels. Nous allons montrer qu'une base de cet espace vectoriel est constituée par les n-uples $v_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $v_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$ $v_n = (0, 0, \ldots, 1$ dont tous les termes sont nuls sauf un qui est égal à l'unité. En effet, ce système est générateur car tout n-uple $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ s'exprime comme combinaison linéaire des vecteurs de ce système :

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1.(1, 0, \ldots, 0) + x_2.(0, 1, \ldots, 0) + x_n.(0, 0, \ldots, 1)$$

Il est libre car si la combinaison linéaire du second membre est nulle, nous déduisons que les *composantes* du premier membre sont nulles : $x_1 = x_2 = \ldots x_n = 0$. Nous disons aussi que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les *coordonnées* du n-uple $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans la *base canonique* $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Considérons maintenant un espace vectoriel E sur le corps des réels de dimension n : il existe donc une base $(u_1, u_2 \ldots u_n)$ de E. Tout vecteur de E s'écrit donc comme combinaison linéaire des vecteurs de la base et cette expression est unique.

L'application de $\mathbf{R}^n$ dans E qui, au n-uple $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, associe le vecteur de E s'écrit :

$$x_1.u_1 + x_2.u_2 + \ldots + x_n.u_n$$

Cette application est surjective car à tout vecteur de E correspond une combinaison linéaire des vecteurs de la base et injective car cette expression est unique. De plus, c'est un morphisme d'espace vectoriel car cette application associe la somme de deux vecteurs de E à la somme de deux vecteurs de $\mathbf{R}^n$ et le produit d'un vecteur de E et du scalaire k au produit d'un n-uple et du scalaire k. Réciproquement d'ailleurs, tout isomorphisme de $\mathbf{R}^n$ sur E est de

ce type. Soit F un tel isomorphisme ; tout vecteur de E peut s'écrire : $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (surjectivité de F). Comme
$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1 . v_1 + x_2 . v_2 + \ldots + x_n . v_n)$
et que F est un morphisme

$$[F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 . F(v_1) + x_2 . F(v_2) + \ldots + x_n . F(v_n)]$$

le système $F(v_1)$, $F(v_2)$ ... $F(v_n)$ est générateur et il est libre, car F est injectif : c'est donc une base de E. En conclusion, *tout espace vectoriel E réel de dimension n est isomorphe à l'espace vectoriel* $\mathbf{R}^n$ *et tous les isomorphismes possibles sont déterminés par les bases de E.*

Les applications d'un espace vectoriel dans un autre qui sont des morphismes pour la structure d'espace vectoriel sont appelées des *applications linéaires :* leur étude fait l'objet d'un paragraphe spécial.

2.4. Rang d'un système de vecteurs de $\mathbf{R}^3$. — Le rang d'un système fini de vecteurs d'un espace vectoriel E est la dimension du sous-espace vectoriel de E engendré par le système. Le rang d'un système de vecteurs est inférieur ou égal au nombre de vecteurs du système (égal si le système est libre), inférieur ou égal à la dimension de E.

Nous allons étudier pratiquement le rang d'un système de $\mathbf{R}^3$. Il faut, pour cela, répondre à la question préliminaire : *étant donné deux vecteurs de* $\mathbf{R}^3$ *indépendants, quelle condition doit satisfaire un troisième vecteur pour former un système libre avec les deux premiers ?* Nous nous donnons les trois vecteurs V_1, V_2, et V_3 par leurs composantes dans la base canonique : $V_1\ (x_1, y_1, z_1)$, $V_2\ (x_2, y_2, z_2)$ et $V_3\ (x_3, y_3, z_3)$. Si le système n'est pas libre, il existe deux nombres réels non simultanément nuls a et b, tels que $V_3 = (aV_1 + bV_2)$.

Donc :
$$\begin{cases} x_3 = ax_1 + bx_2 \\ y_3 = ay_1 + by_2 \\ z_3 = az_1 + bz_2 \end{cases}$$

Il doit donc exister un nombre réel b tel que :

$$a = \frac{x_3 - bx_2}{x_1} = \frac{y_3 - by_2}{y_1} = \frac{z_3 - bz_2}{z_1}$$

Soit :
$$\frac{\frac{x_3}{x_1} - \frac{y_3}{y_1}}{\frac{x_2}{x_1} - \frac{y_2}{y_1}} = \frac{\frac{z_3}{z_1} - \frac{y_3}{y_1}}{\frac{z_2}{z_1} - \frac{y_2}{y_1}}$$

$$(x_3y_1 - x_1y_3)\ (z_2y_1 - z_1y_2) = (x_2y_1 - x_1y_2)\ (z_3y_1 - z_1y_3)$$
$$x_3y_1z_2y_1 - x_1y_3z_2y_1 - x_3y_1z_1y_2 + x_1y_3z_1y_2$$
$$= x_2y_1z_3y_1 - x_1y_2z_3y_1 - x_2y_1z_1y_3 + x_1y_2z_1y_3$$
$$(1)\ x_1y_2z_3 + y_1z_2x_3 + z_1x_2y_3 - x_3y_2z_1 - y_3z_2x_1 - z_3x_2y_1 = 0$$

En réalité, ce calcul n'est pas tout à fait correct, il présuppose, en effet, que toutes les quantités écrites en dénominateur ne sont pas nulles et il faudrait faire des études particulières dans les cas de nullité de ces quantités. Cependant, dans tous les cas, nous obtenons la relation (1) qui est une condition nécessaire et suffisante pour que le système des trois vecteurs soit lié. Nous laissons au lecteur le soin de « remonter » les calculs pour démontrer la réciproque, c'est-à-dire pour montrer, que si la relation (1) est satisfaite, il existe des nombres réels a et b tels que $V_3 = aV_1 + bV_2$ (les vecteurs V_1 et V_2 étant indépendants).

Écrivons la relation (1) sous la forme suivante :

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

Nous pouvons maintenant étudier le rang d'un système de n vecteurs de $\mathbf{R}^3$. Donnons-nous un vecteur non nul de ce système V_1. Si tous les vecteurs du système sont liés à V_1 (composantes proportionnelles), V_1 est générateur du sous-espace engendré par le système qui est de rang 1

Fig. IX-7
Système de vecteurs de rang 1

(fig. IX-7). Sinon, il existe deux vecteurs libres V_1 et V_2. Nous cherchons si tous les autres vecteurs du système appartiennent au sous-espace engendré par V_1 et V_2, ce qui se traduit par des relations du type (1). Dans l'affirmative, le système de vecteurs étudié est de rang 2 et V_1 et V_2 forment une base de l'espace engendré ; sinon le système est de rang 3 (fig. IX-8 et IX-9).

Fig. IX-8
Système de vecteurs de rang 2

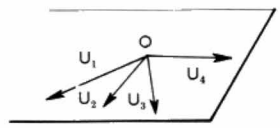
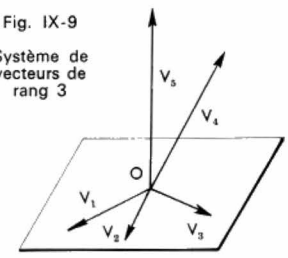


Fig. IX-9
Système de vecteurs de rang 3



Nous avons détaillé ce procédé pratique car nous verrons qu'il permet de résoudre un système linéaire d'équations en précisant le nombre de degrés de libertés du système. Retenons la méthode générale utilisée : il faut chercher un système *libre maximal* extrait du système étudié (« maximal » signifie que tout système plus grand que ce système est lié ; par exemple, si (V_1, V_2) est libre maximal, (V_1, V_2, V_3) est lié, donc $V_3 = aV_1 + bV_2$ puisque (V_1, V_2) est libre). Ce système libre est alors générateur du sous-espace engendré par le système étudié dont nous pourrons exprimer tous les vecteurs comme combinaisons linéaires des vecteurs du système libre maximal qui sont appelés *vecteurs principaux*.

CHAPITRE X

APPLICATIONS LINÉAIRES

1. DÉFINITION

Les applications linéaires ont été définies comme des morphismes de la structure d'espace vectoriel (V. chap. 9). Considérons deux espaces vectoriels E et F sur un même corps (**R**, par exemple) ; une application L de E dans F sera dite linéaire si quels que soient les vecteurs U et V de E et le scalaire k, nous avons :

$$L(U + V) = L(U) + L(V) \text{ et } L(kU) = kL(U)$$

L'application est un morphisme pour l'addition et la multiplication par un scalaire qui confèrent aux ensembles E et F la structure d'espace vectoriel.

Si L est une application linéaire de E dans F, l'image réciproque du vecteur nul de F est un sous-espace vectoriel de E.

En effet : $U \in L^{-1}(0) \Rightarrow L(U) = 0 \Rightarrow kL(U) = L(kU) = 0 \Rightarrow kU \in L^{-1}(0)$

$U \in L^{-1}(0)$ et $V \in L^{-1}(0) \Rightarrow L(U) + L(V) = L(U + V) = 0 \Rightarrow U + V \in L^{-1}(0)$

Par définition, ce sous-espace vectoriel est appelé le *noyau de L* et il est noté *Ker.L* (d'après le terme anglais « kernel », noyau).

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application linéaire L d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F soit injective est que le noyau de L soit réduit au vecteur nul :

$$L(U) = L(V) \Leftrightarrow L(U - V) = 0 \Leftrightarrow U - V \in L^{-1}(0)$$

Une autre propriété intéressante des applications injec-

tives est qu'elles transforment des systèmes libres en systèmes libres :

$$k_1 L(U_1) + \ldots + k_n L(U_n) = 0$$
$$k_1 U_1 + \ldots + k_n U_n \in L^{-1}(0)$$

si L est injective, cette dernière relation est équivalente à $k_1 U_1 + \ldots + k_n U_n = 0$. Réciproquement, si tout système libre est transformé en système libre, le système libre composé d'un vecteur non nul ne peut être transformé en un système composé du vecteur nul, ce qui montre que le noyau d'une telle application est réduit au vecteur nul donc que cette application est injective.

L'image d'un espace vectoriel E par une application linéaire de E dans l'espace vectoriel F est un sous-espace vectoriel de F; cette propriété est immédiate et provient des propriétés définissant les applications linéaires. Nous noterons ce sous-espace vectoriel $Im.L$ (image de E par l'application linéaire L) ou plus classiquement $L(E)$.

2. STRUCTURES DES ENSEMBLES D'APPLICATIONS LINÉAIRES

2.1. Structure d'algèbre. — Sur l'ensemble des applications linéaires d'un espace vectoriel E, dans un espace vectoriel F, nous pouvons définir les opérations :

$$L(U) + L'(U) = (L + L')(U) \quad \text{et} \quad k.L(U) = L(kU)$$

Ces opérations munissent cet ensemble d'applications linéaires de la structure d'espace vectoriel.

Par ailleurs, étant donné trois espaces vectoriels E, F et G, nous pouvons composer une application linéaire de E dans F avec une application linéaire de F dans G pour obtenir une application de E dans G. Cette application est alors une application linéaire : f étant une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G, nous avons :

$$g \circ f(U) + g \circ f(V) = g[f(U) + f(V)] = g \circ f(U + V)$$

et
$$g \circ f(kU) = g[k(f(U)] = kg \circ f(U)$$

en appliquant successivement les propriétés de linéarité des applications f et g. La composition des applications possède la propriété de bilinéarité :

$$\begin{cases} (kf) \circ g = k(f \circ g) \\ (f_1 + f_2) \circ g = f_1 \circ g + f_2 \circ g \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} f \circ (kg) = k(f \circ g) \\ f \circ (g_1 + g_2) = f \circ g_1 + f \circ g_2 \end{cases}$$

Ces relations se démontrent en appliquant les propriétés de linéarité des applications f et g.

La composition des applications et la somme définie ci-dessus munissent donc de la structure d'anneau, l'ensemble des applications linéaires d'un espace vectoriel E dans lui-même. L'ensemble des applications linéaires d'un espace vectoriel E dans lui-même possède donc à la fois la structure d'anneau et la structure d'espace vectoriel, on dit qu'il possède la structure d'algèbre. La composition des applications, loi de composition interne de cet ensemble, admet un élément unité qui est l'application identité.

2.2. Théorie de la dualité. — Une application linéaire de l'espace vectoriel E sur le corps de base R s'appelle une *forme linéaire*. Comme nous l'avons vu ci-dessus, l'ensemble des formes linéaires est muni de la structure d'espace vectoriel. Cet espace vectoriel est appelé *espace vectoriel dual* de E et il est désigné par $E^\star$.

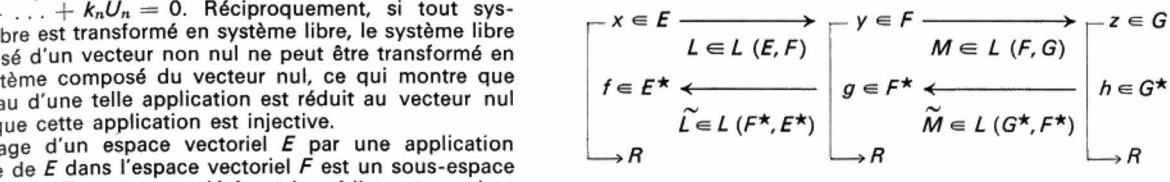
Soit L une application linéaire de l'espace vectoriel E dans l'espace vectoriel F. L'application qui associe à la forme linéaire g de $F^\star$: $y \in F \to g(y) \in R$ la forme linéaire de $E^\star$ définie par $x \in E \to g(L(x)) \in R$ est une application linéaire de $F^\star$ dans $E^\star$ (le lecteur le vérifiera facilement).

Cette application linéaire de $F^\star$ dans $E^\star$ est dite *transposée de l'application linéaire* L.

Si nous désignons par $L(E, F)$ l'espace des applications linéaires de E dans F, la transposition des applications linéaires est une application de $L(E, F)$ dans $L(F^\star, E^\star)$.

Cette application est linéaire; si la transposée d'une application linéaire L est notée $\widetilde{L}$, nous avons en effet : $\widetilde{(L + M)} = \widetilde{L} + \widetilde{M}$ et $(\widetilde{kL}) = k\widetilde{L}$.

Nous allons étudier comment la transposition transforme le produit de composition des applications avec l'aide du diagramme suivant :



$M \circ L(x) = M[L(x)]$ donc $\widetilde{(M \circ L)}\, h$ est définie par

$$\widetilde{(M \circ L)}\, h(x) = h\{M[L(x)]\}$$

Or, $h[M(y)] = \widetilde{M}h(y)$ et $g[L(x)] = \widetilde{L}g(x)$; en combinant ces deux conséquences de la définition de la transposition, nous avons :

$$\widetilde{(M \circ L)}\, h(x) = h\{M[L(x)]\} = \widetilde{M}h[L(x)]$$
$$= \widetilde{L}(\widetilde{M}h)(x) = (\widetilde{L} \circ \widetilde{M})\, h(x)$$

Pour transposer un produit d'applications linéaires, il faut transposer chaque terme du produit et recomposer le produit en inversant l'ordre des termes.

2.3. Théorie de la dualité en dimension finie. — Nous allons nous placer maintenant explicitement dans le cas d'espace de dimension finie. Soit une base $(U_1, \ldots, U_n)$ de E. La forme linéaire f de $E^\star$ est définie par les nombres réels qui sont les transformés par f de la base de E :

$$f(x_1 U_1 + \ldots + x_n U_n) = x_1 f(U_1) + \ldots + x_n f(U_n)$$

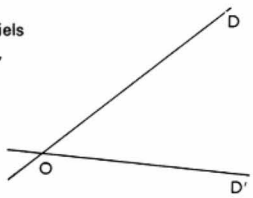
Considérons le système de formes $(f_1, \ldots, f_n)$ défini par : $f_i(x_1 U_1 + \ldots + x_n U_n) = x_i$; la forme f_i ainsi définie annule tous les vecteurs de la base sauf le vecteur U_i à qui elle associe le nombre réel 1. Nous allons montrer que le système de ces formes constitue une base de $E^\star$. Il est générateur : $f = f(U_1).f_1 + \ldots + f(U_n).f_n$. Il est libre, en effet, si $f = \theta_1.f_1 + \ldots + \theta_n.f_n$ (combinaison linéaire du système de formes), nous avons $\theta_i = f(U_i)$ car $f(U_i) = 0 + \ldots + \theta_i f_i(U_i) + \ldots + 0 = \theta_i$. Donc si f est la forme nulle, tous les θ_i sont nuls, ce qui montre qu'il n'existe pas de combinaison linéaire nulle du système de formes $(f_1, \ldots, f_n)$, exception faite du cas trivial où tous les coefficients θ_i de la combinaison linéaire sont nuls. Le système de formes $(f_1. \ldots, f_n)$ est donc une base de l'espace vectoriel $E^\star$ dual de E. Cette base est dite *base duale* de la base $(U_1, \ldots, U_n)$. Le dual de E a donc la même dimension que E.

Remarquons que tout vecteur de E définit une forme linéaire sur l'espace des formes : l'application de $E^\star$ dans R qui, à la forme f, associe le réel $f(x)$ est linéaire. L'espace vectoriel E s'identifie donc à un sous-espace vectoriel de $E^{\star\star}$ dual de $E^\star$. Dans le cas où E est un espace vectoriel de dimension finie n, $E^\star$ est un espace vectoriel de dimension n, donc $E^{\star\star}$ est aussi un espace vectoriel de dimension n et E, sous-espace de dimension n de $E^{\star\star}$, se confond avec $E^{\star\star}$, ce qui montre qu'il n'y a pas d'autre forme linéaire sur $E^\star$ que celles définies par les vecteurs de E.

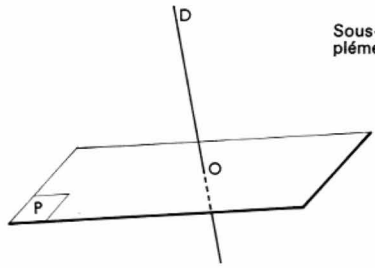
La transposition des applications linéaires est une application linéaire de $L(E, F)$ dans $L(F^\star, E^\star)$. La bitransposition (composée de deux transpositions successives) est donc une application linéaire de $L(E, F)$ dans $L(E^{\star\star}, F^{\star\star}) = L(E, F)$. Nous montrons que c'est l'identité en calculant les transformés des vecteurs d'une base de $E(U_1, \ldots, U_n)$ par l'application linéaire $\widetilde{\widetilde{L}}$ (bitransposée de l'application linéaire L). En effet, $\widetilde{\widetilde{L}}(U_i)$ est un élément de $F^{\star\star}$; quand nous l'appliquons à une forme g, nous obtenons un réel : $\widetilde{\widetilde{L}}(U_i)\ (g) = \widetilde{\widetilde{L}}g(U_i) = g(L(U_i))$ selon l'identification de $E^{\star\star}$ et de E ; nous obtenons donc $\widetilde{\widetilde{L}}(U_i) = L(U_i)$ ce que nous voulions démontrer.

Géométrie plane (dimension 2)	**Géométrie dans l'espace (dimension 3)**

Sous-espaces vectoriels supplémentaires : les droites D et D′

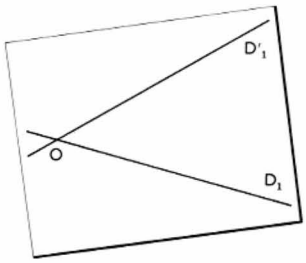


Sous-espaces vectoriels supplémentaires : la droite D et le plan P



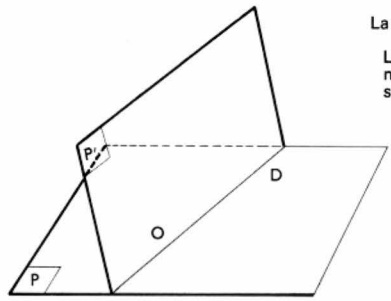
La somme vectorielle de deux sous-espaces supplémentaires doit être l'espace tout entier.
L'intersection de deux sous-espaces supplémentaires doit être réduite à O :

Les droites D_1 et D'_1



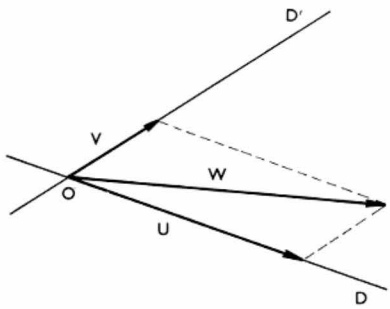
La droite D et le plan P

Les plans P et P′ ne sont pas des sous-espaces supplémentaires

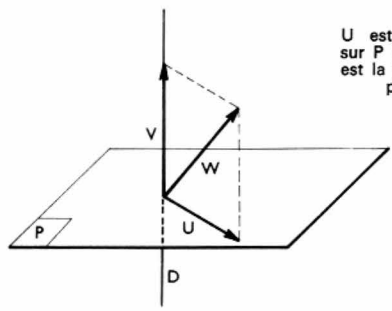


Tout vecteur W de l'espace peut s'écrire, et de façon unique, comme la somme de vecteurs appartenant à chacun des sous-espaces supplémentaires :

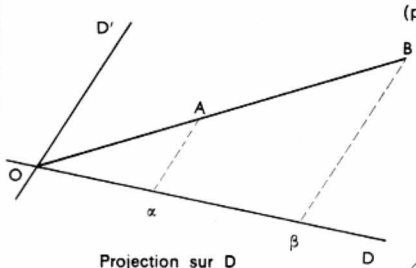
U est la projection de W sur D parallèlement à D′



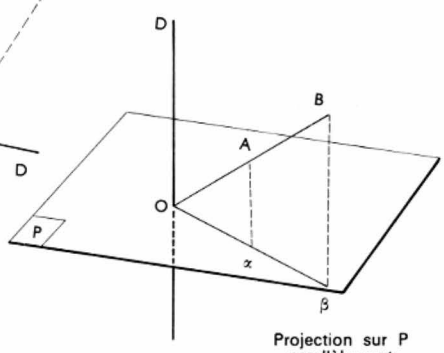
U est la projection de W sur P parallèlement à D et V est la projection de W sur D parallèlement à P



Le théorème de Thalès exprime géométriquement que le rapport de deux vecteurs colinéaires (parallèles) est conservé par projection : $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{O\alpha}}{\overline{O\beta}}$:

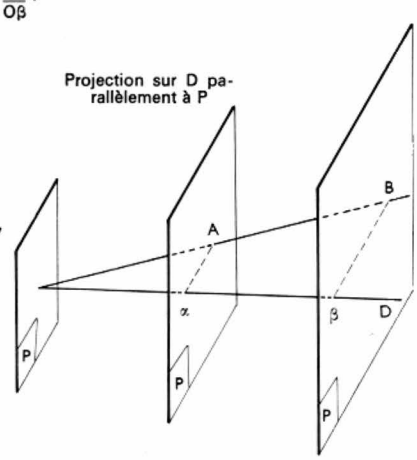


Projection sur D parallèlement à D′

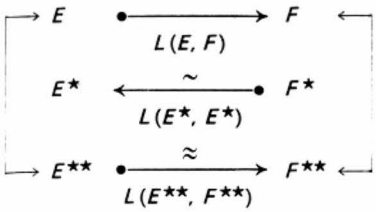


Projection sur P parallèlement à D

Projection sur D parallèlement à P



Le lecteur pourra mieux suivre le raisonnement sur le diagramme ci-dessous :



Une application dont le carré pour la composition est l'identité est appelé une *involution*. La transposition est donc une involution. Si nous considérons les algèbres d'applications linéaires ($L(E, E)$ et $L(E^*, E^*)$), la transposition est un morphisme pour la structure d'espace vectoriel et un antimorphisme pour la multiplication.

3. PROJECTEURS ET SOUS-ESPACES SUPPLÉMENTAIRES

3.1. Somme directe de deux sous-espaces vectoriels. — Soit deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel E. Nous munissons le produit cartésien $F \times G$ d'une structure d'espace vectoriel en définissant la somme de deux éléments de $F \times G$:

$$(U_1, V_1) + (U_2, V_2) = (U_1 + U_2, V_1 + V_2)$$

et le produit par un scalaire :

$$k \,.\, (U, V) = (kU, kV)$$

Remarquons d'ailleurs que cet espace vectoriel est un sous-espace de l'espace des couples de E^2.

L'application *somme* de $F \times G$ dans E associe le vecteur $U + V$ au vecteur (U, V) ; c'est une application linéaire car le transformé de $(U_1 + U_2, V_1 + V_2)$ est $(U_1 + V_1) + (U_2 + V_2)$ et le transformé de $k \,.\, (U, V)$ est $k(U + V)$. L'image par cette application linéaire de l'espace vectoriel $F \times G$ est un sous-espace vectoriel de E dit *somme* des espaces F et G : c'est l'ensemble des vecteurs qui peuvent s'écrire comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Si l'application-somme est injective, nous dirons que la somme des sous-espaces F et G est *directe* et le sous-espace-somme est noté $F \oplus G$.

Une condition nécessaire et suffisante d'injectivité est que l'image réciproque de 0 soit (0, 0), vecteur nul de $F \times G$. Nous allons voir que cette condition peut être remplacée par une autre, qui est équivalente et que nous exprimerons ainsi : l'intersection des sous-espaces F et G est réduite au vecteur nul. En effet, l'image réciproque de 0 est l'ensemble des vecteurs du type $(U, -U)$ où U appartient à F et $-U$ à G, donc où U appartient à F et G. D'où, pour que l'image réciproque de 0 soit (0, 0), il est nécessaire et suffisant que la relation $U \in F \cap G \iff U = 0$ soit vraie.

3.2. Sous-espaces supplémentaires. — Deux sous-espaces F et G d'un espace vectoriel E sont *supplémentaires* si leur somme directe est l'espace vectoriel E. Cette définition est équivalente à la conjonction des deux propriétés suivantes :

— les espaces F et G ont une intersection réduite au vecteur nul ;

— la somme des espaces F et G est l'espace E tout entier.

L'équivalence résulte de la définition de la somme directe. Une autre propriété équivalente est : « tout vecteur de E s'écrit d'une manière et d'une seule comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G ». L'existence résulte de ce que E est la somme des sous-espaces F et G, l'injectivité de l'application-somme entraînant l'unicité.

Considérons un espace vectoriel réel E de dimension finie n, muni d'une base $(U_1, \ldots, U_n)$. Nous faisons une partition de cette base en deux parties complémentaires $(U_1, \ldots U_p)$ et $(U_{p+1}, \ldots, U_n)$. Soit F le sous-espace engendré par le premier système de vecteurs et G le sous-espace engendré par le second. Ces deux systèmes de vecteurs étant extraits d'un système libre, sont libres et sont donc des bases des espaces vectoriels F et G. Nous allons montrer que ces espaces F et G sont supplémentaires : tout vecteur X de E s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de la base : $X = (x_1U_1 + \ldots + x_pU_p) + (x_{p+1}U_{p+1} + \ldots + x_nU_n)$. La première quantité entre parenthèses est un vecteur de F et la seconde un vecteur de G. Tout vecteur de E peut donc s'écrire comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G ; un vecteur, appartenant à l'intersection de F et de G, peut s'écrire : $x_1U_1 + \ldots + x_pU_p = x_{p+1}U_{p+1} + \ldots + x_nU_n$. En faisant passer tout dans le premier membre, nous obtenons une combinaison linéaire nulle des vecteurs du système $(U_1, \ldots, U_n)$. Comme c'est un système libre, tous les coefficients sont nuls et l'intersection de F et de G se réduit au vecteur nul. Réciproquement, considérons le sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E de dimension finie n et une base de F, $(U_1, \ldots, U_n)$. Nous pouvons compléter ce système pour obtenir une base de E d'après le théorème de la base incomplète.

Par exemple, considérons un sous-espace supplémentaire G de F et une base de G, $(V_1, \ldots, V_q)$. Le système de vecteurs $(U_1, \ldots, U_p, V_1 \ldots V_q)$ forme une base de E : tout vecteur X de E se décompose de façon unique en la somme d'un vecteur U de F et d'un vecteur V de G :

$$X = U + V = (u_1U_1) + \ldots + u_pU_p) + (v_1V_1 + \ldots + v_qV_q).$$

Le système est donc générateur de E ; pour démontrer qu'il est libre, il faut utiliser la propriété d'intersection nulle des sous-espaces F et G :

$$(u_1U_1 + \ldots + u_pU_p) + (v_1V_1 + \ldots + v_qV_q) = 0$$
$$u_1U_1 + \ldots + u_pU_p = 0 \; u_1 = \ldots = u_p = 0$$
$$v_1V_1 + \ldots + v_qV_q = 0 \; v_1 = \ldots = v_q = 0$$

La dimension de E, n, est donc égale au nombre de vecteurs du système $(U_1, \ldots, U_p, V_1, \ldots V_q)$ qui est une base de E comme nous venons de le démontrer.

Théorème : La somme des dimensions de deux sous-espaces supplémentaires d'un espace vectoriel de dimension finie est égal à la dimension de ce sous-espace vectoriel. Remarquons qu'il existe plusieurs sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un sous-espace vectoriel déterminé, il est donc incorrect de dire « le » supplémentaire d'un sous-espace vectoriel.

3.3. Projection sur un sous-espace vectoriel. — Étant donné deux sous-espaces vectoriels supplémentaires F et G, nous avons vu que tout vecteur X de E pouvait s'écrire de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. Nous pouvons donc définir une application de E dans F appelée *projection sur F parallèlement à G* qui à X associe U, composante sur F de la somme $X = U + V$. Nous pouvons démontrer directement que les projections sont des applications linéaires. Notre démonstration utilise les propriétés des applications. Comme E est somme directe de F et de G, E est isomorphe au produit cartésien $F \times G$, car l'application-somme est injective (car la somme est directe) et surjective (car E est l'image de $F \times G$ par l'application). C'est donc une bijection et son inverse est aussi une application linéaire ou morphisme d'espace vectoriel : c'est l'application qui à $X = U + V$ associe le couple (U, V). L'application qui à (U, V) associe U est trivialement linéaire, la composée des deux applications linéaires qui à X associe U est donc linéaire.

La projection sur F, parallèlement à G, d'un vecteur U de F est U lui-même. En effet, la décomposition de U s'écrit $U = U + 0$; l'image de E par la projection sur F parallèlement à G est donc F.

Cherchons le noyau de cette application. Il est constitué de tous les vecteurs de E qui peuvent s'écrire $X = 0 + V$, c'est-à-dire de tous les vecteurs de G, G est le noyau de la projection sur F parallèlement à G.

Théorème fondamental caractérisant les projections : *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application linéaire L d'un espace vectoriel E dans lui-même soit une projection est que : $L \circ L = L$. Dans ce cas, le noyau et l'image de L sont supplémentaires et L est la projection de E sur le sous-espace $Im.L$ parallèlement au sous-espace $Ker.L$.*

La condition est nécessaire. En effet, $L(X) \in F$ et donc $L[L(X)] = L(X)$. Réciproquement, nous supposons que pour tout X de E, $L[L(X)] = L(X)$; alors $[X - L(X)]$ appartient au noyau de L et X peut donc toujours s'écrire comme la somme d'un élément du noyau de L et d'un élément de l'image de L. Supposons maintenant qu'un élément de l'image de L, qui peut donc s'écrire $L(X)$, appartienne au noyau de L, dans ce cas nous avons : $L[L(X)] = 0$. Mais, comme $L \circ L = L$, $L[L(X)] = 0$ et $L(X) = 0$. Le noyau de L et l'image de L ont donc une intersection réduite au vecteur nul ; ce sont donc des sous-espaces supplémentaires.

La décomposition de tout vecteur X de E s'écrit :

$$X = L(X) + [X - L(X)] \text{ où } L(X) \in Im.L$$
$$\text{et } X - L(X) \in \text{Ker}.L$$

Donc, la projection du vecteur X sur $Im.L$ parallèlement à Ker.L est $L(X)$; L est donc bien l'application projection et le théorème est démontré.

La projection étant une application linéaire, elle conserve les rapports entre deux vecteurs colinéaires : $L(kX) = kL(X)$. L'interprétation géométrique de ce résultat est bien connue en géométrie élémentaire : c'est le théorème de Thalès.

CHAPITRE XI

MATRICES

1. REPRÉSENTATION MATRICIELLE DES APPLICATIONS LINÉAIRES

1.1. Détermination matricielle d'une application linéaire. — L'étude des applications linéaires est très importante en mathématiques appliquées, car nous verrons que toutes les fonctions peuvent être approchées au moyen d'applications linéaires (V. chap. 19). Il est donc utile de savoir manier les applications linéaires, de savoir les décomposer en applications linéaires plus simples dont les propriétés sont connues. Les techniques théoriques utilisées pour étudier les applications linéaires d'espaces vectoriels de « dimension infinie » ne seront pas étudiées ici.

Pour étudier le calcul linéaire dans les espaces vectoriels de dimension finie (ce qui est largement suffisant dans bien des cas), un outil d'un maniement facile a été mis au point : c'est le *calcul matriciel*. Les matrices sont des tableaux rectangulaires qui représentent des applications linéaires et dont les opérations ont été définies pour correspondre à celles des applications linéaires.

La représentation matricielle d'une application linéaire s'appuie sur le théorème suivant : *pour déterminer une application linéaire d'un espace vectoriel E de dimension finie p dans un espace vectoriel F, il suffit de se donner les transformés par l'application des vecteurs d'une base de E.* En effet, soit $(U_1, \ldots, U_p)$ une base de E ; donnons-nous p vecteurs de F qui seront $L(U_1), \ldots, L(U_p)$. Tout vecteur X de E s'exprime par une combinaison linéaire des vecteurs de la base de E : $X = x_1U_1 + \ldots + x_pU_p$. Comme L est linéaire : $L(X) = x_1L(U_1) + \ldots + x_pL(U_p)$; $L(X)$ est bien complètement déterminé et le théorème est démontré (nous vérifions trivialement que l'application L ainsi définie est bien linéaire).

Si nous supposons maintenant l'espace F de dimension finie n et que nous nous donnons une base de F, $(V_1, \ldots, V_n)$ la donnée de chaque vecteur de F équivaut à la donnée de n nombres qui sont les composantes du vecteur dans la base de F choisie :

$$L(U_1) = a_{1,1}V_1 + \ldots + a_{n,1}V_n \; L(U_p) = a_{1,p}V_1 + \ldots + a_{n,p}V_n$$

Quand une base de E a été choisie $(U_1, \ldots, U_p)$ ainsi qu'une base de F, $(V_1, \ldots, V_n)$, nous pouvons caractériser une application linéaire L de E dans F par np scalaires qui peuvent être classés dans un tableau rectangulaire à double entrée comme ci-dessous :

	$L(U_1)$	$L(U_2)$	...	$L(U_p)$
V_1	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	...	$a_{1,p}$
V_2	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	...	$a_{2,p}$
..	.....			
V_n	$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	...	$a_{n,p}$

Ce tableau a n lignes et p colonnes. Il est appelé *matrice* à n lignes et p colonnes ou matrice (n, p). Il peut aussi être interprété comme une suite dont l'ensemble d'indices est fini et « double » (sous-ensemble de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$) ; nous représentons alors la matrice par le symbole $[a_{i,j}]$ où i et j sont des indices qui prennent des valeurs entières comprises respectivement entre 1 et n et entre 1 et p.

1.2. Somme de matrices. — Soit deux matrices $[a_{i,j}]$ et $[b_{i,j}]$ représentant les applications linéaires L et M d'un espace vectoriel E de dimension p dans un espace vectoriel F de dimension n relativement à des bases choisies une fois pour toutes. La somme des matrices $[a_{i,j}]$ et $[b_{i,j}]$ est la matrice représentant l'application linéaire $L + M$ relativement aux mêmes bases. De même, le produit du scalaire k par la matrice $[a_{i,j}]$ est la matrice représentant l'application linéaire $k.L$ relativement aux mêmes bases. Par conséquent, ces opérations définies sur l'ensemble des matrices ont les mêmes propriétés que les opérations correspondantes définies sur les applications linéaires. Elles confèrent à l'ensemble des matrices la structure d'espace vectoriel isomorphe à l'espace vectoriel des applications linéaires pour le morphisme qui associe l'application linéaire de E dans F à la matrice (n, p) qui la représente.

L'intérêt de la représentation matricielle est de fournir directement la matrice-somme à partir des matrices termes de la somme : le terme général de la somme est la somme des termes généraux des matrices à additionner :

$$[c_{i,j}] = [a_{i,j}] + [b_{i,j}] \Longleftrightarrow c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$$

quels que soient i et j.

De même pour le produit par un scalaire :

$$[d_{i,j}] = k.[a_{i,j}] \Longleftrightarrow d_{i,j} = ka_{i,j}$$

quels que soient i et j.

Ces règles de calcul sont exactement les mêmes que celles qui permettent d'effectuer des opérations sur l'ensemble des suites. Effectivement, l'espace vectoriel des matrices (n, p) est isomorphe à l'espace vectoriel des suites de np termes à valeurs dans le corps des scalaires. C'est un espace vectoriel à np dimensions.

1.3. Produit matriciel. — Étant donné une application linéaire L de l'espace vectoriel E de dimension q dans l'espace vectoriel F de dimension p et une application linéaire M de l'espace vectoriel F dans l'espace vectoriel G de dimension n, $M \circ L$ est une application linéaire de l'espace vectoriel E dans l'espace vectoriel G. Choisissons maintenant les bases des espaces E, F et G. Relativement à ces bases, il existe une matrice (p, q) qui représente L et une matrice (n, p) qui représente M. Le produit de ces matrices est par définition la matrice (n, q) qui représente $M \circ L$ relativement aux bases choisies auparavant pour E et pour G. La multiplication des matrices a donc toutes les propriétés des applications linéaires : elle est bilinéaire et associative.

Si nous considérons des matrices (n, p) et (n', p'), il n'est donc pas toujours possible de les multiplier ; pour pouvoir les multiplier, il faut que la dimension de l'espace-objet pour la première (nombre de colonnes) soit égale à la dimension de l'espace-image pour la seconde (nombre de lignes) c'est-à-dire $p = n'$. Alors, il existe trois espaces vectoriels $\mathbf{R}^{p'}$, $\mathbf{R}^p$ et $\mathbf{R}^n$ tels que la première matrice représente une application linéaire de $\mathbf{R}^{p'}$ dans $\mathbf{R}^p$ et la seconde, une application linéaire de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^n$ relativement aux bases canoniques, par exemple.

Cette définition doit être complétée. Supposons en effet que la matrice (n, p) $[a_{i,j}]$ représente deux applications

linéaires M_1 et M_2 et que la matrice (p, q) $[b_{j,k}]$ représente deux applications linéaires L_1 et L_2; il faut s'assurer que, relativement aux bases convenables, les applications linéaires $M_1 \circ L_1$ et $M_2 \circ L_2$ sont représentées par la même matrice pour définir sans ambiguïté le produit de deux matrices comme la matrice associée à la composée de deux applications linéaires. Nous allons montrer que cette matrice ne dépend que des matrices facteurs $[a_{i,j}]$ et $[b_{j,k}]$.

Supposons que ces matrices représentent respectivement l'application linéaire M de F (dimension p) dans G (dimension n) relativement aux bases (V_j) et (W_i) et l'application linéaire L de E (dimension q) dans F (dimension p) relativement aux bases (U_k) et (V_j). Nous avons donc :

$$M(V_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, W_i \text{ et } L(U_k) = \sum_{j=1}^{p} b_{j,k}\, V_j$$

Soit par linéarité de M :

$$M \circ L(U_k) = \sum_{j=1}^{p} b_{j,k}\, M(V_j) = \sum_{j=1}^{p} b_{j,k} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, W_i \right)$$

La composante de W_i est donc :

$$b_{1,k}\, a_{i,1} + b_{2,k}\, a_{i,2} + \ldots + b_{p,k}\, a_{i,p} = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\, b_{j,k}$$

Cas particuliers. Une *matrice-ligne* est une matrice à une ligne et une *matrice-colonne* est une matrice à une colonne. Le produit d'une matrice-ligne $(1, n)$ et d'une matrice-colonne $(n, 1)$ est une matrice à une ligne et une colonne identifiable à l'élément correspondant du corps :

$$[a_1 \ \ldots \ a_n] \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$$

Si nous effectuons le produit d'une matrice-colonne $(n, 1)$ et d'une matrice-ligne $(1, p)$, nous obtenons une matrice (n, p) dont le terme de rang (i, j) (i-ième ligne, j-ième colonne) est le produit du terme de la i-ième ligne de la matrice-colonne par le terme de la j-ième colonne de la matrice-ligne.

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} [b_1 \ \ldots \ b_p] = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & \ldots & a_1 b_p \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n b_1 & \ldots & a_n b_p \end{bmatrix}$$

2. REPRÉSENTATION MATRICIELLE DES VECTEURS

Nous avons vu que l'espace vectoriel des matrices (n, p) à termes réels était isomorphe à $\mathbf{R}^{np}$. Plus précisément, étant donné un espace vectoriel de dimension n sur le corps des réels et une base de cet espace vectoriel $(U_1 \ \ldots \ U_n)$, à tout vecteur de l'espace vectoriel $X = x_1 U_1 + \ldots + x_n U_n$, nous associons une matrice-colonne $(n, 1)$ dont le terme de la ligne de numéro i est x_i (autrement dit, nous représentons le vecteur par la colonne de ses composantes dans la base $(U_1, \ldots, U_n)$. Cette application de l'espace vectoriel réel de dimension n (par exemple, $\mathbf{R}^n$ muni de sa base canonique) dans l'espace vectoriel des matrices-colonnes $(n, 1)$ est un isomorphisme d'espace vectoriel. En particulier, le vecteur U_i de la base (U_i) se représente par une matrice-colonne dont tous les termes sont nuls sauf le terme de la i-ième ligne qui est égale à 1. Ces matrices-colonnes forment donc une base de l'espace vectoriel des matrices-colonnes $(n, 1)$ qui est appelée *base canonique*.

Cette représentation matricielle des vecteurs d'un espace vectoriel de dimension finie dépend évidemment de la base relativement à laquelle nous prenons les composantes. Que devient cette représentation dans un changement de base ? Nous avons déjà traité le problème dans le cadre affine en le restreignant à la dimension 2 (V. chap. 9).

L'écriture matricielle, en simplifiant l'écriture, va nous permettre d'exprimer sans complication le cas d'une dimension quelconque n. Donnons-nous les composantes des vecteurs de la nouvelle base relativement à l'ancienne base :

$$V_1 = a_{1,1}\, U_1 + \ldots + a_{n,1}\, U_n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$V_n = a_{1,n}\, U_1 + \ldots + a_{n,n}\, U_n$$

Si, dans l'expression de X comme combinaison linéaire des vecteurs de la nouvelle base, nous substituons à ceux-ci des vecteurs de l'ancienne base, nous obtenons la combinaison linéaire :

$$X = x'_1 V_1 + \ldots + x'_n V_n = (x'_1 a_{1,1} + \ldots + x'_n a_{1,n})\, U_1 + \ldots + (x'_1 a_{n,1} + \ldots + x'_n a_{nn})\, U_n$$

Soit l'expression matricielle des anciennes composantes en fonction des nouvelles :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$$

Nous passons d'une matrice-colonne à l'autre en la multipliant par une matrice (n, n) dont les termes sont les composantes des vecteurs de la nouvelle base relativement à l'ancienne ; cette matrice est appelée matrice de passage de la base des (U_i) dans la base des (V_i) ; elle est notée $T_{u,v}$. Inversement, pour passer des nouvelles coordonnées aux anciennes, nous utiliserons la matrice de passage de la base des (V_i) dans la base des (U_i).

Remarquons que l'application de l'espace vectoriel des matrices $(n, 1)$ dans lui-même, qui à la matrice-colonne (x_i') associe la matrice-colonne (x_i), est une application linéaire. Si nous munissons l'espace vectoriel des matrices-colonnes de sa base canonique, la matrice représentant cette application linéaire relativement à la base canonique est précisément la matrice de passage : *les composantes relativement à la base canonique des transformés des vecteurs de la base canonique constituent les colonnes de la matrice.*

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ & & \\ & & \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{i,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{bmatrix}$$

Pour avoir les formules de changement de composantes au cours de deux changements de base successifs, nous composerons donc les deux applications linéaires ; la matrice de passage $T_{U,W}$ sera donc le produit des deux matrices de passage $T_{U,V}$ et $T_{V,W}$. Ainsi, si $[X]$, $[X']$ et $[X'']$ sont les représentations matricielles du vecteur X relativement aux bases (U_i), (V_i) et (W_i), nous aurons $[X] = T_{U,V} \cdot [X']$ et $[X'] = T_{V,W}\, [X'']$ donc, par associativité du produit de matrices, $(X) = T_{U,V} \cdot T_{V,W} \cdot [X'']$.

Au paragraphe précédent, nous avons établi un isomorphisme entre les matrices et les applications linéaires d'espaces vectoriels de dimension finie munis de leurs bases. À ce paragraphe, nous avons défini la représentation des vecteurs de ces espaces vectoriels par des matrices-colonnes. Nous allons maintenant combiner ces deux représentations.

Théorème : *Soit E un espace vectoriel réel de dimension n muni de sa base (U_i), soit F un espace vectoriel réel de dimension p muni de sa base (V_j) et soit L une application linéaire de E dans F. Nous noterons $[X]$ la représentation matricielle d'un vecteur X de E relativement à la base (U_i) et $[Y]$ la représentation matricielle d'un vecteur Y de F relativement à la base (V_j) ; soit $[L]$ la représentation matricielle de L relativement aux bases (U_i) et (V_j). Alors, nous avons l'équivalence : $Y = L(X) \Longleftrightarrow [Y] = [L] \cdot [X]$.*

Démonstration : La seule difficulté de la démonstration est « l'évidence des faits » qui peut masquer le raisonnement par isomorphisme. L'espace E est isomorphe à l'espace vectoriel des matrices-colonnes $(n, 1)$ et l'espace F à l'espace vectoriel des matrices-colonnes $(p, 1)$. L'application linéaire L induit donc une application linéaire $\mathbf{L}$ de l'espace des matrices-colonnes $(n, 1)$ dans l'espace des matrices-

colonnes $(p, 1)$. Cherchons la matrice représentant $\boldsymbol{L}$: la matrice-colonne $(n, 1)$

$$\begin{bmatrix} x_1 = 0 \\ \cdots\cdots \\ x_i = 1 \\ \cdots\cdots \\ x_n = 0 \end{bmatrix}$$

correspond par isomorphisme à U_i.

Donc : $\boldsymbol{L}\begin{bmatrix} x & 0 \\ \cdots & \\ x & 1 \\ \cdots & \\ x & 0 \end{bmatrix}$ correspond par isomorphisme à $L(U_i)$.

De même à la base des V_i correspond la base canonique de l'espace des matrices-colonnes $(p, 1)$. Donc, une même matrice représente L et $\boldsymbol{L}$. Or, pour obtenir la matrice-colonne $(p, 1)$ $[Y]$ transformée de la matrice-colonne $(n, 1)$ $[X]$ par l'application linéaire $\boldsymbol{L}$, il faut multiplier (X) par la matrice représentant $\boldsymbol{L}$ (argument souligné de la démonstration précédente). En conclusion, la combinaison des équivalences :

$$\begin{cases} Y = L(X) \Longleftrightarrow [Y] = \boldsymbol{L}\,([X]) & \text{définition de } \boldsymbol{L} \\ [Y] = \boldsymbol{L}([X]) \Longleftrightarrow [Y] = [\boldsymbol{L}]\,.\,[X] & \text{(voir ci-dessus)} \end{cases}$$

et de l'égalité démontrée ci-dessus $[L] = [\boldsymbol{L}]$ (égalité des matrices représentant L et $\boldsymbol{L}$) fournit l'équivalence cherchée.

3. L'ALGÈBRE DES MATRICES CARRÉES DE DIMENSION *n*

Considérons l'espace vectoriel des matrices (n, n) qui sont appelées les matrices carrées de dimension n. La multiplication des matrices est une loi de composition interne définie sur cet ensemble. En effet, nous pouvons faire le produit d'une matrice (n, n) par une matrice (n, n) et le résultat est aussi une matrice (n, n). La multiplication confère à l'espace vectoriel une structure d'algèbre (nous rappelons que c'est à la fois un espace vectoriel et un anneau), isomorphe à l'algèbre des applications linéaires d'un espace vectoriel de dimension n dans lui-même. L'élément neutre de la multiplication est la matrice représentant l'application linéaire « identité ». Cette matrice est toujours la matrice carrée (n, n) dont tous les termes sont nuls sauf les termes de la diagonale qui sont égaux à 1, et cela quelle que soit la base de E relativement à laquelle nous représentons l'application identité. Nous pouvons vérifier d'ailleurs directement que cette matrice I :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

est élément neutre de la multiplication. La matrice I engendre l'algèbre des matrices scalaires, c'est-à-dire l'ensemble des matrices du type $k.I$; cette algèbre est un corps isomorphe au corps des scalaires :

$(k.I) + (k'.I) = (k + k').I$ et $(k.I).(k'.I) = (kk').I$

Les matrices de ce type ont tous leurs termes nuls, exceptés les termes de la diagonale qui sont tous égaux au scalaire k.

4. MATRICES DIAGONALES

Une matrice diagonale est une matrice carrée dont tous les termes sont nuls sauf les termes diagonaux. L'ensemble des matrices scalaires est un sous-ensemble de l'ensemble des matrices diagonales. Il est facile de vérifier que la somme de deux matrices diagonales est une matrice diagonale et que le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale dont les termes non nuls sont respectivement somme et produit des termes non nuls de même rang des matrices ajoutées ou multipliées. Ainsi, l'addition, la multiplication par un scalaire et le produit confèrent la structure d'algèbre à l'ensemble des matrices diagonales. Cette algèbre n'est pas un corps car il existe des matrices diagonales non inversibles. En effet, considérons une matrice diagonale dont le premier terme de la diagonale est nul. D'après les règles de calcul énoncées ci-dessus, le produit de cette matrice par n'importe quelle matrice diagonale sera une matrice diagonale dont le premier terme de la diagonale sera nulle. Donc, cette matrice n'admet pas d'inverse pour la multiplication.

On appelle application linéaire diagonalisable, une application linéaire de l'espace vectoriel E dans lui-même, telle qu'il existe une base de E relativement à laquelle cette application se représente par une matrice diagonale. Nous avons vu qu'il est plus rapide d'effectuer des calculs sur les matrices diagonales que sur des matrices quelconques, il est donc intéressant de savoir si une application linéaire est diagonalisable ou non et si elle l'est, de choisir la base de E relativement à laquelle sa représentation matricielle est une matrice diagonale. Supposons qu'une application linéaire L soit représentée par la matrice diagonale :

$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_n \end{bmatrix}$$

relativement à la base $(U_1, \ldots, U_n)$.

Cela signifie que $L(U_1) = k_1U_1 \ldots L(U_n) = k_nU_n$.

Les vecteurs de la base sont transformés par l'application linéaire L en vecteurs proportionnels. Ces vecteurs sont appelés *vecteurs propres* et les scalaires k_i sont les *valeurs propres* (coefficients de proportionnalité). En conclusion, nous obtenons le théorème suivant, point de départ de la théorie difficile de la réduction des applications linéaires : une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application linéaire soit diagonalisable est qu'il existe une base de vecteurs propres pour cette application. Les termes diagonaux de la matrice diagonale qui représente l'application dans cette base sont les valeurs propres correspondantes.

Nous retrouvons une fois de plus le fait que l'expression matricielle d'une application linéaire dépend de la base choisie.

Établissons les formules de changement de base :

$[X] = T_{U,V}\,[X']$, $[Y] = T_{U,V}\,[Y']$ (V. § 2)

Par ailleurs, $[Y] = [L]\,[X]$. En remplaçant $[X]$ et $[Y]$ par leurs valeurs : $T_{U,V}\,[Y'] = [L]T_{U,V}\,[X']$ et, en remarquant que la matrice $T_{V,U}$ est l'inverse de la matrice $T_{U,V}$, nous obtenons : $[Y'] = T_{V,U}\,.\,[L]\,.\,T_{U,V}\,[X']$.

La matrice représentant l'application linéaire dans la base des (V_i) est donc $T_{V,U}\,[L]T_{U,V}$.

5. TRANSPOSITION DES MATRICES

Nous allons appliquer l'étude de la transposition des applications linéaires à la transposition des matrices. Une forme linéaire sur un espace vectoriel réel de dimension n est représentée par une matrice-ligne $(n, 1)$. Les coefficients de cette matrice sont les nombres réels transformés des vecteurs de la base de l'espace vectoriel, c'est-à-dire les composantes de la forme dans la base duale (V. chap. 10).

Supposons maintenant que la matrice n, p $[L]$ représente l'application linéaire L de E, espace vectoriel de dimension p muni d'une base $(U_1, \ldots, U_p)$, dans F, espace vectoriel de dimension n muni d'une base $(V_1, \ldots, V_n)$. Nous cherchons la représentation de l'application transposée de $F^\star$ dans $E^\star$, ces espaces vectoriels étant munis des bases duales de celles respectivement choisies sur E et F, soit $(f_1, \ldots, f_p)$ et $(g_1, \ldots, g_n)$. Le terme de la i-ième ligne et de la j-ième colonne de la matrice représentant l'application $\tilde{L}$ transposée de L est la coordonnée suivant f_i du transformé de g_j ; c'est le nombre :

$$Lg_j(U_i) = g_j\,[L(U_i)] = g_j\,(a_{k,i}\,V_k) = a_{j,i}$$

Le terme de la i-ième ligne et de la j-ième colonne de la matrice représentant L est égal au terme de la j-ième ligne et de la i-ième colonne de la matrice représentant L. En particulier, la matrice représentant L sera une matrice (p, n). Cette matrice, obtenue en symétrisant les indices (substituant les colonnes et les lignes) est appelée *matrice*

transposée. Les propriétés de la transposition des applications linéaires s'interprètent immédiatement comme propriétés de la transposition des matrices: la somme, et plus généralement toute combinaison linéaire des transposées, est égale à la transposée de la même combinaison linéaire, pour le produit des matrices. Nous avons un antimorphisme (inverser l'ordre des termes du produit).

Les quelques indications que nous avons données sur l'algèbre des matrices carrées ont une seule ambition: familiariser le lecteur avec le calcul matriciel pour exposer sur une base saine la géométrie et la cinématique. La réduction des applications linéaires à la forme diagonale est aussi indispensable pour la résolution des systèmes différentiels linéaires.

Les applications aux transformations géométriques du plan et de l'espace seront exposées au paragraphe ci-après.

6. RÉSOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

6.1. Résolution par le calcul direct. — Un système linéaire de n équations à p inconnues correspond au problème suivant: existe-t-il des nombres $x_1, \ldots, x_p$ vérifiant les n égalités suivantes?:

$$\begin{aligned} a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 + \ldots + a_{1,p}\,x_p &= b_1 \\ a_{2,1}\,x_1 + a_{2,2}\,x_2 + \ldots + a_{2,p}\,x_p &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n,1}\,x_1 + a_{n,2}\,x_2 + \ldots + a_{n,p}\,x_p &= b_p \end{aligned}$$

Ce système a une interprétation matricielle: en désignant par $[A]$ la matrice (n, p) dont les termes sont les coefficients $a_{i,j}$ du système, par $[B]$ la matrice-colonne $(p, 1)$ des coefficients du second membre et par $[X]$ la matrice-colonne $(n, 1)$ des (x_i) inconnues, le système s'écrit: $[A].[X] = [B]$. Si la matrice $[A]$ est carrée $(n = p)$ inversible et si nous connaissons son inverse $[A]^{-1}$, alors la solution du système est unique et est donnée par la formule: $[X] = [A]^{-1}.[B]$.

En général, le calcul de l'inverse d'une matrice est fastidieux et plus long que la méthode élémentaire d'élimination-substitution dont nous rappellerons le principe: à l'aide de la première équation (si $a_{1,p} \neq 0$) x_p est exprimé en fonction des autres variables et l'expression obtenue est portée dans les autres équations. Nous faisons de même pour les autres variables jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'une variable ou qu'une équation.

Dans le premier cas il ne reste qu'une variable, nous obtenons un système de plusieurs équations à une inconnue dont la résolution est immédiate; en général, il n'y a pas de solution; la matrice n'était pas inversible. Au contraire, si les coefficients des équations sont proportionnels, le système admet une solution. Par exemple, le système:

$$\begin{cases} x + 2 = 1 \\ x + 3 = 4 \end{cases}$$

n'admet pas de solution, tandis que le système:

$$\begin{cases} x + 2 = 1 \\ 2x + 4 = 2 \end{cases}$$

admet une solution unique $x = -1$.

Dans le second cas, il reste une équation (ou plusieurs équations à coefficients proportionnels, ce qui revient au même) renfermant plusieurs inconnues; soit $s + 1$ le nombre des inconnues restantes:

$$a_1x_1 + \ldots + a_sx_s + a_{s+1}\,x_{s+1} = b$$

$$\text{D'où}: x_{s+1} = \frac{1}{a_{s+1}}\,(b - a_1x_1 - \ldots - a_sx_s)$$

Le système admet donc une « infinité » de solutions; en fait, les valeurs des s premières inconnues peuvent être choisies arbitrairement et déterminent les valeurs des autres inconnues. On dit que la solution a s degrés de libertés; en fait, c'est une variété affine de dimension s (V. chap. 13).

Exemple :
$$\begin{cases} x + y + z + t = 4 \\ x + y + z - t = 0 \end{cases}$$

Éliminons: $t = x + y + z$, nous obtenons le système suivant:
$$\begin{cases} t = x + y + z \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

Le système est à deux degrés de liberté:

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = -x - y + 2 \\ t = 2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

L'ensemble des solutions a une structure de variété affine de dimension 2 dans l'espace à quatre dimensions. Cette variété passe par l'élément $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ et sa direction est le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6.2. Interprétation vectorielle. — Ces résultats sont retrouvés plus simplement dans une interprétation vectorielle du problème. Considérons les vecteurs de $\mathbf{R}^n$ dont les composantes dans la base canonique sont données par les éléments des différentes colonnes de la matrice du système:

$$U_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \ldots \\ a_{n,1} \end{pmatrix},\quad U_2 = \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ \ldots \\ a_{n,2} \end{pmatrix} \ldots,\quad U_p = \begin{pmatrix} a_{1,p} \\ \ldots \\ a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Il faut donc chercher toutes les décompositions possibles du vecteur B en combinaison linéaire des vecteurs du système des (U_j).

— Si B n'appartient pas au sous-espace vectoriel engendré par les (Uj), par définition l'équation:

$$x_1U_1 + \ldots + x_pU_p = B$$

n'admet pas de solution.

— Si B appartient à l'espace vectoriel engendré par le système, l'équation admet une solution qui est unique si et seulement si les vecteurs du système forment une base de l'espace vectoriel qu'ils engendrent (c'est-à-dire seulement si le système est libre, ou encore seulement si la dimension du sous-espace engendré par les vecteurs du système est égale au nombre p de vecteurs du système). En particulier, si la dimension du sous-espace engendré est égal à n, le sous-espace engendré est l'espace $\mathbf{R}^n$ tout entier et le système admet au moins une solution quel que soit le choix des constantes b_i car $B \subset \mathbf{R}^n$.

Dans le cas où B appartient à l'espace engendré par les vecteurs U_i, pour résoudre le problème, nous pouvons appliquer les conclusions du chapitre précédent. Nous extrayons du système des (U_i) un système libre maximal appelé système de vecteurs principaux. Le nombre de vecteurs principaux est égal à r, rang du système. Le choix des inconnues $x_{r+1}, \ldots, x_p$ peut être arbitraire et alors la décomposition du vecteur $B - x_{r+1}\,U_{r+1} - \ldots - x_pU_p$ selon les vecteurs principaux existe et est unique:

$$B - x_{r+1}\,U_{r+1} - \ldots - x_pU_p = x_1U_1 + \ldots + x_rU_r$$

La solution est donc à $(p - r)$ degrés de liberté.

Remarquons que, pas plus que l'interprétation matricielle, l'interprétation vectorielle ne fournit directement de procédé pratique pour résoudre numériquement le système. En effet, il est compliqué de chercher le rang d'un système de vecteurs et de déterminer un système de vecteurs principaux; mais, ces procédés théoriques fournissent, dans certains cas, des méthodes pratiques et « rapides » de résolution des systèmes linéaires. Nous avons mis « rapide » entre guillemets car, tous ces calculs étant maintenant effectués sur ordinateur, c'est la méthode de résolution la plus appropriée à l'ordinateur utilisé qui doit être recherchée. Les méthodes pratiques de résolution de systèmes linéaires particuliers et les programmes associés sont le sujet d'une abondante littérature spécialisée.

CHAPITRE XII

PRODUIT SCALAIRE ET ORTHOGONALITÉ *

1. PRODUIT SCALAIRE ET NORME

1.1. Définition du produit scalaire. — Un produit scalaire sur un espace vectoriel réel E est une forme bilinéaire, symétrique et définie positive, c'est-à-dire une application de $E \times E$ dans $\mathbf{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- *Bilinéarité :* $< U, V_1 > + < U, V_2 > = < U, V_1 + V_2 >$
  $k < U, V > = < U, kV >$
  $< U_1, V > + < U_2, V > = < U_1 + U_2, V >$
  $k < U, V > = < kU, V >$
- *Symétrie :* $< U, V > = < V, U >$
- *Positivité :* $< U, U > \geqslant 0$ et $< U, U > = 0 \Longleftrightarrow U = 0$

(nous notons $< U, V >$ le produit scalaire de U par V, c'est-à-dire le transformé du couple $(U, V) \in E \times E$ par la forme).

1.2. Norme. — Nous allons montrer que l'application de E dans $\mathbf{R}^+$, (ensemble des réels positifs) qui à U vecteur de E associe $(< U, U >)^{1/2}$ vérifie les propriétés suivantes : (nous noterons $\| U \| = (< U, U >)^{1/2}$)

(1) $\| U \| = \| - U \|$; en effet :
$\| - U \|^2 = < - 1 . U, - 1 . U > = (- 1)^2 < U, U > = < U, U >$

(2) $\| U \| \geqslant 0$ et $\| U \| = 0 \Longleftrightarrow U = 0$ se déduit immédiatement de la positivité du produit scalaire ;

(3) $\| U + V \| \leqslant \| U \| + \| V \|$

car : $\| U + V \|^2 = < U + V, U + V > = < U, U > + 2 < U, V > + < V, V >$

d'après la bilinéarité et la symétrie du produit scalaire.

Par ailleurs :

$(\| U \| + \| V \|)^2 = \| U \|^2 + \| V \|^2 + 2 \| U \| . \| V \|$

Or, de la positivité du produit scalaire :

$< U + \lambda V, U + \lambda V > = \lambda^2 \| V \|^2 + 2 \lambda < U V > + \| U \|^2$,

quel que soit λ, nous déduisons (V. chap. 8) :

$$4 < U, V >^2 - 4 \| U \|^2 \| V \|^2 \leqslant 0$$
$$< U, V >^2 \leqslant \| U \|^2 \| V \|^2$$

soit : $< U, V > \leqslant \| U \| \| V \|$ (inégalité de Schwarz).

Donc :

$\| U \|^2 + \| V \|^2 + 2 (< U, V >) \leqslant \| U \|^2 + \| V \|^2 + 2 \| U \| \| V \|$

soit : $\| U + V \|^2 \leqslant (\| U \| + \| V \|)^2$

Comme il s'agit de nombres positifs :

$$\| U + V \| \leqslant \| U \| + \| V \|$$

ce qu'il fallait démontrer.

(4) $\| kU \| = | k | \| U \|$. En effet : $< kU, kU > = k^2 < U, U >$ d'après la bilinéarité du produit scalaire.

Une application d'un espace vectoriel E dans $\mathbf{R}^+$ vérifiant les axiomes (1), (2), (3) et (4) s'appelle une *norme*. La norme définit une distance sur E par la formule $d(a, b) = \| b - a \|$. Nous déduisons les trois axiomes de la définition de la distance des trois axiomes (1), (2) et (3) définissant la norme (V. chap. 6). La distance définie à partir de la norme permet de construire une topologie sur tout espace vectoriel normé (V. chap. 6 et 18).

1.3. Expression dans une base. — Nous nous limiterons, pour le moment, aux espaces vectoriels réels de dimension finie $\mathbf{R}^n$ munis du produit scalaire défini sur la base canonique par : $< U_i, U_j > = 0$ si $i \neq j$ et $< U_i, U_j > = 1$ si $i = j$. Soit pour deux vecteurs :

$X = x_1 U_1 + \ldots + x_n U_n$ et $Y = y_1 U_1 + \ldots + y_n U_n$,

Alors $< X, Y > = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$ du fait de la bilinéarité du produit scalaire. Une autre expression du produit scalaire est obtenue en considérant les matrices-colonnes qui représentent les vecteurs X et Y dans la base canonique soit (X) et (Y) : $< X, Y > = (\widetilde{X}) . (Y)$. Si la base choisie n'est plus la base canonique mais une nouvelle base (V_i), nous avons $(Y) = T_{U, V} (Y')$ et $(X) = T_{U, V} (X')$. L'expression du produit scalaire dans les nouvelles coordonnées est donc : $(\widetilde{X}) (Y) = (\widetilde{X'}) \widetilde{T_{U, V}} T_{U, V} (Y')$. Cette expression sera identique pour les bases telles que $\widetilde{T_{U, V}} . T_{U, V} = 1$ donc pour les matrices de changement de bases telles que l'inverse soit égale à la transposée.

Remarque : Dans $\mathbf{R}^1 = \mathbf{R}$, le produit scalaire est la multiplication usuelle et la norme est la valeur absolue :

$$< x, y > = xy \text{ et } | x | = \sqrt{x . x}$$

2. ORTHOGONALITÉ

2.1. Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel. — Deux vecteurs sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul. Comme le produit scalaire est symétrique (ou commutatif), l'orthogonalité est une relation symétrique entre les vecteurs de l'espace vectoriel.

Un vecteur X orthogonal à tous les vecteurs $(Y_1, \ldots, Y_n)$ d'un système de vecteurs est orthogonal au sous-espace qu'ils engendrent :

$$< X, Y_1 > = 0 \text{ et } \ldots \text{ et } < X, Y_n > = 0$$
$$\Rightarrow < X, k_1 Y_1 + \ldots + k_n Y_n > = 0$$

L'ensemble des vecteurs orthogonaux à un vecteur donné (ou aux vecteurs d'un système donné) est un sous-espace vectoriel. Considérons, en effet, l'implication ci-dessus ; si les vecteurs Y_1 et Y_2 sont orthogonaux à X, toute combinaison linéaire de ces vecteurs est orthogonale à X (fig. XII-1). Donc, l'ensemble des vecteurs orthogonaux

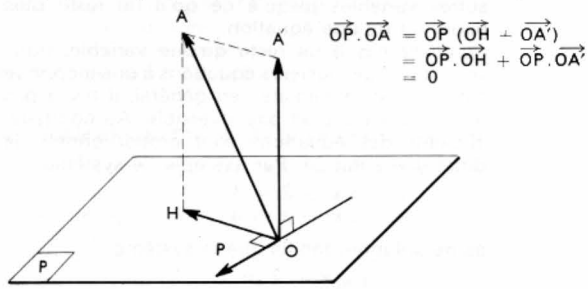


Fig. XII-1 — Le « théorème des trois perpendiculaires » traduit géométriquement le fait qu'un vecteur orthogonal à deux vecteurs déterminés est orthogonal à leur somme

à X est un sous-espace vectoriel, noyau de l'application linéaire de l'espace vectoriel dans le corps des réels, qui au vecteur Y associe le nombre $< X, Y >$. Ce sous-espace vectoriel est appelé le sous-espace orthogonal du vecteur X. Remarquons que, d'après la propriété démontrée au début de ce paragraphe, le sous-espace orthogonal d'un système de vecteurs est l'orthogonal du sous-espace engendré par ce système.

Théorème fondamental : *Un sous-espace vectoriel F qui est le sous-espace orthogonal d'un sous-espace vectoriel G est supplémentaire de G en dimension finie, il est appelé le supplémentaire orthogonal* (ou plus simplement l'orthogonal) *de G.*

Pour démontrer le théorème fondamental, nous allons poser une définition et montrer un lemme.

Définition : Une **base orthonormée** d'un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est une base de cet espace

* V. t. 1, Mécanique des solides, chap. 1.

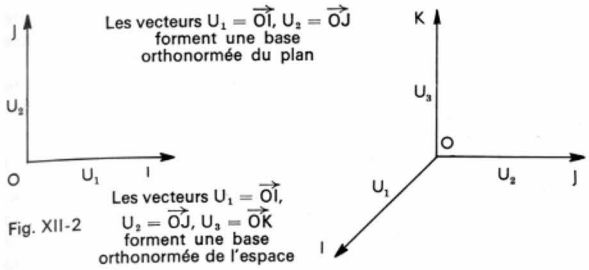


Fig. XII-2

vectoriel telle que tous les vecteurs de la base soient orthogonaux deux à deux et de norme égale à 1 (fig. XII-2).

Par exemple, la base canonique de $\mathbf{R}^n$ est orthonormée, par définition d'ailleurs, du produit scalaire que nous avons choisi sur $\mathbf{R}^n$.

Lemme : Tout espace vectoriel réel de dimension finie peut être muni d'une base orthonormée. En effet, nous allons construire une base orthonormée d'un espace vectoriel de dimension finie à partir d'une base quelconque $(V_1, \ldots, V_n)$.

Tout d'abord, construisons une base de vecteurs orthogonaux deux à deux :

$$V'_1 = V_1$$
$$V'_2 = V_2 + kV'_1$$

Comme $< V'_2, V'_1 > = 0$, il faut : $k = \dfrac{- < V_2, V'_1 >}{< V'_1, V'_1 >}$

$$V'_3 = V_3 + I_2 V'_2 + I_1 V'_1$$

Comme $< V'_3, V'_1 > = 0$ et $< V'_3, V'_2 > = 0$, il faut :

$$< V_3, V'_1 > + I_1 < V'_1, V'_1 > = 0 \Rightarrow I_1 = \frac{- < V_3, V'_1 >}{< V'_1, V'_1 >}$$

$$< V_3, V'_2 > + I_2 < V'_2, V'_2 > = 0 \Rightarrow I_2 = \frac{- < V_3, V'_2 >}{< V'_2, V'_2 >}$$

Il faut continuer ainsi jusqu'à substitution complète. À chaque étape, nous pouvons vérifier que le système de n vecteurs $(V'_1, \ldots, V'_p, V_{p+1}, \ldots, V_n)$ est une base car c'est un système libre (raisonnement par récurrence). Nous obtenons ainsi une base de vecteurs orthogonaux deux à deux $(V'_1, \ldots, V'_n)$. Pour obtenir une base orthonormée, il suffit alors de considérer les vecteurs : $U_i = \dfrac{1}{\| V'_i \|}$.

Ces vecteurs restent orthogonaux deux à deux et, de plus, ils sont de norme 1 : ils forment donc une base orthonormée. Le procédé employé pour construire une base orthonormée à partir d'une base quelconque s'appelle *procédé d'orthogonalisation* de Schmidt.

Considérons maintenant le sous-espace vectoriel G de dimension p d'un espace vectoriel réel E de dimension finie $p + q$ et munissons-le d'une base orthonormée $(U_1, \ldots, U_p)$. Le théorème de la base incomplète nous permet de compléter ce système de vecteurs pour obtenir une base de l'espace vectoriel, soit :

$$(U_1, U_2, \ldots, U_p, U_{p+1}, \ldots, U_{p+q})$$

Orthogonalisons cette base de E d'après le procédé d'orthogonalisation de Schmidt. Les p, premiers vecteurs de la base étant orthogonaux deux à deux et de norme 1, sont conservés ; nous obtenons donc la base orthonormale $(U_1, \ldots, U_p, V_1, \ldots, V_q)$. Nous devons montrer que $(V_1, \ldots, V_q)$ est une base orthonormale de l'espace vectoriel orthogonal de G. Pour qu'un vecteur $X = x_1U_1 + \ldots + x_pU_p + y_1V_1 + \ldots + y_qV_q \neq 0$ soit orthogonal à tous les vecteurs de G, il faut et il suffit qu'il soit orthogonal à tous les vecteurs d'une base de G ; nous avons donc :

$$< U_1, x_1U_1 + \ldots + y_qV_q > = 0 \iff x_1 = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$< U_p, x_1U_1 + \ldots + x_pU_p + y_1V_1 + \ldots + y_qV_q > = 0 \iff x_p = 0$$

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un vecteur soit orthogonal au sous-espace vectoriel G est donc qu'il appartienne au sous-espace vectoriel engendré par $(V_1, \ldots, V_n)$. $(V_1, \ldots, V_n)$ est donc une base du sous-espace vectoriel F orthogonal de G. Ce sous-espace vectoriel est supplémentaire de G puisque la réunion d'une base de F et d'une base de G forme une base de E.

Propriété : L'orthogonal de l'orthogonal d'un sous-espace F est F lui-même. Soit G l'orthogonal de F ; par définition de l'orthogonal, tout vecteur de F est orthogonal à tous les vecteurs de G donc F est inclus dans l'orthogonal de G. Le sous-espace vectoriel F étant supplémentaire de G, est de dimension égale à celle de l'orthogonal de G, les deux sous-espaces vectoriels de même dimension inclus l'un dans l'autre sont confondus (nous le montrerions en utilisant les bases, par exemple) ; F est donc égal à l'orthogonal de G.

Dans la démonstration des deux propriétés précédentes, nous avons utilisé la notion de dimension et les propriétés des bases ; ces théorèmes devront donc être considérés comme vrais dans les espaces de dimension finie seulement (espaces $\mathbf{R}^n$).

2.2. Projecteur orthogonal. — Un *projecteur orthogonal* sur F est l'application linéaire « projection sur F parallèlement à G, orthogonal de F ».

Pour que P, projecteur sur F parallèlement à G, soit un projecteur orthogonal, il faut et il suffit que $< P(X), X - P(X) > = 0$, pour tout vecteur X de l'espace vectoriel considéré, soit en utilisant la linéarité du produit scalaire $< P(X), P(X) > = < X, P(X) >$.

Considérons, par exemple, la base orthonormée $(U_1, \ldots, U_n)$ de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$. Le sous-espace vectoriel orthogonal de la droite vectorielle engendrée par un vecteur de cette base est le sous-espace engendré par les autres vecteurs de la base. Nous allons calculer la projection k_iU_i du vecteur quelconque X sur la droite vectorielle engendrée par U_i. Le vecteur $(X - k_iU_i)$ est orthogonal aux vecteurs de la droite vectorielle engendrée par U_i : $< X - k_iU_i, U_i > = 0$, donc

$$< X, U_i > = k_i < U_i, U_i > = k_i$$

Le produit scalaire par le vecteur de la base donne donc la mesure algébrique de la composante du vecteur selon ce vecteur de base (fig. XII-3).

Nous avons donc l'égalité suivante :

$$X = < X, U_1 > U_1 + \ldots + < X, U_n > U_n$$

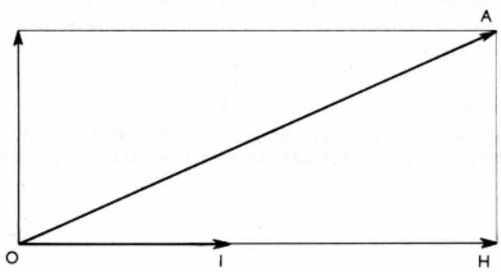


Fig. XII-3

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA}$$
$$\overrightarrow{HA} . \overrightarrow{OI} = 0$$
$$\text{Donc : } \overrightarrow{OA} . \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OH} . \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{HA} . \overrightarrow{OI}$$
$$= \overrightarrow{OH} . \overrightarrow{OI} = \overline{OH}$$

Le produit scalaire d'un vecteur $\overrightarrow{OA}$ par un vecteur unitaire $\overrightarrow{OI}$ est égal à la mesure algébrique de $\overrightarrow{OH}$, projection orthogonale de $\overrightarrow{OA}$ sur $\overrightarrow{OI}$

3. ISOMÉTRIES

3.1. Définition d'une isométrie. — Une isométrie sur un espace vectoriel normé E est une application linéaire de E dans E qui conserve la norme.

Supposons que la norme de E provienne de la définition d'un produit scalaire et soit F une isométrie de E. *L'isométrie F est une application linéaire qui conserve le produit scalaire.* En effet, le produit scalaire est obtenu à partir de la norme par l'identité remarquable :

$$< X + Y, X + Y > - < X - Y, X - Y > = 4 < X, Y >$$

et donc :

$$< F(X), F(Y) > = (1/4) (\| F(X) + F(Y) \|^2 - \| F(X) - F(Y) \|^2)$$

Comme F préserve la norme, il vient :

$$< F(X), F(Y) > = (1/4) (\| X + Y \|^2 - \| X - Y \|^2) = X, Y$$

Supposons maintenant que E soit un espace vectoriel réel de dimension finie $(\mathbf{R}^n)$; munissons-le d'une base

orthonormée $(U_1, \ldots, U_n)$. Pour calculer le produit scalaire dans cette base, nous développons :

$$<(x_1U_1 + \ldots + x_nU_n), (y_1U_1 + \ldots + y_nU_n)>$$
$$= x_1y_1<U_1, U_1> + x_1y_2<U_1, U_2> + \ldots + x_ny_n<U_n, U_n>$$

Le produit scalaire est donc donné par l'expression matricielle $(\widetilde{X})\ (Y)$ et la norme par la formule :

$$\|X\|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$$

Supposons maintenant que l'application linéaire isométrique F soit représentée dans cette base orthonormée par la matrice (F). Dans cette base, la représentation des vecteurs $F(X)$ et $F(Y)$ est donc assurée par les matrices-colonnes $(F).(X)$ et $(F).(Y)$; le produit scalaire de ces deux vecteurs est donc donné par l'expression matricielle $(\widetilde{X}).(\widetilde{F}).(F).(Y)$ (V. chap. 10 pour les règles de la transposition). L'égalité des produits scalaires se traduit donc par l'égalité matricielle qui doit être réalisée quels que soient les vecteurs X et Y : $(X).(Y) = (\widetilde{X}).(\widetilde{F}).(F).(Y)$ ce qui entraîne $(\widetilde{F}).(F) = (I)$ où (I) est la matrice identité.

Nous retrouvons une propriété caractéristique : *la transposée de la matrice est égale à son inverse* (rappelons que nous avons déjà mis en évidence cette propriété pour les matrices de changement de bases orthonormées).

3.2. Matrices orthogonales. — Une *matrice orthogonale* est une matrice carrée possédant cette propriété. Nous allons démontrer que, *pour qu'une matrice carrée (n, n) soit une matrice orthogonale, une condition nécessaire et suffisante est que les colonnes de cette matrice représentent des vecteurs de norme 1 et orthogonaux deux à deux de* $\mathbf{R}^n$ (base orthonormale de $\mathbf{R}^n$). Cette propriété est la conséquence immédiate de la propriété suivante caractéristique des isométries : *toute isométrie de* $\mathbf{R}^n$ *transforme les vecteurs d'une base orthonormée de* $\mathbf{R}^n$ *en vecteurs d'une base orthonormée de* $\mathbf{R}^n$.

Comme une isométrie conserve le produit scalaire, elle conserve l'orthogonalité de deux vecteurs et elle conserve la propriété pour un vecteur d'être de norme 1. Or, tout système de vecteurs $(V_1, \ldots, V_p)$ orthogonaux deux à deux et non nuls est libre :

$$k_1V_1 + \ldots + k_pV_p = 0 \Rightarrow \forall i, <V_i, k_1V_1 + \ldots + k_pV_p> = 0$$

Soit : $k_1 < V_1, V_1 > = 0, \ldots, k_n < V_n, V_n > = 0$

Comme dans un espace vectoriel de dimension n, tout système libre de n vecteurs constitue une base : nous avons démontré que les vecteurs transformés par une isométrie des vecteurs d'une base orthonormée forment une base orthonormée.

Réciproquement, supposons qu'une application linéaire F transforme une base orthonormée en base orthonormée ; elle préserve la norme. En effet, si :

$$X = x_1U_1 + \ldots + x_nU_n, F(X) = x_1F(U_1) + \ldots + x_nF(U_n)$$

comme $(U_1, \ldots, U_n)$ est une base orthonormée, $[F(U_1), \ldots F(U_n)]$ est aussi une base orthonormée et la norme de X comme celle de $F(X)$ est donc donnée par $X_1^2 + \ldots + X_n^2$. L'application linéaire F préserve donc la norme de tout vecteur X de l'espace vectoriel : c'est une isométrie. Comme les colonnes de la matrice représentant F dans une base sont l'expression matricielle relativement à cette base des transformés des vecteurs de la base, il faut et il suffit que ces colonnes représentent des vecteurs orthogonaux deux à deux et de norme 1 pour que l'application linéaire F soit une isométrie.

Par cette démonstration, nous retrouvons directement que la matrice d'un changement de bases orthonormées est une matrice orthogonale. Une isométrie est une application injective car l'image réciproque de 0 (vecteur de norme nulle) est 0 (le seul vecteur de norme nulle). Comme nous nous déplaçons dans un espace vectoriel de dimension finie, toute injection linéaire est une bijection linéaire (ce que nous vérifions aussi à partir de la propriété précédente : pour qu'une application linéaire soit une bijection, il faut et il suffit en effet que les vecteurs transformés des vecteurs d'une base forment une base). L'inverse d'une isométrie (bijective donc inversible) est une application linéaire qui conserve aussi la norme : $Y = F^{-1}(X)\ X = F(Y)\ \|X\| = \|Y\|$.

C'est une isométrie. La matrice qui la représente dans une base orthonormée est d'ailleurs la matrice inverse de celle qui représente la première isométrie dans cette base ; c'est donc aussi la matrice transposée puisque cette matrice est orthogonale.

L'identité est un exemple particulier d'isométrie.

Le produit de composition de deux isométries est une isométrie (application linéaire qui conserve la distance). Le produit de composition munit donc l'ensemble des isométries de la structure de groupe (non commutatif) ; cet ensemble est appelé le groupe des isométries de l'espace vectoriel ou encore le groupe orthogonal. De même, l'ensemble des matrices orthogonales est muni par le produit matriciel de la structure de groupe ; ce groupe est appelé le groupe orthogonal de $\mathbf{R}^n$.

CHAPITRE XIII

GÉOMÉTRIE

1. IDÉE GÉNÉRALE

Nous allons appliquer à la géométrie, les notions que nous venons d'étudier en algèbre linéaire. C'est dire que nous nous préoccuperons peu de géométrie dite « pure » et que, pour l'essentiel, nous ferons de la géométrie dite « analytique » (exprimant les faits géométriques par des relations faisant intervenir les coordonnées relativement à un repère) et de la géométrie dite « vectorielle ». D'ailleurs, en réalité, les différences entre ces géométries sont très superficielles : les méthodes de démonstration suivent des voies « parallèles » mais l'expression est différente. Dans ce chapitre, nous nous limiterons à une stricte application des résultats de l'algèbre linéaire (amputée de l'étude des formes quadratiques), c'est-à-dire que nous étudierons la géométrie de la droite et du plan car elle est fondamentale en mécanique classique où une force est représentée par un vecteur « glissant » le long d'une droite. Bien que l'espace de la mécanique classique soit $\mathbf{R}^3$ (l'espace à trois dimensions), nous ferons une étude plus détaillée de la géométrie affine du plan (deux dimensions) car l'expression des calculs est plus simple ; nous nous contenterons d'indiquer les résultats et d'esquisser les démonstrations applicables en géométrie dans l'espace.

2. GÉOMÉTRIE AFFINE DANS $\mathbf{R}^3$

2.1. Repères affines. — L'espace usuel est un espace affine et l'espace vectoriel associé est de dimension 3 (ce qui signifie que tout système de quatre vecteurs est lié). Dans beaucoup d'applications (en mécanique, par exemple), il est très important de pouvoir situer avec précision un point de l'espace et, pour cela, nous utilisons un repère affine constitué d'un point appelé origine (soit O) et de trois vecteurs formant un système libre et appelés vecteurs unitaires (I, J et K). Le système de ces trois vecteurs est une base de l'espace vectoriel associé à l'espace affine puisque celui-ci est de dimension 3.

Un vecteur $\overrightarrow{OM}$ s'exprime comme une combinaison linéaire des vecteurs I, J et K et cette expression est unique : $\overrightarrow{OM} = xI + yJ + zK$; les trois nombres réels x, y et z sont appelés *les coordonnées du point M dans le repère affine* (O, I, J, K). Les coordonnées d'un point M ne dépendent pas exclusivement de ce point, elles changent aussi avec le repère affine choisi. Si l'origine ou les vecteurs unitaires sont modifiés, il en est de même des coordonnées des points.

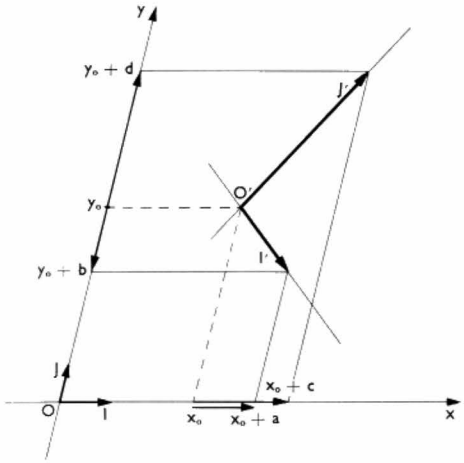


Fig. XIII-1 — Les coordonnées du nouveau repère dans l'ancien

	I	J
O'	x_0	y_0
I'	a	b
J'	c	d

Formules de changement de coordonnées pour un espace affine de dimension 2 (fig. XIII-1 et XIII-2) :

Soit (O, I, J) un repère affine et (O', I', J') un nouveau repère tel que : $\overrightarrow{OO'} = x_0 I + y_0 J$, $I' = aI + bJ$ et $J' = cI + dJ$.

Nous désignons par x et y les coordonnées du point M par rapport au repère (O, I, J) et par x' et y' les coordonnées du point M par rapport au repère (O, I', J').

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OO'} + x'I' + y'J' = (x_0 I + y_0 J) + (ax' I + bx' J) + (cy' I + dy' J) = (x_0 + ax' + cy')I + (y_0 + bx' + dy')J$.

Les formules de changement de base exprimant les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{cases} x = x_0 + ax' + cy' \\ y = y_0 + bx' + dy' \end{cases}$$

Des calculs analogues fournissent les formules de changement de coordonnées dans l'espace affine à trois dimensions.

2.2. Variétés affines : droites et plans. — Soit un espace affine auquel est associé un espace vectoriel E sur le corps des réels. Nous appellerons variété affine, tout sous-ensemble V de cet espace affine, tel qu'il existe un sous-espace vectoriel F de E vérifiant l'axiome suivant : $\forall x \in F, \forall A \in V, \exists B \in V$ tel que $\overrightarrow{AB} = x$.

Remarquons que, dans ces conditions, V possède la structure d'espace affine quand nous lui associons l'espace vectoriel F. La dimension de la variété affine sera la dimension de F quand F est de dimension finie. Une variété affine de dimension 1 est appelée une *droite ;* une variété de dimension 2 dans un espace affine de dimension 3 est appelée un *plan*.

Le sous-espace vectoriel F associé à la variété V est la *direction* de cette variété. Deux variétés affines de même direction sont appelées des variétés *parallèles*.

Deux variétés parallèles distinctes n'ont aucun point commun. Deux variétés parallèles V et V', de point d'intersection O, admettent une direction commune F.

Soit M un point quelconque de V : $O \in V$, $\overrightarrow{OM} \in F$; comme, par ailleurs, $O \in V'$, $\overrightarrow{OM} \in F$, $M \in V'$: tout point de V est donc un point de V' et réciproquement. Les variétés V et V' sont confondues.

Théorème. *Étant donné un point M et un sous-espace vectoriel F, il existe une variété affine et une seule contenant M et de direction F.* Cet énoncé est une autre formulation du postulat d'Euclide (en géométrie plane) : il existe une droite et une seule passant par un point donné M et parallèle à une droite donnée.

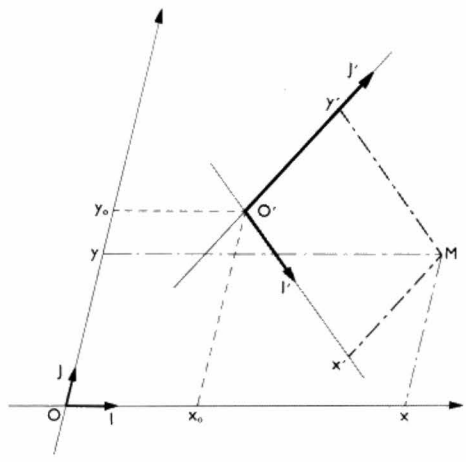


Fig. XIII-2 — Coordonnées de M dans l'ancien et le nouveau repère

La variété affine contenant M et de direction F est en effet l'ensemble des points P de l'espace affine tels que le vecteur $\overrightarrow{MP}$ appartienne à F. Donnons-nous un repère affine (O, I, J, K) de l'espace affine de dimension trois. Une droite affine est une variété affine de dimension un, dont la direction est donc un sous-espace vectoriel engendré par un vecteur $V = aI + bJ + cK$.

La droite affine contenant le point M de coordonnées (x_0, y_0, z_0) et dont la direction est engendrée par V est l'ensemble des points P tels que $MP = tV$ où t est un réel quelconque. Dans ce cas :

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = (x_0 I + y_0 J + z_0 K) + atI + btJ + ctK$

et les coordonnées de P sont donc égales à :

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

Ces trois égalités forment ce qui est appelé un système d'équations paramétriques de la droite affine étudiée ; elles expriment que, pour qu'un point P appartienne à la droite, il faut et il suffit qu'il existe un nombre réel t tel que les coordonnées du point M et le nombre t vérifient le système d'équations. Le nombre t sera dit *paramètre du point P*.

De même, un plan affine étant une variété affine de dimension deux (dans l'espace affine de dimension trois), sa direction est engendrée par deux vecteurs U et V. Le plan affine contenant M et dont la direction est engendrée par les vecteurs U et V, est l'ensemble des points P tels que $\overrightarrow{MP} = sU + tV$ où s et t sont des nombres réels quelconques. Le système d'équations paramétriques d'un plan affine fait donc intervenir deux paramètres réels.

2.3. Barycentre. — La notion de barycentre est typiquement « affine » puisque le point appelé barycentre est indépendant du repère choisi ; une interprétation physique immédiate peut en être donnée : elle correspond au *centre de gravité* (fig. XIII-3).

Un *système de masses ponctuelles* est un ensemble de points A_i tel qu'à chaque point soit associé un coefficient réel k_i appelé *masse de ce point* (*).

À un système de masses ponctuelles dans un espace affine, associons une « fonction vectorielle de point », c'est-à-dire une application ψ de l'espace affine dans l'espace vectoriel associé :

$$\psi(M) = k_1 \overrightarrow{MA_1} + k_2 \overrightarrow{MA_2} + \ldots + k_n \overrightarrow{MA_n}$$

(*) Ce langage provient de la mécanique où le barycentre d'un système de masses est appelé centre de gravité du système (V. t. 1, Mécanique des solides, chap. 3).

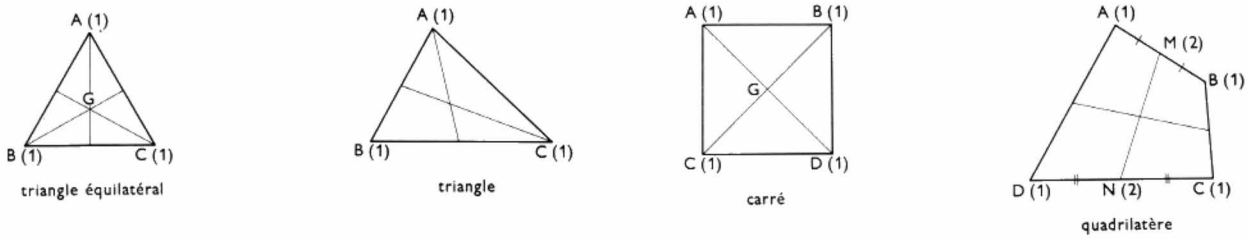


Fig. XIII-3 — Construction du centre de gravité d'un système de points matériels affectés de masses égales

Comparons les valeurs de ψ pour deux points différents M et P :

$$\psi(M) = k_1 (\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PA_1}) + k_2 (\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PA_2}) + \ldots + k_n(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PA_n})$$

$$\psi(M) = (k_1 + k_2 + \ldots + k_n) \overrightarrow{MP} + \psi(P)$$

Si $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = 0$, l'application ψ est constante ; dans le cas contraire, il existe un point G unique tel que $\psi(G) = 0$.

Construisons ce point à partir d'un point M quelconque avec $\overrightarrow{MG} = \dfrac{\psi(M)}{k_1 + k_2 + \ldots + k_n}$. Par définition, ce point est le *barycentre* du système de masses ponctuelles A_1 (k_1), $\ldots$, A_n (k_n). La fonction ψ est alors déterminée par $\psi(M) = (k_1 + k_2 + \ldots + k_n) \overrightarrow{MG}$.

Si nous multiplions toutes les masses des points du système par le même nombre réel non nul, le barycentre du système de masses ponctuelles est invariant : c'est la propriété d'homogénéité du barycentre.

Nous pouvons maintenant formuler des nouvelles définitions du repère affine et d'une variété affine utilisant la notion de barycentre.

Considérons un repère affine (O, I, J, K). Soit A, B et C les points de l'espace affine tels que : $\overrightarrow{OA} = I$, $\overrightarrow{OB} = J$ et $\overrightarrow{OC} = K$.

Étant donné un point P quelconque de l'espace affine de coordonnées x, y et z, nous avons : $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$ soit : $(x + y + z - 1)\overrightarrow{OP} + x\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB} + z\overrightarrow{PC} = 0$.

Le point P est donc le barycentre des points O, A, B et C affectés des masses $(1 - x - y - z)$, x, y et z.

Réciproquement, considérons un système de points $A_1, \ldots A_{n+1}$ et cherchons l'ensemble des points de l'espace affine qui sont des barycentres du système des points $(A_1, \ldots A_{n+1})$ affectés de coefficients convenables. Nous voulons trouver l'ensemble des points P tels qu'il existe des nombres réels $k_1, \ldots, k_{n+1}$ satisfaisant la relation suivante :

$$k_1\overrightarrow{PA_1} + \ldots + k_{n+1}\overrightarrow{PA_{n+1}} = 0$$

Nous allons montrer que cet ensemble est une variété affine en transformant l'égalité précédente :

$$k_1(\overrightarrow{PA_{n+1}} + \overrightarrow{A_{n+1}A_1}) + \ldots + k_{n+1}\overrightarrow{PA_{n+1}} = 0$$

$$(k_1 + \ldots + k_{n+1})\overrightarrow{PA_{n+1}} + k_1\overrightarrow{A_{n+1}A_1} + \ldots + k_n\overrightarrow{A_{n+1}A_n} = 0$$

$$\overrightarrow{A_{n+1}P} = \frac{k_1}{k_1 + \ldots + k_{n+1}}\overrightarrow{A_{n+1}A_1} + \ldots + \frac{k_n}{k_1 + \ldots + k_{n+1}}\overrightarrow{A_{n+1}A_n}$$

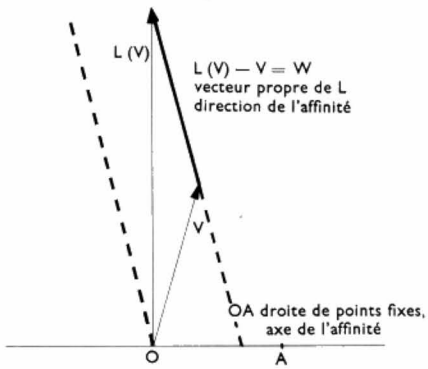


Fig. XIII-5

Une transformation affine laissant deux points fixes (O et A) est une affinité (d'axe OA)

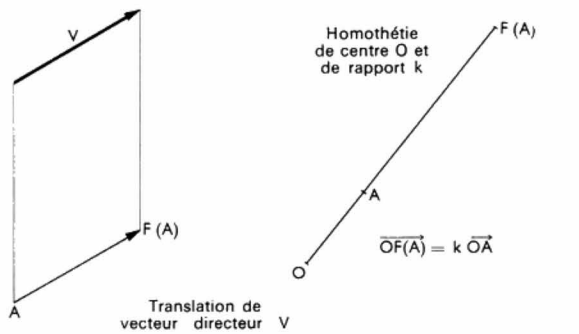
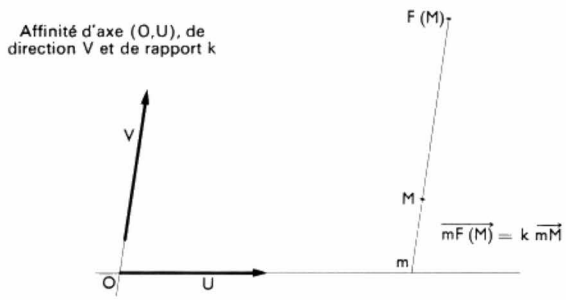


Fig. XIII-4



Ainsi, P appartient à une variété affine dont la direction est le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\overrightarrow{A_{n+1}A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_{n+1}A_n}$. Si ces vecteurs forment un système libre (c'est-à-dire si la variété affine engendrée par les points $A_1, \ldots, A_{n+1}$ est de dimension n), les coefficients $k_1, \ldots k_{n+1}$ sont déterminés à une constante multiplicative près. Les points engendrant la variété forment un *repère barycentrique*. Par exemple, trois points non alignés dans un plan affine ou quatre points non coplanaires dans l'espace affine forment des repères barycentriques.

En conclusion, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-ensemble d'un espace affine soit une variété affine est que tout barycentre d'un système de points appartenant à ce sous-ensemble appartienne lui-même à ce sous-ensemble.

3. ISOMÉTRIES DU PLAN

3.1. Groupe des isométries du plan. — Sur le plan affine, nous définissons une distance d par la formule $d(A, B) = \| \overrightarrow{AB} \|$. Une isométrie est une application affine qui conserve la distance, donc telle que $d[F(A), F(B)] = d(A, B)$. Comme $F(B) = F(A) + L(\overrightarrow{AB})$ où L est l'application linéaire associée à F, une application affine est une isométrie si, et seulement si, :

$$d(A, B) = d[F(A), F(B)]$$

soit : $\| \overrightarrow{AB} \| = d[F(A), F(A) + L(\overrightarrow{AB})] = \| L(\overrightarrow{AB}) \|$

c'est-à-dire si, et seulement si, l'application linéaire associée est une isométrie de l'espace vectoriel sous-jacent.

Nous allons déterminer les isométries de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$ en cherchant la forme générale des matrices les représentant dans une base orthonormée, soit les matrices orthogonales (2,2). Soit $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ la matrice (2, 2) la plus générale ; c'est une matrice orthogonale si et seulement si le produit de cette matrice par sa transposée est la matrice identité. Cela se traduit par les relations suivantes que doivent satisfaire a, b, c et d :

$$a^2 + b^2 = 1, \quad ac + bd = 0$$
$$ca + db = 0, \quad c^2 + d^2 = 1$$

Cela exprime que les lignes de la matrice sont des vecteurs de $\mathbf{R}^2$ orthogonaux et de norme 1. En écrivant le produit de la transposée par la matrice, nous obtiendrions les mêmes résultats pour les vecteurs colonnes :

$$a^2 + c^2 = 1, \quad ab + cd = 0$$
$$ba + dc = 0, \quad b^2 + d^2 = 1$$

La matrice est caractérisée par :

$$a^2 = d^2, b^2 = c^2, a^2 + b^2 = 1 \text{ et } ac + bd = 0$$

ce qui donne quatre possibilités différentes si a est choisi quelconque dans l'ensemble des réels compris entre $a \in [-1, 1]$

$$\begin{bmatrix} a & \sqrt{1-a^2} \\ -\sqrt{1-a^2} & a \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & -\sqrt{1-a^2} \\ \sqrt{1-a^2} & a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -a & \sqrt{1-a^2} \\ \sqrt{1-a^2} & a \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -a & -\sqrt{1-a^2} \\ -\sqrt{1-a^2} & -a \end{bmatrix}$$

Dans les deux premières possibilités, le produit $(ad - bc)$ est égal à 1 : ces matrices sont appelées matrices *orthogonales droites ;* dans les deux dernières possibilités, le produit $(ad - bc)$ est égal à -1 : ces matrices sont appelées matrices *orthogonales gauches*.

La composition de deux isométries étant une application linéaire conservant la norme, il est clair que c'est aussi une isométrie et, par conséquent, le produit de deux matrices orthogonales (2, 2) est aussi une matrice orthogonale, donc de la forme ci-dessus. Nous pouvons le vérifier par le calcul. Pour simplifier l'écriture, remarquons que la donnée des termes de la première colonne que nous convenons de désigner par les symboles C et S ($C^2 + S^2 = 1$) suffit pour déterminer une matrice orthogonale droite ou gauche qui s'écriront respectivement : $\begin{bmatrix} C & -S \\ S & C \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} C & S \\ S & -C \end{bmatrix}$.

Nous sommes amenés à considérer les quatre possibilités de produit de matrices orthogonales deux à deux :

$$\begin{bmatrix} C_1 & -S_1 \\ S_1 & C_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 \\ S_2 & C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1C_2 - S_1S_2 & -C_1S_2 - S_1C_2 \\ S_1C_2 + C_1S_2 & -S_1S_2 + C_1C_2 \end{bmatrix}$$

Le produit de deux matrices orthogonales droites est donc une matrice orthogonale droite. De plus, l'expression de la matrice produit étant symétrique par rapport aux indices 1 et 2, nous déduisons que le produit de deux matrices orthogonales droites est commutatif. Le lecteur peut étudier les autres cas possibles par la même méthode (effectuer le produit des deux matrices), il montrera ainsi que le produit d'une matrice orthogonale gauche et d'une matrice orthogonale droite ou d'une matrice orthogonale droite et d'une matrice orthogonale gauche, est une matrice orthogonale gauche et que le produit de deux matrices orthogonales gauches est une matrice orthogonale droite.

La conclusion de cette étude est que l'ensemble des matrices orthogonales droites forme un sous-groupe du groupe des matrices orthogonales.

3.2. Rotations et angles. — En géométrie métrique, les changements de base considérés sont ceux qui conservent la norme ; la matrice de ces changements de base est donc orthogonale. L'effet d'un changement de base de cette sorte sur la matrice représentant une application linéaire isométrique conserve le type de cette matrice orthogonale (droite ou gauche). En effet, $T_{V,U}$ et $T_{U,V} = T_{U,V}^{-1} = \widetilde{T}_{U,V}$ sont des matrices orthogonales de même type (droite ou gauche). Nous pouvons donc poser la définition suivante :

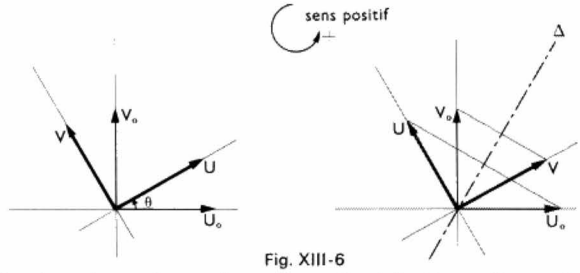


Fig. XIII-6

Rotation et base orthonormée droite (θ est l'angle de rotation)

Symétrie et base orthonormée gauche (Δ est l'axe de symétrie)

une rotation est une application linéaire du plan vectoriel représentée par une matrice orthogonale droite.

Une base orthonormée droite est une base orthonormée (U_1, V) de $\mathbf{R}^2$ telle que la matrice orthogonale $[U\,V]$ (2, 2), formée en accolant les vecteurs colonnes U et V, soit droite ou encore telle que l'application linéaire isométrique qui transforme la base canonique $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en (U, V) soit droite.

Dans un espace vectoriel réel à deux dimensions sur lequel a été défini un produit scalaire, pour définir une base orthonormée droite, il faut choisir une base de référence orthonormée qui, par définition, est droite (U_0, V_0) ; toute base se déduisant de celle-ci par rotation sera appelée *base orthonormée droite*. Ce cas est identique au cas de $\mathbf{R}^2$ en considérant l'isomorphisme isométrique qui applique la base orthonormée (U_0, V_0) sur la base canonique de $\mathbf{R}^2$ (V. fig. XIII-6 pour l'orientation du plan).

Étant donné un vecteur U de norme 1, il existe un et un seul vecteur unitaire V tel que (U, V) forme un repère orthonormé droit. Si les coordonnées de U sont C et S dans la base canonique, celles de V sont $-S$ et C dans cette même base. Nous appellerons *angle de deux vecteurs unitaires* U_1 et U_2 et nous le noterons (U_1, U_2), la rotation qui applique le repère orthonormé droit (U_1, V_1) sur le repère orthonormé droit (U_2, V_2).

Nous allons montrer qu'une rotation est toujours représentée par la même matrice dans n'importe quelle base orthonormée droite. Soit $[L]_U$ la matrice représentant la rotation L dans la base (U_i) et soit $[L]_V$ la matrice représentant cette rotation dans la base (V_i). En utilisant la commutativité du produit de deux matrices orthogonales droites, nous pouvons écrire :

$$[L]_V = T^{-1}{}_{U,V}\,[L]_U T_{U,V} = [L]_U T_{U,V}\,T_{U,V}{}^{-1} T_{U,V} = [L]_U$$

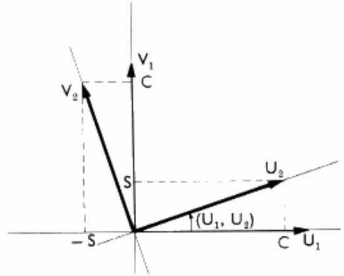
La correspondance entre les angles et les matrices orthogonales droites du type $\begin{bmatrix} C & -S \\ S & C \end{bmatrix}$ est donc bijective. Le premier terme C de la matrice correspondant à l'angle (U_1, U_2) s'appelle le *cosinus de l'angle* (U_1, U_2). Le second terme S s'appelle le *sinus* de cet angle. Nous posons : $C = \cos(U_1, U_2)$ et $S = \sin(U_1, U_2)$.

Par définition de la rotation et de la matrice la représentant, nous avons :

$$U_2 = \cos(U_1, U_2)\,U_1 + \sin(U_1, U_2)\,V_1$$

En effet, les termes C et S de la matrice ne sont autres que les composantes de U_2 transformé de U_1 par la rotation (U_1, U_2) dans la base (U_1, V_1) En faisant le produit scalaire de U_2 par U_1 et en utilisant le fait que $\langle U_1, U_1 \rangle = 1$ et $\langle U_1, V_1 \rangle = 0$, il vient : $\langle U_1, U_2 \rangle = \cos(U_1, U_2)$.

Jusqu'à présent, nous avons simplement défini l'angle de deux vecteurs unitaires. Plus généralement, l'angle de deux



$U_2 = CU_1 + SV_1$
$V_2 = -SU_1 + CV_1$
$C = \cos(U_1, U_2)$
$S = \sin(U_1, U_2)$

Fig. XIII-7

Angle de deux vecteurs unitaires

vecteurs W_1 et W_2 du plan vectoriel est l'angle de deux vecteurs unitaires colinéaires à ces vecteurs et de même sens : $U_1 = \frac{W_1}{\| W_1 \|}$ et $U_2 = \frac{W_2}{\| W_2 \|}$. Nous en déduisons la formule exprimant le produit scalaire de deux vecteurs en fonction du cosinus de leur angle :

$$<W_1, W_2> = \cos (W_1, W_2) \| W_1 \| \| W_2 \|$$

Au groupe commutatif des matrices orthogonales droites correspond le groupe commutatif des angles. Cette opération sur les angles n'est pas noté multiplicativement mais additivement. Une étude plus complète de la trigonométrie sera faite au chapitre suivant en relation avec les nombres complexes.

3.3. Symétries orthogonales (fig. XIII-8). — Considérons deux sous-espaces supplémentaires E et F. Nous avons vu au paragraphe 2.1, dans le cas de l'espace à deux dimensions, qu'une affinité de rapport k est une transformation affine à laquelle est associée la transformation linéaire suivante :

$$X = U + V \text{ avec } U \in E \text{ et } V \in F \Rightarrow L(X) = U + kV$$

L'affinité est dite orthogonale quand les sous-espaces E et F sont supplémentaires orthogonaux. L'affinité orthogonale de rapport 0 est la projection orthogonale sur E ; l'affinité de rapport 1 est l'identité. L'affinité orthogonale de rapport — 1 est appelée symétrie par rapport à E. Dans une base orthogonale convenablement choisie, la symétrie orthogonale est représentée par une matrice diagonale dont les termes de la diagonale sont égaux à 1 (vecteurs de la base appartenant à E) ou à — 1 (vecteurs de la base appartenant à F). Nous allons montrer, en les diagonalisant, que les matrices orthogonales gauches représentent une symétrie du plan vectoriel.

Le type général de matrice orthogonale gauche est : $A = \begin{bmatrix} C & S \\ S & -C \end{bmatrix}$. Cherchons les vecteurs de $\mathbf{R}^2$ invariants dans cette transformation linéaire Φ représentée par la matrice A dans la base canonique :

$$\begin{bmatrix} C & S \\ S & -C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x = Cx + Sy \\ y = Sx - Cy \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 0 = (C-1)x + Sy \\ 0 = Sx - (1+C)y \end{matrix}$$

Comme : $\frac{S}{1-C} = \frac{1+C}{S}$ car $S^2 + C^2 = 1$, la solution est :

$$\frac{x}{y} = \frac{S}{1-C}$$

Nous choisissons donc la base orthonormée droite composée des vecteurs :

$$U \text{ vecteur invariant} \begin{cases} x = \dfrac{S}{\sqrt{2-2C}} \\ y = \dfrac{1-C}{\sqrt{2-2C}} \end{cases}$$

$$V \text{ orthogonal à } U \begin{cases} x = \dfrac{-(1-C)}{\sqrt{2-2C}} \\ y = \dfrac{S}{\sqrt{2-2C}} \end{cases}$$

(Le coefficient $2 - 2C$ intervient pour que les vecteurs U et V soient de norme 1).

La matrice de passage est donc :

$$P = \frac{1}{\sqrt{2-2C}} \begin{bmatrix} S & -(1-C) \\ 1-C & S \end{bmatrix}$$

et son inverse, égal à sa transposée, est :

$$P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2-2C}} \begin{bmatrix} S & 1-C \\ -(1-C) & S \end{bmatrix}.$$

Dans la nouvelle base orthonormée, la transformation linéaire est donc représentée par la matrice (V. théorie du changement de base chapitre 11) :

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2-2C} \begin{bmatrix} S & 1-C \\ C-1 & S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C & S \\ S & -C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S & C-1 \\ 1-C & S \end{bmatrix}$$

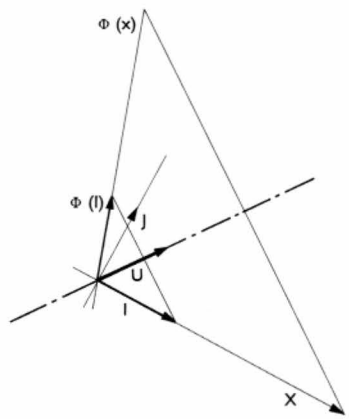


Fig. XIII-8
Symétrie orthogonale

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2-2C} \begin{bmatrix} SC+S-CS & S^2-C+C^2 \\ C^2-C+S^2 & CS-S-CS \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S & C-1 \\ 1-C & S \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2-2C} \begin{bmatrix} S & 1-C \\ 1-C & -S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S & C-1 \\ 1-C & S \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2-2C} \begin{bmatrix} S^2+(1+C^2-2C) & 0 \\ 0 & -(1+C^2-2C)-S^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Toute matrice orthogonale gauche $\begin{bmatrix} C & S \\ S & -C \end{bmatrix}$ est la matrice d'une symétrie par rapport à la droite vectorielle engendrée par le vecteur unitaire de coordonnées :

$$\frac{S}{\sqrt{2-2C}} \text{ et } \frac{1-C}{\sqrt{2-2C}}$$

L'angle que fait ce vecteur avec le premier vecteur de la base canonique (de coordonnées 1 et 0) est associé à la matrice de rotation P. Calculons P^2 :

$$P^2 = \frac{1}{2-2C} \begin{bmatrix} S & C-1 \\ 1-C & S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S & C-1 \\ 1-C & S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S^2-(1-C)^2 & 2S(C-1) \\ 2S(1-C) & S^2-(1-C)^2 \end{bmatrix} \frac{1}{2-2C}$$

Comme : $S^2 - (1-C)^2 = (1-C)(1+C) - (1-C)^2 = (1-C)(1+C-1+C) = 2C(1-C)$, nous pouvons simplifier par $(2-2C)$ et nous trouvons : $P^2 = \begin{bmatrix} C & -S \\ S & C \end{bmatrix}$.

La matrice P^2 est la matrice de rotation transformant le vecteur I de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour donner le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} C \\ S \end{pmatrix}$ c'est-à-dire le vecteur $\Phi(I)$ transformé de I par la transformation linéaire étudiée représentée par la matrice A $P^2(I) = A(I)$.

L'égalité d'angle :

$$(I, U) + (I, U) = [I, \Phi(I)]$$

représente l'égalité matricielle ci-dessus (à la composition des rotations correspond l'addition des angles). Cette remarque nous permet de justifier la « construction » du symétrique d'un vecteur X par rapport à une droite vectorielle engendrée par un vecteur unitaire U : nous posons $I = \frac{X}{\| X \|}$. En appliquant les résultats de l'étude précédente, $\Phi(I)$ est donc le vecteur unitaire dans la direction déterminée par :

$$(I, \Phi(I)) = (I, U) + (I, U)$$

comme S est linéaire, il vient :

$$\Phi(X) = \| X \| \Phi(I) \text{ (fig. XIII-8)}$$

La symétrie transforme les angles de vecteurs en leurs opposés pour l'addition. En effet, soit S la symétrie par rapport à U exprimée dans la base orthonormée droite (U, V) par la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Pour tout angle (U, W)

caractérisé par le vecteur unitaire W de coordonnées C et S dans cette base, la matrice de rotation associée à l'angle (U, W) est $\begin{bmatrix} C & -S \\ S & C \end{bmatrix}$. Calculons la matrice de rotation associée à l'angle $(\Phi(U), \Phi(W))$:

$$\begin{matrix} \Phi(U) = U \\ \Phi(W) = CU - SV \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} C & S \\ -S & C \end{bmatrix}$$

Si nous faisons le produit de ces deux matrices de rotation, nous trouvons la matrice identité : ces deux angles sont donc opposés pour l'addition :

$$\begin{bmatrix} C & -S \\ S & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C & S \\ -S & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(U, W) + (\Phi(U), \Phi(W)) = 0$$

$$(U, W) + (U, \Phi(W)) = 0$$

0 symbolisant l'angle correspondant à la rotation identique, c'est-à-dire l'angle élément neutre de l'addition des angles qui est défini par deux vecteurs unitaires égaux.

De la composition des rotations, nous déduisons la *relation de Chasles pour les angles de vecteurs :*

$$\boxed{(U, V) + (V, W) = (U, W)}$$

L'angle formé par les symétriques de deux vecteurs (par exemple, unitaires) est égal à l'opposé de l'angle de ces vecteurs. La symétrie est engendrée par le vecteur unitaire U par rapport à la droite vectorielle. Nous avons démontré ci-dessus que :

$(U, W_1) + [U, \Phi(W_1)] = 0$ et : $(U, W_2) + [U, \Phi(W_2)] = 0$

D'après la relation de Chasles :

$$(W_1, W_2) = (W_1, U) + (U, W_2)$$

et : $[\Phi(W_1), \Phi(W_2)] = [(\Phi(W_1), U) + (U, \Phi(W_2)]$

Donc : $(W_1, W_2) + [\Phi(W_1), \Phi(W_2)] = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

4. LES ÉQUATIONS DE LA DROITE

4.1. Équation d'une droite de direction donnée $(u_1 v)$ et passant par un point (x_0, y_0). — Pour tous ces problèmes, nous prenons un repère affine (O, I, J), dont les vecteurs (I et J) forment une base orthonormée et nous nous donnons les éléments géométriques par leurs coordonnées dans cette base. Cherchons tout d'abord l'équation de la droite dont la direction est la droite vectorielle engendrée par le vecteur de coordonnées u et v (ce vecteur est appelé *vecteur directeur de la droite*). Soit A (x_0, y_0) un point de la droite.

Si P est un point quelconque de la droite, $\overrightarrow{AP}$ est un vecteur de la direction de la droite qui est colinéaire au vecteur directeur de la droite et il existe un nombre réel t tel que :

$$(\overrightarrow{AP}) = t\,(uI + vJ)$$

Par ailleurs : $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$; si nous symbolisons par x et y les coordonnées d'un point générique de la droite, nous avons :

$$\begin{cases} (x - x_0) = tu \\ (y - y_0) = tv \end{cases}$$

ce qui est un système d'équations paramétriques de la droite (t est le paramètre).

En éliminant t entre les deux équations, nous obtenons l'équation cartésienne de la droite :

$$\boxed{vx - uy = vx_0 - uy_0}$$

4.2. Droites parallèles. — Par définition du parallélisme, deux droites parallèles ont même direction et leurs vecteurs directeurs sont colinéaires. Si leurs équations cartésiennes sont :

$$u_1x + v_1y + h_1 = 0$$

et :

$$u_2x + v_2y + h_2 = 0$$

pour que ces droites soient parallèles, il faut et il suffit que : $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{v_2}{v_1}$ soit : $u_2v_1 - u_1v_2 = 0$.

5. GÉOMÉTRIE AFFINE DE L'ESPACE

5.1. Les isométries de l'espace. — Nous considérons l'espace affine à trois dimensions sur le corps des réels. À partir d'une base, nous définissons un produit scalaire pour lequel cette base est orthonormée. Si dans cette base (I, J, K), les coordonnées du vecteur U_1 sont (u_1, v_1, w_1) et celles de U_2 (u_2, v_2, w_2), le produit scalaire des vecteurs U_1 et U_2 s'exprime par la relation suivante :

$$u_1u_2 + v_1v_2 + w_1w_2$$

Cette expression subsiste lorsque nous changeons de base orthonormée, c'est-à-dire lorsque la matrice de changement de base est une matrice orthogonale.

Une isométrie de l'espace affine à trois dimensions est une transformation affine de cet espace qui conserve les distances (comme dans le cas du plan affine). On montre qu'une telle transformation peut se décomposer en un produit d'une translation et d'une isométrie laissant fixe un point O. Le groupe des isométries laissant fixe un point O est isomorphe au groupe des isométries de l'espace vectoriel sous-jacent $\mathbf{R}^3$. Le problème se ramène donc à l'étude des matrices orthogonales (3,3) qui peuvent aussi être classées en matrices orthogonales droites et matrices orthogonales gauches. Il est possible de choisir des bases orthonormées droites dans lesquelles les matrices représentant les isométries sont réduites à certains types particuliers de matrices orthogonales géométriquement interprétables.

5.1.1. Matrices orthogonales droites : rotations. Comme dans l'espace affine à deux dimensions, les matrices orthogonales droites sont toujours réductibles à la forme diagonale par changement de base orthonormée droite :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C & -S \\ 0 & S & C \end{bmatrix}$$

Si cette matrice exprime l'isométrie dans la base orthonormée droite (I, J, K), l'isométrie laisse invariant le vecteur I. La restriction de l'isométrie au plan engendré par les vecteurs J et K est la rotation d'angle associé à la matrice de rotation $\begin{bmatrix} C & -S \\ S & C \end{bmatrix}$. On dit que c'est une rotation de l'espace dont l'axe est la droite engendrée par le vecteur I (fig. XIII-9).

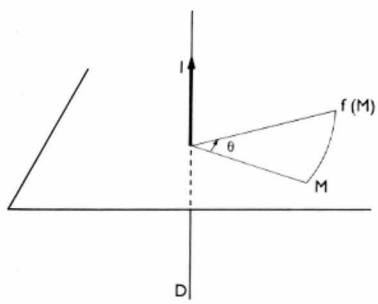


Fig. XIII-9

Rotation dans l'espace d'axe D et d'angle θ

5.1.2. Matrices orthogonales gauches : symétries. Comme dans l'espace affine à deux dimensions, les matrices orthogonales gauches sont toujours réductibles à la forme diagonale par changement de base orthonormée droite :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Cette matrice laisse invariante le plan vectoriel défini par les deux premiers vecteurs de la base et transforme le troisième vecteur en son opposé.

C'est une symétrie orthogonale par rapport au plan vectoriel engendré par les deux premiers vecteurs de la base.

Dans le cas qui vient d'être étudié, deux des valeurs propres étaient égales à 1 et la troisième à — 1 ; un autre cas se rencontre : les trois valeurs propres sont égales à

— 1. Tout vecteur est transformé en son opposé : c'est l'homothétie de rapport — 1 ou symétrie-point.

Lorsque deux valeurs propres sont égales à — 1 et la troisième à 1 comme dans le cas traité ci-dessus (rotation autour d'une droite d'un angle associé à la matrice de rotation $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$), la matrice de rotation :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

est orthogonale droite.

(Ce type spécial de rotation est aussi appelé retournement.)

5.2. Plan en géométrie affine de l'espace.

5.2.1. Recherche de l'ensemble des points *P* tels que *F(P)* = 0 (*F* étant une fonction affine de l'espace à valeurs dans les réels). — Choisissons un repère affine de l'espace (O, I, J, K). Les coordonnées d'un point P de l'espace seront représentées par les lettres x, y et z : $F(P) = F(O) + xf(I) + yf(J) + zf(K)$, f étant la forme linéaire correspondant à l'application affine F de l'espace affine dans le corps des réels ; $F(O)$, $f(I)$, $f(J)$ et $f(K)$ sont des nombres réels que nous représenterons respectivement par les lettres h, u, v et w. Les coordonnées (x, y, z) d'un point P vérifiant la relation $F(P) = 0$ vérifient donc la relation :

$$ux + vy + wz + h = 0$$

Nous allons montrer que l'ensemble des points vérifiant cette relation est une variété affine de dimension deux appelée plan affine. Supposons, en effet, que deux points P_1 et P_2 vérifient cette relation :

$$F(P_2) = F(P_1) + f(\overrightarrow{P_1P_2})$$

Donc : $$f(\overrightarrow{P_1P_2}) = 0$$

Le vecteur $\overrightarrow{P_1P_2}$ appartient donc au noyau de la forme linéaire f. L'ensemble des points P vérifiant la relation $F(P) = 0$ est donc une variété affine dont la direction est le noyau de la forme f. Il est facile de montrer que le noyau de cette forme est de dimension deux. En repérant les vecteurs par rapport à la base (I, J, K), les coordonnées (x, y, z) d'un vecteur appartenant au noyau de f vérifient la relation $ux + vy + wz = 0$.

Si w est différent de 0, le noyau de f est engendré par les deux vecteurs indépendants $\begin{bmatrix} 0 \\ -w \\ v \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} -w \\ 0 \\ u \end{bmatrix}$. Si w est égal à 0, les vecteurs précédents ne sont plus indépendants et nous pouvons considérer alors les vecteurs indépendants $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} v \\ -u \\ 0 \end{bmatrix}$.

Dans tous les cas, le noyau de f est de dimension deux et l'ensemble cherché est un plan affine dont la direction est le noyau de f.

5.2.2. Équations paramétriques du plan. — Un plan est l'ensemble des points P tel que le vecteur $\overrightarrow{AP}$ appartienne à un espace vectoriel de dimension 2 donc engendré par un système libre de deux vecteurs U et V. C'est l'ensemble des points P tels qu'il existe deux nombres réels p et q qui vérifient les relations suivantes :

$$\overrightarrow{AP} = pU + qV \begin{cases} x_P = x_A + px_U + qx_V \\ y_P = y_A + py_U + qy_V \\ z_P = z_A + pz_U + qz_V \end{cases}$$

soit : $$\begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_U & x_V \\ y_U & y_V \\ z_U & z_V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

En éliminant p et q entre ces trois équations, nous trouverions une équation cartésienne. Elle peut aussi être trouvée en exprimant que les vecteurs $\overrightarrow{AP}$, U et V sont liés.

De même, l'équation d'un plan passant par trois points non alignés A_1, A_2 et A_3 est obtenue en écrivant que les vecteurs A_1P, A_1A_2 et A_1A_3 sont liés.

5.3. La droite en géométrie affine de l'espace.

5.3.1. Faisceau de plans. — Soit deux plans P_1 et P_2 dont les équations cartésiennes sont respectivement :

$$u_1x + v_1y + w_1z + h_1 = 0$$

et : $$u_2x + v_2y + w_2z + h_2 = 0$$

L'intersection de ces deux plans, c'est-à-dire l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient simultanément les deux équations est une variété affine dont la direction est l'intersection des noyaux des formes linéaires

$$u_1x + v_1y + w_1z = 0 \quad \text{et} \quad u_2x + v_2y + w_2z = 0$$

Deux cas peuvent se présenter :

— Soit les noyaux de ces formes linéaires sont confondus car $\frac{u_1}{u_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{w_1}{w_2}$: les deux plans sont parallèles. S'ils ont un point commun, ils sont confondus et leur intersection est donc l'ensemble vide ou un plan.

— Soit les noyaux de ces formes linéaires ne sont pas confondus : ce sont deux sous-espaces vectoriels de dimension deux d'un espace vectoriel de dimension trois et ils ont donc une intersection qui est un sous-espace vectoriel de dimension un. L'intersection des deux plans est une variété affine de dimension 1 : c'est une droite.

Le système d'équations :

$$\begin{cases} u_1x + v_1y + w_1z + h_1 = 0 \\ u_2x + v_2y + w_2z + h_2 = 0 \end{cases}$$

caractérise la droite intersection des deux plans ; il est appelé système d'équations cartésiennes de la droite.

Toute équation ou combinaison linéaire des équations ci-dessus est l'équation d'un plan tel que tout point de la droite d'intersection appartienne à ce plan. On dit que ce plan appartient au faisceau de plans déterminé par les plans P_1 et P_2. Remarquons qu'il y a correspondance bijective entre l'ensemble des droites de l'espace et l'ensemble des faisceaux de plans (ensemble des plans passant par une droite déterminée).

5.3.2. Équations paramétriques d'une droite. — Considérons la droite définie par un système d'équations cartésiennes :

$$\begin{cases} u_1x + v_1y + w_1z + h_1 = 0 \\ u_2x + v_2y + w_2z + h_2 = 0 \end{cases}$$

Ces équations cartésiennes ne représentant pas des plans parallèles, deux des trois rapports $\frac{u_1}{u_2}, \frac{v_1}{v_2}, \frac{w_1}{w_2}$ ne sont pas égaux ; supposons que ce soit les deux premiers : $u_1v_2 - v_1u_2 \neq 0$. Le système de deux équations à trois inconnues a alors une infinité de solutions à un degré de liberté :

$$\begin{cases} u_1x + v_1y = -w_1z - h_1 \\ \qquad x = \dfrac{z(v_2w_1 - v_1w_2) + (v_2h_1 - v_1h_2)}{-v_2u_1 + v_1u_2} \\ u_2x + v_2y = -w_2z - h_2 \\ \qquad y = \dfrac{z(u_2w_1 - u_1w_2) + (u_2h_1 - v_1h_2)}{-u_2v_1 + u_1v_2} \end{cases}$$

En définitive, nous obtenons un système d'équations paramétriques de la droite où z tient à la fois le rôle de troisième coordonnée et de paramètre :

$$\begin{cases} x = a_1z + a_2 \\ y = b_1z + b_2 \\ z = z \end{cases} \qquad \text{ou :} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ 1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La droite considérée est bien une variété affine de dimension un dont la direction est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\begin{cases} a_1 \\ b_1 \\ 1 \end{cases}$ et passant par le point $\begin{cases} a_2 \\ b_2 \\ 0 \end{cases}$.

Remarquons que le système d'équations paramétriques d'une droite représente une application (affine) de $\mathbf{R}$ dans l'espace affine (à deux ou trois dimensions) tandis que le système d'équations paramétriques d'un plan représente une application (affine) de $\mathbf{R}^2$ dans l'espace affine à trois dimensions. Nous retrouverons cette différence entre les équations paramétriques d'une courbe et d'une surface.

CHAPITRE XIV

POLYNÔMES

1. POLYNÔMES ET FONCTIONS POLYNÔMES

Fréquemment, polynôme et fonction polynôme sont confondus ; un polynôme est présenté comme une « somme algébrique » de monômes, c'est-à-dire d'expressions algébriques du type ax^n où a est un nombre réel appelé coefficient du monôme, x une lettre appelée variable et n un nombre entier appelé degré du monôme. Toute l'ambiguïté porte sur la nature de la lettre x : si la lettre x représente une variable réelle, il s'agit d'une fonction qui associe le nombre réel ax^n à tout nombre réel x ; au contraire, si la lettre x désigne un symbole abstrait, il faut considérer l'expression mathématique ax^n comme un polynôme.

Nous allons montrer sur un exemple, que cette différence n'est pas purement formelle. Considérons un polynôme sur le corps à trois éléments $\mathbf{Z}/3$ dont nous rappelons ci-dessous les tables d'addition et de multiplication.

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

L'expression $x\,(x-1)\,(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x$ est un polynôme du troisième degré ; quelles que soient les valeurs données à la variable x dans le corps $\mathbf{Z}/3$, la fonction polynôme associe à x le nombre $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$: c'est la fonction nulle. Pourtant, le polynôme $(x^3 - 3x + 2)$ ne peut pas être considéré comme un polynôme nul : ses coefficients ne sont pas tous nuls et c'est un polynôme de degré trois. Cet exemple montre la nécessité d'une définition des polynômes qui rejette la confusion entre polynôme et fonction polynôme.

2. DÉFINITION DUN POLYNÔME

Un polynôme à une indéterminée sur un corps K est une suite à valeurs dans K, telle que le nombre de termes non nuls de la suite soit fini. L'ensemble de ces suites est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites à valeurs dans le corps K. Ce n'est pas un sous-espace vectoriel de dimension finie : le système suivant est un système infini libre :

$$(1, 0, 0, \ldots),\ (0, 1, 0, 0, \ldots),\ (0, 0, 1, 0, 0, \ldots), \ldots$$

Soit, en effet, une combinaison linéaire finie de suites de ce système, égale à la suite nulle :

$$a_1\,(1, 0, 0, \ldots) + a_2\,(0, 1, 0, \ldots) + \ldots + a_n\,(0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots) = (0, 0, 0, \ldots)$$

soit : $(a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, 0) = (0, 0, 0, \ldots)$

ce qui équivaut à : $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, c'est-à-dire à la combinaison linéaire nulle. Nous avons donc vérifié la propriété caractérisant les systèmes libres (V. chap. 4).

Le **degré d'un polynôme** est le plus grand des rangs des termes non nuls de la suite (quand cette suite n'est pas la suite nulle car le polynôme nul n'a pas de degré) diminué de 1. Par exemple, le degré du premier des polynômes du système ci-dessus est $1 - 1 = 0$; le degré du second est 1, celui du troisième est 2 et ainsi de suite.

Remarquons que la somme de deux polynômes de degré au plus égal à n est un polynôme de degré au plus égal à n. Par exemple, la somme des polynômes $(0, 1, 1, 0, 0, \ldots)$ et $(1, 2, 0, 0, \ldots)$ est $(1, 3, 1, 0, 0, \ldots)$. Au contraire, la somme des polynômes $(0, 1, 1, 0, 0, \ldots)$ et $(1, 1, -1, 0, 0, \ldots)$ est le polynôme $(1, 2, 0, 0, \ldots)$. Dans ce dernier exemple, il y a abaissement des degrés.

Pour le moment, nous n'avons défini sur l'ensemble des polynômes que les opérations d'espace vectoriel, somme et multiplication par un scalaire ; il nous faut maintenant définir la multiplication pour retrouver toutes les opérations usuelles des polynômes.

3. STRUCTURE D'ALGÈBRE DE L'ENSEMBLE DES POLYNÔMES

3.1. Définition de $K(X)$. — Nous allons « ajouter » un élément abstrait X au corps K ; cela implique que nous ajoutions, les produits de X par lui-même $X, X^2, X^3 \ldots$, les produits de ces éléments par tous les nombres de K, aX, $bX^2 \ldots$ (quels que soient les éléments a et $b \ldots$ de K), toutes les sommes algébriques des « monômes » ainsi obtenus. L'ensemble de ces éléments est l'ensemble des expressions du type :

$$a_0X + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$$

La somme et le produit de telles expressions s'imposent par prolongement de la somme et du produit de K afin que ces opérations conservent leurs propriétés d'associativité et de distributivité sur le nouvel ensemble. Pour la somme, le coefficient du terme X^n est la somme des coefficients de X^n dans les termes de la somme. Le produit se déduit de la donnée du produit sur l'ensemble $(X, \ldots, X^n, \ldots)$ qui est $X^n.X^p = X^{n+p}$.

La somme ainsi définie munit l'ensemble de ces expressions de la structure de groupe additif dont 0 est l'élément neutre et dans lequel l'opposé de l'expression $(a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n)$ est $(-a_0 - a_1X - \ldots - a_nX^n)$. Le produit ainsi défini est distributif par rapport à la somme, il est associatif et il admet un élément neutre qui est 1.

L'ensemble qui est ainsi obtenu est appelé anneau engendré par K et par X. Il sera noté $K(X)$. Il est obtenu à partir de K par adjonction d'un élément libre X.

3.2. Identification de $K(X)$ et de l'ensemble des polynômes à une indéterminée sur K. — Les expressions étudiées dans ce paragraphe peuvent être identifiées aux polynômes définis dans le paragraphe précédent. Les éléments $0, 1, X, X^2$ sont identifiés aux suites $(0, 0, \ldots)$, $(1, 0, 0, \ldots)$, $(0, 1, 0, 0, \ldots)$, $(0, 0, 1, 0, 0, \ldots)$, et l'expression $(a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n)$ est identifiée au polynôme $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$. Cette identification est en fait un isomorphisme d'espace vectoriel. En effet, la somme et le produit par un nombre de K, tels qu'ils ont été définis pour les expressions en X, correspondent à la somme et au produit par un scalaire dans l'espace vectoriel des suites à un nombre fini de termes non nuls.

Le produit abstrait des expressions en X nous permet de définir par identification un produit sur cet espace vectoriel qui se trouve ainsi muni de la structure *d'algèbre* (anneau + espace vectoriel) :

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)\,(b_0, b_1, \ldots, b_p, 0, 0, \ldots) = (a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2, a_nb_p, 0, 0, \ldots)$$

Par exemple, le produit des polynômes $(X - 1)$ et $(X + 1)$, c'est-à-dire des suites $(-1, 1, 0, 0, \ldots)$ et $(1, 1, 0, 0, \ldots)$ est $(-1, -1 + 1, 1, 0, 0, \ldots)$, c'est-à-dire le polynôme $X^2 - 1$. Ce résultat, obtenu directement en appliquant la définition générale du produit de deux polynômes, peut être déduit simplement par le calcul sur l'algèbre des polynômes :

$$(X - 1)\,(X + 1) = X^2 - X + X - 1$$

(règle de distributivité et application de la définition $X.X = X^2$).

Le *degré* d'un polynôme a est donc le plus grand exposant de X apparaissant dans l'expression de a :

$$a = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n + (0 + 0 + \ldots)$$

Remarquons que le degré du produit de deux polynômes non nuls est la somme des degrés de ces polynômes. En particulier, le produit de deux polynômes non nuls est un polynôme non nul : l'anneau $K(X)$ n'admet pas de diviseurs de 0.

4. ÉTUDE DES IDÉAUX DE $K(X)$ ET DIVISION EUCLIDIENNE DES POLYNÔMES

4.1. Idéaux et anneaux quotients. — Rappelons quelques éléments d'algèbre déjà utilisés pour étudier les propriétés de l'anneau des entiers relatifs (V. chap. 4). Nous avons défini un idéal sur un anneau comme un sous-ensemble de l'anneau qui soit un sous-groupe pour l'addition et tel que le produit d'un élément quelconque de l'anneau par un élément de l'idéal appartienne à l'idéal. Par exemple, sur un anneau, l'ensemble des multiples d'un élément constitue un idéal, c'est même l'idéal le plus petit que contienne cet élément; il est appelé idéal engendré par cet élément. Étant donné un anneau A et un idéal J de cet anneau, nous pouvons définir la relation d'équivalence suivante sur l'anneau: a est équivalent à b si $(a - b)$ est un élément de J.

Cette relation d'équivalence est compatible avec l'addition et la multiplication de l'anneau; la classe de l'élément nul est l'idéal J.

Réciproquement d'ailleurs, toute relation d'équivalence sur un anneau compatible avec les lois de l'anneau peut se mettre sous cette forme en prenant pour J la classe d'équivalence de 0 qui est un idéal. Nous pouvons alors munir l'ensemble quotient (ou ensemble des classes d'équivalence) de la structure d'anneau, qui sera appelé l'anneau quotient (V. chap. 4).

4.2. Définition d'une division euclidienne. — L'anneau des polynômes vérifie une propriété que vérifiait aussi l'anneau des entiers relatifs: quel que soit l'idéal J de cet anneau, il existe un élément de l'anneau tel que l'idéal J soit l'idéal des multiples de cet élément, l'idéal engendré par cet élément: dans ce cas, l'anneau est dit *principal*. Comme dans le cas de l'anneau des entiers relatifs, cette propriété résulte de ce qu'une division euclidienne peut être définie sur $K(X)$.

Formulons le problème de la division sur $K(X)$. *Pour tout couple (a, b) d'éléments de $K(X)$, il faut montrer l'existence et l'unicité d'un couple (q, r) d'éléments de $K(X)$ vérifiant :*

$a = bq + r$ et: [(degré de r) $<$ (degré de b) ou $r = 0$]

Nous allons d'abord prouver l'unicité.

Si: $a = bq_1 + r_1$ et: $a = bq_2 + r_2$, alors: $b(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$. Dans le cas où $(r_2 - r_1)$ est différent de 0, b divise le polynôme $(r_2 - r_1)$ donc le degré de b est inférieur ou égal au degré de $r_2 - r_1$, ce qui est incompatible avec la formulation du problème qui précise que le degré de b est supérieur ou égal aux degrés des polynômes r_2 et r_1. Par conséquent, $(r_2 - r_1) = 0$ et donc $bq_1 = bq_2$; par régularité de la multiplication: $q_1 = q_2$. Nous avons prouvé l'égalité des couples-solutions (q_1, r_1) et (q_2, r_2) donc l'unicité de la solution du problème de la division.

Il reste donc à trouver un procédé permettant d'effectuer la division de deux polynômes; nous l'exposerons sur un exemple. Soit à diviser le polynôme $(4X^5 + 3X^2 + 2X + 1)$ par le polynôme $(X^3 + 2X + 2)$. Pour avoir le premier quotient partiel, divisons le monôme de plus haut degré du dividende par le monôme de plus haut degré du diviseur: le premier quotient partiel est $4X^2$. En multipliant le premier quotient partiel par le diviseur et en soustrayant le résultat du dividende, nous obtenons le premier reste partiel:

$$\begin{array}{r|l} 4X^5 + 3X^2 + 2X + 1 & X^3 + 2X + 2 \\ -(4X^5 + 8X^3 + 8X^2) & \overline{4X^2} \\ \overline{-8X^3 - 5X^2 + 2X + 1} & \end{array}$$

Le premier reste partiel obtenu par ce procédé a toujours un degré inférieur au degré du dividende à moins que ce reste ne soit nul. Répétons cette opération en remplaçant le dividende par le premier reste partiel; le second reste partiel est nul ou son degré est inférieur au degré du premier reste partiel:

$$\begin{array}{r|l} 4X^5 + 3X^2 + 2X + 1 & X^3 + 2X + 2 \\ -(4X^5 + 8X^3 + 8X^2) & \overline{4X^2 - 8} \\ \overline{-8X^3 - 5X^2 + 2X + 1} & \\ -(-8X^3 - 16X - 16) & \\ \overline{-5X^2 + 18X + 17} & \end{array}$$

Le procédé est répété jusqu'au moment où nous obtenons un reste partiel nul ou dont le degré est inférieur au degré du diviseur; cela ne peut manquer de se produire puisque les restes partiels successifs ont des degrés de plus en plus petits.

Le couple réponse de la division euclidienne est obtenu en prenant pour reste le dernier reste partiel et pour quotient la somme des quotients partiels. Dans le cas traité ci-dessus, l'égalité de la division est:

$$(4X^5 + 3X^2 + 2X + 1) = (X^3 + 2X + 2)(4X^2 - 8) + (-5X^2 + 18X + 17)$$

Un lecteur exigeant peut composer la démonstration rigoureuse de l'existence d'une solution et le problème de la division dans le cas général en s'inspirant de l'exemple traité: il suffit de remplacer les chiffres par des lettres représentant les coefficients d'un polynôme arbitraire.

4.3. $K(X)$ est un anneau principal. — La démonstration est la même que dans le cas de $\mathbf{Z}$ (V. chap. 4). Nous prenons un polynôme qui soit de plus petit degré dans l'idéal étudié et nous divisons tout polynôme de l'idéal par ce polynôme; le reste obtenu appartient à l'idéal: comme s'il n'était pas nul, son degré serait strictement inférieur à celui du diviseur, nous pouvons dire que ce reste est nul. Donc, un polynôme de plus petit degré dans l'idéal divise tous les polynômes de l'idéal: c'est un générateur de l'idéal qui est *principal*. Remarquons que ce générateur n'est unique qu'à un facteur multiplicatif près (de même que dans $\mathbf{Z}$, le générateur n'était unique qu'à la multiplication par -1 près).

Comme dans $\mathbf{Z}$ (comme dans tout anneau principal), nous pouvons définir le plus grand commun diviseur de plusieurs polynômes (générateur de l'idéal engendré par ces polynômes) et le plus petit commun multiple (générateur de l'idéal intersection des idéaux engendrés par ces polynômes) et l'identité de Bezout peut aussi être démontrée.

5. ÉTUDE DES ANNEAUX QUOTIENTS PAR UN POLYNÔME IRRÉDUCTIBLE

Cela est capital pour l'introduction des nombres complexes: c'est l'étude de ce qui correspond aux anneaux quotients $\mathbf{Z}/n$ dont nous avons vu qu'ils étaient des corps si, et seulement si n est premier.

5.1. Définition et exemples de polynômes irréductibles. — *Un polynôme est irréductible s'il ne peut pas être exprimé comme produit de deux polynômes non constants.*

Cette dernière restriction est nécessaire car, comme tout polynôme constant non nul, a_0 admet un inverse $\frac{1}{a_0}$ pour la multiplication; nous pouvons toujours écrire pour tout polynôme a:

$$a = a_0 \cdot \left(\frac{1}{a_0} \cdot a\right)$$

Par exemple, si nous prenons le corps des rationnels $\mathbf{Q}$ comme corps de base, le polynôme $(X^2 - 2)$ est irréductible dans $\mathbf{Q}(X)$. En effet, supposons qu'il existe un polynôme du premier degré $(X - a)$ qui divise $(X^2 - 2)$; nous pouvons trouver un polynôme q du premier degré tel que: $(X^2 - 2) = q(X - a)$.

Posons $q = X - b$ (a et b sont des rationnels):

$$(X^2 - 2) = (X - a)(X - b) = X^2 - (a + b)X + ab$$

Il faut donc avoir:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ -ab = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -b \\ a^2 = 2 \end{cases}$$

Nous avons démontré qu'il n'existe pas de nombres rationnels dont le carré est égal à 2: la décomposition n'est donc pas possible dans le corps des rationnels et le polynôme $(X^2 - 2)$ est irréductible dans $\mathbf{Q}(X)$.

Dans l'anneau des polynômes à coefficients réels, le polynôme $X^2 - 2$ n'est pas irréductible:

$$(X^2 - 2) = \left(X - \sqrt{2}\right)\left(X + \sqrt{2}\right)$$

De même dans $\mathbf{R}(X)$, le polynôme $(X^2 + 1)$ est irréductible car il n'existe pas de nombres réels dont le carré soit égal à (-1).

Au paragraphe suivant, nous généraliserons ce raisonnement.

5.2. Équations algébriques et divisibilité par $(X - a)$. — Une équation algébrique sur un corps (à une inconnue) est une relation du type :

$$a_0 + a_1 a + a_2 a^2 + \ldots + a_n a^n = 0$$

$(a_0, \ldots, a_n)$ sont des éléments du corps. On dit que a est *solution de l'équation* s'il vérifie cette relation.

À tout polynôme de $K(X)$ correspond une équation algébrique sur le corps K qui peut ou non admettre des solutions. Nous avons vu que l'équation $(a^2 - 2) = 0$ admet des solutions sur le corps des réels et n'en admet pas sur le corps des rationnels et que l'équation $(a^2 + 1) = 0$ n'en admet pas sur le corps des réels.

Il est évident que les ensembles de solutions d'équations associées à des polynômes proportionnels sont identiques. Si un polynôme P divise un polynôme Q, l'ensemble des solutions de l'équation associée à P est inclus dans l'ensemble des solutions de l'équation associée à Q. *Si P est le polynôme produit de deux polynômes Q et R, l'ensemble des solutions de l'équation associée à P est la réunion de l'ensemble des solutions de l'équation associée à Q et de l'ensemble des solutions associé à R.* Montrons, par exemple, cette dernière proposition :

Nous désignerons par $P(x)$ la fonction polynôme associée au polynôme P. Pour que a soit solution de l'équation associée à P, il faut et il suffit que : $P(a) = 0$.

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- a est solution de l'équation associée à P ;
- $P(a) = Q(a)\, R(a) = 0$;
- $Q(a) = 0$ ou $R(a) = 0$;
- a est solution de l'équation associée à Q ou solution de l'équation associée à R.

En particulier, pour que le polynôme P soit divisible par $(X - a)$, il faut que $P(a) = 0$. Nous allons montrer que c'est aussi une condition suffisante. Divisons P par $(X - a)$:

$$P = (X - a)\, Q + R \text{ et degré de } R < 1$$

Donc : R est une constante.

Appliquons maintenant à a la fonction polynôme P :

$$P(a) = (a - a)\, Q(a) + R$$

La constante R est donc égale à $P(a)$; si $P(a) = 0$, le reste est nul et le polynôme $(X - a)$ divise le polynôme P.

Si un polynôme du second degré n'est pas irréductible, il est produit de deux facteurs du premier degré : l'équation associée admet donc deux racines distinctes ou confondues.

5.3. Anneau quotient par un polynôme irréductible. — Théorème fondamental : *L'anneau quotient de $K(X)$ par l'idéal engendré par un polynôme irréductible est un corps.* Soit P_0 un polynôme irréductible de $K(X)$ et considérons l'anneau quotient de $K(X)$ par l'idéal engendré par ce polynôme. Il faut montrer que tout élément de l'ensemble-quotient non nul possède un inverse pour la multiplication. Soit P un polynôme appartenant à un tel élément de l'ensemble-quotient (c'est-à-dire n'appartenant pas à l'idéal des multiples de P_0). Il faut trouver un polynôme Q tel que la classe d'équivalence de QP soit la classe de l'élément neutre de la multiplication (la classe du polynôme unitaire). Cherchons un polynôme Q de $K(X)$ et un polynôme $Q_1 P_0$ de l'idéal des multiples de P_0 tel que :

$$QP = I + Q_1 P_0 \text{ ou } QP + (-Q_1)\, P_0 = I$$
(I : polynôme unitaire)

Cette dernière identité n'est autre que l'identité de Bezout pour les polynômes P_0 et P ; elle exprime que ces polynômes sont premiers entre eux, ce qui est vrai puisque P_0 est irréductible et que P n'est pas un multiple de P_0.

La réciproque de ce théorème est vraie : *si l'anneau quotient de $K(X)$ par un idéal est un corps, le générateur de l'idéal* (V. § 4.3) *est un polynôme irréductible.* En effet, soit P le polynôme générateur de cet idéal. S'il n'est pas irréductible, il existe des polynômes Q et R tels que $P = QR$; donc le produit des classes de Q et de R est la classe de P., c'est-à-dire l'idéal ou encore la classe nulle de l'ensemble-quotient. Or, Q et R n'étant pas des multiples de P, leurs classes d'équivalence ne sont pas l'élément nul dans l'anneau quotient ; il admet donc des diviseurs de 0 et ne peut pas être un corps.

5.4. Construction du corps des complexes. — D'après le théorème précédent, l'anneau quotient de $K(X)$ par le polynôme irréductible $(X^2 + 1)$ est un corps que nous nommerons le corps des complexes. Un nombre complexe est une classe d'équivalence de l'anneau des polynômes ; nous pouvons la caractériser par le reste de la division de ses éléments par $(X^2 + 1)$, reste qui peut être un polynôme quelconque de degré inférieur à 2. Dans le corps des complexes, l'équation $(X^2 + 1 = 0)$ admet des éléments solutions, les classes d'équivalence représentées par les restes X et $-X$.

Nous désignerons par j le nombre complexe qui est la classe d'équivalence caractérisée par le reste X (les physiciens désignant les intensités électriques par i, nous noterons j ce nombre complexe fondamental, habituellement noté i en mathématiques) et par 1 la classe d'équivalence caractérisée par le polynôme constant 1. La classe d'équivalence caractérisée par le reste $a + bX$ sera donc notée $a + bj$.

Explicitons les opérations conférant à l'ensemble-quotient une structure de corps :

$$(a + bj) + (c + dj) = (a + c) + (b + d)j$$

Cette formule exprime que la somme de deux nombres complexes se déduit par passage aux quotients de la formule exprimant la somme de deux polynômes. De plus, nous avons :

$(a + bj)\,(c + dj) = ac + (ad + bc)j + bdj^2$ par distributivité de la multiplication. Or, nous avons vu que $j^2 = -1$ car j^2 est la classe d'équivalence du polynôme X^2 qui est équivalent à -1 modulo le polynôme $(X^2 - 1)$.

Donc : $(a + bj)\,(c + dj) = (ac - bd) + (ad + bc)j$

Remarquons que les nombres complexes qui sont des classes d'équivalence caractérisées par des polynômes constants constituent un ensemble, sous-corps du corps des nombres complexes isomorphe au corps des nombres réels par l'isomorphisme qui, au nombre réel noté a, associe le nombre complexe noté a, classe d'équivalence des polynômes équivalents à a modulo $(X^2 + 1)$. Dans la suite, nous identifierons ce sous-corps au corps des réels.

CHAPITRE XV

LE CORPS DES NOMBRES COMPLEXES

1. PROPRIÉTÉS DES NOMBRES COMPLEXES

Historiquement, les nombres complexes ont été imaginés pour attribuer dans tous les cas des racines aux équations du second degré ; on admettait l'existence d'un nombre j, appelé nombre imaginaire, de carré égal à -1 et on en déduisait toutes les règles de calcul relatives aux nombres complexes.

L'avantage de notre méthode d'exposition est de fournir une réalisation concrète du corps des complexes. Quand ceux-ci furent « découverts », on cria à l'abstraction ; quelques dizaines d'années plus tard, en électricité, les calculs concernant les courants alternatifs purent être considérablement simplifiés par l'introduction d'une représentation utilisant les nombres complexes ; c'est un exemple classique de la relation dialectique entre la théorie et les applications (V. t. 1, Électricité, chap. 30).

Le corps des nombres complexes a été construit à partir de l'algèbre des polynômes par passage aux quotients à l'aide d'une relation d'équivalence compatible.

La dimension du corps des complexes comme espace vectoriel sur le corps des réels est deux. Une base de nombres complexes est le couple $(1, j)$. Il est donc possible de représenter l'ensemble des nombres complexes par le plan $\mathbf{R}^2$: le point du plan d'abscisse a et d'ordonnée b représente le nombre complexe $a + bj$; nous dirons que ce nombre est *l'affixe* de ce point ou que le point est l'*image* du nombre. Cette représentation géométrique des nombres complexes est appelée *représentation géométrique d'Argand-Cauchy*.

2. NOMBRE COMPLEXE CONJUGUÉ

Cherchons tous les automorphismes du corps des complexes, laissant stable le corps des réels (rappelons qu'un automorphisme d'une structure S est un isomorphisme de S sur elle-même). La restriction d'un tel automorphisme au corps des réels est donc un automorphisme du corps des réels.

Soit T un tel automorphisme. Il laisse stable l'élément neutre car celui-ci est unique:

$$T(1).T(a) = T(1.a) = T(a) \Rightarrow T(1) = 1$$

Nous en déduisons que T laisse stables:

— tous les entiers naturels: par récurrence:

$$T(n) = n \Rightarrow T(n+1) = T(n) + T(1) = n + 1$$

— tous les entiers relatifs:

$$0 = T(0) = T(a - a) = T(a) + T(-a) = a + T(-a)$$

donc: $T(-a) = -a$

— tous les nombres rationnels:

$$q.T(p/q) = T(q).T(p/q) = T(q.p/q) = T(p) = p$$

Si c'est un automorphisme pour la structure d'ordre du corps des réels, nous pouvons dire que l'automorphisme laisse stable tout nombre réel et se réduit donc à l'identité. En effet, supposons, par exemple, qu'il existe un nombre réel x tel que $T(x) < x$; nous pouvons toujours intercaler entre ces deux nombres réels différents un nombre rationnel r et nous avons: $r < x$ et $r = T(r) > T(x)$, T n'est donc pas un automorphisme pour la structure d'ordre, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Le seul automorphisme du corps des réels laissant stable la structure d'ordre est donc l'identité. (On démontre aussi que c'est le seul automorphisme continu du corps des réels d'après le théorème de prolongement; V. chap. 16).

Cherchons maintenant les automorphismes T du corps des complexes dont la restriction au corps des réels soit l'identité:

$$T(a + bj) = T(a) + T(b)T(j) = a + bT(j)$$

T est donc déterminé par sa valeur en j. Comme $j.j = -1$:

$$T(-1) = T(j).T(j) = -1$$

(T étant un morphisme pour la multiplication laissant le réel -1 invariant).

Deux solutions sont donc possibles: $T(j) = j$ et $T(j) = -j$.

— Si $T(j) = j$, $T(a + bj) = a + bj$. *T est l'identité.*

— Si $T(j) = -j$, $T(a + bj) = a - bj$. T est appelé conjugaison et, **par définition, $(a - bj)$ est le nombre complexe conjugué de $(a + bj)$.**

Nous vérifions facilement que T est bien un automorphisme pour la multiplication (pour l'addition, c'est évident):

$$T(a + bj)\,T(c + dj) = T[ac - bd + j(ad + bc)]$$

car: $(a - bj)(c - dj) = [ac - bd - j(ad + bc)]$

Les seuls automorphismes du corps des complexes dont la restriction au corps des réels soit un automorphisme de corps ordonné sont donc l'*identité* et la *conjugaison* qui, à tout nombre complexe $a + bj$, associe le nombre complexe conjugué $a - bj$.

Le conjugué du conjugué d'un nombre complexe est ce nombre complexe lui-même: le conjugué de $(a + bj)$ est $(a - bj)$ et celui de $(a - bj)$ est $(a + bj)$. La conjugaison est dite transformation *involutive*; elle est souvent notée en plaçant un astérisque à côté du nombre complexe dont il faut exprimer le conjugué: $z^\star$ est le conjugué de z. Dans le plan d'Argand-Cauchy, les images des nombres complexes conjugués $a + bj$ et $a - bj$ sont *symétriques par rapport à la droite réelle* (fig. XV-1).

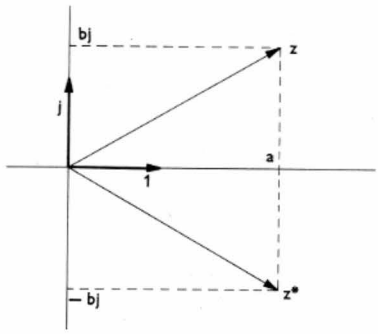


Fig. XV-1

Nombres complexes conjugués

3. MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Le produit d'un nombre complexe par son conjugué est un nombre réel positif. En effet:

$$(x + jy)(x - jy) = x^2 - (jy)^2 = x^2 + y^2$$

La racine carrée de ce nombre réel positif est appelée *module du nombre complexe*.

Remarquons que l'application qui, à tout nombre complexe, associe son module n'est autre que la norme euclidienne correspondant au produit scalaire sur $\mathbf{R}^2$:

$$(x_1, y_1).(x_2, y_2) = x_1x_2 + y_1y_2$$

Dans la représentation géométrique d'Argand-Cauchy, le module d'un nombre complexe n'est autre que la longueur du segment joignant les images de 0 et de ce nombre complexe. Le module d'un nombre complexe vérifie toutes les propriétés des normes; dans ce qui suit, le module du nombre complexe $(x + jy)$ est noté:

$$\left(|x + jy| = \sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

$$z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$$

$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ (inégalité triangulaire).

$|kz| = |k|\,|z|$.

k est un nombre réel dont $|k|$ est la valeur absolue.

Étant donné que la valeur absolue d'un nombre réel n'est autre que le module de ce nombre, quand nous considérons ce nombre comme un nombre complexe $\left(\sqrt{x^2} = |x|\right)$, l'égalité précédente est un cas particulier de la propriété des modules pour la multiplication.

Le module du produit de deux nombres complexes est le produit des modules de ces deux nombres:

Soit deux nombres complexes z_1 et z_2, le module de z_1z_2 est la racine carrée de $\sqrt{(z_1z_2)^\star\,(z_1z_2)}$. Or, $(z_1z_2)^\star = z_1^\star z_2^\star$ car l'application qui, à tout nombre complexe, associe son conjugué est un automorphisme du corps. Donc, le module $|z_1z_2|$ est la racine carrée de $\sqrt{z_1z_1^\star z_2z_2^\star} = \sqrt{|z_1|^2\,|z_2|^2}$ soit le produit $|z_1|\,|z_2|$.

Donc, l'application qui, à tout nombre complexe, associe son module est un morphisme multiplicatif du groupe multiplicatif des nombres complexes non nuls dans le groupe multiplicatif des réels positifs. Le noyau de ce morphisme (image réciproque de l'élément neutre de la multiplication donc ensemble des nombres complexes de module un) est un groupe multiplicatif: *le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1*. Ce groupe est isomorphe au groupe quotient par la relation d'équivalence sur $\mathbf{C} - \{0\}$: deux nombres complexes non nuls z_1 et z_2 sont tels qu'il existe un réel *positif* k vérifiant $z_1 = kz_2$. Il est clair que cette relation est:

— réflexive: $z_1 = 1.z_1$

— symétrique: $z_1 = k.z_2 \Leftrightarrow z_2 = 1/k.z_1$

— transitive: $z_1 = k.z_2$ et $z_2 = k'.z_3 \Rightarrow z_1 = kk'.z_3$

Cette relation d'équivalence est compatible avec la multiplication:

$$z_1 = kz_2 \text{ et } z'_1 = k'z'_2 \Rightarrow z_1z'_1 = kk'z_2z'_2$$

L'ensemble quotient est donc un groupe multiplicatif dont la classe neutre est la classe d'équivalence de 1, c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels positifs.

À tout nombre complexe de module 1, associons maintenant sa classe d'équivalence. Cette application est un morphisme pour la multiplication, celle-ci étant compatible avec la relation d'équivalence définissant le groupe quotient. Cette application est injective, car le quotient de deux nombres complexes différents, de module 1, est un nombre complexe de module 1 (mais ce n'est pas un réel positif obligatoirement) ; cette application est surjective : étant donné un nombre complexe quelconque z, $(z \neq 0)$ le nombre complexe $\frac{z}{z}$ est un nombre complexe de module 1 et équivalent à z.

Quelle est l'interprétation géométrique dans le plan d'Argand-Cauchy de cette bijection ? *L'ensemble des nombres complexes de module 1 est représenté par le cercle de rayon un dont le centre est O, image de l'origine. Une classe d'équivalence pour la relation d'équivalence considérée est une demi-droite de sommet O.* La correspondance est la suivante : *à tout point P du cercle de rayon un, il faut associer la demi-droite de sommet O et passant par P.*

Nous terminerons ce paragraphe en remarquant que $\frac{z^*}{|z|^2} = \frac{z^*}{zz^*}$ est l'inverse de z. Nous obtenons ainsi une expression explicite de l'inverse d'un nombre complexe et donc de la division de deux nombres complexes. En particulier, l'inverse d'un nombre complexe de module un est égal à son conjugué.

4. ARGUMENT D'UN NOMBRE COMPLEXE

La bijection du paragraphe précédent associait une demi-droite de sommet O dans le plan complexe à un nombre complexe *non nul* de module 1. Considérons la rotation du plan qui transforme la demi-droite réelle positive en cette demi-droite. *Nous appelons* **argument** *d'un nombre complexe z, non nul, l'angle de la rotation du plan transformant la demi-droite image de l'ensemble des réels positifs en la demi-droite issue de l'origine et à laquelle l'image de ce nombre complexe appartient* (fig. XV-2). Cet angle sera noté : arg z.

La relation d'équivalence du paragraphe précédent s'écrit : « les images des nombres complexes z_1 et z_2 appartiennent à la même demi-droite issue de l'origine » ou encore « les nombres complexes z_1 et z_2 ont même argument ».

Théorème : L'argument du produit de deux nombres complexes z_1 et z_2 est la somme des arguments de ces nombres complexes :

$$\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$$

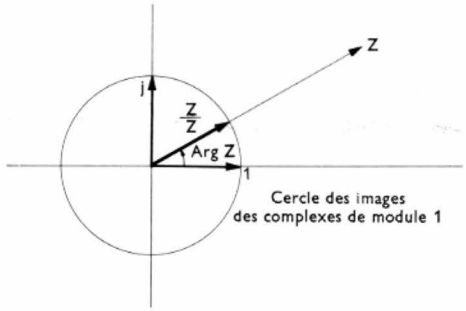


Fig. XV-2 — Argument d'un nombre complexe

Lemme : La multiplication par un nombre complexe z_0 de module 1 correspond à une rotation d'angle arg z_0.

Preuve du Lemme : $z_0 = x_0 + jy_0$ avec : $x_0^2 + y_0^2 = 1$. Pour tout $z = x + jy$ nous pouvons écrire :

$$z_0 z = (xx_0 - yy_0) + j(xy_0 + yx_0)$$

Les coordonnées de l'image de $z_0 z$ sont données en fonction des coordonnées x et y de l'image de z par :

$$\begin{bmatrix} x_0 & -y_0 \\ y_0 & x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ avec } x_0^2 + y_0^2 = 1$$

Il s'agit bien d'une matrice de rotation. Le nombre 1 étant transformé en $z_0 . 1 = z_0$, l'angle de cette rotation est, par définition, arg z_0.

Preuve du théorème : Posons $z'_1 = \frac{z_1}{|z_1|}$ et : $z'_2 = \frac{z_2}{|z_2|}$

Nous avons : $|z'_1| = |z'_2| = 1$

$\arg z_1 = \arg z'_1$ et : $\arg z_2 = \arg z'_2$

Le produit des rotations correspondant à la multiplication par z_1 et à la multiplication par z'_2 est la rotation correspondant à la multiplication par $z'_1 . z'_2$. Comme nous avons défini la somme de deux angles comme l'angle de la rotation produit des deux rotations associées, il vient :

$$\arg z_1 + \arg z_2 = \arg z'_1 + \arg z'_2 = \arg z'_1 z'_2 = \arg z_1 z_2$$

Nous en déduisons que la correspondance qui à tout nombre complexe de module 1 associe son argument est un morphisme *bijectif* du groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1 dans le groupe additif des angles. Cette correspondance est un morphisme non injectif du groupe multiplicatif des nombres complexes non nuls dans le groupe additif des angles.

Remarquons par ailleurs que les parties réelle et imaginaire x_0 et y_0 du nombre complexe z_0 de module 1 correspondent aux éléments C et S de la matrice de rotation d'angle arg z_0 :

$$\begin{bmatrix} C & -S \\ S & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 & -y_0 \\ y_0 & x_0 \end{bmatrix}$$

Cette propriété sera utilisée pour définir les fonctions sinus et cosinus au chapitre 17.

CHAPITRE XVI

SÉRIES ENTIÈRES ET FONCTIONS ANALYTIQUES

1. ÉTUDE DES SÉRIES NUMÉRIQUES

1.1. Définitions relatives aux séries. — La série de terme général u_n est la suite des sommes :

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

Quand cette suite converge, nous dirons que la série converge.

Pour que la série converge, il est nécessaire que son terme général $u_n = S_n - S_{n-1}$ tende vers 0 ; en effet, S_n et S_{n-1} tendent vers la même limite S quand la série converge ; cette limite est appelée somme de la série et elle est notée :

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

Cette condition n'est pas suffisante : nous verrons dans ce chapitre que la série de terme général $u_n = \frac{1}{n}$ diverge.

Nous allons étudier des séries dont le terme général est un complexe ; la convergence de S_n vers S sera définie par : $\lim S_n - S = 0$. Mais, il est nécessaire de mettre d'abord en évidence certaines propriétés particulières des *séries positives* (séries dont le terme général est positif).

1.2. Propriétés des séries positives. — Les sommes S_n d'une série dont le terme général u_n est positif forment une suite croissante. Si cette suite est majorée, elle tend vers une limite S (V. chap. 7), sinon, elle tend vers $+\infty$ et on dit que la série *diverge*.

Exemple : Une progression géométrique dont la raison est un nombre positif strictement inférieur à 1 est une série positive convergente ; une progression géométrique dont la raison est un nombre positif supérieur ou égal à 1 est une série divergente. Cette alternative fondamentale pour une série positive nous permet d'énoncer le théorème suivant pour la comparaison de deux séries positives (il est faux pour deux séries quelconques).

Théorème : Si deux séries positives de termes généraux u_n et v_n sont telles que $u_n \leqslant v_n$, nous avons les implications suivantes :

(1) la série de terme général u_n diverge $\Rightarrow$ la série de terme général v_n diverge,

(2) la série de terme général v_n converge $\Rightarrow$ la série de terme général u_n converge et : $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

1.3. Convergence en module. — Une série dont le terme général est un nombre complexe *converge en module* si la série positive dont le terme général est le module du terme général de la première est convergente.

Théorème : Une série convergeant en module est une série convergente et :

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} u_n \right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$$

Preuve. La suite des sommes d'une série convergeant en module est une suite de Cauchy car la suite des sommes des modules converge :

$$\forall \varepsilon\, \exists N\, \forall n,\ \forall p \mid |u_{n+1}| + \ldots + |u_{n+p}| \leqslant \varepsilon$$

Or : $|S_{n+p} - S_n| = |u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}|$

$$\leqslant |u_{n+1}| + \ldots + |u_{n+p}| \leqslant \varepsilon.$$

Toute suite de Cauchy converge sur C (V. chap. 18, § 2.4). De plus, comme :

$$|s_n| = |u_1 + \ldots + u_n| \leqslant |u_1| + \ldots + |u_n|$$

à la limite : $\left| \sum_{n=1}^{\infty} u_n \right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$

Si la série étudiée est à termes réels, nous parlerons d'*absolue convergence* (convergence des valeurs absolues). L'intérêt de la convergence en module tient à ce qu'il est possible d'appliquer aux séries convergeant en module des théorèmes vrais pour les séries positives mais faux pour les séries quelconques.

1.4. Familles sommables. — La somme de plusieurs nombres entiers est une opération associative et commutative. Est-ce que la somme généralisée qu'est la somme d'une série possède ces propriétés ?

Étant donné une série convergente, est-ce que toute nouvelle série obtenue en groupant par « paquets » les termes de la série ou en effectuant leurs sommes dans un ordre différent est aussi convergente ? Quand la réponse à cette question est OUI, la somme de la série ne dépend que de l'ensemble de ses termes et non pas de l'ordre dans lequel ils sont donnés ; cet ensemble est appelé une famille sommable. En général, l'ensemble des termes d'une série convergente n'est pas une *famille sommable*. Par exemple, la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ est convergente mais l'ensemble de ses termes ne constitue pas une famille sommable.

Les propositions suivantes caractérisent complètement les familles sommables :

(1) Une série positive convergente est telle que l'ensemble de ses termes généraux constitue une famille sommable.

(2) L'ensemble des termes d'une série convergente en module est une famille sommable.

(3) Pour qu'un ensemble dénombrable de complexes soit une famille sommable, une condition nécessaire et suffisante est que toute série obtenue en sommant dans un ordre quelconque ses éléments soit convergente en module.

Ces notions sur les séries numériques sont indispensables pour comprendre les propriétés des séries entières utilisées pour approcher les fonctions réelles et complexes.

2. LES SÉRIES ENTIÈRES

2.1. Définition. — Nous ne considérons ici que des séries à valeurs dans un espace vectoriel normé et dans ce cadre, les séries de fonctions. Nous nous proposons d'étudier les séries de fonctions les plus utiles dont les termes sont des monômes.

Une série entière associée à la série de terme général a_n est la série de fonctions dont le terme général de rang n est la fonction monôme $a_n z^n$, monôme de degré n de la variable complexe z. Ainsi, un polynôme est la somme d'une série entière dont tous les termes sont nuls à partir d'un certain rang. L'*ensemble de convergence* de la série entière est l'ensemble des nombres complexes z tels que la série numérique $(a_n z^n)$ soit convergente.

2.2. Opérations sur les séries formelles. — La *somme de deux séries entières* est la série entière dont le terme général est la somme des termes généraux des deux séries. La définition du produit de deux séries entières est une généralisation de la définition du produit des polynômes. Rappelons qu'étant donné deux polynômes $(a_0 + \ldots + a_m X^m)$ et $(b_0 + \ldots + b_n X^n)$, le produit de ces deux polynômes est un polynôme de degré $n + m$ et dont le terme de degré p est $(a_0 b_p + a_1 b_{p-1} + \ldots + a_p b_0)$. Le *produit des séries entières* de termes généraux respectifs $a_n z^n$ et $b_n z^n$ est la série entière de terme général $[(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0) z^n]$. Dans le cas particulier où les deux séries entières sont des polynômes, nous retrouvons bien la définition du produit de deux polynômes.

Jusqu'à présent, nous ne nous sommes pas préoccupés de l'ensemble de convergence des séries que nous avons définies d'une façon purement « algébrique » ce qui est exprimé en disant que nous avons défini des opérations sur les séries entières formelles.

2.3. Rayon de convergence et disque de convergence. — Lemme d'Abel : S'il existe un nombre z_0 tel que la série de terme général $a_n z_0^n$ soit convergente, alors pour tout z tel que $|z| < |z_0|$, la série de terme général $a_n z^n$ est convergente en module.

Preuve : Le terme général $a_n z_0^n$ tend vers 0 et est donc majoré en module par un nombre positif K :

$$a_n z^n = a_n z_0^n \frac{z^n}{z_0^n} \Rightarrow |a_n z^n| \leqslant K \left| \frac{z}{z_0} \right|^n$$

Donc, pour $|z| < |z_0|$, nous avons majoré $a_n z^n$ par le terme général d'une série géométrique de raison inférieure à 1, donc convergente.

Appliquons ce lemme d'Abel pour déterminer la forme de l'ensemble de convergence d'une série entière. Posons $R = \sup |z|$, z appartenant à l'ensemble de convergence de la série. Par définition pour $|z| > R$, la série de terme général $a_n z^n$ diverge ; si $|z| = R' < R$, il existe un nombre z_0 avec $R' < |z_0| < R$ tel que la série de terme général $a_n z_0^n$ converge.

En application du lemme d'Abel, la série de terme général est convergente en module. Nous avons ainsi défini un disque appelé *disque de convergence de la série tel qu'à l'intérieur de ce disque, la série converge en module et qu'à l'extérieur de ce disque la série diverge*. Le rayon de ce disque s'appelle *rayon de convergence de la série*. Si ce rayon R ne peut pas se définir, c'est que la série entière converge (et donc converge en module d'après le lemme d'Abel) en tout point du plan.

2.4. Opérations sur les séries entières. — Considérons deux séries entières $(a_n z^n)$ et $(b_n z^n)$ de rayons de convergence respectifs R et R'.

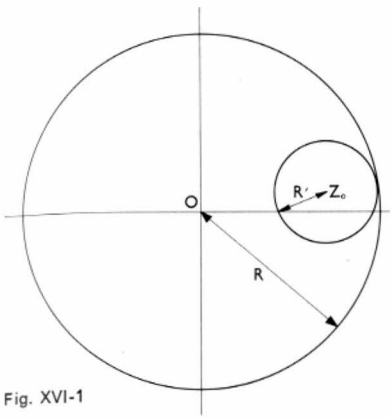


Fig. XVI-1

La somme d'une série entière est analytique dans son disque de convergence. Elle est développable au voisinage de z_0 dans le disque ouvert (z_0, R')

Dans le cas $f(z) = \frac{1}{1-z}$, cette fonction est analytique dans le complémentaire de 1. Elle est développable au voisinage de z_0 dans tout disque ouvert de centre z_0 ne contenant pas 1

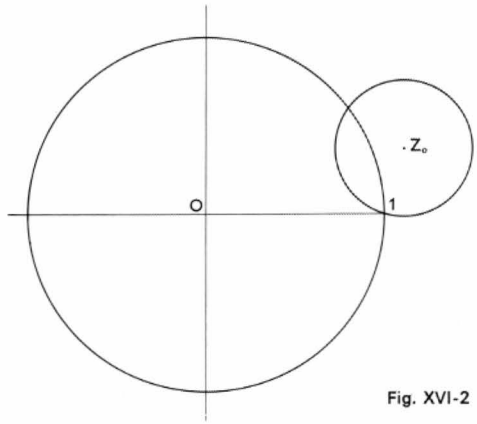


Fig. XVI-2

Pour $|z| < \inf(R, R')$, les suites dont les termes de rang n sont :

$$\sum_{n=0}^{N} |a_n z^n| \text{ et } \sum_{n=0}^{N} |b_n z^n|$$

convergent. D'après les théorèmes sur les limites des suites (V. chap. 7), les suites dont les termes de rang n sont respectivement :

$$\sum_{n=0}^{N} |a_n| |z^n| + \sum_{n=0}^{N} |b_n| |z^n|$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \left(|a_n| + |b_n| \right) |z^n|$$

et :

$$\left(\sum_{n=0}^{N} |a_n| |z^n| \right) \left(\sum_{n=0}^{N} |b_n| |z^n| \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \left(|a_o b_n| + |a_1 b_{n-1}| + \ldots + |a_n b_o| \right) |z^n|$$

convergent. Nous en déduisons que les familles suivantes : $\{(a_n z^n), (b_n z^n)\}$ et $\{a_n b_p z^{n+p}\}$ sont sommables. D'après les théorèmes d'associativité et de commutativité des familles sommables, nous avons donc :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_n) z^n$$

Nous avons ainsi défini les opérations d'anneau sur l'intersection des disques de convergence des séries entières. Nous pourrions définir de même le quotient de deux séries entières sur l'intersection des ensembles de convergence et d'un disque sur lequel la série dénominateur n'a pas une somme nulle.

3. LES FONCTIONS ANALYTIQUES ET LEURS DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE ENTIÈRE

3.1. Définitions et exemples. — Une *fonction analytique de la variable complexe z* est une fonction f de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ telle que pour tout $z_0 \in E$, il existe une série entière de coefficients a_n et de rayon de convergence R vérifiant :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ pour } |z - z_0| < R$$

E est appelé l'ensemble d'analycité de la fonction.

L'expression $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ est le *développement en série entière de f au voisinage de* z_0 (fig. XVI-1).

Par exemple, la fonction $f(z) = \frac{1}{1-z}$ est analytique dans le complémentaire de 1. En effet pour tout z_0 différent de 1 :

$$f(z) = \frac{1}{(1-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{1-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{1-z_0}}$$

Si $|z - z_0| < |1 - z_0|$, c'est-à-dire si z appartient au disque ouvert le plus grand possible de centre z_0 et ne contenant pas 1 (fig. XVI-2), la progression géométrique de terme initial $\frac{1}{1-z_0}$ et de raison $\frac{z-z_0}{1-z_0}$ est convergente et sa somme est $f(z)$, qui étant la somme de la série entière :

$$\sum \frac{(z-z_0)^n}{(1-z_0)^{n+1}}$$

est bien une fonction analytique. Remarquons que la série entière z^n est convergente sur le disque ouvert $|z| < 1$, que sa somme est la fonction $\frac{1}{1-z}$. Ainsi, si la fonction $f(z) = \frac{1}{1-z}$ est définie et analytique sur le complémentaire de 1, elle n'est égale à la somme d'une série entière en z que sur le disque de convergence de cette série. C'est un exercice facile de démontrer maintenant que $f(z) = \frac{1}{az+b}$ est analytique sur le complémentaire de $z = \frac{-b}{a}$.

Après l'étude des opérations sur les séries entières, remarquons que la somme et le produit de deux fonctions analytiques sont des fonctions analytiques.

Un polynôme est une fonction analytique dans tout le plan (fonction entière) :

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$$

donc :

$$P(z) = a_0 + a_1 [(z - z_0) + z_0] + \ldots + a_n [(z - z_0) + z_0]^n$$

En développant chacun des termes de cette somme et en groupant, nous obtenons un polynôme en $(z - z_0)$.

Ce raisonnement peut être généralisé pour obtenir le théorème suivant : *la somme d'une série entière est analytique dans son disque de convergence.* Soit $f(z)$ la somme de la série $f(z) = \sum_n a_n z^n$ définie sur son disque de convergence $|z| < R$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n [(z - z_0) + z_0]^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{p=0}^{n} C_n^p [z - z_0]^p z_0^{n-p}$$

Si $|z - z_0| + |z_0| = R' < R$

$$\left|\sum_{p=0}^{n} C_n^p (z - z_0)^p z_0^{n-p}\right| \leqslant \sum_{p=0}^{n} C_n^p \left|z - z_0\right|^p |z_0|^{n-p}$$
$$= (|z - z_0| + |z_0|)^n = R'^n$$

La série à double indice de terme $(a_n C_n^p z_0^{n-p})(z - z_0)^p$ constitue une famille sommable puisque sa somme est majorée par la série positive convergente $\sum_n |a_n| R'^n$. La série entière :

$$\sum_{p=0}^{\infty} \left(\sum_{n=p}^{+\infty} a_n C_n^p z_0^{n-p}\right) (z - z_0)^p$$

est donc convergente sur $|z - z_0| < R - |z_0|$ et de somme $f(z)$ d'après le théorème sur l'associativité d'une famille sommable.

3.2. Dérivée de la somme d'une série entière. — La dérivée d'une fonction complexe $f(z)$ de la variable complexe z au point z_0 peut être définie comme la limite du rapport $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ quand $z \to z_0$ (c'est-à-dire quand $(z - z_0)$ tend vers 0) si cette limite existe. Pour les mêmes raisons que dans le cas réel (V. chap. 8), la fonction $f(z) = z^n$ est dérivable et sa dérivée est $f'(z) = nz^{n-1}$; donc un polynôme est dérivable et sa dérivée est la somme des dérivées des monômes qui le composent :

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$$
$$P'(z) = n a_n z^{n-1} + (n-1) a_{n-1} z^{n-2} + \ldots + a_1$$

Les théorèmes sur la somme, le produit, la composition et le quotient de deux fonctions dérivables restent vrais et leurs démonstrations sont identiques. *Une fonction complexe de variable complexe dérivable en tout point d'un ensemble D s'appelle une fonction holomorphe sur D.*

Nous admettrons le théorème fondamental suivant : il est équivalent qu'une fonction complexe de variable complexe soit analytique sur D ou holomorphe sur D. Si la fonction analytique $f(z)$ sur D est la somme de la série entière $\Sigma a_n (z - z_0)^n$ sur le disque de convergence de la série : $|z - z_0| < R$, la dérivée de f, f' est une fonction analytique sur D qui est égale à la somme de la série entière de terme général $n a_n (z - z_0)^{n-1}$ sur le même disque.

Ce théorème permet de déduire la valeur des dérivées successives de la fonction f au point z_0 :

$$f'(z) = a_1 + 2a_2(z - z_0) + \ldots \Rightarrow f'(z_0) = a_1$$
$$f''(z) = 2a_2 + \ldots \Rightarrow f''(z_0) = 2a_2$$

En règle générale :

$$f^{(n)}(z) = n!\, a_n + [(n+1)(n) \ldots 2]\, a_{n+1}(z - z_0) + \ldots \Rightarrow f^{(n)}(z_0) = n!\, a_n$$

Remarquons qu'une fonction analytique de la variable complexe admet des dérivées analytiques de tout ordre et que la donnée des dérivées en un point détermine le développement en série entière en ce point. Il est donné par une formule de Taylor :

$$f^{(n)}(z_0) = n!\, a_n \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

En particulier, nous pouvons dire que le développement d'une fonction en série entière en un point est unique.

Exemple : Les dérivées successives de la fonction $f(z) = \frac{1}{1 - z}$ sont : $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{(1 - z_0)^{n+1}}$

Considérons maintenant la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$. Le rayon de convergence de cette série est 1. En effet, il est facile de voir que pour $z \leqslant 1$ le terme général $\frac{z^n}{n}$ tend vers 0 et que pour $z > 1$, le terme général ne tend pas vers 0. La somme de cette série, dans son disque de convergence, est une fonction analytique dont la dérivée est :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n z^{n-1}}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}$$

Par définition, nous écrirons que cette fonction est égale à : $-\log_e(1 - z)$ (nous verrons plus loin des définitions plus adéquates de la fonction logarithme).

En changeant z en $(-z)$, nous obtenons les développements en série entière des fonctions $\frac{1}{1 + z}$ et $\log_e(1 + z)$

pour $|z| < 1$, $\frac{1}{1 + z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n$

et : $\log_e(1 + z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}$

Remarquons que $\frac{1}{1 + z}$ est la dérivée de $\log_e(1 + z)$, ce qui pouvait être déduit du théorème de la dérivation des fonctions composées.

Dans le chapitre suivant, nous définirons la fonction exponentielle et les fonctions trigonométriques par leurs développements en série entière.

Les développements en série entière au voisinage d'un point sont des développements limités (V. chap. 8), puisque le reste de Taylor est majoré par le reste d'une série positive convergente dans un voisinage du point.

Développement en série entière des fonctions usuelles

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad \forall x$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \quad \forall x$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \quad \forall x$$

$$\text{Log}(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \ldots \quad R = 1$$

$$\text{Log}(1 + x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)}{n!} x^n + \ldots \quad R = 1$$

Les deux derniers développements sont limités pour nous à x réel. En effet la définition du logarithme d'un nombre complexe sort du cadre de cet ouvrage.

CHAPITRE XVII

L'EXPONENTIELLE ET LES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

1. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DE L'EXPONENTIELLE COMPLEXE

1.1. Définition. — Quel que soit le nombre réel positif r, la série positive de terme général $\frac{r^n}{n!}$ est convergente. En effet, si nous prenons $r' > r$, nous pouvons trouver une progression géométrique u_n de raison $\frac{r}{r'}$ (avec $r' > r$) et qui majore tous ses termes de rang $n > n_0 \geqslant r'$:

$$u_0 = \frac{r'^{n_0}}{n_0!} ; u_n = \frac{r'^{n_0}}{n_0!} \times \frac{r^n}{r'^n}$$

$$= \frac{r^n}{n_0!} \frac{1}{r'^{n-n_0}} > \frac{r^n}{n_0!} \frac{1}{n_0+1} \cdots \frac{1}{n} = \frac{r^n}{n!}$$

Nous avons donc démontré le théorème : la série entière $\frac{z^n}{n!}$ converge dans tout le plan. Sa somme est donc une fonction analytique dans le plan (ou fonction entière) ; nous la noterons $\mathbf{e}^z$ ou exp (z) ou exp z ce qui se lit exponentielle de z. Remarquons que l'expression de la fonction exponentielle par un développement en série entière au voisinage de l'origine montre que les dérivées successives de l'exponentielle au point 0 sont égales à 1.

1.2. Propriété fondamentale

$$\boxed{\exp(z_1) . \exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2)}$$

Quels que soient les nombres complexes z_1 et z_2, nous pouvons écrire :

$$\exp(z_1) \exp(z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{z_2^p}{p!} = \sum_{n,p} \frac{z_1^n z_2^p}{np!}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left[\sum_{\substack{n,p \\ n+p=m}} \frac{(n+p)!}{n!p!} z_1^n z_2^p \right]$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^m}{m!} = \exp(z_1+z_2)$$

car la famille $\frac{z_1^n z_2^p}{n!p!}$ constitue une famille sommable. On démontre même que la seule fonction analytique possédant cette propriété est $f(z) = \exp(hz)$ où h est une constante complexe quelconque ; $f(z)$ est une fonction entière dont le développement à l'origine est :

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} \frac{(hz)^n}{n!} = \sum_{0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} z^n$$

Ainsi, l'exponentielle est un morphisme du groupe additif $(\mathbf{C}, +)$ dans le groupe multiplicatif $(\mathbf{C}, \times)$. En particulier, le transformé de l'élément neutre du premier est l'élément neutre du second : exp. $(0) = 1$ et les inverses pour l'addition et la multiplication se correspondent dans ce morphisme :

$$\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$$

1.3. Dérivation de l'exponentielle. — Nous avons admis (chap. 16 § 3.2) que la dérivée d'une fonction analytique est égale à la somme du développement dérivé de la fonction.

Donc, la dérivée de exp $(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ est égale à :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \exp z$$

La fonction exponentielle est égale à sa dérivée en tout point.

Le développement de exp (z) en série entière au voisinage du point z_0 est donc donné par la formule de Taylor :

$$\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp z_0}{(n)!} (z - z_0)^n = \exp z_0 \exp(z - z_0)$$

Nous retrouvons ainsi la propriété fondamentale de l'exponentielle.

1.4. Restriction au corps des réels. — Il faut retrouver maintenant la définition de l'exponentielle donnée au chapitre 8 : $x \to \exp x$ est l'application continue et dérivable de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^+$ prolongeant l'application de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{R}^+ : \frac{p}{q} \to \mathbf{e}^{\frac{p}{q}}$, $\mathbf{e}$ étant un nombre réel positif choisi tel que la dérivée au point 0 de l'application exp. soit égale à 1. D'après la propriété fondamentale de l'exponentielle, nous avons :

$$(\exp 1)^p = \exp p$$

et : $\exp p = \left(\exp \frac{p}{q}\right)^q$, donc $\left(\exp \frac{p}{q}\right) = (\exp 1)^p$

La restriction de l'exponentielle complexe au corps des réels est bien le prolongement continu de l'application $\frac{p}{q} \to (\exp 1)^{p/q}$. À l'alinéa précédent, nous avons vu que cette application est dérivable et que sa dérivée au point 0 est égal à 1.

Donc nous avons bien $\exp 1 = \mathbf{e}$ et : $\forall x \in \mathbf{R}$ $\exp x = \mathbf{e}^x$ ce qui justifie la notation :

$$\forall z \in \mathbf{C} \quad \exp z = \mathbf{e}^z$$

2. APPLICATION À LA MESURE DES ANGLES

2.1. Problème de la mesure des angles. — Nous avons déjà défini (V. chap. 13) le groupe additif des angles (isomorphe au groupe multiplicatif des rotations) et les applications C et S du groupe des angles dans $(-1, 1)$, applications cosinus et sinus. Le groupe des angles est isomorphe au groupe multiplicatif des complexes de module 1 (V. chap. 15). Considérer, comme cela est fait souvent, que la mesure d'un angle est la longueur (exprimée par un nombre réel positif) de l'arc du cercle-unité qui joint l'origine (point d'affixe 1) au point du cercle unité associé à l'angle mesuré n'est pas suffisamment précis. En effet, le nombre de tours de cercles que décrit l'arc n'est pas indiqué. Prenons, par exemple, l'angle O (associé au nombre complexe 1) : sa mesure est 0. Considérons maintenant l'angie *plat* P (associé au nombre complexe -1) : $P + P = 0$, soit $(-1) . (-1) = 1$. Si m_p est la mesure de P, nous devrions donc avoir : $m_p + m_p = 0 \Rightarrow m_p = 0$. Pour obtenir une mesure non nulle, il faut donc accepter que la mesure d'un angle ne soit pas déterminée univoquement ; par exemple, 0 et $2m_p$ seront des mesures de l'angle O. En fait, chaque mesure sera définie à un multiple de $2m_p$ près. Ainsi, la mesure d'un angle ne sera pas un nombre réel mais une classe d'équivalence pour la congruence modulo $2m_p$ (V. chap. 3). Cette indétermination correspond, par exemple, au nombre de tours de cercle (de longueur $2m_p$) indéterminé dans la définition de la mesure de l'angle comme longueur de l'arc de cercle associé. Cependant, cette définition imposerait de définir préalablement la longueur d'une courbe et d'indiquer un moyen de la calculer (V. chap. 21). Nous utiliserons l'exponentielle complexe pour donner une définition équivalente de la mesure des angles.

Tableau des variations des fonctions trigonométriques

θ (radians)	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
θ (degrés)	— 180	— 90	0	90	180	270	360
sin θ	0	— 1	0	1	0	— 1	0
cos θ	— 1	0	1	0	— 1	0	1
tg θ	$0 \nearrow +\infty$ | $-\infty \nearrow 0$	$+\infty \nearrow -\infty$ | $0 \nearrow +\infty$			$-\infty \nearrow 0$ | $+\infty \nearrow -\infty$		$0 \nearrow 0$

— Le degré est une mesure usuelle que l'on n'emploie jamais en mathématiques :

$\begin{cases} \text{mp} = \pi \text{ radians} \\ \text{mp} = 180 \text{ degrés} \end{cases}$

— $\text{tg}\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ est une fonction trigonométrique utile (en particulier pour le calcul des intégrales) ; sa dérivée est $\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

(Pour plus de précision entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ se reporter à une table numérique).

2.2. Morphisme de la droite réelle sur le cercle unité. — Considérons la restriction à **R** du morphisme de $(\mathbf{C}, +)$ dans $(\mathbf{C}, \times)$ défini par $x \to \mathbf{e}^{jx}$. Les nombres complexes $\mathbf{e}^{jx}$ et $\mathbf{e}^{-jx}$ sont des nombres complexes conjugués, car les termes homologues de leurs développements en série entière, $\frac{(jx)^n}{n!}$ et $\frac{(-jx)^n}{n!}$ sont des nombres complexes conjugués. De plus, d'après la propriété fondamentale de l'exponentielle, ils sont inverses l'un de l'autre :

$$\mathbf{e}^{jx}\,\mathbf{e}^{-jx} = \mathbf{e}^{(j-j)x} = \mathbf{e}^{0} = 1.$$

Nous en déduisons que $\mathbf{e}^{jx}$ est de module 1 si x est réel

$$(\text{car } \| z \| = \sqrt{z\,z^*}),$$

L'application $x \to \mathbf{e}^{jx}$ définit donc un morphisme du groupe additif des réels dans le groupe multiplicatif des complexes de module 1, soit U. L'image réciproque du complexe 1 est un sous-groupe additif de **R** (propriété de morphisme de groupe).

Des arguments de topologie sur la droite réelle, assez simples, permettent de démontrer les deux résultats suivants :

— Le morphisme $x \to \mathbf{e}^{jx}$ de **R** dans U est surjectif.

— L'image réciproque de 1 est un sous-groupe additif de **R** composé des multiples d'un nombre réel $2m_p$.

Il est possible de calculer numériquement une approximation du nombre m_p :

$$3{,}141\,59 < m_p < 3{,}141\,60$$

Dans la suite, en accord avec les conventions habituelles, nous désignerons par le symbole π le nombre m_p. L'image réciproque par le morphisme d'un complexe quelconque de module 1 va donc être une classe d'équivalence de **R** pour la congruence modulo $2m_p$. La mesure d'un angle est la classe d'équivalence image réciproque par le morphisme du nombre complexe de module 1 associé à cet angle. Ainsi, la mesure de l'angle plat P associé au complexe — 1 est la classe d'équivalence de π. Habituellement, on désigne cette classe d'équivalence par son élément compris entre 0 et 2π mais ce n'est pas une règle absolue ; dans certains problèmes, il est plus commode de désigner une classe d'équivalence par son élément compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

Réciproquement, l'application de **R** sur U, définie par $x \to \mathbf{e}^{jx}$, est périodique de période 2π, c'est-à-dire que, quel que soit x réel, nous avons $\mathbf{e}^{j(x+2\pi)} = \mathbf{e}^{jx}\,\mathbf{e}^{j2\pi} = \mathbf{e}^{jx}$. Nous en déduisons d'ailleurs, que l'exponentielle complexe est périodique de période $j2\pi$; en effet, quel que soit z :

$$\mathbf{e}^{z+j2\pi} = \mathbf{e}^{z}\mathbf{e}^{j2\pi} = \mathbf{e}^{z}$$

3. TRIGONOMÉTRIE

3.1. Définition des fonctions cosinus et sinus. — Les fonctions réelles à variables réelles $x \to$ cosinus x (en abrégé cos x) et $x \to$ sinus x (en abrégé sin x) ont été définies comme étant les nombres réels C et S associés à l'angle argument du complexe $\mathbf{e}^{jx}$ (V. chap. 12). Nous pouvons donc écrire :

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{e}^{jx} &= \cos x + j \sin x \\ \mathbf{e}^{-jx} &= \cos x - j \sin x \end{aligned}}$$

d'où :

$$\begin{cases} \cos x = \dfrac{\mathbf{e}^{jx} + \mathbf{e}^{-jx}}{2} = \dfrac{\mathbf{e}^{2jx}+1}{2\mathbf{e}^{jx}} \\ \sin x = \dfrac{\mathbf{e}^{jx} - \mathbf{e}^{-jx}}{2j} = \dfrac{\mathbf{e}^{2jx}-1}{2j\mathbf{e}^{jx}} \end{cases}$$

Cette définition peut se prolonger à la variable complexe :

$$\boxed{\begin{aligned} \cos z &= \frac{\mathbf{e}^{jz} + \mathbf{e}^{-jz}}{2} \\ \sin z &= \frac{\mathbf{e}^{jz} - \mathbf{e}^{-jz}}{2j} \end{aligned}}$$

Comme :

$$\begin{cases} \mathbf{e}^{jz} = 1 + jz - \dfrac{z^2}{2!} - j\dfrac{z^3}{3!} + \ldots \\ \mathbf{e}^{-jz} = 1 - jz - \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{jz^3}{3!} + \ldots \end{cases}$$

Nous obtenons le développement en série entière des fonctions cosinus et sinus :

$$\boxed{\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots}$$

et :

$$\boxed{\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots}$$

Le calcul des dérivées des fonctions trigonométriques peut se faire directement à partir des formules précédentes :

$$(\cos z)' = -\sin z$$

et :

$$(\sin z)' = \cos z$$

Nous pouvons maintenant tracer le graphe des fonctions cosinus et sinus (fig. XVII-1).

Les fonctions cosinus et sinus étant des combinaisons linéaires de $x \to \mathbf{e}^{jx}$ sont périodiques de période 2π.

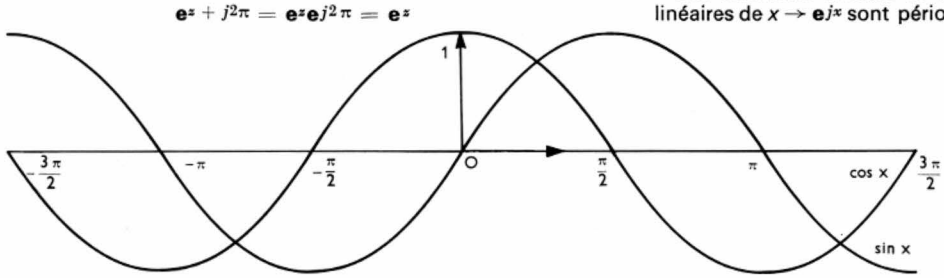


Fig. XVII-1

Graphe des variations des fonctions sinus et cosinus

Nous vérifions par ailleurs (d'après la définition de cos x et de sin x) que :

$$\cos x = \operatorname{ch} jx \qquad \sin x = -j \operatorname{sh} jx$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

3.2. Formule de Moivre et formules trigonométriques

$$e^{ja} = \cos a + j \sin a$$
$$e^{jb} = \cos b + j \sin b$$

et : $e^{j(a+b)} = \cos(a+b) + j \sin(a+b)$

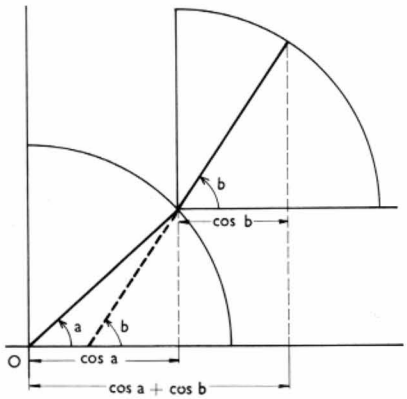


Fig. XVII-2a

Construction de cos a + cos b

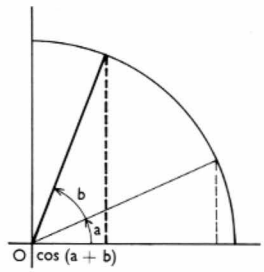


Fig. XVII-2b

Construction de cos (a + b)

De la formule fondamentale $e^{ja} \cdot e^{jb} = e^{j(a+b)}$ nous déduisons la formule de Moivre :

$$(\cos a + j \sin a)(\cos b + j \sin b) = \cos(a+b) + j \sin(a+b)$$
$$(\cos a + j \sin a)(\cos b + j \sin b)$$
$$= (\cos a \cos b - \sin a \sin b) + j(\cos a \sin b + \sin a \cos b)$$

En identifiant nous obtenons :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

et : $$\sin(a+b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b$$

De même, nous pouvons calculer cos na et sin na en utilisant le développement du binôme et la formule :

$$(\cos a + j \sin a)^n = \cos na + j \sin na$$

CHAPITRE XVIII

TOPOLOGIE DES ESPACES MÉTRIQUES

1. ESPACES MÉTRIQUES

1.1. Définition. — On appelle **distance** sur un ensemble E une application d de $E \times E$ dans l'ensemble des réels positifs vérifiant les propriétés suivantes :

— *symétrie* : $\forall (x, y) \in E \times E,\ d(x, y) = d(y, x)$

— *séparation* : $d(x, y) = 0 \iff x = y$

— *inégalité triangulaire* :

$\forall (x, y, z) \in E \times E \times E,\ d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$

On appelle **espace métrique** un ensemble E auquel on a associé une distance sur E soit d. Ainsi, étant donné un espace métrique E, tout sous-ensemble F de E peut être muni de la structure d'espace métrique en prenant comme distance la restriction de d à $F \times F$. Lorsque F est muni de cette distance, il est dit *sous-espace métrique de E*.

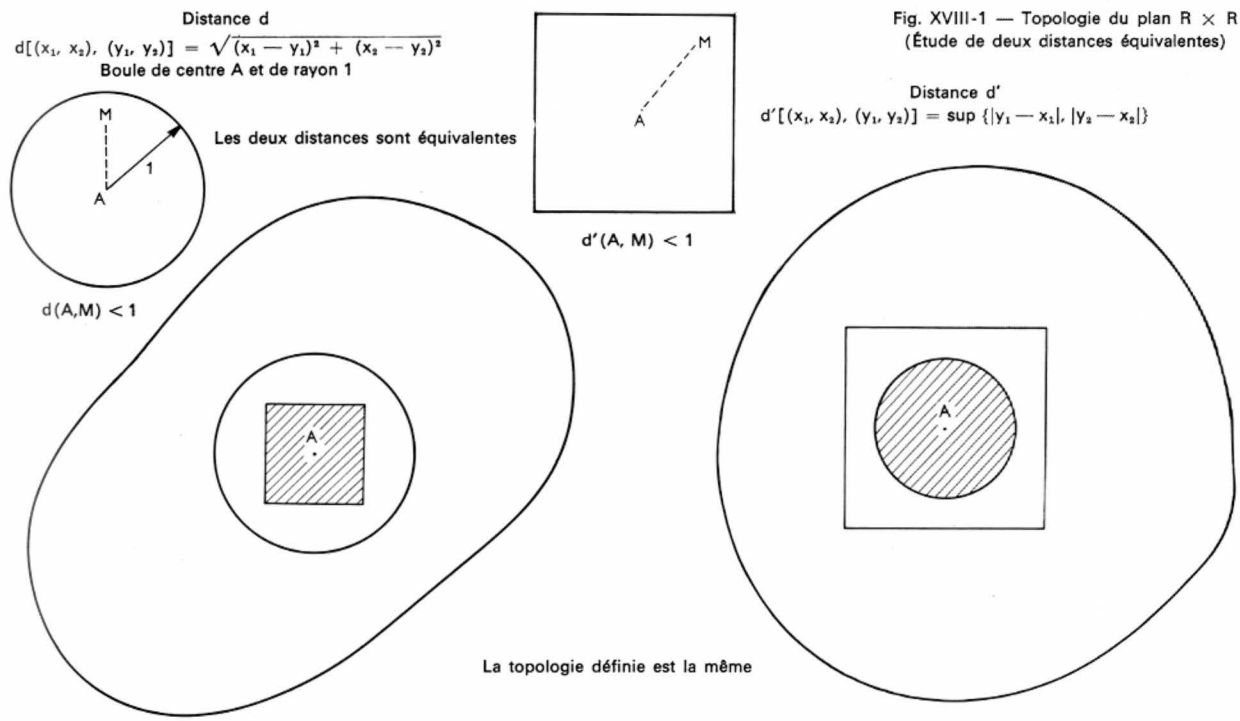
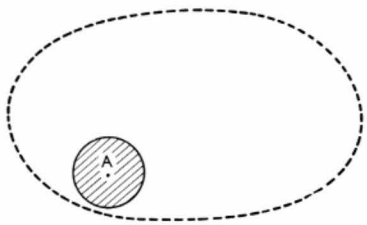


Fig. XVIII-1 — Topologie du plan R × R (Étude de deux distances équivalentes)

Fig. XVIII-2

Un ensemble ouvert est voisinage de chacun de ses points (il contient une boule ayant pour centre ce point)



1.2. Exemples. — Le corps des réels **R** muni de la distance $d(x, y) = |y - x|$ est un espace métrique (V. chap. 6). Le corps des complexes aussi.

Plus généralement, un espace vectoriel E muni d'une norme $x \to \| x \| \in \mathbf{R}^+$ est un espace métrique en prenant pour distance $d(x, y) = \| y - x \|$.

Tout ensemble peut être muni de la structure d'espace métrique en prenant pour distance de deux points x et y, $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$ et $d(x, y) = 0$ si $x = y$. Cette structure n'est pas intéressante « car elle sépare également tous les points » ; elle est appelée *structure discrète*.

2. DÉFINITION DE LA TOPOLOGIE D'UN ESPACE MÉTRIQUE

2.1. Définitions fondamentales. — Une boule ouverte de centre x et de rayon r est l'ensemble des points y d'un espace métrique E vérifiant $d(x, y) < r$. Le *voisinage de x* est un sous-ensemble de E contenant une boule ouverte de centre x. Un *ouvert de E* est un sous-ensemble de E qui est voisinage de chacun de ses points et un *fermé de E* est un sous-ensemble de E dont le complémentaire est un ouvert (fig. XVIII-2 et XVIII-3).

2.2. Propriétés fondamentales. — L'ensemble des voisinages d'un point x d'un espace métrique E vérifie les propriétés suivantes :

(1) (V_1) : tout voisinage d'un point x contient x.

(2) (V_2) : un ensemble contenant un voisinage du point x est un voisinage du point x.

(3) (V_3) : l'intersection d'un nombre fini de voisinages du point x est un voisinage du point x.

Les deux propriétés (V_1) et (V_2) sont évidentes. La troisième provient de ce que l'intersection de deux boules ouvertes de rayons r et s et de même centre x est une boule ouverte de centre x et de rayon $[\inf(r, s)]$.

L'ensemble des ouverts d'un espace métrique E vérifie les propriétés suivantes :

(O_1) : l'ensemble vide et E sont ouverts.

(O_2) : toute réunion d'ouverts est un ensemble ouvert.

(O_3) : toute intersection finie d'ouverts est un ensemble ouvert.

La définition des ensembles ouverts permet de démontrer (O_2) à partir de (V_2) et (O_3) à partir de (V_3).

L'ensemble des fermés d'un espace métrique E vérifie les trois propriétés suivantes déduites des propriétés des ouverts :

(F_1) : E et l'ensemble vide sont fermés.

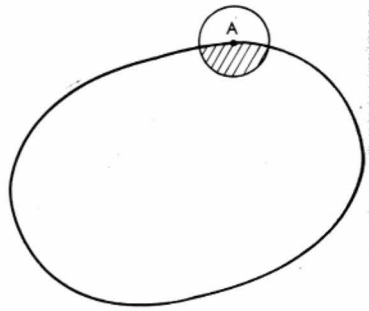
(F_2) : toute intersection de fermés est un fermé.

(F_3) : toute réunion finie de fermés est un fermé.

Nous avons défini les ouverts à partir des voisinages (un ensemble ouvert est un ensemble qui est voisinage de chacun de ses points) mais nous aurions pu faire l'inverse et dire qu'un voisinage de x est un ensemble qui contient un ouvert renfermant x. La donnée des voisinages de chacun des points d'un espace métrique est équivalente à la donnée des ensembles ouverts de cet espace. Cette donnée équivalente est appelée *topologie de l'espace*. Remarquons qu'un ensemble E peut être muni de deux distances différentes qui définissent la même topologie (et les mêmes ensembles d'ouverts). Par exemple, $\mathbf{R}^2$ peut être muni des distances :

Fig. XVIII-3

Un ensemble fermé contient sa frontière mais n'est voisinage d'aucun point de sa frontière, puisqu'une boule ayant pour centre un point de la frontière rencontre l'ensemble et son complémentaire par définition de la frontière



avec : $\begin{cases} x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \\ y = (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2 \end{cases}$

$$d_1(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2},$$
$$d_2(x, y) = \sup(|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|)$$

Ces deux distances définissent la même topologie et elles sont dites équivalentes. En fait, il est possible de définir une topologie sur un ensemble par les propriétés fondamentales indépendamment de la notion de distance.

2.3. Suites et topologie. — (V. chap. 7). En généralisant la définition des suites à valeurs réelles, nous dirons d'une suite (u_n) à valeurs dans un espace métrique E qu'elle converge vers une limite a si $\forall \varepsilon, \exists N, \forall n > N$, $d(u_n, a) < \varepsilon$, c'est-à-dire si tout voisinage de a contient tous les u_n à partir d'un certain rang. Nous écrirons alors : $\lim u_n = a$ ou $u_n \to a$. Pour les mêmes raisons que dans le cas des suites à valeurs réelles, la limite d'une suite convergente est unique et l'ensemble des valeurs de cette suite est *borné*. (Un sous-ensemble E' d'un espace métrique E est dit borné si l'ensemble des nombres réels positifs $\{d(x, y), x \in E' \text{ et } y \in E'\}$ est borné ; par définition, la borne supérieure de cet ensemble est le diamètre de E'). De même, la valeur d'adhérence a d'une suite (u_n) à valeurs dans un espace métrique E est définie par la relation suivante : $\forall \varepsilon, \exists n, d(u_n, a) < \varepsilon$. Il revient au même de dire que tout voisinage de a contient des valeurs de la suite ou qu'il existe une sous-suite extraite du u_n et convergente de limite a.

Théorème. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-ensemble F d'un espace métrique E soit fermé est que les valeurs d'adhérence d'une suite à valeurs dans F appartiennent à F.*

Condition nécessaire : Soit F un ensemble fermé, (u_n) une suite à valeurs dans F de valeur d'adhérence a. Le complémentaire de F étant ouvert, s'il contient a, c'est un voisinage de a et il contient donc des valeurs de la suite. Donc, toutes les valeurs d'adhérence d'une suite à valeurs dans F appartiennent à F.

Condition suffisante : Si $\complement_E(F)$ n'est pas ouvert, il existe un point a de $\complement_E(F)$ tel que toutes les boules ouvertes $\left(a, \frac{1}{n}\right)$ contiennent au moins un point de F soit u_n. La suite ainsi obtenue est une suite à valeurs dans F et qui converge vers un point de $\complement_E(F)$.

Nous appelons *adhérence* d'un sous-ensemble E_1 d'un espace métrique E, le plus petit sous-ensemble fermé de E contenant E_1 ; en utilisant le théorème précédent, nous montrons que l'adhérence de E_1 est constituée par les points de E_1 et par les valeurs d'adhérence des suites à valeurs dans E_1. Si l'adhérence de E_1 est égale à E, on dit que E_1 est *dense* dans E.

2.4. Suites de Cauchy. — Les suites de Cauchy se définissent par la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon \, \exists N \begin{matrix} m > N \\ n > N \end{matrix} \Rightarrow d(u_m, u_n) < \varepsilon$$

Un espace métrique dans lequel toute suite de Cauchy converge est un espace **complet.** Ainsi, **R** est un espace complet. Nous pouvons vérifier facilement que $\mathbf{R}^n$, muni, par exemple, de la distance déduite de la norme euclidienne, est un espace complet. Au contraire, **Q** muni de la distance $d(x, y) = |x - y|$ n'est pas un espace complet.

Théorème. *Tout sous-ensemble fermé F d'un espace métrique complet E est complet.*

Preuve : Soit (x_n) une suite de Cauchy à valeurs dans F. Comme E est complet, elle converge vers un point x de E et comme F est fermé, x limite d'une suite (x_n) à valeurs dans F appartient à F ; ainsi, dans F, toute suite de Cauchy converge.

3. NOTION DE COMPACITÉ

Un recouvrement d'un sous-ensemble F d'un ensemble E est une famille (F_i) de parties de E telles que $F \subset \bigcup_i F_i$.

Un sous-ensemble F d'un espace métrique E est **compact** s'il vérifie l'une des deux propriétés équivalentes suivantes :

— De tout recouvrement de F par des ouverts, il est possible d'extraire un recouvrement fini.

— Toute suite à valeurs dans F possède au moins une valeur d'adhérence dans F.

Nous ne démontrons pas l'équivalence de ces deux propriétés. Il existe une caractérisation simple des compacts de $\mathbf{R}^n$: *les compacts de* $\mathbf{R}^n$ *sont les ensembles fermés bornés.* Cette propriété se déduit du théorème de Bolzano-Weierstrass qui se démontre dans $\mathbf{R}^n$ comme il se démontre dans $\mathbf{R}$ (V. chap. 6).

En utilisant la propriété des suites de Cauchy qui possèdent une valeur d'adhérence (elles convergent vers cette valeur d'adhérence), nous montrons que *tout ensemble compact est complet.* La notion de compacité est fondamentale car elle permet d'exprimer très simplement les propriétés des fonctions continues utilisées au chapitre 8.

4. FONCTIONS CONTINUES

4.1. Définition. — Nous disons qu'une fonction f d'un espace métrique (E, d) dans un espace métrique (E', d') est **continue** en x si :

$$\forall \varepsilon\ \exists \eta_x \quad d(x, y) < \eta_x \Rightarrow d'[f(x), f(y)] < \varepsilon$$

c'est-à-dire si l'image réciproque d'un voisinage de $f(x)$ est un voisinage de x dans E (fig. XVIII-4).

Une fonction f de (E, d) dans (E', d') est continue en tout point de E si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de E' est un ouvert de E (car un ouvert est voisinage de chacun de ses points).

Une fonction f d'un espace métrique (E, d) dans un espace métrique (E', d') est uniformément continue si nous avons :

$$\forall \varepsilon\ \exists \eta / d(x, y) < \eta \Rightarrow d'[f(x), f(y)] < \varepsilon$$

Remarquons qu'une fonction continue en tout point d'un espace métrique n'est pas pour autant uniformément continue. Par exemple, la fonction $x \to \mathbf{e}^x$ du corps des réels dans lui-même est continue sans être uniformément continue ; cela provient de ce que la dérivée de la fonction exponentielle n'est pas majorée quand $x \to +\infty$.

4.2. Propriétés d'une fonction continue sur un compact. — Théorème fondamental : *Une fonction continue en tout point d'un espace métrique compact E dans un espace métrique F possède les propriétés suivantes :*

(1) $f(E)$ est compact.

(2) *f est uniformément continue.*

Preuve :

(1) $f(E)$ est compact.

Soit (O_α) un recouvrement de $f(E)$ par des ouverts. Les ouverts $f^{-1}(O_\alpha)$ forment alors un recouvrement de E d'où nous pouvons extraire un recouvrement fini $f^{-1}(O_{\alpha_i})$ car E est compact. Nous déduisons que :

$$(O_{\alpha_i}) = f[f^{-1}(O_{\alpha_i})]$$

forment un recouvrement fini de $f(E)$.

(2) f est continue en tout point de E :

$$\forall \varepsilon\ \exists \eta_x\ d(x, y) < \eta_x \Rightarrow d[f(x), f(y)] < \frac{\varepsilon}{2}$$

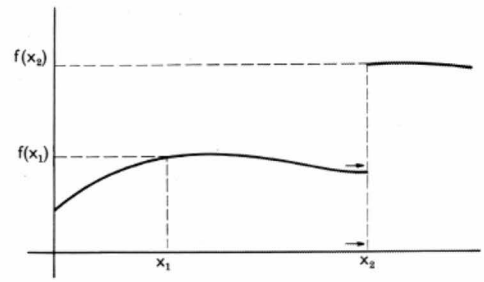


Fig. XVIII-4 — Graphe d'une fonction continue : f est continue en x_1 et n'est pas continue en x_2 ; en effet : $(y_n \to x_1) \Rightarrow (f(y_n) \to f(x_1)$ mais cette propriété n'est pas vraie pour x_2

Les boules ouvertes $\left(x, \frac{\eta_x}{2}\right)$ forment un recouvrement ouvert de E d'où nous extrayons le recouvrement fini $\left(x_i, \frac{\eta_i}{2}\right)$. Si x et y sont tels que $d(x, y) < \inf\left(\frac{\eta_i}{2}\right)$, comme il existe i tel que $x \in$ boule ouverte $\left(x_i, \frac{\eta_i}{2}\right)$, alors :

$$\left.\begin{array}{l} d(x, x_i) < \frac{\eta_i}{2} \Rightarrow d[f(x), f(x_i)] < \frac{\varepsilon}{2} \\ d(y, x_i) < d(y, x) + d(x, x_i) < \\ \frac{\eta_i}{2} + \frac{\eta_i}{2} = \eta \Rightarrow d[f(y), f(x_i)] < \frac{\varepsilon}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow d[f(x), f(y)] < \varepsilon$$

Dans le cas d'une fonction réelle de variable réelle, le théorème fondamental indique qu'une application continue en tout point d'un intervalle fermé borné est uniformément continue sur cet intervalle et que l'ensemble des valeurs de la fonction est un ensemble fermé borné (autrement dit « f est bornée et atteint ses bornes »).

4.3. Composition de deux fonctions continues. — Soit f une fonction de (E, d) dans (E', d') et g une fonction de (E', d') dans (E'', d''). Si f est continue en x et g continue en $f(x)$, $g \circ f$ est continue en x.

$$\begin{array}{lll} \forall \varepsilon\ \exists \eta_1 \times & d'[y', f(x)] & \leqslant \eta_1 \Rightarrow d''\{[g(y')], g[f(x)]\} < \varepsilon \\ \exists \eta_2 \times & d(y, x) & \leqslant \eta_2 \Rightarrow d[f(y), f(x)] < \eta_1 \\ \text{Donc :} & d(y, x) & \leqslant \eta_2 \Rightarrow d''[g \circ f(y), g \circ f(x)] < \varepsilon \end{array}$$

Nous démontrons de même que, si f et g sont uniformément continues, $g \circ f$ est uniformément continue.

4.4. Principe de prolongement des égalités. — Si f et g sont deux fonctions continues égales sur un sous-ensemble dense F de E, elles sont égales sur E tout entier :

$$\forall x \in E,\ \exists x_n \in F \text{ et } x_n \to x$$

$$\text{Donc :} \quad \begin{cases} f(x_n) \to f(x) \\ g(x_n) \to g(x) \end{cases}$$

$$\text{Or :} \quad f(x_n) = g(x_n)$$

et donc : $f(x) = g(x)$ (unicité de la limite d'une suite).

De même, si $\forall x \in F$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors cette inégalité est vraie sur E tout entier.

5. ESPACES CONNEXES

Nous disons qu'un espace topologique E est connexe quand les seuls ensembles ouverts et fermés sont E et $\varnothing$. Une définition équivalente est qu'il n'existe pas deux ensembles ouverts disjoints non vides (resp. deux ensembles fermés disjoints non vides) dont la réunion soit égale à E. Intuitivement, cela correspond au fait que l'espace est d'un seul tenant. La réunion de deux disques ouverts disjoints est un espace non connexe.

Nous démontrons que les seuls sous-espaces connexes de $\mathbf{R}$ sont les intervalles ouverts ou non, bornés ou non. Par ailleurs l'image par une application continue d'un espace connexe E est connexe : si O_1 et O_2 sont deux

ouverts disjoints dont la réunion est égale à $f(E)$, $f^{-1}(O_1)$ et $f^{-1}(O_2)$ sont deux ouverts disjoints dont la réunion est égale à E. Par conséquent, l'image d'un intervalle par une application continue de **R** dans **R** est un intervalle. Nous retrouvons ainsi la propriété de la « valeur intermédiaire » énoncée au chapitre 8.

6. ESPACES VECTORIELS NORMÉS

Dans la suite, nous ne ferons de l'analyse que sur les espaces vectoriels (analyse « linéaire »). Nous munirons ces espaces vectoriels d'une norme $\|.\|$ à laquelle nous associerons la distance $d(x, y) = \|x - y\|$.

Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet. Nous pouvons maintenant généraliser les théorèmes des chapitres 7 et 8 relatifs à la somme des suites et des fonctions: la somme de deux suites convergentes à valeurs dans un espace métrique est une suite convergente dont la limite est la somme des limites de chacune des suites. La somme de deux fonctions d'un espace vectoriel normé E dans un espace vectoriel normé F continues en un point de E est une fonction continue en ce point.

CHAPITRE XIX

CALCUL DIFFÉRENTIEL SUR $\mathbf{R}^n$

Nous allons utiliser les notions de topologie du chapitre précédent pour étudier les approximations linéaires des applications d'un espace vectoriel normé dans un espace vectoriel normé. Nous étendrons ainsi la notion de dérivée en définissant la différentielle, la dérivée selon une direction. Dans le cas où les espaces considérés sont de dimension finie, nous définirons les dérivées partielles. Toutes ces notions sont essentielles en physique où, le plus souvent, le phénomène étudié dépend de plusieurs paramètres numériques (théorie des champs, thermodynamique, etc.).

1. APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES

1.1. Lemme fondamental. — Si une application linéaire L d'un espace vectoriel normé E dans un espace vectoriel normé F est continue en O, elle est continue en tout point de E et il existe un nombre réel positif M tel que

$$\|L(x)\| \leqslant M\|x\|$$

La première partie de la proposition provient de l'égalité

$$L(x+h) - L(x) = L(h) = L(h) - L(0)$$

Si L est continue en O:

$$\forall \varepsilon\ \exists \eta\ \|h\| < \eta \Rightarrow \|L(h)\| < \varepsilon$$

Donc, quel que soit h: $\left\| L\left(\eta \frac{h}{\|h\|}\right)\right\| < \varepsilon$

Soit: $\|L(h)\| < \frac{\varepsilon}{\eta}\|h\|$ par linéarité de L

Nous pouvons d'ailleurs vérifier que l'application qui, à une application linéaire continue de E dans F, associe le plus petit des nombres positifs M vérifiant l'inégalité ci-dessus est une norme: l'espace vectoriel des applications linéaires continues d'un espace vectoriel normé E dans l'espace vectoriel normé F est un espace vectoriel normé.

Exemple : $E = \mathbf{R}^n$, $F = \mathbf{R}$,

$$L(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$$

$$|L(x_1, \ldots, x_n)| \leqslant \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}\cdot\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

(inégalité de Schwarz).

La norme de L est égale à la norme euclidienne du vecteur $(a_1, \ldots, a_n)$.

1.2. Définition. — Une application continue f d'un espace vectoriel normé E dans un espace vectoriel normé F est différentiable au point x s'il existe une application linéaire continue de E dans F, que nous noterons Df_x, qui « approche » f au point x, c'est-à-dire telle que:

$$f(x+h) = f(x) + Df_x(h) + \|h\|\,T_x(h)$$

$T_x(h)$ étant une application de E dans F tendant vers 0 avec h.

Df_x est dite la *différentielle de f au point x*. Nous montrons d'ailleurs qu'elle est unique car la différence de deux applications linéaires approchant f au point x est une application linéaire qui est en norme infiniment petite relativement à h: c'est donc l'application linéaire nulle.

La notation Df_x provient de ce que l'on interprétait $Df_x(h)$ comme l'accroissement « infinitésimal » $[f(x+h) - f(x)]$ quand h était un « infiniment petit ».

Une application linéaire L de E dans F est différentiable en tout point et égale à sa différentielle car:

$$L(x+h) = L(x) + L(h)$$

Dans le cas où $E = \mathbf{R}^n$ et $F = \mathbf{R}^p$, Df_x peut se représenter dans la base canonique par une matrice à p lignes et n colonnes qui est appelée la *matrice jacobienne* de f au point x. Nous calculerons explicitement cette matrice dans quelques cas (V. § 2).

1.3. Propriétés de la différentielle. — Si f et g sont des applications différentiables de E dans F au point x et si k est un réel quelconque, $(f+g)$ et kf sont différentiables au point x et leurs différentielles sont données par les formules suivantes:

$$\boxed{\begin{array}{c} D(f+g)_x = Df_x + Dg_x \\ D(kf)_x = k.Df_x \end{array}}$$

En effet:

$$f(x+h) = f(x) + Df_x(h) + \|h\|\,T_x(h)$$
$$g(x+h) = g(x) + Dg_x(h) + \|h\|\,S_x(h)$$

impliquent:

$$\widehat{f+g}\,(x+h) = \widehat{f+g}(x) + \overbrace{Df_x + Dg_x}\,(h) + \|h\|\,[T_x(h) + S_x(h)]$$
$$kf(x+h) = kf(x) + kDf_x(h) + \|h\|\,kT_x(h)$$

Nous en concluons que l'ensemble des applications différentiables de E dans F est un espace vectoriel et que la différentielle est une application linéaire de l'ensemble des applications différentiables en un point x dans l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F.

Si f est une application différentiable en x de E dans F et g une application différentiable en $f(x)$ de F dans G, $g \circ f$ est une application de E dans G différentiable en x:

$$f(x+h) = f(x) + Df_x(h) + \|h\|\,T(h)$$

et: $g[f(x)+k] = g[f(x)] + Dg_{f(x)}(k) + \|k\|\,S(k)$;

$$g\circ f\,(x+h) = g[f(x)] + Dg_{f(x)}[Df_x(h) + \|h\|\,T(h)] + \|(Df_x(h) + \|h\|\,T(h))\|\,S[f(x+h) - f(x)]$$

Comme Df_x et $Dg_{f(x)}$ sont continues:

$$\|Df_x(h)\| \leqslant M\|h\|$$
$$\|Dg_{f(x)}(k)\| \leqslant N\|k\|$$

donc:

$$\|g\circ f\,(x+h) - g\circ f(x) - Dg_{f(x)} \circ Df_x(h)\| \leqslant \|h\|\,[N\|T(h)\| + (M + \|T(h)\|)\,\|S(f(x+h) - f(x)\|]$$

La quantité entre crochets tendant vers 0 avec $\|h\|$, nous avons donc montré que:

$$\boxed{D(g\circ f)_x = Dg_{f(x)} \circ Df_x}$$

2. EXPRESSION DE LA DIFFÉRENTIELLE AVEC DES DÉRIVÉES PARTIELLES

2.1. Dérivée dans une direction. — Étant donné une application f de E dans F, nous disons qu'elle est *dérivable au point x dans la direction (de vecteur directeur) u* si l'application de $\mathbf{R}$ dans F: $t \to f(x + tu)$ est différentiable au point 0.

À la différentielle de cette application est associée un vecteur de F qui est appelé la *dérivée de f au point x dans la direction u*. Ce vecteur est défini par la formule:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x + tu) - f(x)}{t}$$

Théorème: Si l'application f de E dans F est différentiable au point x, elle est dérivable en ce point dans toutes les directions; la dérivée dans la direction u est égale à $Df_x(u)$. Les physiciens la notent souvent $\frac{\partial f}{\partial u}(x)$.

Preuve: Considérons l'application h de $\mathbf{R}$ dans E: $t \to x + tu$. Elle est différentiable au point O et sa différentielle est $Dh0(t) = tu$. L'application g de $\mathbf{R}$ dans F: $t \to f(x + tu)$ est égale à la composée de f par h. D'après le théorème démontré au paragraphe précédent, elle est donc différentiable au point O et:

$$Dg0(t) = Df_x \circ Dh0(t) = Df_x(tu) = tDf_x(u)$$

La dérivée dans une direction a une interprétation physique dans le cas où $E = \mathbf{R}^3$ (espace usuel): elle indique de combien varie la quantité $f(x)$ (température, champ électrique) quand nous nous déplaçons dans la direction définie par u.

2.2. Dérivées partielles. — Dans la suite du chapitre, nous admettrons que E est un espace vectoriel réel de dimension n engendré par la base $(e_1, \ldots, e_n)$, par exemple, R^n muni de sa base canonique. Au lieu de considérer la fonction f comme une fonction d'une variable « vectorielle » x prenant ses valeurs dans E, nous la considérons comme une fonction de n variables réelles $(x_1, \ldots, x_n)$ en identifiant $(x_1, \ldots, x_n)$ et: $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$, $x + te_i = (x_1, \ldots, x_i + t, \ldots, x_n)$.

La dérivée de f au point x dans la direction e_i est donc égale à:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + t, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{t}$$

C'est donc la dérivée au point x_i de la fonction à variables réelles $t \to f(x_1, \ldots, t, \ldots, x_n)$ obtenue en « ne faisant varier que la i-ième variable »; elle est appelée *i-ième dérivée partielle* de f et elle est notée $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

De $h = h_1e_1 + \ldots + h_ne_n$, nous déduisons:

$$Df_x(h) = h_1Df_x(e_1) + \ldots + h_n\,Df_x(e_n)$$

Soit: $Df_x(h_1, \ldots, h_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} h_n$

2.3. Gradient d'une fonction réelle de plusieurs variables réelles. — Dans le cas où $F = \mathbf{R}$, les dérivées partielles sont des nombres réels et nous pouvons écrire:

$$df(h_1, \ldots, h_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} h_n$$

Or, l'application $(h_1, \ldots, h_n) \to h_i$ n'est autre que la différentielle de l'application qui à $(x_1, \ldots, x_n)$ associe sa i-ième coordonnée x_i (cette application est une projection, elle est linéaire donc égale à sa différentielle).

Nous la noterons dx_i et nous écrirons:

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n}$$

Les membres de cette égalité sont des applications linéaires de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$ (formes linéaires du dual de $\mathbf{R}^n$).

Nous pouvons donc associer à la différentielle de f au point x un vecteur de $\mathbf{R}^n$ de composantes $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$; ce vecteur est appelé le **gradient de f au point x.** *Remarquons qu'il dépend non seulement de f et de x mais aussi de la base choisie dans E, $(e_1, \ldots, e_n)$.*

Il est intéressant d'étudier comment varie le gradient de f quand nous opérons un changement de base: Nous avons vu (chap. 11) que la formule de changements de coordonnées est $(x)_B = A.(x)_{B'}$, si $(x)_B$ désigne la matrice colonne des coordonnées du vecteur x dans la base B $(e_1, \ldots, e_n)$ et si les coefficients a_{ij} de la matrice A sont donnés par: $e'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, e_i$

Nous déduisons:

$$Df_x(e'_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, Df_x(e_i)$$

Les nombres réels $Df_x(e_j)$ ne sont autres que les composantes du gradient de f dans la base B et la formule de changement de base est donc:

$$(\overrightarrow{\text{grad}}\, f)_{B'} = A.(\overrightarrow{\text{grad}}\, f)_B$$

C'est l'inverse de la formule par laquelle se transforme les coordonnées d'un vecteur de E. Le gradient est dit champ de vecteurs « covariant »; en fait, c'est un champ de formes linéaires (applications linéaires de E dans $\mathbf{R}$), ce qui explique comment il se transforme quand nous effectuons un changement de base dans E.

Une fonction peut admettre des dérivées en un point selon toutes les directions sans être nécessairement différentiable ni même continue. À titre d'exemple, citons la fonction $f(0, 0) = 0$ et pour $(x, y) \neq 0$,

$$f(x, y) = \frac{x^5}{(y - x^2)^2 + x^8}$$

En revanche, le théorème réciproque suivant est vrai:

Théorème. Si une fonction f admet des dérivées partielles en tout point d'un ouvert et que ses dérivées partielles sont des fonctions continues sur cet ouvert, elle est différentiable en tout point de l'ouvert. Nous disons qu'elle est continûment différentiable.

2.4. Matrice jacobienne et applications. — Reprenons le cas plus général où F est un espace vectoriel réel de dimension p. Si nous choisissons une base de F, l'application f de E dans F est caractérisée par p applications de E dans $\mathbf{R}$ qui à $x \in E$, associent $[f_1(x), \ldots, f_p(x)]$ coordonnées de $f(x) \in F$ dans la base choisie. Il est clair que si f est différentiable au point x, il en est de même pour les applications coordonnées et que les coordonnées de $Df(h)$ en un point x de E sont $[Df_1(h), \ldots, Df_p(h)]$.

Si nous désignons par $[h]$ la matrice-colonne des coordonnées de h dans une base de E et par $\overrightarrow{\text{grad}}\, f_i$ le gradient de f_i au point x dans cette base, nous avons:

$$Df_i(h) = [\overrightarrow{\text{grad}}\, f_i].[h]$$

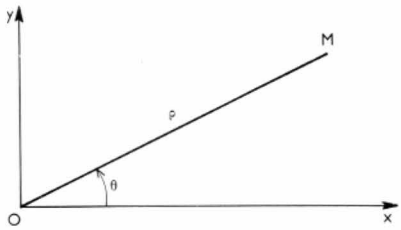
Les coordonnées de $Df(h)$ F dans la base sont donc:

$$\begin{bmatrix} Df_1(h) \\ \ldots\ldots \\ Df_p(h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\overrightarrow{\text{grad}}\, f_1].[h] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ [\overrightarrow{\text{grad}}\, f_p].[h] \end{bmatrix} = [Df]\,[h]$$

si $[Df]$ est une matrice (p, n) dont les lignes sont les expressions des gradients au point x des applications-coordonnées f_i.

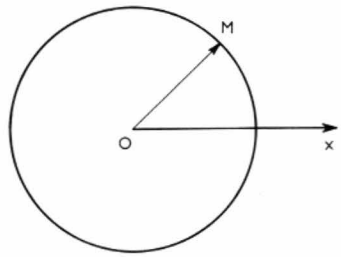
Le terme (j, i) de cette matrice est $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$. Cette matrice est appelée la *matrice jacobienne* de f au point x. C'est la matrice qui représente l'application linéaire tangente à f au point x, Df_x de E dans F.

En physique, les applications de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$ ($n = p = 3$ ou 4) interviennent constamment en théorie des champs (champ des vitesses en cinématique du solide, champ électrostatique, champ de forces, etc.). Les applications f étudiées s'expriment souvent plus facilement si nous faisons un changement de coordonnées. Par exemple, en un point M le champ d'attraction gravitationnelle d'une masse ou le champ électrostatique d'une charge placée en un point O font intervenir la grandeur $OM = \|\overrightarrow{OM}\|$.

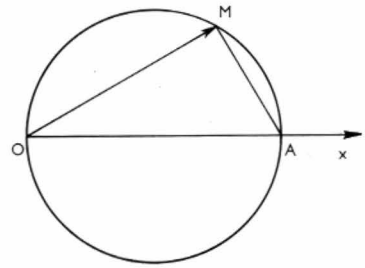


Coordonnées polaires (plan)

$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$



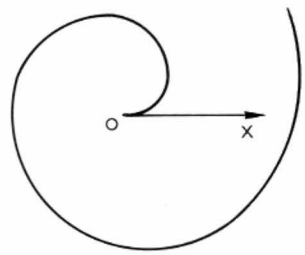
$\rho = k$
Cercle de centre O



$\rho = 2R \cos \theta$
Cercle de diamètre OA = 2R

Fig. XIX-1

Exemples de courbes en polaires



$\rho = k\theta$
Spirale

Or, cette grandeur s'exprime par une formule relativement compliquée en fonction des coordonnées de M: $OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Supposons que M soit variable dans un plan affine muni d'un repère orthonormé d'origine O et de vecteurs (e_1, e_2). M est défini par le module et l'argument de $\overrightarrow{OM}$, c'est-à-dire par $OM = r$ et par l'angle $(\overrightarrow{OM}, e_1)$ de mesure θ (nous choisissons θ compris entre 0 et 2π radians).

Il vient : $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$

Ces formules établissent une bijection entre le plan $\mathbf{R}^2$ et le produit cartésien $\mathbf{R}^+ \times (0, 2\pi)$. Cette application est différentiable :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin \theta \\ \dfrac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta \end{cases}$$

La matrice jacobienne de l'application $(r, \theta) \to (x, y)$ est donc : $\begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix}$

Nous faisons ainsi un changement de coordonnées dites *curvilignes* (pour les distinguer des simples changements de bases où les formules sont linéaires). Le nouveau système de coordonnées s'appelle *coordonnées polaires* (fig. XIX-1).

Nous allons exprimer le gradient d'une fonction réelle dans le système de coordonnées polaires. Si la fonction est définie par $(x, y) \to f(x, y)$, dans le système de coordonnées polaires, elle est définie par $(r, \theta) \to f(r \cos \theta, r \sin \theta) = g(r, \theta)$. D'après le théorème de composition des différentielles, si f est différentiable au point $(r \cos \theta, r \sin \theta)$, g est différentiable au point (r, θ) et :

$$Dg_{(r, \theta)} = Df_{(r \cos \theta,\, r \sin \theta)} \circ J$$

où J est la différentielle du changement de variable curviligne explicitée ci-dessus. Nous déduisons les formules suivantes :

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin \theta$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}(-r \sin \theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta)$$

Ce résultat pouvait être trouvé en utilisant le formalisme différentiel : $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,dy$

Or : $\begin{cases} dx = \cos \theta\, dr - r \sin \theta\, d\theta \\ dy = \sin \theta\, dr + r \cos \theta\, d\theta \end{cases}$

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin \theta\right) dr + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(-r \sin \theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta)\right) d\theta$$

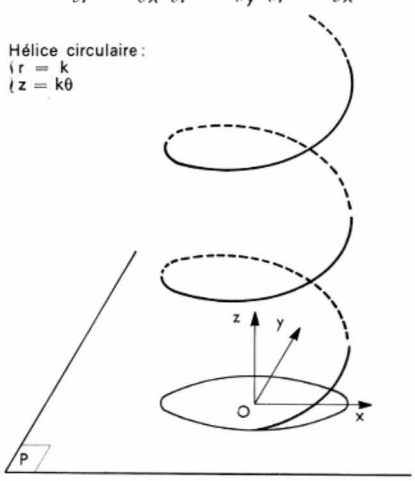
(V. fig. XIX-2 pour d'autres systèmes de coordonnées).

3. DIFFÉRENTIELLE SECONDE ET DÉRIVÉES D'ORDRE SUPÉRIEUR

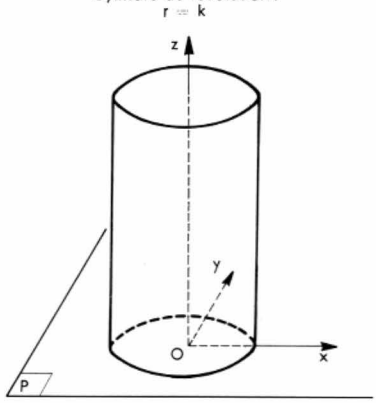
Considérons une fonction f d'un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$ différentiable en tout point de cet ouvert. L'application qui au point x de Ω associe Df_x peut être considérée comme une application de Ω dans $\mathbf{R}^n$ qui à x associe le gradient de f au point x. Cette nouvelle application peut être différentiable ; dans ce cas, sa différentielle en un point de Ω est une application linéaire de $\mathbf{R}^r$ dans $\mathbf{R}^n$ qui peut se représenter par une matrice dont le terme de la j-ième ligne et de la i-ième colonne est $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)$ qui est noté $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}$ pour $j \neq i$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ pour $j = i$.

Fig. XIX-2 — Coordonnées cylindriques (espace)

Hélice circulaire :
$\begin{cases} r = k \\ z = k\theta \end{cases}$

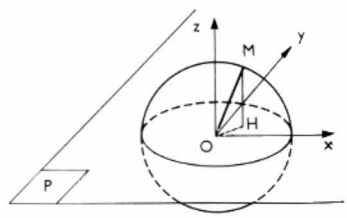


Cylindre de révolution :
$r = k$



Vecteur tangent	
$x = r \cos \theta$	$dx = dr \cos \theta - r \sin \theta\, d\theta$
$y = r \sin \theta$	$dy = dr \sin \theta + r \cos \theta\, d\theta$
$z = z$	$dz = dz$

Sphère : $z = \sqrt{R^2 - r^2}$
(R est le rayon de la sphère ;
$OH = r$, $\overline{HM} = z$)



Théorème : *Si f et Df sont différentiables de différentielle continue, f est dit deux fois continûment différentiable et alors nous avons :*

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}} \quad \text{(Théorème de Schwarz)}$$

Par itération, ce théorème permet de déduire (avec des hypothèses convenables) que le résultat de la dérivation partielle d'une fonction ne dépend que du nombre de fois que nous dérivons par rapport à chaque coordonnée et non de l'ordre dans lequel ces dérivations sont effectuées. Des dérivées d'ordre supérieur pourraient être définies ; nous retrouverions la généralisation de résultats obtenus pour les dérivées successives des fonctions d'une variable (formules de Taylor) mais cela ferait intervenir des considérations de calcul tensoriel dépassant largement le cadre de cet exposé.

4. OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS

4.1. Définition des opérateurs différentiels usuels

Considérons l'espace vectoriel $C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ des fonctions de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$ continûment différentiables à n'importe quel ordre (nous étendons facilement ces résultats aux fonctions de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$). L'application de cet espace vectoriel dans celui des champs de vecteurs de $\mathbf{R}^n$ continûment différentiables qui à f associe grad f est une application linéaire (car toutes les opérations de dérivation sont linéaires). Cet opérateur est appelé *opérateur différentiel.*

D'une façon générale, un opérateur différentiel est une application linéaire de $C^\infty(\mathbf{R}^n,\mathbf{R})$ dans $C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ ou $C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ dont l'expression ne fasse intervenir que la multiplication par des fonctions et des opérateurs de dérivation partielle. Le gradient est un exemple d'opérateur différentiel. Voici d'autres opérateurs différentiels utilisés en théorie des champs :

— **Le laplacien :**

$$f \in C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}) \to \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n} \in C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$$

— **La divergence :**

$$f : (f_1, \ldots, f_n) \in C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n) \to$$
$$\operatorname{div} f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \in C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$$

— **Le rotationnel :**

$$\vec{A} = (f_1, f_2, f_3) \in C^\infty(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3) \to$$
$$\overset{\smile}{\operatorname{rot}}\,\vec{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \in C^\infty(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$$

4.2. Formules différentielles de l'analyse vectorielle.

— Le lecteur pourra vérifier directement par un calcul (en utilisant le théorème de Schwarz) les relations suivantes :

$$\Delta f = \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad} f})$$
$$\overset{\smile}{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{grad} f}) = 0$$
$$\operatorname{div}(\overset{\smile}{\operatorname{rot}}\,\vec{A}) = 0$$

5. APPLICATION GÉOMÉTRIQUE À L'ÉTUDE DES COURBES ET DES SURFACES

5.1. Courbes orientées. — Nous avons déjà exprimé comment « tracer » les graphes représentatifs des variations d'une fonction réelle de variable réelle (V. chap. 8). Les courbes que nous pouvons obtenir ainsi sont celles dont l'intersection avec les droites d'équation $x = a$ se réduit à un point et un seul de coordonnées (a, b). Nous définissons la fonction f par $b = f(a)$ et la courbe donnée représente le graphe « cartésien » des variations de f.

De nombreuses courbes ne vérifient pas cette propriété et notamment un cercle de centre O et de rayon r. Pour qu'un point M appartienne à ce cercle, il est nécessaire et suffisant que la longueur du segment OM soit égale à r. Exprimons que le carré de la longueur de OM est égal à r^2 :

$$OM^2 = x^2 + y^2 = r^2 \iff y^2 = r^2 - x^2$$
$$\iff \begin{cases} \text{ou :} & y = (r^2 - x^2)^{1/2} \\ & y = -(r^2 - x^2)^{1/2} \end{cases}$$
$$\text{pour} - r \leqslant x \leqslant r$$

Ainsi, nous pouvons décomposer le cercle en deux demi-cercles tels que chacun représente le graphe des variations d'une fonction réelle dont la variable décrit un intervalle réel.

Considérons maintenant la fonction suivante de l'intervalle $[0, 2\pi]$ dans $\mathbf{R}^2$: $t \to (r\cos t, r\sin t)$. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point de $\mathbf{R}^2$ appartienne à l'image d'un élément de l'intervalle par cette fonction est que ses coordonnées (x, y) vérifient $x^2 + y^2 = r^2$, c'est-à-dire qu'il appartienne au cercle envisagé.

Définition. *Un arc de courbe dans* $\mathbf{R}^2$ *(ou dans* $\mathbf{R}^3$*) est l'image d'un intervalle de* $\mathbf{R}$ *par une application continue à valeurs dans* $\mathbf{R}^2$ *(ou dans* $\mathbf{R}^3$*).* Les images des extrémités de l'intervalle s'appellent les *extrémités* de l'arc de courbe ; dans le cas du cercle, les extrémités sont confondues : il s'agit d'une courbe *fermée*. En tout état de cause, un *chemin* ou *paramétrage* est une application continue et l'intervalle réel est souvent appelé ensemble des paramètres. La même courbe peut admettre des paramétrages différents ; ainsi, les paramétrages :

$$t \in [0, 2\pi] \to (\cos t, \sin t)$$
$$t \in [0, \pi] \to (\cos 2t, \sin 2t)$$
$$t \in [0, +\infty[\,\cup\,]-\infty, 0] \to \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$$

sont tous des paramétrages de la même courbe : le cercle de centre O et de rayon 1.

Comparons maintenant les paramétrages suivants du cercle : $t \in [0, 2\pi] \to (\cos t, \sin t)$
et $t \in [0, 2\pi] \to (\cos -t, \sin -t)$

Si nous imaginons un point mobile dont ce paramétrage indique la position à l'instant t, nous pouvons constater que les deux mobiles correspondant aux deux paramétrages ne décriront pas le cercle dans le même sens. Nous dirons que ces deux paramétrages ne définissent pas la même orientation sur la courbe.

Plus généralement, étant donné un arc de courbe et deux paramétrages injectifs de cet arc $s \in I \to f(s)$ et $t \in J \to g(t)$, nous dirons que ces deux paramétrages définissent la même *orientation* si l'application de I dans J : $s \to t = g^{-1}[f(s)]$ est croissante. L'application de changement de paramètre sera notée : $\varphi = g^{-1} \circ f$.

5.2. Vecteur tangent à une courbe. — Définition : *Une tangente à une courbe en un point* M_0 *de la courbe est la limite, quand elle existe, de la droite* M_0M *quand* M *est un point de la courbe qui tend vers* M_0. Cette définition est incorrecte dans la mesure où nous n'avons pas défini ce que signifie l'expression « la droite M_0M tend vers une limite ». Considérons donc une courbe définie par un paramétrage $t \in I \to M(t)$ et un point particulier de cette courbe : $M_0 = M(t_0)$. Si le paramétrage est différentiable en t_0. Soit O un point origine de l'espace affine :

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\overrightarrow{M_0M}}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{\overrightarrow{OM(t)} - \overrightarrow{OM(t_0)}}{t - t_0} = \frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t_0)$$

La droite passant par M_0 et de vecteur directeur $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t_0)$ est la tangente en M_0 à la courbe.

La définition de la tangente en M_0 à la courbe est indépendante du paramétrage. Considérons deux paramétrages injectifs et différentiables de la même courbe, tels que le changement de paramètre soit différentiable :

$$s \in I \to f(s) \text{ et } t \in J \to g(t) \text{ avec : } f(s_0) = g(t_0)$$

Il vient : $g \circ \varphi = g \circ g^{-1} \circ f = f$

Donc : $\dfrac{df}{ds}(s_0) = \dfrac{dg}{dt}(t_0) \cdot \dfrac{d\varphi}{ds}(s_0)$

Les vecteurs $\frac{df}{ds}(s_0)$ et $\frac{dg}{dt}(t_0)$ sont *colinéaires* et définissent la même droite ; de plus, si les deux paramétrages f et g définissent la même orientation, φ est *croissante*, $\frac{d\varphi}{ds}$ est *positive* et les vecteurs $\frac{df}{ds}$ et $\frac{dg}{dt}$ ont *même sens*.

Dans le cas de la mécanique où t est un temps, la fonction $\frac{dg}{dt}$ représente la vitesse du point mobile dont la position à l'instant t est $g(t)$, le module du vecteur vitesse est égal à la vitesse du point mobile à chaque instant.

De même que nous avons défini la tangente comme la droite la plus proche de la courbe en un point donné, nous définirons le *cercle osculateur* comme le cercle le plus proche de la courbe en un point donné. Le rayon du cercle osculateur à la courbe en un de ses points est le *rayon de courbure* de la courbe en ce point.

5.3. Coordonnées curvilignes. — Nous avons vu qu'un point de $\mathbf{R}^2$ ou de $\mathbf{R}^3$ pouvait être repéré par ses coordonnées dans la base canonique ou dans un système de coordonnées curvilignes. Par exemple dans $\mathbf{R}^2$, un point de coordonnées (x, y) peut être repéré par un système de coordonnées polaires : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

À toute fonction $r = f(\theta)$ de l'intervalle $[0, 2\pi]$ dans $\mathbf{R}$, nous pouvons associer la courbe dont un système d'équation en coordonnées polaires est :

$$\begin{cases} x = f(\theta)\cos\theta \\ y = f(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

$r = f(\theta)$ est appelée équation de la courbe en coordonnées polaires.

Certaines courbes ont une équation très simple en coordonnées polaires et il peut être pratique de les étudier sous cette forme (V. fig. XIX-1).

5.4. Surfaces, définition du plan tangent et orientation. — Certaines surfaces peuvent être données par leur équation cartésienne : $z = f(x, y)$. Si la ligne de rappel perpendiculaire au plan « horizontal » $z = 0$ et passant par le point (x, y) rencontre l'ensemble de points constituant une surface en un point et un seul de cote z, nous définissons la fonction f par : $z = f(x, y)$. Par exemple, l'équation $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$ détermine la nappe supérieure d'un cône de révolution. Mais, de même que nous avons défini la notion générale de courbe par un paramétrage quelconque, nous définirons une surface comme l'image, par une application continue à valeurs dans $\mathbf{R}^3$, d'un sous-ensemble « régulier » de $\mathbf{R}^2$.

— *Équation du cône de révolution :*

$$x = (r, \theta) \to (x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = kr)$$

— *Équation du cylindre de révolution :*

$$(\theta, t) \to (x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = t)$$

— *Équation d'une sphère de centre O :*

$$(\theta, \alpha) \to (x = r\cos\theta\cos\alpha, y = r\sin\theta\cos\alpha, z = r\sin\alpha)$$

L'application continue de l'ensemble des paramètres dans la surface $(u, v) \to (x, y, z) = F(u, v)$ s'appelle une *carte* (ou un paramétrage). En effet, une carte d'une portion de globe est une correspondance point à point entre un bout de papier plat et généralement rectangulaire (sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$) et une partie de la sphère terrestre (surface de $\mathbf{R}^3$).

Théorème : *Soit une surface (S) donnée par une carte injective F différentiable en un point $(u_0, v_0) \to F(u_0, v_0) = M_0$. Alors toutes les courbes « régulières » incluses dans la surface et passant par M_0 admettent des tangentes en M_0 appartenant à un plan qui, par définition, est le* **plan tangent à la surface en M_0.**

La donnée d'une courbe dans la surface (S) est équivalente à la donnée d'une courbe dans le plan des paramètres, selon le schéma suivant $t \to (u, v) \underset{F}{\rightleftarrows} (x, y, z)$, la carte F étant une bijection de l'ensemble des paramètres sur (S).

D'après le théorème sur la différentiation de la composée de deux applications nous pouvons écrire :

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix}$$

Soit : $$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = \frac{du}{dt}\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u} + \frac{dv}{dt}\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v}$$

Nous constatons que le vecteur tangent en une courbe de la surface passant par M_0 appartient au plan vectoriel engendré par les vecteurs :

$$\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u}\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) \text{ et } \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v}\left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

Ce plan, est par définition, le plan tangent à (S) en M_0. Nous pourrions vérifier qu'il est indépendant du paramétrage mais c'est inutile puisque nous l'avons défini avant tout géométriquement comme le lieu des tangentes aux courbes de la surface passant par M_0 qui sont indépendantes des paramétrages de la surface. En particulier, quand la surface est donnée par une équation cartésienne $z = f(x, y)$, ce qui correspond au paramétrage $(u, v) \to [x = u, y = v, z = f(u, v)]$, le plan tangent à la surface est engendré par les deux vecteurs :

$$\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u}\left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}\right) \text{ et } \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v}\left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

L'équation de ce plan est :

$$-\frac{\partial f}{\partial u}(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial v}(y - y_0) + (z - z_0) = 0$$

Le vecteur directeur de la normale à ce plan est :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, -1\right)$$

Plus généralement, nous pouvons vérifier que le vecteur de composantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} \end{cases}$$

est orthogonal aux vecteurs $\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u}$ et $\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v}$; c'est un vecteur perpendiculaire au plan tangent, vecteur directeur de la normale à la surface.

Deux cartes définissent la même orientation sur une surface si le jacobien du changement de cartes est positif (le jacobien est le déterminant de la matrice jacobienne).

Quand deux cartes définissent la même orientation, les vecteurs normaux définis par la formule ci-dessus ont même sens.

6. FORMES DIFFÉRENTIELLES

6.1. Formes différentielles de degré 1. — Une *forme différentielle* (de degré 1) est une application d'un ouvert O de $\mathbf{R}^n$ dans l'ensemble des formes linéaires définies sur l'espace $\mathbf{R}^n$; ainsi, une forme différentielle est définie par les fonctions coordonnées dans la base canonique du dual de $\mathbf{R}^n$:

$$w = P_1(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 + \ldots + P_n(x_1, \ldots, x_n)\,dx_n$$

Sur $\mathbf{R}^2$ par exemple, $w = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$. Rappelons que dx et dy sont les formes linéaires de la base canonique du dual de $\mathbf{R}^2$. Nous avons vu qu'un exemple particulier de formes différentielles sur $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ était donnée par l'application qui à tout point de O associe l'application

linéaire tangente à une fonction différentiable f de O dans $\mathbf{R}^n$ en ce point avec dans ce cas :

$$P_1(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P_n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n)$$

Considérons maintenant un chemin de classe C_1, c'est-à-dire une application injective f (sauf peut-être aux extrémités de I) d'un intervalle borné I de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^n$ qui, de plus, soit différentiable ; l'ensemble des points images par cette application des éléments de I constitue une courbe de $\mathbf{R}^n$, soit (C). Nous pouvons « composer » le chemin et la forme différentielle de façon à obtenir une application de I dans $\mathbf{R}$ (fonction réelle de variable réelle) :

$$\boxed{f^\star w(t) = w_{f(t)}\ [f'(t)]}$$

Explicitons cette formule dans le cas où $n = 2$:

$f(t) = x(t)e_1 + y(t)e_2$ (représentation paramétrique d'une courbe)

$$w = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$
$$f^\star w(t) = P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))\,y'(t)$$

6.2. Formes n-linéaires alternées. — Définition : Une forme *n-linéaire sur E alternée à valeurs dans* $\mathbf{R}$ (resp. dans $\mathbf{R}^p$) est une application F de $\underbrace{E \times E \times \ldots \times E}_{n \text{ fois}}$ dans $\mathbf{R}$ (resp. dans $\mathbf{R}^p$) linéaire par rapport à chacune des composantes de la variable :

$$\forall i,\ F(x_1, \ldots, \alpha x_{i,1} + \beta x_{i,2}, \ldots, x_n) = \alpha F(x_1, \ldots, x_{i,1}, \ldots x_n) + \beta F(x_1, \ldots, x_{i,2}, \ldots, x_n)$$

et alternée :

$$F(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) = -F(x_1, \ldots, x_{i+1}, x_i, \ldots, x_n)$$

— *Propriétés* :

$F(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) = 0$ si $x_i = x_{i+1}$ (provient de l'alternance)

soit : $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de E (si E est de dimension r)

$$F(x_1, \ldots, \sum_{i=1}^{r} \alpha_i e_i, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i F(x_1, \ldots, e_i, \ldots, x_n)$$

(provient de la linéarité).

• *Cas* $E = \mathbf{R}^2$, $n = 2$

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \\ y &= \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 \end{aligned}\right\} F(x, y) = F(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2)$$
$$F(x, y) = \alpha_1\beta_1 F(e_1, e_1) + \alpha_1\beta_2 F(e_1, e_2) + \alpha_2\beta_1 F(e_2, e_1) + \alpha_2\beta_2 F(e_2, e_2)$$

Comme $F(e_1, e_1) = F(e_2, e_2) = 0$ et : $F(e_1, e_2) = -F(e_2, e_1)$ nous avons :

$$F(x, y) = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\,F(e_1, e_2).$$

La forme F est déterminée par $F(e_1, e_2)$; nous prendrons comme forme canonique (à valeurs dans $\mathbf{R}$) la forme déterminée par $F(e_1, e_2) = 1$. Toutes les formes sont proportionnelles à la forme canonique.

• *Cas* $E = \mathbf{R}^3$, $n = 2$

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$$
$$y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3$$
$$F(x, y) = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\,F(e_1, e_2) + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\,F(e_2, e_3) + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)\,F(e_3, e_1)$$

Le cas intéressant est celui où F est à valeurs dans $\mathbf{R}^p = \mathbf{R}^3$. Alors, nous déterminons la forme usuelle par :

$$F(e_1, e_2) = e_3,\ F(e_2, e_3) = e_1 \text{ et } F(e_3, e_1) = e_2$$
$$F(x, y) = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)e_1 + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)\,e_2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)e_3$$

Remarquons que $F(x, y)$ est orthogonal aux vecteurs x et y ; $F(x, y)$ est appelé *produit vectoriel* (ou *produit extérieur*) des vecteurs de $\mathbf{R}^3$. Il est remarquable que $F(x, y)$ reste le même quand nous prenons une nouvelle base de référence déduite de la précédente par changement de base orthonormé direct.

• *Cas* $E = \mathbf{R}^3$, $n = 3$

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$$
$$y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3$$
$$z = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3$$
$$F(x, y, z) = (\alpha_1\beta_2\gamma_3 + \beta_1\gamma_2\alpha_3 + \gamma_1\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2\gamma_1 - \beta_3\gamma_2\alpha_1 - \gamma_3\alpha_2\beta_1)\,F(e_1e_2e_3)$$

Ainsi, dans ce cas aussi, la forme F est déterminée par $F(e_1, e_2, e_3)$. Toutes les formes sont donc proportionnelles à la forme canonique obtenue en prenant $F(e_1, e_2, e_3) = 1$. Ce résultat est d'ailleurs général : l'espace vectoriel des formes n-linéaires alternées sur $\mathbf{R}^n$ (à valeurs dans $\mathbf{R}$) est de dimension 1 ; toutes ces formes sont proportionnelles à la forme canonique D associée à une base de $\mathbf{R}^n(e_1, \ldots, e_n)$ et déterminée par $D(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1$. Cette forme canonique s'appelle *déterminant du système* de n-vecteurs ; il est parfois associé à la matrice carrée dont les vecteurs forment les colonnes (ou les lignes). Nous définissons ainsi le déterminant d'une matrice carrée A.

Nous pouvons montrer que :

$$\det(AB) = (\det A)\,(\det B)$$

et : $$\det \widetilde{A} = \det A$$

Cela justifie que nous puissions définir indifféremment le déterminant d'une matrice par le déterminant du système de vecteurs-lignes ou par le déterminant du système de vecteurs-colonnes.

6.3. Formes différentielles de degré supérieur à 1. — Une forme différentielle de degré n sur E (espace vectoriel réel de dimension finie) est une application d'un ouvert O de E dans l'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E (à valeurs de $\mathbf{R}$).

• *Cas* $E = \mathbf{R}^2$, $n = 2$. Toutes les formes sont proportionnelles à la forme canonique : $F(e_1, e_2) = 1$, notée $dx \wedge dy$ ou $dx\,dy$. Une forme s'écrit donc : $\omega = P(x, y)\,dx\,dy$.

• *Cas* $E = \mathbf{R}^3$, $n = 2$. L'espace vectoriel des formes est de dimension 3. Nous notons par :

$dx\,dy$ la forme F_1 déterminée par $F(e_1, e_2) = 1$:
$$F(e_2, e_3) = F(e_3, e_1) = 0$$

$dy\,dz$ la forme F_2 déterminée par $F(e_2, e_3) = 1$:
$$F(e_3, e_1) = F(e_1, e_2) = 0$$

$dz\,dx$ la forme F_3 déterminée par $F(e_3, e_1) = 1$:
$$F(e_1, e_2) = F(e_2, e_3) = 0$$

Une forme s'écrit donc :

$$\omega = P(x, y, z)\,dx\,dy + Q(x, y, z)\,dy\,dz + R(x, y, z)\,dz\,dx$$

• *Cas* $E = \mathbf{R}^3$, $n = 3$. Toutes les formes sont proportionnelles à la forme canonique $F(e_1, e_2, e_3) = 1$ notée $dx\,dy\,dz$. Une forme s'écrit donc :

$$\omega = P(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

Le produit extérieur de deux formes différentielles peut être défini comme une opération bidistributive par rapport à l'addition et biassociative par rapport à la multiplication par un scalaire (bilinéarité) et anticommutative (alternance). Par exemple, le produit extérieur de deux formes de degré 1 est une forme de degré 2 :

$$\omega_1 = P_1(x, y, z)\,dx + Q_1(x, y, z)\,dy + R_1(x, y, z)\,dz$$
$$\omega_2 = P_2(x, y, z)\,dx + Q_2(x, y, z)\,dy + R_2(x, y, z)\,dz$$
$$\omega_1 \wedge \omega_2 = P_1(x, y, z)\,P_2(x, y, z)\,dx \wedge dx + P_1(x, y, z)\,Q_2(x, y, z)\,dx \wedge dy + \ldots$$

Or : $\begin{cases} dx \wedge dx = 0 \\ -\,dx \wedge dy = dy \wedge dx \ldots \end{cases}$

Donc :

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = (P_1Q_2 - Q_1P_2)\,dx\,dy + (Q_1R_2 - Q_2R_1)\,dy\,dz + (R_1P_2 - R_2P_1)\,dz\,dx$$

Étant donné une surface déterminée par une carte :

$$(u, v) \xrightarrow{F} (x, y, z)$$

et une forme différentielle ω de degré 2 sur $\mathbf{R}^3$, nous pouvons les composer pour obtenir une forme différentielle de degré

2 sur $\mathbf{R}^2$ (c'est une fonction de deux variables multipliée par $du\ dv$) :

$$\omega = P(x, y, z)\ dx\ dy + Q(x, y, z)\ dy\ dz + R(x, y, z)\ dz\ dx$$

$$F^*\omega = P(F(u,v))\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right) \wedge \left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right)\right] + Q \ldots + R \ldots$$

$$F^*\omega = P_0(F(u, v))\left(\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dy}{\partial u}\right) du\ dv + \ldots + du\ dv + \ldots + du\ dv$$

Cette opération sera utilisée pour définir l'intégrale de surface d'une forme différentielle de degré 2.

Il peut être utile de considérer des formes différentielles à valeurs vectorielles comme :

— la forme de degré 1 *vecteur tangent* $\vec{ds}$ de composantes (dx, dy, dz) qui, composé avec une carte, fournit un vecteur tangent à la courbe.

— la forme de degré 2 *vecteur normal* $\vec{dN}$ de composantes $(dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy)$ qui, composé avec une carte, fournit un vecteur normal à la surface.

6.4. Différentiation extérieure

6.4.1. Définition. — Étant donné une forme différentielle ω de degré n sur $\mathbf{R}^p (n \leqslant p)$:

$$\omega = \sum_{i_1 \ldots i_n} P_{i_1 \ldots i_n}(x_1, \ldots, x_p)\ dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_n}$$

si les fonctions $P_{i_1, \ldots i_n}$ sont différentiables, nous associons à ω la forme différentielle de degré $n + 1$:

$$d\omega = \sum_{i_1, \ldots, i_n} dP_{i_1, \ldots, i_n} \wedge dx_{i_1} \ldots \wedge dx_{i_n}$$

$d\omega$ est appelée la différentielle extérieure de ω.

6.4.2. Exemples

● *Forme de degré* 1 :

$$\omega = P(x, y, z)\ dx + Q(x, y, z)\ dy + R(x, y, z)\ dz$$

$$d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz\right) \wedge dy + \left(\frac{\partial R}{\partial x}dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy + \frac{\partial R}{\partial z}dz\right) \wedge dz$$

$$d\omega = -\frac{\partial P}{\partial y}dx \wedge dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x}dx \wedge dy - \frac{\partial Q}{\partial z}dy \wedge dz - \frac{\partial R}{\partial x}dz \wedge dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy \wedge dz$$

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\ dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\ dz + \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial z}\right) dz\ dx.$$

Nous retrouvons les composantes du rotationnel du champ de composantes (P, Q, R).

● *Forme de degré* 2 :

$$\omega = P(x, y, z)\ dx \wedge dy + Q(x, y, z)\ dy \wedge dz + R(x, y, z)\ dz \wedge dx$$

$$d\omega = \frac{\partial P}{\partial z}dz \wedge dx \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial x}dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial R}{\partial y}dy \wedge dz \wedge dx$$

$$d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y}\right) dx\ dy\ dz$$

Nous retrouvons l'expression de la divergence du champ de composantes (Q, R, P).

● *Forme de degré* 0*:*

Si nous convenons d'appeler forme de degré 0 une fonction et de poser $\omega \wedge 1 = \omega$, alors la différentielle de f est la différentielle extérieure de f *:*

$$f(x, y, z,) = f(x, y, z) \,.\, 1$$
$$df(x, y, z) = df(x, y, z) \wedge 1 = df$$

La différentiation extérieure est évidemment une application linéaire.

6.4.3. Propriété fondamentale

$$\boxed{d^2\,\omega = 0}$$

En effet, si :

$$\omega = \sum_i p_i\,\omega_i$$

$$d\omega = \sum_{j,\,i} \frac{\partial P_i}{\partial x_j}\,dx_j \wedge \omega_i$$

$$d^2\omega = \sum_{k,\,j,\,i} \frac{\partial^2 P_i}{\partial x_k \partial x_j}\,dx_k \wedge dx_j \wedge \omega_i = \sum_{k<j,\,i} \left(\frac{\partial^2 P_i}{\partial x_k \partial x_j} - \frac{\partial^2 P_i}{\partial x_j \partial x_k}\right) dx_k \wedge dx_j \wedge \omega_i$$

Comme : $\dfrac{\partial^2 P}{\partial x_j \partial x_k} = \dfrac{\partial^2 P}{\partial x_k \partial x_j}$, tous les termes de la dernière somme sont nuls.

Applications :

f forme différentielle de degré 0 (fonction) $d^2f = 0$ signifie $\overset{\smile}{\text{rot}}\ (\text{grad}\ f) = 0$.

ω forme différentielle de degré 1 (champ de vecteurs)

$(x, y, z) \to V\ d^2\omega = 0$ signifie div $(\overset{\smile}{\text{rot}}\ V) = 0$.

CHAPITRE XX

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DE L'INTÉGRATION

(fonction réelle réglée d'un intervalle borné de R dans R)

La théorie « moderne » de l'intégration de Lebesgue, utile dans bien des applications (calcul des probabilités, par exemple), dépasse le cadre mathématique de cet exposé. Nous avons choisi de présenter la théorie de l'intégration des fonctions réglées qui offre deux avantages :

— Elle préserve la notion intuitive de l'intégrale comme moyen de calculer des surfaces.

— L'intégrale est définie comme forme linéaire sur un espace de fonctions, présentation essentielle dans la théorie moderne.

1. ESPACE VECTORIEL NORMÉ DES FONCTIONS RÉGLÉES DE *I* DANS R

1.1. Espace vectoriel normé des fonctions bornées de R dans R (fig. XX-1). — Les fonctions bornées de I (intervalle de $\mathbf{R}$, éventuellement $\mathbf{R}$ tout entier) dans $\mathbf{R}$ forment un espace vectoriel et nous avons :

$$\forall x \in I \mid f(x) + g(x) \mid \leqslant \mid f(x) \mid + \mid g(x) \mid \leqslant \sup_{x \in I} \mid f(x) \mid + \sup_{x \in I} \mid g(x) \mid$$

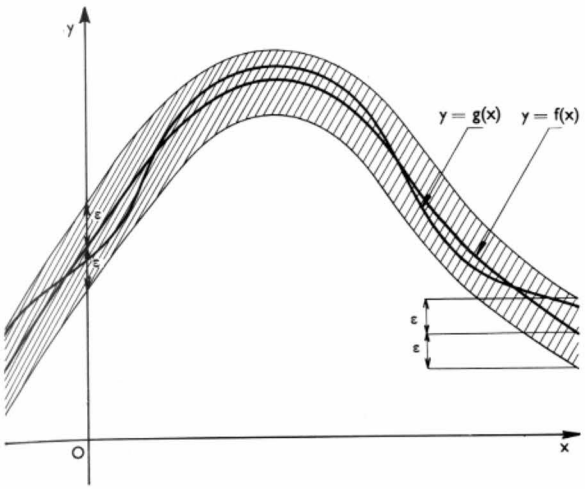


Fig. XX-1 — La distance entre les fonctions f et g est inférieure à ε (pour la norme de la convergence uniforme). On a hachuré le voisinage de la fonction f, lieu des graphes des fonctions dont la distance à f est inférieure à ε

$$\text{Donc : } \sup_{x \in I} |f(x) + g(x)| \leqslant \sup_{x \in I} |f(x)| + \sup_{x \in I} |g(x)|$$

$$\text{Comme, par ailleurs, } \sup_{x \in I} |kf(x)| = k \sup_{x \in I} |f(x)|,$$

l'application qui à toute fonction bornée associe la borne supérieure de sa valeur absolue, vérifie les propriétés d'une norme. L'espace vectoriel des fonctions bornées de I dans **R** peut être muni de la structure d'espace vectoriel normé donc d'espace métrique ; il en est d'ailleurs de même de l'espace vectoriel des fonctions bornées d'un ensemble quelconque E dans un espace vectoriel normé F.

Étudions la convergence d'une suite d'éléments dans cet espace métrique. La suite de fonctions f_n tend vers f en norme si :

$$\forall \varepsilon\ \exists N,\ n \geqslant N \Rightarrow \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

donc : $$\forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Dans ce cas, nous dirons que la suite de fonctions f_n *converge uniformément* vers f pour distinguer cette convergence de la *convergence simple* ou convergence ponctuelle : f_n tendant simplement vers f si $\forall x \in \mathbf{R}, f_n(x) \to f(x)$.

Par exemple, au chapitre 16, nous avons montré qu'une série entière convergeait uniformément sur tout disque fermé inclus dans le disque de convergence (disque de rayon z_0 qui dans ce cas tient lieu d'intervalle I) car nous avons majoré $|f_n - f|$ par le reste d'une série positive convergente donc majoré par tout entier positif, aussi petit soit-il à partir d'un certain rang.

Théorème : L'espace vectoriel normé des fonctions bornées de I dans **R** (resp. de E dans F espace vectoriel normé complet) est complet.

En effet, supposons que la suite f_n soit une suite de Cauchy :

$$\forall \varepsilon\ \exists N,\ \begin{matrix} m > N \\ n > N \end{matrix} \Rightarrow \forall x \in I,\ |f_m(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$$

Donc, quel que soit x, la suite $f_n(x)$ est une suite de Cauchy qui converge vers $f(x)$ (dans **R** toute suite de Cauchy converge).

$$\text{Comme : } \forall n > N\ |F_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

$$\text{à la limite : } |f_m(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

f_m converge donc uniformément vers f.

Nous pouvons maintenant définir et étudier un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel normé complet des fonctions bornées de I dans **R** ; cet ensemble de fonctions est important car il contient toutes les fonctions usuelles : fonctions continues, continues par morceaux, monotones, monotones par morceaux. Nous définirons ensuite l'intégrale de ces fonctions sur l'intervalle I.

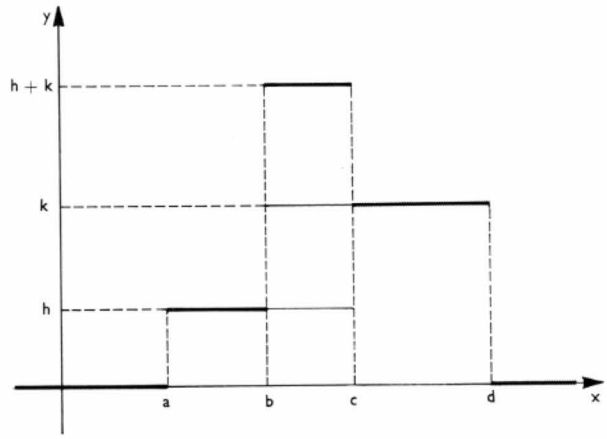


Fig. XX-2 — La somme de deux fonctions en escalier est une fonction en escalier

1.2. L'espace vectoriel des fonctions réglées. — À tout intervalle $[a, b]$, associons une fonction notée $1_{[a,b]}$, appelée *fonction indicatrice* de l'intervalle $[a, b]$; elle prend la valeur 1 pour $x \in [a, b]$ et la valeur 0 pour $x \in [a, b]$.

Une *fonction en escalier* est une combinaison linéaire de fonctions indicatrices d'intervalles. Il est clair que l'ensemble des fonctions en escalier de I dans **R** est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions bornées de I dans **R** (fig. XX-2). Toute fonction en escalier peut se mettre sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions indicatrices d'intervalles disjoints : par exemple :

$h\ 1_{[a,c]} + k\ 1_{[b,d]} = h\ 1_{[a,b]} + (h + k)\ 1_{[b,c]} + k\ 1_{[c,d]}$

si a, b, c, d sont ordonnés dans cet ordre sur la droite réelle.

Théorème : Étant donné un espace vectoriel normé E et un sous-espace vectoriel E_1 de E, l'adhérence de E_1 est un sous-espace vectoriel de E ; si E est complet, l'adhérence de E_1 est complète.

Preuve : Un élément x de E appartient à l'adhérence de E_1 si, et seulement si, il existe une suite à valeurs dans E_1 et de limite a (V. chap. 18).

Or : $(x_n \to x)$ et $(y_n \to y) \Rightarrow (x_n + y_n \to x + y)$ et $(kx_n \to kx)$

Nous en déduisons que l'adhérence de E_1 est un espace vectoriel. Si E est complet, cet espace vectoriel est complet, comme d'ailleurs tout sous-ensemble fermé d'un espace complet.

Définition : Une *fonction réglée* est une fonction qui est limite uniforme de fonctions en escalier. Une fonction réglée est bornée (comme toute limite uniforme d'une suite de fonctions bornées). L'espace vectoriel des fonctions réglées est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace vectoriel normé complet des fonctions bornées.

1.3. Exemples usuels de fonctions réglées. —

Théorème : *Une fonction continue de I (intervalle borné) dans* **R** *est réglée.*

Soit f une telle fonction. Nous avons démontré que f est bornée et uniformément continue (V. chap. 18) :

$$\forall \varepsilon\ \exists \eta,\ |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Soit : $[x_i - \eta_i\ x_i[$ un recouvrement de I par un nombre fini n d'intervalles d'amplitude $\eta_i < \eta$ et posons :

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ 1_{[x_i - \eta_i,\ x_i[}(x)$$

$g(x)$ est une fonction en escalier et nous avons :

$$g(x) - f(x) = \sum_{i=1}^{n} 1_{[x_i - \eta_i,\ x_i[}\ [f(x_i) - f(x)]$$

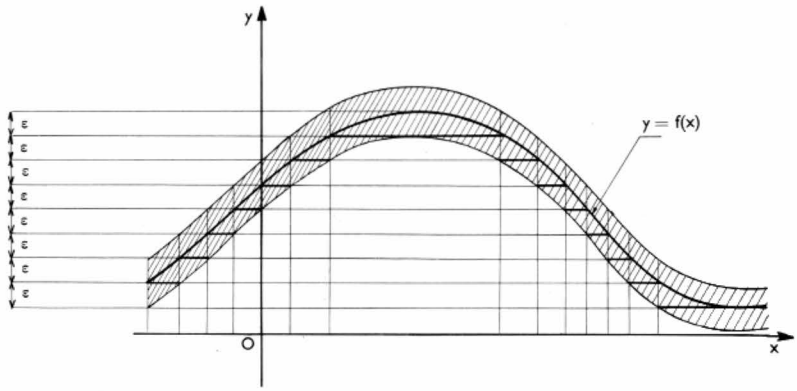


Fig. XX-3

La fonction continue f est approchée à ε près par une fonction en escalier

Donc : $|g(x) - f(x)| \leqslant \sup_{i=1,\ldots,n} |f(x_i - f(x)| < \varepsilon$

(d'après la définition de γ_i).

La fonction f est donc limite uniforme $\forall\, x \in]x_i - \gamma_i, x_i]$ d'une suite de fonctions en escalier du type $g(x)$ obtenues en faisant $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$ (fig. XX-3).

Théorème : *Une fonction monotone et bornée est une fonction réglée* (fig. XX-4). Par exemple, supposons que la fonction f soit monotone croissante. Il est clair que l'image réciproque de l'intervalle $[f(a), f(b)]$ par une fonction monotone croissante est l'intervalle (a, b). Plus généralement, l'image réciproque de tout intervalle de **R** est un intervalle de **R** (ou l'ensemble vide).

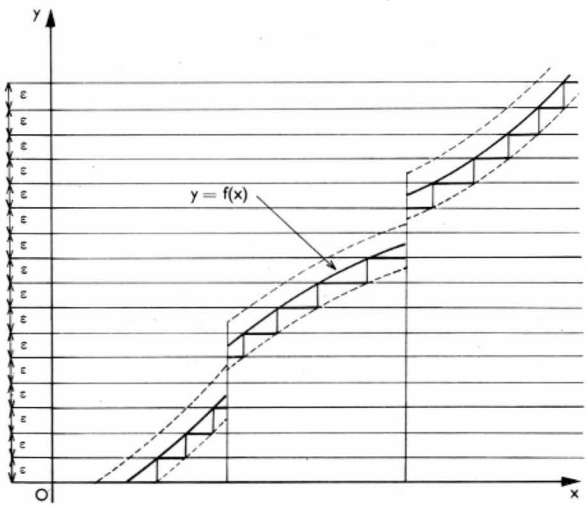


Fig. XX-4 — La fonction monotone f est approchée à ε près par une fonction en escalier

Soit m et M les bornes inférieure et supérieure de l'ensemble des valeurs prises par la fonction f. Divisons l'intervalle (m, M) en un nombre fini d'intervalles d'amplitude inférieure à ε : $m_0 = m, m_{i+1} - m_i < \varepsilon, \ldots, m_n = M$. Soit (a_i, a_{i+1}) l'image réciproque de l'intervalle (m_i, m_{i+1}). Posons :

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} m_i \; 1_{[a_i,\, a_{i+1}[}\; (x)$$

Nous avons :

$$f(x) - g(x) = \sum_{i=1}^{n} 1_{[a_i,\, a_{i+1}[}\; (x)\; [(f(x) - m_i]$$

Donc : $\sup\, [f(x) - g(x)] < \varepsilon$

f est donc limite uniforme d'une suite de fonction en escalier.

Toutes les fonctions « continues par morceaux et monotones par morceaux» sont donc des fonctions réglées, car la restriction à un sous-intervalle d'une fonction réglée est réglée et la somme de deux fonctions réglées est réglée.

2. L'INTÉGRALE DES FONCTIONS RÉGLÉES D'UN INTERVALLE BORNÉ DANS R

2.1. L'intégrale des fonctions en escalier. — Le problème heuristique est d'évaluer l'aire comprise entre l'axe des x et le graphe d'une fonction bornée $y = f(x)$ définie sur un intervalle borné $[a, b]$. Dans le cas d'une fonction en escalier, la réponse est « évidente » car nous savons calculer l'aire d'un rectangle. Comme la fonction peut prendre des valeurs négatives, nous conviendrons que l'aire située entre l'axe des x et une portion de courbe représentant des valeurs négatives de la fonction sera négative et nous chercherons à calculer *l'aire algébrique*.

Ces considérations intuitives permettent d'interpréter la définition mathématique suivante : à toute fonction en escalier de $I = [a, b]$ (intervalle borné) dans **R**, qui peut s'écrire :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} k_i \,.\, 1_{[a_i,\, b_i[}\; (x)$$

nous associons le nombre réel :

$$I(f) = \sum_{i=1}^{n} k_i\; (b_i - a_i)$$

(que l'intervalle $[a, b]$ soit ouvert, fermé ou semi-ouvert).

C'est une application linéaire et continue de l'espace vectoriel normé des fonctions en escalier dans **R**. $I(f)$ s'appelle **l'intégrale de *f* sur l'intervalle (*a, b*)** et se note : $\int_a^b f(x)\,dx$ ou : $\int_I f(x)\,dx$. La continuité découle de l'inégalité suivante :

$$|I(f)| \leqslant \sup_{i=1,\,n} |k_i| \left(\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \right)$$

en prenant les $[a_i, b_i[$ disjoints. Donc, k_i est la valeur de f sur (a_i, b_i) et $i = \sup_{1,\ldots,n} |k_i| = \sup_{x \in I} |f(x)|$ est la norme de f.

Donc :

$$|I(f)| \leqslant (b - a)\, \|f\|$$

En particulier, l'intégrale d'une fonction constante :

$$x \to f(x) = k$$

est :

$$I(f) = \int_a^b f(x)\; dx = k\; (b - a)$$

2.2. L'intégration des fonctions réglées d'un intervalle borné I dans R. — Pour toute fonction f réglée de I (borné) dans **R**, nous allons définir $I(f)$ en prolongeant par passage à la limite de l'intégrale des fonctions en escalier (fig. XX-5).

Théorème. *Soit E un espace vectoriel normé et E_1 un sous-espace vectoriel dense dans E. Soit I :*

$$f \in E_1 \to I(f) \in \mathbf{R},$$

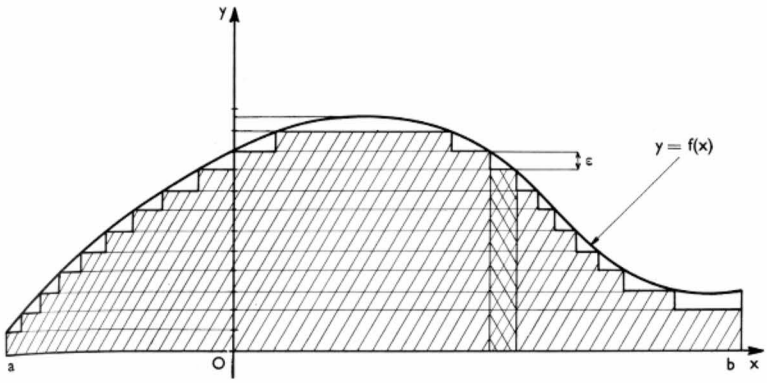


Fig. XX-5

Définition de l'intégrale d'une fonction réglée.

On approche $\int_a^b f(x)dx$ par l'intégrale de la fonction en escalier f_ε approchant f inférieurement à ε près :

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_\varepsilon(x)dx < (b-a)\varepsilon$$

une forme linéaire continue de E_1 dans **R**. *Alors nous pouvons prolonger I en une forme linéaire continue de E dans* **R**.

Preuve : Si $f \in E$, il existe une suite au moins à valeurs dans E_1 qui converge vers f. Soit f_n cette suite. C'est une suite de Cauchy et comme $|I(f_n)| \leqslant K\,||f_n||$, $I(f_n)$ est une suite de Cauchy dans **R** qui converge vers une limite indépendante de la suite f_n choisie. En effet, soit une autre suite f'_n tendant vers f et à valeurs dans E_1 : $f_n - f'_n \to 0$ donc $I(f_n - f'_n) \to 0$ et les suites $I(f_n)$ et $I(f'_n)$ ont la même limite qui, par définition, est $I(f)$. Par prolongement de la même inégalité sur E_1, pour tout f élément de E nous avons : $|I(f)| \leqslant K\,||f||$

Cela prouve que I est continue.

I est linéaire, car la somme et la multiplication par un réel sont des opérations continues dans un espace vectoriel normé :

$$\begin{cases} I(f_n + g_n) \to I(f+g) \\ I(f_n) + I(g_n) \to I(f) + I(g) \end{cases}$$

Comme :

$$I(f_n + g_n) = I(f_n) + I(g_n), \quad I(f+g) = I(f) + I(g)$$

Si nous appliquons ce théorème à l'espace vectoriel des fonctions en escalier et à l'espace vectoriel des fonctions réglées, nous pouvons définir l'intégrale sur un intervalle borné d'une fonction réglée.

Relation de Chasles :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

car : $f(x)\,1_{[a,b]}(x) = f(x)\,1_{[a,c]}(x) + f(x)\,1_{[c,b]}(x)$

Nous supposons ici c compris entre a et b (la formule serait démontrée de façon analogue dans les autres cas).

2.3. La formule de la moyenne. — L'intégrale d'une fonction en escalier, positive sur un intervalle borné, est positive. Nous en déduisons que l'intégrale d'une fonction réglée positive sur un intervalle borné est positive par passage à la limite.

Si f et g sont deux fonctions réglées de I dans **R** telles que :

$$\forall x \in I,\ f(x) \geqslant g(x)$$

alors $(f-g)$ est une fonction positive.

Donc : $I(f-g) \geqslant 0$ et : $I(f) \geqslant I(g)$

Ainsi, en intégrant l'inégalité :

$$\inf_{x \in I} f(x) \leqslant f(x) \leqslant \sup_{x \in I} f(x)$$

nous obtenons :

$$(b-a)\cdot \inf_{x \in I} f(x) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant (b-a)\cdot \sup_{x \in I} f(x)$$

Ainsi :

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)}$$

est un nombre réel compris entre les bornes de l'ensemble des valeurs de f sur I. Nous dirons que c'est la *valeur moyenne de la fonction sur l'intervalle* $[a, b]$. Si la fonction f est continue, tout nombre réel compris entre les bornes de l'ensemble des valeurs de f, appartient à cet ensemble (théorème de la valeur intermédiaire).

Nous avons ainsi démontré le théorème suivant : *si la fonction f est une continue sur l'intervalle* $[a, b]$, *il existe un nombre réel c de cet intervalle vérifiant la relation suivante :*

$$(b-a)\,f(c) = \int_a^b f(x)dx \quad \text{(fig. XX-6)}$$

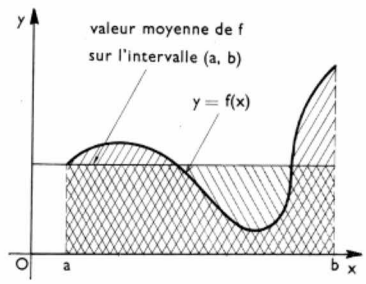


Fig. XX-6

Définition de la valeur moyenne m d'une fonction

Les deux aires hachurées $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^b m\,dx = m(b-a)$ sont égales

3. PRIMITIVES D'UNE FONCTION CONTINUE

3.1. Intégrale et primitive d'une fonction continue. — Théorème : *Soit une fonction continue f de l'intervalle* $[a, b]$ *dans* **R**. Pour $x \in I$, posons :

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx$$

$F(x)$ est une fonction continue et dérivable en tout point de I et sa dérivée au point x est $f(x)$.

$F(x)$ est appelée **primitive** de f.

Preuve : D'après la relation de Chasles et la formule de la moyenne :

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(x)dx = h\,f(x+kh)$$

avec $0 < k < 1$, $f(x+kh)$ étant la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[x, x+h]$. La fonction f étant continue sur l'intervalle $[a, b]$, donc bornée et continue on a :

$$F(x+h) - F(x) \to 0 \text{ et } \frac{1}{h}\,[F(x+h) - F(x)] \to f(x)$$

quand $h \to 0$.

Ce théorème nous permet de calculer, dans de nombreux cas, des intégrales de fonctions sur $[a, b]$; en effet, il suffit de connaître les dérivées des fonctions usuelles (V. chap. 8).

Toutes les primitives d'une fonction continue f ne diffèrent entre elles que d'une constante. Nous pouvons déterminer une primitive par la valeur de la variable pour laquelle elle s'annule : ainsi, la primitive de la fonction continue f s'annulant avec a est $F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$:

$$F_b(x) - F_a(x) = \int_b^a f(t)dt$$

	Fonctions : $x \to F(x)$	Primitives : $x \to F(x)$	$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
$k \in \mathbf{R}$	k	kx	$k\ (b - a)$
$n > 0$	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\frac{1}{n+1}\ (b^{n+1} - a^{n+1})$
$n > 0$ $n \neq 1$	$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$	$\frac{x^{-n+1}}{-n+1} = \frac{-1}{(n-1)\,x^{n-1}}$	$\frac{1}{n-1}\ (a^{-n+1} - b^{-n+1})$
$n = -1$	$\frac{1}{x}$	$\log_e x$	$\log_e b - \log_e a$
$u \in \mathbf{R}$ $u \neq -1$	x^u	$\frac{x^{u+1}}{u+1}$	$\frac{1}{u+1}\ (b^{u+1} - a^{u+1})$
	$\mathbf{e}^x$	$\mathbf{e}^x$	$\mathbf{e}^b - \mathbf{e}^a$
	$\cos x$	$\sin x$	$\sin b - \sin a$
	$\sin x$	$-\cos x$	$\cos a - \cos b$
	$\frac{1}{x^2+1}$	Arc tg x	Arc tg b — Arc tg a

Les propriétés de la dérivation sont utilisées pour déduire des propriétés des primitives fournissant des méthodes de calcul de primitives. Les deux méthodes très utilisées sont le changement de variable et l'intégration par parties.

3.2. Intégration par changement de variable. — Considérons la fonction continue f dont nous voulons calculer la primitive et supposons qu'il existe une application φ bijective et dérivable de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que la primitive de la fonction $t \to f(\varphi(t)).\varphi'(t)$, soit $G(t)$. Alors, la fonction $G \circ \varphi^{-1}$ est la primitive de la fonction continue f :

$$[G \circ \varphi^{-1}(s)]' = f(s).\varphi'[\varphi^{-1}(s)]\ \frac{1}{\varphi'[\varphi^{-1}(s)]}$$

φ est appelé *application de changement de variables*. Cette méthode de calcul des primitives n'est pas toujours d'un usage facile : le changement de variable à effectuer est souvent difficile à déterminer. En voici un exemple simple : soit à calculer : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos t\, dt$.

Posons : $s = \varphi(t) = \sin t$; donc : $ds = \cos t\, dt$
D'où :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\ \cos t\, dt = \int_0^1 s^2\, ds = \left[\frac{s^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

3.3. Intégration par parties. — Cette méthode de calcul des primitives utilise le théorème sur la dérivée d'un produit. Étant donné deux fonctions continues et dérivables u et v : $(uv)' = u'v + uv'$. Donc : $u'v = (uv)' - uv'$.
La différence de la fonction uv et d'une primitive de uv' est une primitive de $u'v$.
Un exemple d'utilisation de cette méthode est fourni par le calcul des primitives du produit de polynômes de x par des fonctions exponentielles ou trigonométriques.

Soit à calculer : $\int_0^{\pi} x \sin x\, dx$

Posons : $\begin{cases} u = x \\ dv' = \sin x\, dx \end{cases}$ et : $\begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

Donc :

$$\int_0^{n} x \sin x\, dx = [-x \cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x\, dx$$
$$= (-\pi \cos \pi) + (0 \cos 0) + (\sin \pi - \sin 0) = \pi$$

4. FONCTION DÉFINIE PAR UNE INTÉGRALE

Ce terme de « calcul » de primitives ne doit pas nous abuser : en général, la primitive d'une fonction continue « ne se calcule pas », c'est-à-dire que, même quand la fonction continue a une expression simple (combinaison de polynômes, fractions rationnelles, exponentielles, fonctions trigonométriques), sa primitive ne se met pas obligatoirement sous une forme aussi simple. Nous nous contenterons, dans ce cas, de garder à la fonction son expression intégrale qui peut nous renseigner sur son sens de variation ; si nous avons besoin de préciser telle ou telle valeur de la fonction, nous la calculerons directement en utilisant des méthodes de calcul approché.

Nous terminons ce chapitre en citant un théorème permettant de calculer, sous certaines hypothèses, la dérivée d'une fonction donnée par une expression intégrale.

Théorème de dérivation sous le signe somme : *Soit une fonction f continue de deux variables : $U \times I \to F$ où I est un intervalle fermé borné de l'ensemble des réels. La fonction* $x \to \psi(x) = \int_I f(x, t)\, dt$ *est continue. De plus, si* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *existe et est continue,* ψ *est continûment dérivable et* $\psi'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\, dt$.

CHAPITRE XXI

COMPLÉMENT DE CALCUL INTÉGRAL

1. INTÉGRALES IMPROPRES

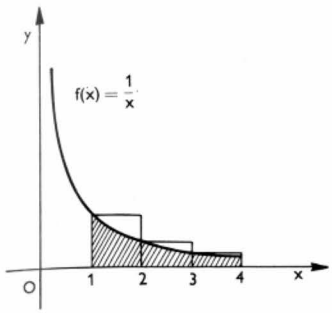
1.1. Intégrale d'une fonction localement réglée sur la droite réelle. — Définition : Une fonction *localement réglée* est une fonction réelle de variable réelle dont la restriction à tout intervalle borné est réglée (donc intégrable).

Posons $I(x) = \int_a^x f(t)dt$ si la fonction f est localement intégrable. Si $I(x)$ tend vers une limite quand $x \to +\infty$, on appelle *intégrale de f de a à* $+\infty$ le nombre $\lim_{x \to +\infty} I(x)$; il sera noté $\int_a^{+\infty} f(t)dt$. De même, l'intégrale de f de $-\infty$ à a est définie comme la limite, quand elle existe, de $\int_x^a f(t)dt$ quand $x \to -\infty$.

L'intégrale de f sur la droite réelle est définie comme la somme de ces deux quantités quand elles existent.

Par exemple, la fonction $x \to f(x) = \inf\left[\left(\frac{1}{x^2}\right), 1\right]$ est intégrable sur la droite réelle et son intégrale est égale à :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^2}\, dt + 2 + \int_1^{-\infty} \frac{1}{t^2}\, dt = 4$$



$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge $\rightarrow \Sigma \frac{1}{n}$ diverge car :

$$\int_1^N \frac{dx}{x} < \sum_1^{N-1} \frac{1}{n}$$

$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge $\rightarrow \Sigma \frac{1}{n^2}$ converge car :

$$\int_1^N \frac{dx}{x^2} > \sum_2^N \frac{1}{n^2}$$

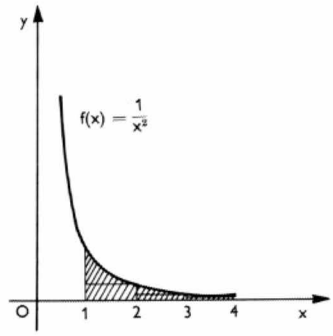


Fig. XXI-1 — Comparaison entre série et intégrale impropre

en effet :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt = \lim_{x\to\infty} \int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt = \lim_{x\to\infty} \left[1 - \frac{1}{x}\right] = 1$$

Au contraire, la fonction $\inf\left(\frac{1}{x}, 1\right)$ n'est pas intégrable sur la droite réelle car $\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \log_e(x)$ ne tend pas vers une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$.

1.2. Intégrale et série. — Étant donné une fonction intégrable de a à $+\infty$, considérons la série de terme général $u_n = \int_{a+n}^{a+n+1} f(t)dt$; cette série est convergente et sa somme est égale à $\int_a^{+\infty} f(t)dt$. C'est ce prodédé qui permet de conclure que la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente et que la série de terme général $\frac{1}{n}$ est divergente.

1.3. Intégrale absolument convergente. — De même que nous avons défini des séries absolument convergentes, nous pouvons définir des *intégrales absolument convergentes*. La fonction f est dite *absolument intégrable* sur $[a, +\infty[$ si la fonction $|f|$ est intégrable sur $[a, +\infty[$. Pour démontrer qu'une fonction absolument intégrable est intégrable, nous utilisons le critère de Cauchy pour les limites de fonction.

Lemme : Soit une fonction f de **R** dans un espace métrique complet (E, d).

Si : $\forall \varepsilon, \exists N \begin{matrix} x > N \\ y > N \end{matrix} \Rightarrow d[f(x), f(y)] < \varepsilon,$

$$\Longleftrightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) \text{ existe.}$$

Preuve : La suite $f(n)$ est une suite de Cauchy à valeurs dans E ; elle converge donc vers une limite L puisque E est complet ; donc :

$$\forall \varepsilon\ \exists N_1 \begin{matrix} n > \sup(N, N_1) \\ x > N \end{matrix} : \begin{matrix} d[f(n), L] < \varepsilon \\ d[f(x), f(n)] < \varepsilon \end{matrix}$$

d'où : $d[f(x), L] < 2\varepsilon$ d'après l'inégalité triangulaire.

Donc, pour que f soit intégrable sur $[a, +\infty[$ et si $I(x) = \int_a^x f(t)dt$, il faut et il suffit que :

$$\forall \varepsilon\ \exists N \begin{matrix} x > N \\ y > N \end{matrix} |I(x) - I(y)| = \left|\int_y^x f(t)dt\right| < \varepsilon$$

Mais :

$$\left|\int_y^x f(t)\,dt\right| < \int_y^x |f(t)|\,dt$$

Nous en déduisons que, si f est absolument intégrable, f est intégrable.

Théorème : *Si f est absolument intégrable et g bornée réglée, alors la fonction fg, produit des fonctions f et g, est absolument intégrable et :*

$$\int_a^{\infty} |f(t)g(t)|\,dt \leqslant \sup_{t\in[a,\infty[} |g(t)| \cdot \int_a^{\infty} |f(t)|\,dt$$

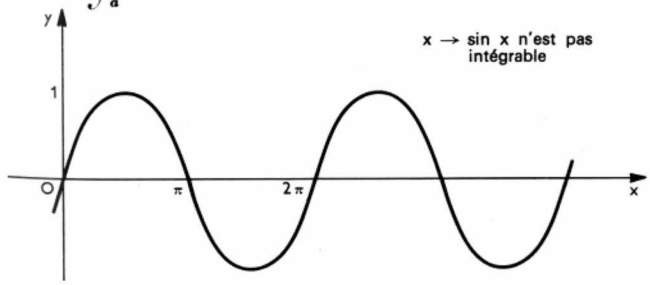
Lemme : Si f est une fonction localement intégrable de valeur absolue majorée par une fonction intégrable positive g, f est absolument intégrable et :

$$\int_a^{+\infty} |f(t)|\,dt \leqslant \int_a^{\infty} g(t)\,dt$$

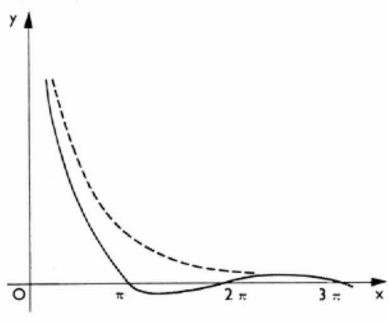
Preuve du lemme : La fonction $I(x) = \int_a^x |f(t)|\,dt$ est croissante et majorée :

$$I(x) = \int_a^x |f(t)|\,dt \leqslant \int_a^x g(t)dt \leqslant \int_a^{\infty} g(t)dt$$

car : $|f(t)| \leqslant g(t)$



$x \rightarrow \sin x$ n'est pas intégrable



$x \rightarrow \frac{\sin x}{x^2}$ est absolument intégrable

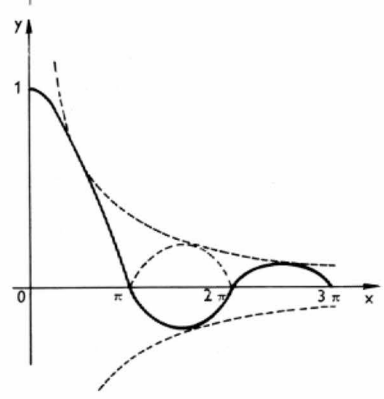


Fig. XXI-2

Fonction absolument intégrable

$x \rightarrow \frac{\sin x}{x}$ est intégrable et non absolument intégrable sur $[1, +\infty[$

Donc $I(x)$ tend vers une limite quand x tend vers l'infini : f est absolument intégrable et :

$$\lim_{x \to \infty} I(x) = \int_a^{+\infty} |f(t)|\,dt \leqslant \int_a^{\infty} g(t)dt$$

(prolongement des inégalités).

Preuve du théorème : Le produit fg est de valeur absolue majorée par la fonction absolument intégrable :

$$t \to \sup_{t \in [a, +\infty[} |g(t)| \,.\, |f(t)|$$

(car le produit d'une constante et d'une fonction est absolument intégrable).

En particulier, si nous nous donnons une fonction absolument intégrable f, nous pouvons affirmer que la fonction, égale à f quand f est positive et nulle quand f est négative, est intégrable comme produit de f par la fonction bornée $1_{\{x : f(x) \geqslant 0\}}$. Il n'en est pas de même si f n'est qu'intégrable.

1.4. Intégrale d'une fonction non bornée. — Considérons une fonction f réelle de variable réelle définie sur un intervalle $[a, b]$ sauf en un point c de cet intervalle. Supposons que la fonction f soit réglée (donc intégrable) sur tout intervalle inclus dans le complémentaire de c dans $[a, b]$. Nous pouvons ainsi définir les fonctions :

$$I(x) = \int_a^x f(t)dt \text{ pour } a < x < c$$

et :

$$J(x) = \int_x^b f(t)dt \text{ pour } c < x < b.$$

Si la fonction $I(x)$ tend vers une limite I quand x tend vers c et si la fonction $J(x)$ tend vers une limite J quand x tend vers c, la fonction f est dite **intégrable** *sur l'intervalle $[a, b]$* et nous avons :

$$I = \int_a^c f(t)dt, \quad J = \int_c^b f(t)dt,$$

$$I + J = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)dt = \int_a^b f(t)\,dt$$

Exemples :

- $$f(t) = \frac{1}{\sqrt{|t|}} \quad \text{sur } [-1, +1]$$

$$\int_{-1}^0 \frac{dt}{\sqrt{-t}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{+t}} = \lim_{x \to 0} \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(2 - 2\sqrt{x}\right) = 2 : \text{intégrable}$$

- $$f(t) = \frac{1}{t} \quad \text{sur } [-1, +1]$$

$$-\int_1^x \frac{dt}{t} = +\int_x^1 \frac{dt}{t} = \log 1 - \log x \to +\infty :$$

non intégrable.

- $$f(t) = \frac{1}{t^2} \quad \text{sur } [-1, +1]$$

$$\int_{-1}^{-x} \frac{dt}{t^2} = \int_x^1 \frac{dt}{t^2} = \left(-1 + \frac{1}{x}\right) \to \infty : \text{non intégrable.}$$

Comme pour l'intégrale sur la droite réelle, nous pouvons :

— définir des fonctions non bornées absolument intégrables sur l'intervalle $[a, b]$;

— montrer que des fonctions absolument intégrables sont intégrables à l'aide d'un critère de Cauchy ;

— trouver des théorèmes de majoration analogues à ceux des paragraphes précédents.

2. INTÉGRALE CURVILIGNE

2.1. Définition de l'intégrale curviligne d'une forme différentielle. — Théorème. Une courbe (Γ) étant déterminée par un paramétrage ou chemin de classe C^1 : $t \in I \to f(t) \in (C)$ et, étant donné une forme différentielle w sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$ qui contient (Γ), l'intégrale sur I de la fonction $f^\star w$ est indépendante du paramétrage choisi pour définir (Γ).

Cette intégrale est appelée *intégrale curviligne* de w sur (Γ) ; elle sera notée $\int_{(\Gamma)} w$.

Preuve : Soit $s \in J \to g(s) \in (\Gamma)$ un autre paramétrage de (Γ), $f^{-1} \circ g = h$ est une bijection différentiable de J sur I. D'après le théorème d'intégration par changement de variable (V. chap. 20) :

$$\int_I f^\star w(t)dt = \int_I w_{f(t)}\ [f'(t)]dt$$

$$= \int_J w_{f[h(s)]}\{f'[h(s)]\}.h'(s)ds$$

$$= \int_J w_{g(s)}\{f'[h(s)]\}.h'(s)ds.$$

Or : $w_{g(s)}\{f'[h(s)]\}.h'(s) = w_{g(s)}\{h'(s).f'[h(s)]\}$

comme $w_{g(s)}$ est linéaire. $\{h'(s).f'[h(s)]\}$ est la dérivée au point s de $f \circ h = g$. Donc, l'intégrale est égale à :

$$\int_J w_{g(s)}[g'(s)]\ ds$$

Il est possible de définir l'intégrale curviligne sur une courbe de classe C^1 par morceaux d'une forme différentielle comme la somme des intégrales sur les morceaux qui composent la courbe de cette forme.

Si nous considérons maintenant une **courbe fermée,** c'est-à-dire une courbe représentée par un paramétrage $f : [a, b] \to (C)$ telle que $O = f(a) = f(b)$, *l'intégrale curviligne est indépendante du point O choisi comme origine pour le paramétrage.*

En effet, appelons g un autre paramétrage de la même courbe : (C) $[c, d] \to (\Gamma)$ avec $O' = g(c) = g(d) = f(u)$ pour origine et tel que $g(v) = f(a) = f(b) = O$. Il vient :

$$\int_{(c),o} w = \int_{\overset{\frown}{oo'}} w + \int_{\overset{\frown}{o'o}} w = \int_a^b f^\star w(t)dt$$

$$= \int_a^u f^\star w(t)dt + \int_u^b f^\star w(t)dt$$

$$\int_{(c),o'} w = \int_{\overset{\frown}{o'o}} w + \int_{\overset{\frown}{oo'}} w = \int_c^d g^\star w(s)ds$$

$$= \int_c^v g^\star w(s)ds + \int_v^d g^\star w(s)ds$$

Or : $\begin{cases} \int_{\overset{\frown}{oo'}} w = \int_a^u f^\star w(t)dt = \int_v^d g^\star w(s)ds \\ \int_{\overset{\frown}{o'o}} w = \int_u^b f^\star w(t)dt = \int_c^v g^\star w(s)ds \end{cases}$

ce qui montre l'égalité des intégrales curvilignes correspondant aux paramétrages d'origine O et O'.

2.2. Cas de la différentielle d'une fonction. — Étudions le cas particulier où la forme différentielle n'est autre que la différentielle d'une fonction différentiable à valeurs réelles (champ de gradient). Nous avons vu que, pour qu'il en soit ainsi, il est *nécessaire* que la forme différentielle $w = P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ vérifie les propriétés suivantes :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \text{ et } \left(\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}\right) \text{ et } \left(\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}\right) \iff dw = 0$$

La réciproque est vraie et la propriété ci-dessus est une condition nécessaire et suffisante pour que la forme différentielle w soit la différentielle d'une fonction différentiable φ de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$. Supposons qu'il en soit ainsi et donnons-nous une courbe (C) d'extrémités A et B par un paramétrage $t \in [a, b] \to f(t) \in (C)$. D'après le théorème de différentiation de la composée de deux applications différentiables, la fonction réelle de variable réelle $\varphi \circ f$ est dérivable en tout point de $[a, b]$ et sa dérivée est $D\varphi[f'(t)] = f^\star w(t)$.

Par conséquent, nous pouvons écrire l'intégrale curviligne :

$$\int_{(c)} w = \int_a^b f^{\star}w(t)dt = \varphi[f(b)] - \varphi[f(a)] = \varphi(B) - \varphi(A)$$

Celle-ci ne dépend que des extrémités de la courbe : nous dirons que *la forme différentielle w dérive du potentiel* φ (cas du champ électrostatique en physique). Cette propriété est à l'origine de l'expression « différentielle totale exacte » qui s'applique à une forme différentielle dont l'intégrale curviligne sur une courbe ne dépend que de *l'état initial et de l'état final* mais non du chemin parcouru. Dans le cas d'une courbe fermée, les points A et B sont confondus et l'intégrale curviligne est nulle.

2.3. Calcul de la longueur d'une courbe. — Considérons maintenant une application de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$, soit F. Étant donnée une courbe $(C) : t \in I \to f(t) \in (C) \in \mathbf{R}^n$, nous pouvons lui associer la fonction de I dans $\mathbf{R}$: $t \in I \to F[f(t), f'(t)] \in \mathbf{R}$. Il s'agit d'une généralisation de la situation précédente où l'application F définie par la forme différentielle w était $F(f, f') = w_f(f')$; dans ce cas, F était linéaire par rapport à la seconde variable. Nous pouvons nous demander quelle condition doit être satisfaite par F pour que l'intégrale de la fonction de I dans $\mathbf{R}$ associée soit indépendante du paramétrage choisi et ne dépende que de la courbe sur laquelle nous intégrons (cas dans lequel nous pouvons donc définir une intégrale de F le long d'une courbe). En examinant la démonstration de l'invariance par changement de paramétrage de l'intégrale curviligne d'une forme différentielle, nous constatons que la seule propriété utilisée est l'homogénéité de F par rapport à la seconde variable (propriété plus faible que la linéarité) qui exprime que $F(f, kf') = kF(f, f')$. Il existe des fonctions qui ne sont pas des formes différentielles qui possèdent cette propriété (nous appellerons « fonctionnelle homogène » une telle généralisation de forme différentielle), comme, par exemple, $F(x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_n) = (x'^2_1 + x'^2_2 + \ldots + x'^2_n)^{\frac{1}{2}}$; l'intégrale le long d'une courbe d'extrémités A et B de cette fonction est définie comme étant la longueur de la courbe AB. Cette définition est justifiée par un fait facile à vérifier : dans le cas d'une ligne polygonale brisée, la valeur de l'intégrale coïncide effectivement avec la somme des longueurs (définies par les distances euclidiennes) des segments de droite qui la composent. De plus, nous pouvons montrer que cette intégrale est la limite de la suite des longueurs de toute suite de lignes polygonales dont les sommets seraient sur la courbe (C) et qui l'approcherait uniformément.

Exemples :

— *Longueur du cercle :* un paramétrage du cercle est :

$$t \in [0, 2\pi] \to \begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$$

Nous déduisons :

$$dx = -r\sin t\, dt$$
$$dy = r\cos t\, dt$$

et : $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (\sin^2 t + \cos^2 t) = r^2$

la longueur du cercle est donc égale à $\int_0^{2\pi} \sqrt{r^2}.dt = 2\pi r$

— *Longueur d'une courbe en coordonnées polaires* $r = f(t)$:

$$\begin{cases} x = f(t)\cos t \\ y = f(t)\sin t \end{cases} \quad \begin{cases} dx = [-f(t)\sin t + f'(t)\cos t]\, dt \\ dy = [\ \ f(t)\cos t + f'(t)\sin t]\, dt \end{cases}$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$
$$= f^2(t)\ (\sin^2 t + \cos^2 t) + f'(t)^2(\cos^2 t + \sin^2 t)$$
$$= f(t)^2 + f'(t)^2.$$

La longueur de l'arc de courbe M_1M_2 est donc égale à :

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{f(t)^2 + f'(t)^2}\, dt$$

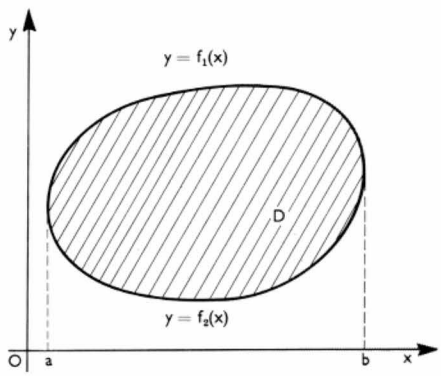


Fig. XXI-3

Intégrale double

3. INTÉGRALES MULTIPLES

Elles remplacent les intégrales que nous venons d'étudier lorsque les fonctions dépendent de plusieurs variables réelles. Une théorie des intégrales multiples peut être fondée sur des fonctions étagées construites à partir des fonctions indicatrices de rectangles. Cette théorie de l'intégration des fonctions réglées réelles d'une variable réelle se généralise dans la théorie de la mesure développée au XXe siècle qui dépasse le cadre de cet ouvrage.

Tous les théorèmes importants de la théorie de l'intégration se généralisent. Dans ce qui va suivre, par souci de simplifier l'écriture, nous nous contenterons d'énoncer les théorèmes dans le cas de deux variables ; ils sont bien sûr vrais dans le cas général de n variables.

3.1. Définition. — La définition des intégrales multiples est justifiée par le théorème suivant que nous ne démontrerons pas.

Théorème : Soit un rectangle $I \times J$ de $\mathbf{R}^2$ et une fonction continue f sur ce rectangle à valeurs réelles. La fonction réelle de variable réelle $y \to \int_I f(x, y)\, dx$ est continue sur J (théorème démontré au chapitre précédent) donc intégrable et nous avons l'égalité suivante :

$$\int_J \left(\int_I f(x, y)dx\right) dy = \int_I \left(\int_J f(x, y)\, dy\right) dx$$

Cette quantité, notée $\iint_{I\times J} f(x, y)\, dx\, dy$ est appelée *intégrale double* de f sur $I \times J$.

En réalité, ce théorème est vrai pour des fonctions beaucoup moins particulières que les fonctions continues (toutes les fonctions bornées que nous étudions dans les applications vérifient le théorème). Nous pouvons aussi définir des intégrales multiples impropres bien qu'il soit nécessaire de se restreindre à intégrer des fonctions absolument convergentes. Quand la fonction à intégrer peut s'écrire sous la forme $f(x, y) = g(x)h(y)$ alors :

$$\int_I g(x)h(y)dx = h(y)\int_I g(x)dx$$

donc :

$$\int_J \left[(h(y)\int_I g(x)dx\right]dy = \int_I g(x)dx.\int_J h(y)dy$$

Voici un exemple :

$$\begin{cases} g(x) = \mathbf{e}^{-x^2} \\ h(y) = \mathbf{e}^{-y^2} \end{cases} \quad \left(\int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-x^2}\, dx\right)^2$$
$$= \int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-x^2}\, dx.\int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-y^2}\, dy = \iint_D \mathbf{e}^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

Nous ne pouvons d'ailleurs calculer la valeur de cette intégrale sur le quart de plan positif (intégrale d'une fonction gaussienne) qu'après un changement de variables. Supposons maintenant que nous voulions intégrer une fonction continue f sur un ensemble E de $\mathbf{R}^2$ qui ne soit pas un rectangle ; cela revient à intégrer sur un rectangle contenant E le produit de f et de la fonction indicatrice de E égale à 1 sur E et à 0 ailleurs. Le théorème énoncé ci-dessus

s'applique à cette fonction. Si l'ensemble E est limité par une courbe fermée décomposable en deux arcs de courbes représentés par :

$$\begin{cases} x \in [a,b] \longrightarrow f_1(x) \in \mathbf{R} \\ x \in [a,b] \longrightarrow f_2(x) \in \mathbf{R} \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} f_1(a) = f_2(a) \\ f_1(b) = f_2(b) \end{cases}$$

et : $\forall x \quad m \leqslant f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant M$

Il vient :

$$\int_m^M f(x,y)\ 1_E(x,y)\,dy = \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dy$$

C'est cette fonction de x que nous intégrerons sur $[a, b]$ pour calculer l'intégrale double. Si, par exemple, $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = f(x)$ sur $[a, b]$ et $f(x, y) = 1$:

$$\iint_E 1\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_0^{f(x)} 1\,dy \right) dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Nous verrons que nous définissons ainsi l'aire de la surface comprise entre le graphe de $[y = f(x)]$ et l'axe des x.

3.2. Changement de variables dans l'intégrale multiple. — Nous admettrons sans démonstration le théorème suivant :

Théorème : Soit E_1 et E_2 deux ouverts bornés de $\mathbf{R}^2$, f une fonction continue de E_1 dans $\mathbf{R}$ et φ une application de E_1 dans E_2 (application de changement de variables) continue, inversible et de classe C^1 ainsi que son inverse. $|D\varphi|$ désigne la valeur absolue du déterminant de la matrice jacobienne associée à la différentielle de φ (c'est donc une fonction positive et continue de E_2 dans $\mathbf{R}$). Nous avons alors l'égalité suivante :

$$\iint_{E_1} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{E_2} f \circ \varphi\ (u,v)\ |D\varphi|_{(u,v)}\,du\,dv$$

Nous allons appliquer ce théorème au calcul de l'intégrale gaussienne ci-dessus en calculant l'intégrale impropre sur le quart de plan D comme la limite des intégrales sur des quarts de cercles (Q_r) de centre O et de rayon r quand $r \to \infty$.

Nous avons donc :

$$\left(\int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-x^2}\,dx \right)^2 = \iint_D \mathbf{e}^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

$$= \lim_{r \to \infty} \iint_{Q_r} \mathbf{e}^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

Effectuons le changement de coordonnées polaires :

$$\begin{matrix} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\rho \\ d\theta \end{bmatrix} \Rightarrow |D\varphi| = |\rho|$$

$$\varphi(\rho, \theta) = (x, y)$$

$$\varphi : E_2 = \mathbf{R} \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to E_1 = Q_r$$

donc :

$$\iint_{Q_r} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^r \left[\int_0^{\pi/2} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,d\theta \right] \rho\,d\rho$$

et comme : $f(x, y) = \mathbf{e}^{-(x^2+y^2)} = \mathbf{e}^{-\rho^2}$

$$\iint_{Q_r} \mathbf{e}^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^r \int_0^{\pi/2} \mathbf{e}^{-\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^r \mathbf{e}^{-\rho^2}\,\rho\,d\rho = \frac{\pi}{4} \int_0^{r^2} \mathbf{e}^{-r}\,dr = \frac{\pi}{4}\,(1 - \mathbf{e}^{-r^2})$$

D'où :

$$\int_0^{\infty} \mathbf{e}^{-x^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

4. FORMULES INTÉGRALES DE L'ANALYSE VECTORIELLE

4.1. Intégrales de surface. — La théorie de l'intégrale curviligne se généralise très naturellement en une théorie d'intégrale de surface. Cependant, les démonstrations sont, en général, assez difficiles et la notion d'orientation intervient dans l'énoncé des théorèmes.

Soit une surface orientée de $\mathbf{R}^3$ donnée par un paramétrage $(u, v) \to (x, y, z) = M(u, v)$ (ou carte de la surface). Considérons une forme différentielle w de degré 2 sur $\mathbf{R}^2$; la composée $M^\star w$ est une forme différentielle de degré 2 sur $\mathbf{R}^2$ qui s'exprime donc par : $[f(u, v)\,du\,dv]$.

L'intégrale double $\iint f(u, v)\,du\,dv$ est indépendante du paramétrage choisi en respectant l'orientation ; elle ne dépend que de la surface orientée et de la forme différentielle w ; nous disons que c'est l'*intégrale de surface* de la forme différentielle w.

4.2. Circulation d'un champ de vecteurs le long d'une courbe. — En mécanique, la notion de travail d'un champ de forces le long d'un chemin est fondamentale ; l'idée de base est que les forces qui produisent un travail sont les forces tangentes au chemin parcouru (pour les forces perpendiculaires au chemin parcouru, le travail est nul). Il est donc naturel de traduire le travail d'une force sur un chemin rectiligne par le produit scalaire de la force et du vecteur du déplacement. À l'échelle infinitésimale, nous sommes conduits à écrire que le travail d'un champ de forces $[F_1(M), F_2(M), F_3(M)]$ au point M, lors d'un déplacement infiniment petit $\overrightarrow{ds}$ (de coordonnées dx, dy, dz) est égal à $F(M) \cdot \overrightarrow{ds} = F_1(M)\,dx + F_2(M)\,dy + F_3(M)\,dz$.

Définition. La *circulation* d'un champ de vecteurs de $\mathbf{R}^3$ $\overrightarrow{V}(x, y, z)$, de composantes $A(x, y, z)$, $B(x, y, z)$ et $C(x, y, z)$ le long d'une courbe $t[a, b] \to [x(t), y(t), z(t)]$ est égale à l'intégrale curviligne sur cette courbe de la forme différentielle :

$$A(x,y,z)\,dx + B(x,y,z)\,dy + C(x,y,z)\,dz$$

soit, par exemple, à :

$$\int_a^b A[x(t), y(t), z(t)]x'(t)dt + \int_a^b \ldots$$

Elle sera notée : $\int \overrightarrow{V}\,\overrightarrow{ds}$

Remarquons que la circulation d'un champ de gradients le long d'une courbe ne dépend que des extrémités de la courbe ; en particulier, elle est nulle le long d'une courbe fermée, cette propriété caractérise d'ailleurs les champs de gradients.

4.3. Flux d'un champ de vecteurs à travers une surface orientée. — La notion de circulation pour une courbe a pour homologue la notion de flux d'un champ de vecteurs à travers une surface. Nous avons déjà défini (V. chap. 19) la forme différentielle de degré 2 à valeurs dans $\mathbf{R}^3$: c'est ce que nous appellerons *vecteur-surface* $\overrightarrow{dS}$ dont les composantes sont $dy\,dz$, $dz\,dx$ et $dx\,dy$.

Définition. Le flux d'un champ de vecteurs de $\mathbf{R}^3$ $\overrightarrow{V}(x, y, z)$, de composantes $A(x, y, z)$, $B(x, y, z)$ et $C(x, y, z)$ à travers une surface orientée

$$(u, v) \to [x(u, v), y(u, v)\,z(u, v)]$$

est égale à l'intégrale de surface de la forme différentielle de degré 2 :

$$A(x,y,z)\,dy\,dz + B(x,y,z)\,dz\,dx + C(x,y,z)\,dx\,dy$$

c'est-à-dire à :

$$\iint A[x(u,v), y(u,v), z(u,v)] \left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} \right) du\,dv + \iint \ldots$$

Elle sera notée : $\int \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{dS}$.

Un champ de vecteurs est à **flux conservatif** si le flux de ce champ de vecteurs à travers une surface orientée ne dépend que du bord de cette surface et notamment si le flux du champ à travers une surface fermée est nulle. Nous ne définirons pas le bord d'une variété de dimension n ; le mot bord est très bien adapté à la notion intuitive géométrique : il s'agit d'une variété de dimension $(n - 1)$ qui est la « frontière » de la première variété. Par exemple, le bord

d'une courbe est constituée par ses extrémités qui sont des points, le bord d'une surface (resp. d'un volume) est la courbe (resp. la surface) qui le limite.

4.4. Théorème de Stokes. — Le théorème de Stokes est un théorème fondamental que nous ne démontrerons pas. Lorsque certaines hypothèses de régularité (que nous n'expliciterons pas) sont satisfaites, il affirme qu'étant donnée une forme différentielle w de degré $(n-1)$ et une variété V à bord bV de dimension n, nous pouvons écrire : $\int_{bV} w = \int_V dw$. Il est intéressant d'en énoncer les applications connues sous le nom de *formules intégrales de l'analyse vectorielle* et sans cesse utilisées en théorie des champs élémentaires.

- **Premier cas** : $n = 1$

V est une courbe $\overset{\frown}{AB}$ d'extrémités A et B, w est une fonction réelle f, df est sa différentielle ; la formule de Stokes s'écrit : $f(B) - f(A) = \int_{\overset{\frown}{AB}} \overrightarrow{\text{grad}}\, f \,.\, \overrightarrow{ds}$ et : $\overrightarrow{ds} \begin{cases} dx \\ dy \\ dz \end{cases}$

- **Second cas** : $n = 2$

V est une surface (S) dont le bord est une courbe (C), w est une forme différentielle de degré 1 à laquelle est associé un champ de vecteurs $\vec{V}$ de composantes A, B, C :

$$w = A\,dx + B\,dy + C\,dz \quad (w = \vec{V} \,.\, \overrightarrow{ds})$$

$$dw = \left(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x}\right) dx\,dy + \left(\frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial y}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z}\right) dz\,dx$$

Il est donc naturel d'écrire symboliquement :

$$dw = \overset{\smile}{\text{rot}}\, \vec{V} \,.\, \overrightarrow{dS} \quad \text{avec } \overrightarrow{dS} \begin{cases} dx\,dy \\ dy\,dz \\ dz\,dx \end{cases}$$

La formule de Stokes prend alors la forme suivante :

$$\int_{(C)} \vec{V}\,\overrightarrow{ds} = \int_{(S)} \overset{\smile}{\text{rot}}\, \vec{V} \,.\, \overrightarrow{dS}.$$

- **Troisième cas** : $n = 3$

v est un volume (v) dont le bord est une surface (S) ; w est une forme différentielle de degré 2 à laquelle est associé un champ de vecteurs $\vec{V}$:

$$w = A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy$$

$$dw = \frac{\partial A}{\partial x}\,dy\,dz\,dx + \frac{\partial B}{\partial y}\,dz\,dx\,dy + \frac{\partial C}{\partial z}\,dx\,dy\,dz.$$

Comme $dv = dy\,dz\,dx = dz\,dx\,dy = dx\,dy\,dz$, il est naturel d'écrire $dw = \text{div}\, \vec{V}\, dv$.

La formule de Stokes devient :

$$\int_{(S)} \vec{V} \,.\, \overrightarrow{dS} = \int_{(V)} \text{div}\, (\vec{V})\, dv \qquad \text{(formule d'Ostrogradski)}$$

Conséquences :

$\vec{V}$ est à flux conservatif si, et seulement si, $\text{div}\, \vec{V} = 0$;

$\vec{W}$ est à circulation conservatrice si, et seulement si, $\overset{\smile}{\text{rot}}\, \vec{W} = 0$.

Ainsi, nous avons démontré que :

$\text{div}\, \vec{V} = 0 \iff$ il existe un champ de vecteurs $\vec{A}$ dont $\vec{V}$ est le rotationnel ;

$\overset{\smile}{\text{rot}}\, \vec{V} = 0 \iff$ il existe une fonction U dont $\vec{W}$ est le gradient (V. § 2.2).

Nous en concluons que :

— les seuls champs à flux conservatifs sont les champs de rotationnels ;

— les seuls champs à circulation conservative sont les champs de gradients.

Nous appelons *potentiel vecteur* du champ $\vec{V}$, le champ de vecteurs dont $\vec{V}(x)$ est le rotationnel au point x et *potentiel* du champ $\vec{W}$ (scalaire), la fonction $\vec{U}$ dont $\vec{W}(x)$ est le gradient au point x.

5. CALCULS DE SURFACE

5.1. Calcul de l'aire d'une surface. — Considérons d'abord une surface plane, c'est-à-dire une portion de plan limitée par un contour. L'aire de cette surface peut être calculée en utilisant le résultat qui a permis de définir l'intégrale simple ou en prenant l'intégrale double sur la surface de la fonction constante 1, c'est-à-dire de la forme différentielle $dx\,dy$ de degré 2. Considérons, par exemple, une surface limitée « en haut » par une courbe d'équation : $x \in [a, b] \to f(x)$ et « en bas » par une courbe d'équation $x \in [a, b] \to g(x)$. L'aire de la surface est donnée :

— soit par la formule : $\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

— soit par l'intégrale :

$$\iint_S dx\,dy = \int_a^b dx \left(\int_{g(x)}^{f(x)} dy\right) = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

Dans l'espace, considérons une surface (S) donnée par une carte $(u, v) \to M(x, y, z)$; l'aire de la surface est fournie par l'intégrale de surface attachée à la fonction homogène :

$$\left\| \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial v} \right\| = \|\overrightarrow{dN}\|$$

$$= \sqrt{(dy \wedge dz)^2 + (dz \wedge dx)^2 + (dx \wedge dy)^2}$$

Nous retrouvons l'analogie avec le calcul de la longueur d'une courbe comme intégrale curviligne de :

$$\left\| \frac{\overrightarrow{dM}}{dt} \right\| = |\overrightarrow{ds}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

Dans le cas où z est donnée par une équation cartésienne :

$$z = f(x, y) \to dz = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy$$

$$\int_S \|\overrightarrow{dN}\| = \int_{PS} \left[\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}\right] dx\,dy$$

où PS est la projection de S sur le plan xOy.

5.2. Angle solide. — En utilisant les résultats ci-dessus, calculons l'aire de la sphère de centre O et de rayon R :

$$\begin{cases} x = R\cos\theta\cos\varphi \\ y = R\sin\theta\cos\varphi \\ z = R\sin\varphi \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \\ -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant +\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} dx = -R\cos\theta\sin\varphi\,d\varphi - R\sin\theta\cos\varphi\,d\theta \\ dy = -R\sin\theta\sin\varphi\,d\varphi + R\cos\theta\cos\varphi\,d\theta \\ dz = R\cos\varphi\,d\varphi \end{cases}$$

$$dy \wedge dz = R^2\cos\theta\cos^2\varphi\,d\theta\,d\varphi$$

$$dz \wedge dx = R^2\sin\theta\cos^2\varphi\,d\theta\,d\varphi$$

$$dx \wedge dy = +R^2\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi\,d\theta\,d\varphi + R^2\cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi\,d\theta\,d\varphi$$

$$dx \wedge dy = R^2\sin\varphi\cos\varphi\,d\theta\,d\varphi$$

$$\|\overrightarrow{dN}\| = R^2\sqrt{\cos^4\varphi + \sin^2\varphi\cos^2\varphi}\,d\theta\,d\varphi = R^2|\cos\varphi|\,d\theta\,d\varphi$$

L'aire de la sphère est donc égale à :

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2\,|\cos\varphi|\,d\theta\,d\varphi = 4\pi R^2$$

Nous avons vu que, dans le plan, un angle était mesuré par la longueur de l'arc de cercle de rayon 1 qu'il intercepte. Des considérations physiques (théorie du champ électromagnétique) ont amené à généraliser la notion d'angle à plus de deux dimensions.

Définition : Un angle solide de sommet O déterminé par la surface (S) est l'aire de la portion de sphère de centre O et de rayon 1, interceptée avec le cône de sommet O circonscrit à S. Nous disons aussi que c'est l'angle sous lequel (S) est vue du point O.

Théorème : L'angle solide Ω de sommet O déterminé par S est égal à l'intégrale de surface sur S de la fonction

$$d\Omega = \frac{\overrightarrow{dN}.\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|^3} = \frac{x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

ou encore, si nous posons $\|\overrightarrow{OM}\| = r$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{dN}) = \theta$

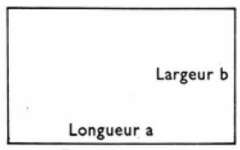
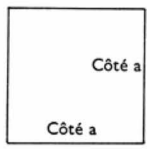
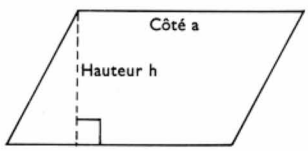
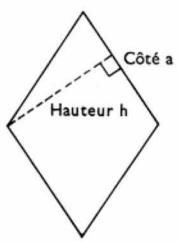
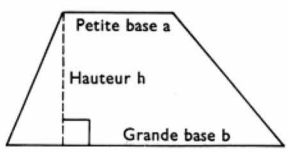
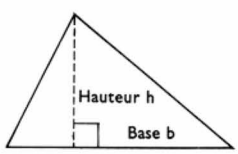
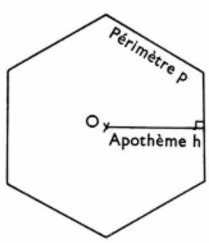
$$d\Omega = \frac{\cos\theta\,\|\overrightarrow{dN}\|}{r^2} \quad \text{et} \quad \Omega = \int_S \frac{\cos\theta\,\|\overrightarrow{dN}\|}{r^2}$$

La démonstration de ce théorème consiste à calculer l'aire de la transformée de (S) par la transformation $\overrightarrow{OP} = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$.

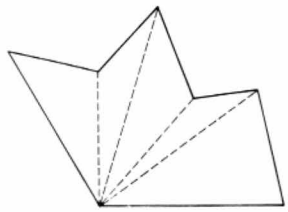
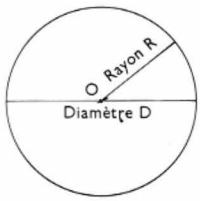
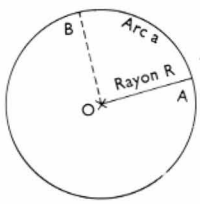
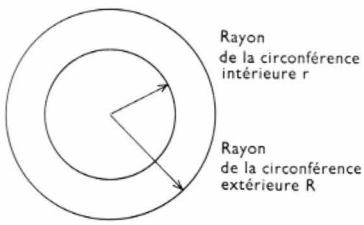
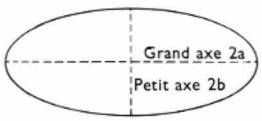
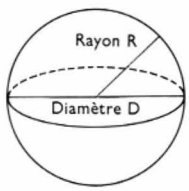
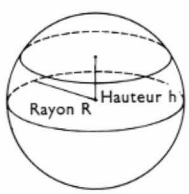
Dans le cas où (S) est un secteur sphérique de centre O intercepté par un cône de demi-angle au sommet θ_0, on a :

$$\Omega = 2\pi\,(1 - \cos\theta_0)$$

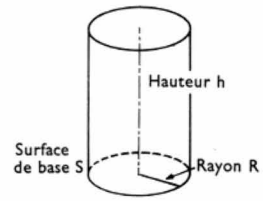
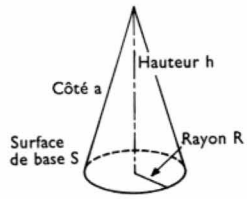
Calcul des surfaces

Figure	Définition	Aire
	Rectangle : quadrilatère dont les quatre angles sont droits	longueur × largeur $S = ab$
	Carré : rectangle dont les côtés sont égaux	côté × côté $S = a.a = a^2$
	Parallélogramme : quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles	côté × hauteur abaissée sur ce côté $S = a.h$
	Losange : parallélogramme dont deux côtés consécutifs sont égaux	côté × hauteur $S = a.h$
	Trapèze : quadrilatère dont deux côtés opposés sont parallèles	demi-somme des bases × hauteur $S = \dfrac{a+b}{2}.h$
	Triangle : figure à trois côtés	$\dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$ $S = \dfrac{b.h}{2}$
	Polygone régulier : figure dont les côtés ainsi que les angles au sommet sont égaux	$\dfrac{\text{périmètre} \times \text{apothème}}{2}$ $S = \dfrac{p.h}{2}$

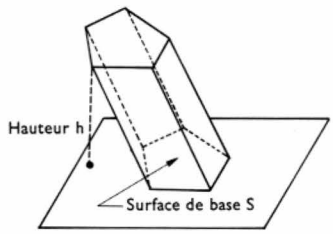
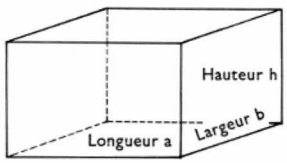
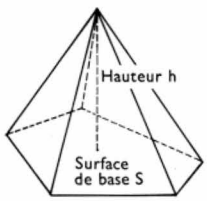
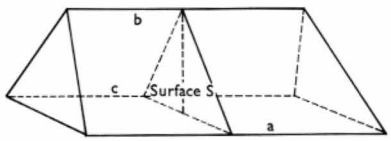
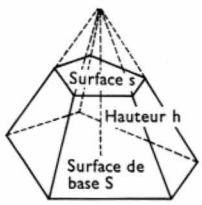
Calcul des surfaces (suite)

Figure	Définition	Aire
	Polygone irrégulier: figure formée par une ligne brisée fermée	diviser la surface en autant de triangles qu'il est nécessaire
	Cercle: figure formée par une ligne plane fermée dont tous les points sont à égale distance d'un point de son plan, appelé centre	$\pi \times$ rayon $\times$ rayon $S = \pi R^2 = \frac{\pi D^2}{4}$
	Secteur circulaire: portion de cercle comprise entre un arc AB et les rayons OA et OB	$\frac{\text{arc} \times \text{rayon}}{2}$ $S = \frac{a \cdot R}{2}$
	Couronne circulaire: portion de surface comprise entre deux cercles concentriques	$\pi \times$ différence des carrés des rayons $S = \pi (R^2 - r^2)$
	Ellipse: courbe plane telle que la somme des distances de chacun de ses points à deux points fixes déterminés de son plan (les foyers) soit constante	$\pi \times \frac{\text{grand axe}}{2} \times \frac{\text{petit axe}}{2}$ $S = \pi . a . b$
	Sphère: solide dont tous les points de la surface sont à égale distance d'un point intérieur appelé centre	$4\pi \times$ rayon $\times$ rayon $S = 4\pi R^2 = \pi D^2$
	Zone de sphère: portion de la surface d'une sphère, comprise entre deux plans parallèles	$2\pi \times$ rayon de la sphère $\times$ hauteur de la zone $S = 2\pi R . h$

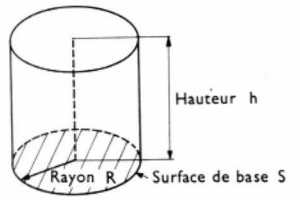
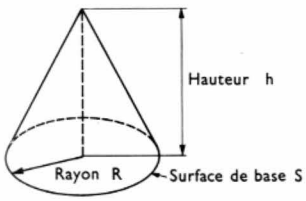
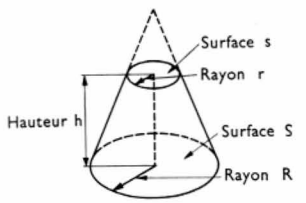
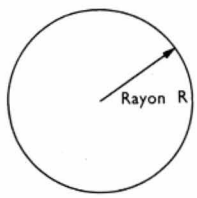
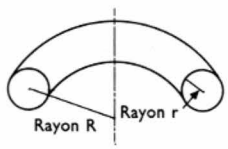
Calcul des surfaces (suite)

Figure	Définition	Aire
	Cylindre circulaire droit: solide engendré par la révolution d'un triangle tournant autour d'un de ses côtés	surface latérale: longueur de la circonférence de la base × hauteur $S_l = 2\pi\ Rh$ surface totale: $S_t = 2\pi\ Rh + 2\pi R^2$
	Cône circulaire droit: solide engendré par la révolution d'un triangle tournant autour d'un des côtés de l'angle droit	surface latérale: $\frac{1}{2}$ × longueur de la circonférence de la base × côté $S = \pi\ Ra$

Calcul des volumes

Figure	Définition	Volume
	Prisme : figure limitée de tous côtés par des polygones tels que les faces latérales soient des parallélogrammes et que les bases soient deux polygones plans égaux et parallèles	surface de base × hauteur $V = S.h$
	Parallélépipède rectangle: prisme droit dont les bases sont des rectangles	longueur × largeur × hauteur $V = a.b.h.$
	Pyramide: solide dont une face (base) est un polygone plan et dont les faces latérales sont des triangles ayant pour bases respectives les côtés de ce polygone et pour sommet commun un point extérieur au plan du polygone	$\frac{\text{surface de base} \times \text{hauteur}}{3}$ $V = \frac{S.h}{3}$
	Tronc de prisme triangulaire: solide obtenu en tronquant un prisme triangulaire par un plan non parallèle aux bases et en enlevant une des deux parties	surface d'une section droite × le tiers de la somme des trois arêtes latérales $V = \frac{S\ (a + b + c)}{3}$
	Tronc de pyramide à bases parallèles: solide obtenu en coupant une pyramide par un plan parallèle à la base et en enlevant la partie supérieure	somme des volumes de trois pyramides de même hauteur h et dont les bases auraient des aires respectivement égales à S, s et $\sqrt{S.s}$ $V = \frac{h(S + s + \sqrt{S.s})}{3}$

Calcul des volumes (suite)

Figure	Définition	Volume
	Cylindre	surface de base × hauteur $V = S.h = \pi R^2 h$
	Cône circulaire droit	$\frac{\text{surface de base} \times \text{hauteur}}{3}$ $V = \frac{S.h}{3} = \frac{\pi R^2 h}{3}$
	Tronc de cône à bases parallèles: solide obtenu en coupant un cône par un plan parallèle à la base et en enlevant le cône supérieur	somme des volumes de trois cônes de hauteur h et dont les bases ont des aires respectivement égales à S, s, et $\sqrt{S.s}$ $V = \frac{h(S + s + \sqrt{S.s})}{3}$ $= \frac{\pi h(R^2 + r^2 + Rr)}{3}$
	Sphère	$\frac{4\pi \times \text{rayon au cube}}{3}$ $V = \frac{4\pi R^3}{3}$
	Tore: solide engendré par la rotation d'un cercle autour d'un axe situé dans son plan mais extérieur à ce cercle	aire de la section × longueur de la circonférence moyenne $V = \pi r^2 \times 2\pi R = 2\pi^2 r^2 R$

CHAPITRE XXII

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

1. POSITION DU PROBLÈME

1.1. Problème physique. — Dans de nombreux problèmes physiques dont le but est l'étude d'un phénomène fonction d'une ou plusieurs variables (par exemple, le temps), il faut établir une relation liant l'instant t et la valeur d'une grandeur à l'instant t. Supposons, par exemple, que l'évolution du phénomène soit représentée par une application $t \to M(t)$ de la droite réelle (ensemble des temps) dans un espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ ($n = 3$ si le phénomène étudié est un point matériel, $n = 6$ si le phénomène étudié se compose de deux points matériels en mécanique). L'état du système à l'instant t est représenté non seulement par le point $M(t)$ mais aussi par les dérivées de l'application par rapport au temps: $\frac{dM}{dt}, \frac{d^2M}{dt^2}$ qui sont appelées respectivement *vitesse* et *accélération* du phénomène; en effet, ces quantités correspondent à des grandeurs physiques qui interviennent dans les lois physiques. Par exemple, en mécanique, le frottement est proportionnel à la vitesse et la « force d'inertie » est proportionnelle à l'accélération (principe fondamental de la mécanique). Donc, le problème physique de la détermination de l'évolution d'un phénomène au cours du temps devient un problème mathématique: il s'agit de trouver toutes les applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^n$: $t \to M(t)$ telle qu'une certaine relation entre t, $M(t)$ et ses dérivées successives soit satisfaite. Cette relation sera appelée **équation différentielle** et **l'ordre** de l'équation différentielle sera le plus élevé des ordres des dérivées intervenant dans la relation.

1.2. Interprétation géométrique d'une équation différentielle du premier ordre. — Considérons un champ de vecteurs de $\mathbf{R}_P$, c'est-à-dire une application

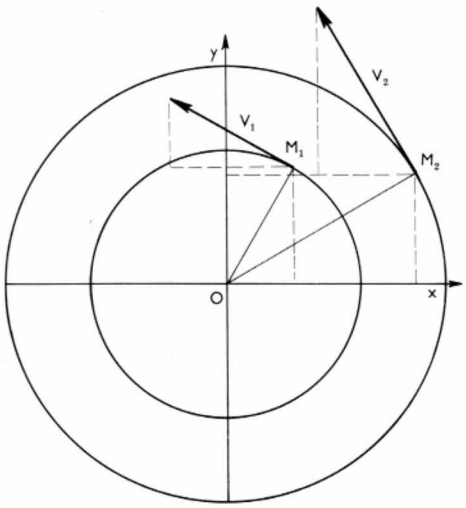


Fig. XXII-1

Champ de vecteurs et courbes intégrales (champ radial)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases}$$

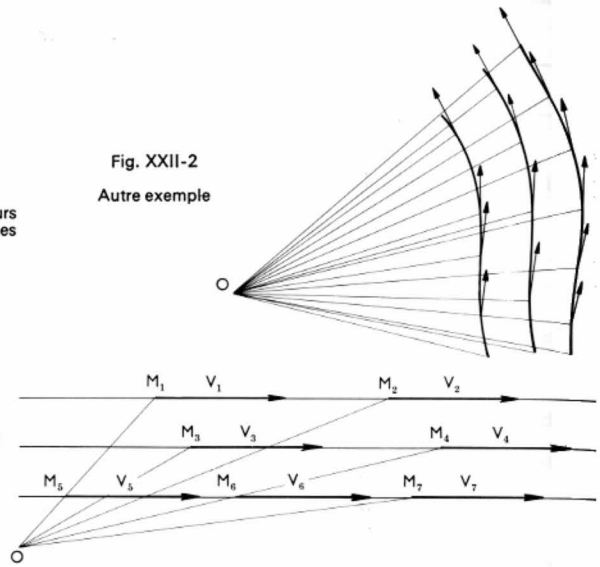


Fig. XXII-2

Autre exemple

Fig. XXII-3

Champ uniforme

$M \to F(M)$ de $\mathbf{R}^p$ dans lui-même ; nous pouvons lui associer l'équation différentielle $\frac{dM}{dt} = F(M)$. Il s'agit donc de déterminer toutes les trajectoires $t \to M(t)$ dont les vecteurs-vitesses en chaque point soient les vecteurs du champ considéré initialement. Réciproquement, étant donné une équation différentielle du premier ordre résolue par rapport à la dérivée : $\frac{dM}{dt} = F(t, M)$ où F est une application de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^p$, nous pouvons lui associer le champ de vecteurs dans $\mathbf{R}^{p+1}$: $(t, M) \to [1, F(t, M)]$.

Soit $t \to M(t)$ une solution de l'équation différentielle étudiée ; nous lui associons la trajectoire dans $\mathbf{R}^{p+1}$: $t \to [t, M(t)]$ dont le vecteur-vitesse au point t est $\left(1, \frac{dM}{dt}\right) = \{1, F[t, M(t)]\}$.

À titre d'exemple, considérons le champ de vecteurs suivant dans $\mathbf{R}^2$ (fig. XXII-1, XXII-2 et XXII-3) : $(x, y) \to (-y, x)$.

L'équation différentielle s'écrit : $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y \\ \frac{dy}{dt} = +x \end{cases}$

Les solutions sont : $\begin{cases} x = A \cos(t - \varphi) \\ y = A \sin(t - \varphi) \end{cases}$ $(A = Cte)$

Les trajectoires correspondantes sont des cercles concentriques ayant l'origine pour centre et qui sont parcourus d'un mouvement uniforme à une vitesse inversement proportionnelle au rayon du cercle. Constatons que cette équation différentielle admet une infinité de solutions à deux paramètres réels.

1.3. Simplification d'une équation différentielle. Dans l'alinéa précédent, nous avons supposé que nous pouvions « résoudre » l'équation différentielle par rapport à la dérivée, c'est-à-dire qu'étant donnée une équation différentielle $G\left(t, M, \frac{dM}{dt}\right)$, il existait une fonction F de $(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^p)$ dans $\mathbf{R}^p$ telle que nous ayons l'équivalence :

$$G(t, x, y) = 0 \iff y = F(t, x).$$

Cela est d'ailleurs une propriété de la fonction G indépendamment de la notion d'équation différentielle. Un théorème dit des *fonctions implicites* affirme que, sous certaines hypothèses, la fonction G vérifie bien cette propriété.

Plus généralement, étant donné une équation différentielle d'ordre n, $G\left(t, M, \ldots, \frac{d^n M}{dt^n}\right) = 0$; nous chercherons à « expliciter » la dernière dérivée et à mettre l'équation différentielle sous une forme équivalente :

$$\frac{d^n M}{dt^n} = F\left(t, M, \ldots, \frac{d^{n-1} M}{dt^{n-1}}\right)$$

Dans le cas où cette explicitation est impossible, le problème de recherche des solutions de l'équation différentielle est beaucoup plus compliqué que dans le cas usuel.

Remarque. Une équation différentielle « explicitée » d'ordre n peut être ramenée à une équation différentielle du premier ordre :

$\frac{d^n M}{dt^n} = F\left((t, M, \ldots, \frac{d^{n-1} M}{dt^{n-1}}\right)$ équation différentielle d'ordre n dans $\mathbf{R}^p$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} M_1 \\ \ldots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_2 \\ \ldots \\ M_n \\ F(t, M_1, \ldots, M_n) \end{bmatrix}$$

équation différentielle du premier ordre dans $\mathbf{R}^{np}$.

Avec la terminologie classique, l'écriture ci-dessus désigne un système différentiel de p équations dans $\mathbf{R}^n$.

2. THÉORÈME D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ

Dans l'exemple simple choisi au paragraphe précédent, nous avons vu que la solution d'une équation différentielle n'est pas unique ; en général, au contraire, il y a une infinité de solutions. L'exemple ci-après confirme cette observation ; les solutions de l'équation $\frac{dx}{dt} = f(t)$ sont les primitives de la fonction f.

La fonction $x(t) = \int_0^t f(u)du = F(t)$ est la primitive de la fonction f (V. chap. 20) prenant la valeur 0 pour $t = 0$ et la fonction $F(t) + k$ est une primitive de cette même fonction f prenant la valeur k pour $t = 0$. Ces fonctions sont d'ailleurs les seules solutions de l'équation différentielle car deux fonctions ayant la même dérivée en chaque point ne peuvent différer que d'une constante. Pour connaître la solution de l'équation différentielle, il faut et il suffit de fixer la valeur de la fonction-solution pour $t = 0$ (comme dans les applications t représente généralement la variable temps, nous dirons qu'il faut fixer la (ou les) *condition initiale*). De même, dans l'exemple du paragraphe précédent, les conditions initiales x_0 et y_0 déterminent les solutions du système différentiel de deux équations :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y \\ \frac{dy}{dt} = x \end{cases}$$

Pour $t = 0$ $\begin{cases} x_0 = A \cos\varphi \\ y_0 = -A \sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = -\text{Arc tg}\frac{y_0}{x_0} \\ A = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \end{cases}$

Ces considérations sont systématisées dans le théorème ci-après (§ 2.2).

2.1. Définitions. — Nous appelons solution du problème de Cauchy :

$$\boxed{\frac{dM}{dt} = F[t, M(t)]}$$

aux données initiales (t_0, M_0) une fonction d'un intervalle de $\mathbf{R}$ contenant t_0 dans $\mathbf{R}^p$, dérivable sur cet intervalle et vérifiant :

$$\boxed{M(t_0) = M_0} \quad \text{et :} \quad \boxed{\frac{dM}{dt} = F[t, M(t)]}$$

en tout point t de l'intervalle.

Une fonction F de $I \times B$ dans $\mathbf{R}^n$ est dite *lipzitchienne* (I étant un intervalle de $\mathbf{R}$ et B une boule de $\mathbf{R}^p$) s'il existe un nombre positif k tel que pour tout $t \in I$, $M_1 \in B$ et $M_2 \in B$ nous ayons :

$$\boxed{\| F(t, M_1) - F(t, M_2) \| \leqslant k \| M_1 - M_2 \|}$$

Remarquons qu'une fonction lipzitchienne est uniformément continue. Par ailleurs, une fonction de classe C^1 par rapport à la seconde variable sur $I \times B$ est lipzitchienne sur $I \times B$ (pour le montrer, il suffit d'appliquer la formule des accroissements finis par rapport à la seconde variable et de remarquer que la différentielle par rapport à la seconde variable est une fonction continue donc bornée sur un ensemble borné).

2.2. Théorème d'existence et d'unicité. — *Le problème de Cauchy aux données initiales (t_0, M_0) admet une solution unique $t \to M(t)$, définie dans l'intervalle $I = (t_0 - a, t_0 + a)$, telle que $t \in I \Rightarrow M(t) \in B$, boule de centre M_0 et de rayon R, si F est continue et lipzitchienne sur $I \times B$ et si I et B vérifient :*

$$\boxed{a \leqslant \frac{R}{\sup\limits_{(I \times B)} \| F(t, M) \|}}$$

et : $\boxed{a < 1/k}$ *(coefficient de « lipzitchianité » de F).*

Preuve : L'équation différentielle et la condition initiale sont équivalentes à **l'équation intégrale**

$$\boxed{M(t) = M_0 + \int_{t_0}^{t} F[s, M(s)]\, ds}$$

Si F est continue et lipzitchienne sur $I \times B$, la formule

$$\Phi(M)(t) = M_0 + \int_{t_0}^{t} F[s, M(s)]\, ds$$

définit une application Φ de l'espace métrique complet des applications de I dans B, dans lui-même :

$$\Phi(M)(t) - M_0 = \int_{t_0}^{t} F[s, M(s)]\, ds \leqslant a \sup_{I \times B} \| F(s, M) \| \leqslant R$$

Donc, $\Phi(M)(t)$ est bien un élément de B.

Montrons maintenant que Φ est une contraction (application lipzitchienne) telle que $k \leqslant 1$ (donc contractant les distances) :

$$d(M_1, M_2) = \sup_{t \in I} \| M_1(t) - M_2(t) \|$$

$$\Phi(M_1)(t) - \Phi(M_2)(t) = \int_{t_0}^{t} \{F[s, M_1(s)] - F[s, M_2(s)]\}\, ds$$

$$\| \Phi(M_1)(t) - \Phi(M_2)(t) \| \leqslant |t - t_0| k \sup_{s \in [t_0, t]} \| M_1(s) - M_2(s) \|$$

D'où : $d[\Phi(M_1), \Phi(M_2)] \leqslant (a\,k)\, d(M_1, M_2) < d(M_1, M_2)$

Il faut donc résoudre l'équation à valeur dans l'espace métrique complet des applications de I dans B : $M = \Phi(M)$.

Soit la suite M_0 (application constante $t \to M(t) = M_0$), $M_1 = \Phi(M_0) \ldots M_n = \Phi(M_{n-1})$. La suite M_n converge car la série de terme général $(M_{n+1} - M_n)$ est absolument convergente :

$d(M_{n+1}, M_n) = d(\Phi(M_n) - \Phi(M_{n-1})) \leqslant (ak)\, d(M_n, M_{n-1})$
$d(M_{n+1}, M_n) \leqslant (ak)^n\, d(M_1, M_0)$ série géométrique convergente.

La limite de cette suite vérifie $M = \Phi(M)$ et est donc solution de l'équation intégrale donc du problème de Cauchy. Dans cette démonstration, nous avons appliqué à F, fonction vectorielle de variable réelle, la théorie de l'intégration des fonctions réelles de variable réelle. Ce procédé se justifie très simplement : l'intégrale d'une fonction à valeur dans un espace vectoriel de dimension finie est un vecteur dont les coordonnées sont les intégrales respectives des coordonnées de la fonction à intégrer.

Cette démonstration peut être utilisée dans le cas où nous cherchons une solution approchée de l'équation différentielle ; elle fournit alors un procédé pour construire cette solution approchée lorsque nous ne savons pas résoudre explicitement l'équation différentielle. Dans ce qui va suivre, nous nous limiterons au type le plus important d'équations différentielles : *les équations différentielles linéaires*.

3. LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

3.1. Structure de l'ensemble des solutions

Définition. Une *équation différentielle linéaire* est une équation différentielle $\frac{dM}{dt} = F[t, M(t)]$ où F est une application de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^p$ linéaire par rapport à la seconde variable. Elle peut donc s'écrire :

$$\frac{dM}{dt} - A(t)\, M(t) = 0$$

Supposons, de plus, que l'application $t \to A(t)$ soit continue ($A(t)$ est un élément de l'espace vectoriel normé des applications linéaires de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^p$; (V. chap. 19) et posons $K = \sup\limits_{t \in I} \| A(t) \|$; nous déduisons :

$$t \in I, \| A(t)\, M_1 - A(t)\, M_2 \| \leqslant K \| M_1 - M_2 \|$$

Nous pouvons donc appliquer le théorème d'existence et d'unicité quelle que soit la donnée initiale (t_0, M_0).

Théorème. *L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire sur $\mathbf{R}^p$ est un espace vectoriel à p dimensions.*

Preuve. Soit $t \to M_1(t)$ et $t \to M_2(t)$ deux solutions de l'équation différentielle ; alors $t \to k_1 M_1(t) + k_2 M_2(t)$ est solution de l'équation différentielle ; en effet :

$$\frac{d}{dt}[k_1 M_1(t) + k_2 M_2(t)]$$
$$= k_1 \frac{dM_1}{dt} + k_2 \frac{dM_2}{dt} = F[t, k_1 M_1(t) + k_2 M_2(t)]$$

L'application qui, au point M de $\mathbf{R}^p$, associe la solution de l'équation différentielle aux données initiales t_0 et M_0, est de toute évidence une application linéaire de $\mathbf{R}^p$ dans l'espace vectoriel des solutions, surjective d'après le théorème d'existence et injective d'après le théorème d'unicité. L'espace vectoriel des solutions étant isomorphe à l'espace $\mathbf{R}^p$ est donc de dimension p.

3.2. Résolvante d'une équation différentielle linéaire. — Définition. Une **résolvante** de l'équation différentielle linéaire est l'application de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ dans l'espace des applications linéaires de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^p$: $(t, t_0) \to R(t, t_0)$ définie de la façon suivante : si $t \to M(t)$ est la solution de l'équation différentielle aux données initiales (t_0, M_0), alors $\boxed{M(t) = R(t, t_0)\, M}$. Autrement dit, $t \to M(t)$ est aussi la solution aux données initiales $[t_1\ R(t_1\ t_0)\ M]$. $R(t, t_0)$ est une application linéaire de $\mathbf{R}^p$

dont le théorème d'existence et d'unicité assure l'existence et la bijectivité.

La résolvante d'une équation différentielle linéaire vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} (1) \quad R(s_3, s_2) \circ R(s_2, s_1) = R(s_3, s_1) \\ (2) \quad R(s, s) = \text{Id. } \mathbf{R}^P \end{cases}$$

De plus, la résolvante est la solution de l'équation différentielle :

$$\boxed{\frac{d}{dt} R(t, t_0) = A(t) \circ R(t, t_0)}$$

vérifiant $R(t, t) = \text{Id. } \mathbf{R}^P$:

Preuve : En effet :

$$M(t) = R(t, t_0)\, M_0 \Rightarrow \frac{dM}{dt} = \frac{dR(t, t_0)}{dt} M_0$$

Mais, par ailleurs :

$$\frac{dM}{dt} = A(t)\, M(t) = A(t) \circ R(t, t_0)\, M_0$$

cela quelle que soit la donnée initiale M_0. En général, cette équation différentielle ne se résout pas simplement et nous cherchons à réduire la dimension du système (abaisser l'ordre de l'équation).

Dans le cas le plus simple, équation différentielle scalaire du premier ordre, $A(t)$ est un nombre réel et alors :

$$R(t, t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)\, ds\right)$$

La solution de l'équation différentielle aux données initiales (t_0, x_0) est :

$$t \to x(t) = R(t, t_0)\, x_0$$

donc :

$$x(t) = x_0 . \exp\left(\int_{t_0}^{t} A(s)\, ds\right)$$

3.3. Cas d'une équation différentielle linéaire « à coefficients constants »

Définition : Une équation différentielle linéaire à coefficients constants est une équation différentielle linéaire tèlle que l'application $t \to A(t)$ soit une application constante, $A(t)$ est représenté par une matrice A de constantes. Dans ce cas, nous pouvons résoudre l'équation différentielle qui donne la résolvante en utilisant la notion d'exponentielle d'opérateur.

Théorème et définition :

Étant donné une matrice (n, n) A, la série entière $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i A^i}{i!}$ est convergente dans l'espace vectoriel normé des matrices carrées et sa somme est une fonction de t à valeur matricielle notée exp (tA), vérifiant les propriétés fondamentales de la fonction exponentielle :

$$\boxed{\exp(tA) \circ \exp(sA) = \exp[(t + s) A]}$$

et

$$\boxed{\frac{d}{dt}[\exp(tA)] = A \circ \exp(tA)}$$

Nous en déduisons que la solution de l'équation différentielle linéaire donnant la résolvante est :

$$R(t, t_0) = \exp[(t - t_0) A]$$

donc, que la solution du problème de Cauchy associé à l'équation différentielle linéaire « à coefficients constants » et aux données initiales (t_0, M_0) est :

$$M(t) = R(t, t_0)\, M_0 = M_0 \exp[(t - t_0)A]$$

- **Cas d'une équation différentielle scalaire d'ordre** n :

$$\frac{d^n x}{dt^n} = a_0 x + a_1 \frac{dx}{dt} + \ldots + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}}$$

La matrice A est donnée par :

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

Il s'agit de trouver une base de n solutions indépendantes. On montre que $\mathbf{e}^{\lambda_i (t - t_0)}\, P_i(t)$, où λ_i est racine de l'équation $\lambda^n = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_{n-1}\lambda^{n-1}$ d'ordre de multiplicité n_i (donc valeur propre de A) et où $P_i(t)$ est un polynôme de degré au plus égal à n_i, est solution de l'équation différentielle.

- **Cas particulier :** $n = 2$ (fig. XXII-4)

$x'' = a_0 x + a_1 x'$, $\lambda^2 - a_1\lambda - a_0 = 0$, $\Delta = a_1^2 + 4\, a_0$

$\Delta > 0$: deux racines distinctes λ_1 et λ_2 :
$x(t) = k_1 \mathbf{e}^{\lambda_1 t} + k_2 \mathbf{e}^{\lambda_2 t}$

$\Delta = 0$: une racine double ..... λ :
$x(t) = k_1 \mathbf{e}^{\lambda t} + k_2 t \mathbf{e}^{\lambda t}$

$\Delta < 0$: deux racines imaginaires conjuguées $(\mu + j\nu)$ et $(\mu - j\nu)$:
$x(t) = \mathbf{e}^{\mu t}(k_1 \cos \nu t + k_2 \sin \nu t) = A\mathbf{e}^{\mu t} . \cos(\nu t - \varphi)$

où : $A = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$, $\cos \varphi = \frac{k_1}{A}$ et $\sin \varphi = \frac{k_2}{A}$

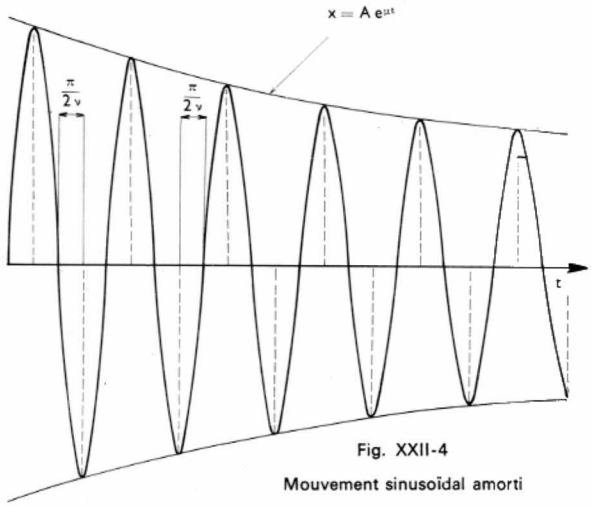


Fig. XXII-4

Mouvement sinusoïdal amorti

À chaque fois, nous avons fourni un espace vectoriel de fonctions de dimensions 2. Le lecteur pourra vérifier qu'il s'agit bien de solutions de l'équation différentielle (V. fig. XXII-4 l'étude du mouvement sinusoïdal amorti).

4. LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES AVEC SECOND MEMBRE

Définition. Une équation différentielle affine ou équation différentielle linéaire avec second membre est une équation différentielle de la forme :

$$\frac{dM}{dt} = F[t, M(t)] + G(t)$$

F est une application de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^P$ dans $\mathbf{R}^P$, linéaire par rapport à la seconde variable, et $G(t)$ une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^P$, appelée le second membre de l'équation :

$$\frac{dM}{dt} - F[t, M(t)] = G(t)$$

L'équation différentielle linéaire :

$$\frac{dM}{dt} - F[t, M(t)] = 0$$

est appelée « équation sans second membre » associée.

Soit deux solutions $t \to M_1(t)$ et $t \to M_2(t)$ de l'équation affine ; $M_e(t) = M_2(t) - M_1(t)$ est une solution de

l'équation sans second membre. $\frac{dM_e}{dt} = \frac{dM_2}{dt} - \frac{dM_1}{dt}$

$$= F\,[t, M_2(t)] - F\,[t, M_1(t)] = F\,[t, M_e(t)]$$

Pour obtenir toutes les solutions de l'équation affine, il suffit d'ajouter à une solution particulière de l'équation affine toutes les solutions de l'équation sans second membre associée. Après avoir résolu l'équation sans second membre, nous déterminerons donc une solution particulière de l'équation affine; selon son type, nous chercherons si des fonctions simples (polynômes, fractions rationnelles, fonctions exponentielles ou trigonométriques ou des combinaisons de ces fonctions) peuvent être solution particulière de l'équation différentielle.

Si $R\ (t, t_0)$ est la résolvante de l'équation sans second membre, alors la solution de l'équation affine aux conditions initiales (t_0, M_0) est:

$$M(t) = R\ (t, t_0)\ M_0 + \int_{t_0}^{t} R(t, \tau)\ G(\tau) d\tau$$

En effet, si nous faisons le changement de fonction inconnue: $M(t) = R\ (t, t_0)\ N(t)$, il vient:

$$\begin{cases} \dfrac{dM}{dt} = A(t)\ R\ (t, t_0)\ N(t) + R\ (t, t_0)\ \dfrac{dN}{dt} \\ \dfrac{dM}{dt} = A(t)\ M(t) + G(t) \end{cases}$$

Soit: $$R\ (t, t_0)\ \frac{dN}{dt} = G(t)$$

$$\frac{dN}{dt} = R\ (t_0, t)\ G(t)$$

Donc: $$N(t) = \int_{t_0}^{t} R\ (t_0, \tau)\ G(\tau) d\tau$$

et: $$M(t) = R\ (t, t_0)\ N(t) = \int_{t_0}^{t} R\ (t, \tau)\ G(\tau) d\tau$$

Nous avons ainsi trouvé la solution de l'équation affine s'annulant pour $t = t_0$. Nous ajoutons la solution $M_e(t) = R\ (t, t_0)\ M_0$ de l'équation sans second membre aux données initiales (t_0, M_0) et nous obtenons la solution cherchée de l'équation affine.

CHAPITRE XXIII

DÉVELOPPEMENT DE FOURIER DES FONCTIONS PÉRIODIQUES

1. INTRODUCTION

Les fonctions de variables réelles sin x, cos x, $\mathbf{e}^{jx}$, $\mathbf{e}^{-jx}$ sont périodiques de plus petite période 2π; nous en déduisons que les fonctions sin nx, cos nx, $\mathbf{e}^{jnx}$ et $\mathbf{e}^{-jnx}$ sont périodiques de plus petite période $\frac{2\pi}{n}$ $(n \in \mathbf{N})$, de même que toute combinaison linéaire de ces fonctions. Remarquons d'ailleurs que toute combinaison linéaire des fonctions sin nx et cos nx peut se mettre sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions $\mathbf{e}^{jnx}$ et $\mathbf{e}^{-jnx}$ puisque:

$$\sin nx = \frac{1}{2j}\ (\mathbf{e}^{jnx} - \mathbf{e}^{-jnx})$$

$$\cos nx = \frac{1}{2}\ (\mathbf{e}^{jnx} + \mathbf{e}^{-jnx})$$

Bien que les phénomènes étudiés en physique se représentent généralement par des fonctions à valeurs réelles, nous préférons, pour des raisons de commodité de calcul (les formules de multiplication sont beaucoup plus simples), considérer tout d'abord les fonctions correspondantes à valeurs dans le plan complexe. Une fois ce problème résolu, nous pourrons projeter les résultats sur les axes de coordonnées et obtenir les résultats correspondants pour les fonctions à valeurs réelles (construction de Fresnel).

De nombreuses grandeurs étudiées en physique sont périodiques ou ont une composante périodique (courant électrique alternatif, grandeurs vibratoires ou ondulatoires).

Depuis le XIXe siècle, on a cherché à décomposer de telles grandeurs et à les considérer comme la superposition de grandeurs s'exprimant au moyen de fonctions trigonométriques (recherche des harmoniques en électricité ou en acoustique), ce qui revient à écrire les fonctions périodiques sous forme de combinaisons linéaires ou de limites de combinaisons linéaires de fonctions trigonométriques de même période. Si la période est T, les fonctions trigonométriques seront donc: sin $\frac{2\pi}{T}nx$, cos $\frac{2\pi}{T}nx$, $\mathbf{e}^{j\frac{2\pi}{T}nx}$, $\mathbf{e}^{-j\frac{2\pi}{T}nx}$. Nous montrerons, dans ce chapitre, que moyennant certaines hypothèses de régularité de la fonction, il est possible d'effectuer une telle décomposition en utilisant le calcul intégral. Nous prendrons 2π pour période, tous les calculs peuvent être refaits avec une période T.

2. SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES

Définition. Une *série trigonométrique* est une série de fonctions dont le terme général est:

$u_0 = a_0$ et pour $n \neq 0$ $\quad u_n(x) = a_n\,\mathbf{e}^{jnx} + a_{-n}\,\mathbf{e}^{-jnx}$

Théorème. *Si les séries numériques de termes généraux a_n et a_{-n} sont absolument convergentes, la série trigonométrique converge absolument et uniformément sur toute la droite réelle.*

Preuve. La série de terme général $u_n\ (x)$ est de module majoré par la série positive convergente $|a_n| + |a_{-n}|$. Appliquons alors le critère de Cauchy comme nous l'avons fait pour les séries entières.

Soit $F(x)$ la somme de cette série. Comme $u_n(x)$ est périodique de période 2π, $F(x)$ est aussi périodique de période 2π. Comme la série de somme $F(x)$ converge absolument et uniformément, nous pouvons intégrer la somme en faisant la somme des intégrales de chaque terme (V. chap. 17):

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{e}^{jpx} F(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \mathbf{e}^{jpx}\ (a_n \mathbf{e}^{jnx} + a_{-n}\mathbf{e}^{-jnx})\ dx + a_0 \int_0^{2\pi} \mathbf{e}^{jpx}\ dx$$

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{e}^{jpx} F(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{2\pi} \mathbf{e}^{j(n+p)x}\ dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \int_0^{2\pi} \mathbf{e}^{j(p-n)x}\ dx + a_0 \int_0^{2\pi} \mathbf{e}^{jpx}\ dx$$

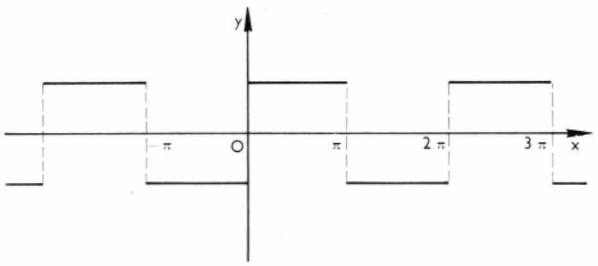
Or: $$\int_0^{2\pi} \mathbf{e}^{jkx}\ dx = \int_0^{2\pi} \cos kx\ dx + j \int_0^{2\pi} \sin kx\ dx,$$

et: $$\int_0^{2\pi} \mathbf{e}^{jkx}\ dx = 0 \text{ si } k \neq 0$$

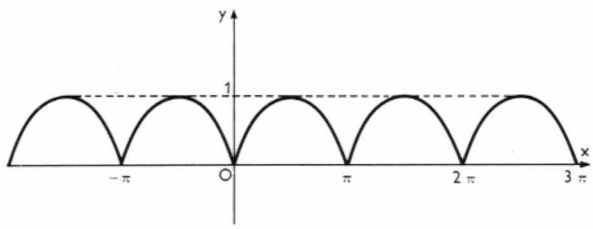
$$\int_0^{2\pi} \mathbf{e}^{jkx}\ dx = 2\pi \text{ si } k = 0$$

Donc: $$\int_0^{2\pi} \mathbf{e}^{jpx} F(x) dx = 2\pi\, a_{-p}$$

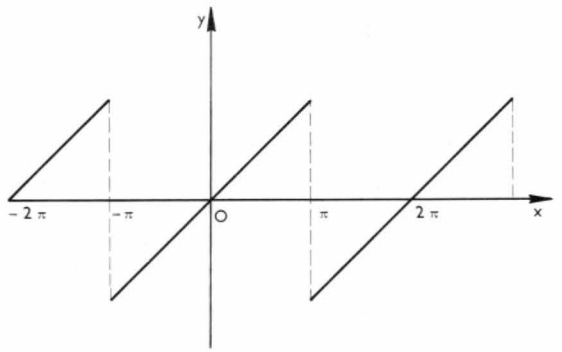
Développement de Fourier de fonctions périodiques usuelles



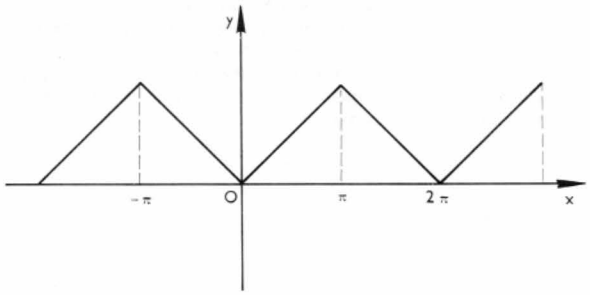
$$F(x) = -1, \text{ sur }]-\pi, 0]$$
$$F(x) = +1, \text{ sur }]0, \pi]$$
$$F(x) = -\frac{2}{\pi}\left(-\sin x + \frac{1}{2}\frac{\sin 3x}{3} + \ldots + \cos\frac{\pi}{n}\frac{\sin nx}{n} + \ldots\right)$$



$$F(x) = |\sin x|$$
$$F(x) = \frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{2}{3}\cos 2x - \frac{2}{15}\cos 4x - \ldots - \frac{2}{4k^2-1}\cos 2kx - \ldots\right)$$



$$F(x) = x, \text{ sur } [-\pi, \pi]$$
$$F(x) = 2\left[\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} + \ldots\right]$$



$$F(x) = |x|, \text{ sur } [-\pi, \pi]$$
$$F(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \ldots + \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} + \ldots\right]$$

Soit :

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathbf{e}^{-jnx} F(x)\, dx$$

3. SÉRIE DE FOURIER D'UNE FONCTION PÉRIODIQUE

Réciproquement, une série de Fourier d'une fonction périodique F de période 2π est la série dont le terme général est :

$$u_n(x) = a_n \mathbf{e}^{jnx} + a_{-n}\mathbf{e}^{-jnx}$$

avec :

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathbf{e}^{-jnx} F(x)dx \text{ et } a_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathbf{e}^{jnx} F(x)dx$$

Le problème est de savoir quand cette série converge et dans ce cas, à quelle condition sa limite est F. La résolution de ce problème amène à des calculs assez compliqués que nous n'effectuerons pas. Contentons-nous d'énoncer un théorème :

Théorème. Supposons F dérivable par morceaux et sa dérivée bornée, alors la série de Fourier de F converge pour tout x_0 vers la fonction :

$$\frac{1}{2}\left\{\left[\lim_{x \uparrow x_0} F(x)\right] + \left[\lim_{x \downarrow x_0} F(x)\right]\right\},$$

soit vers $F(x_0)$ chaque fois que F est continue en x_0.

Exemple : $F = -1$ sur $]-\pi, 0]$
$F = +1$ sur $]0, \pi]$
F périodique de période 2π

Calculons sa série de Fourier :

$$a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\, \mathbf{e}^{-jnx}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \mathbf{e}^{-jnx}\, dx$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} \mathbf{e}^{-jnx}\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} (\mathbf{e}^{-jnx} - \mathbf{e}^{jnx})\,dx$$

$$= \frac{-j}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin nx\,dx = \frac{j}{\pi n}[\cos n\pi - 1]$$

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j}{\pi}\left[\frac{(\cos n\pi - 1)}{n}(\mathbf{e}^{+jnx} - \mathbf{e}^{-jnx})\right]$$

$$= \frac{-2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(\cos n\pi - 1)\cdot\frac{\sin nx}{n}$$

si n pair $\cos n\pi = 1$
si n impair $\cos n\pi = -1$

$$F(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$

Les points de discontinuité de la fonction F ont pour abscisses les multiples de π. En ces points :

si $x_0 = 2k\pi \qquad k \in \mathbf{Z}$

$$\frac{1}{2}\left[\lim_{x\uparrow x_0} F(x) + \lim_{x\downarrow x} F(x)\right] = \frac{1}{2}[-1+1] = 0$$

si $x_0 = (2k+1)\pi \qquad k \in \mathbf{Z}$

$$\frac{1}{2}\left[\lim_{x\uparrow x_0} F(x) + \lim_{x\downarrow x_0} F(x)\right] = \frac{1}{2}(1-1) = 0$$

La fonction F est impaire et dans le développement de la fonction n'interviennent que les fonctions impaires sin nx.

La partie paire du développement en cos nx est nulle.

CHAPITRE XXIV

LA TRANSFORMÉE DE LAPLACE

1. INTÉGRATION D'UNE FONCTION COMPLEXE DE VARIABLE RÉELLE

Considérons une fonction $f: t \to f(t)$ complexe de variable réelle. Si $Rf(t)$ et $If(t)$ sont respectivement les parties réelle et imaginaire de $f(t)$, nous pouvons écrire :

$$f(t) = Rf(t) + j.If(t)$$

Si $Rf(t)$ et $If(t)$ sont des fonctions de valeur absolue intégrable sur l'intervalle $[0, +\infty[$ (V. chap. 21), nous posons :

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{+\infty} Rf(t)dt + j\int_0^{+\infty} If(t)dt$$

et nous dirons que la fonction f est sommable sur $[0, +\infty]$.

Par exemple, soit un nombre complexe $p = (q + jr)$; la fonction complexe $f(t)$ de variable réelle t :

$f(t) = \mathbf{e}^{-pt} = \mathbf{e}^{-qt}\,\mathbf{e}^{-jrt} = \mathbf{e}^{-qt}(\cos rt - j \sin rt)$

admet une intégrale égale à :

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-qt}\cos rt\,dt - j\int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-qt}\sin rt\,dt$$

Calculons les quantités :

$$C = \int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-qt}\cos rt\,dt$$

et :

$$S = \int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-qt}\sin rt\,dt$$

en intégrant par parties :

$$C = \left[\frac{-\mathbf{e}^{-qt}}{q}\cos rt\right]_0^{+\infty} + \int_0^{\infty}\frac{\mathbf{e}^{-qt}}{q}(-r\sin rt)\,dt = \frac{1}{q} - \frac{r}{q}S$$

et de même :

$$S = \frac{r}{q}C$$

Donc :

$$C = \frac{q}{q^2 + r^2} \quad \text{et} \quad S = \frac{r}{q^2 + r^2}$$

Soit :

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = C - jS = \frac{q - jr}{q^2 + r^2} = \frac{1}{p}$$

ou :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-pt}\,dt = \frac{1}{p}}$$

2. DÉFINITION DE LA TRANSFORMÉE DE LAPLACE ET EXEMPLES DE FONCTIONS CLASSIQUES

Soit $f: t \to f(t)$ une fonction complexe de variable réelle.

Supposons :

— qu'il existe un nombre réel a tel que la fonction complexe de variable réelle $t \to f(t)\,\mathbf{e}^{-pt}$ soit sommable pour p complexe et de partie réelle supérieure à a ;

— que dans le demi-plan $Rp > a$, la fonction complexe de variable complexe $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathbf{e}^{-pt}\,dt$ soit holomorphe (V. chap. 16). *La fonction F est appelée transformée de Laplace de f.*

La transformation de Laplace est une transformation linéaire sur l'espace vectoriel des fonctions complexes de variable réelle qui admettent une transformée. On montre que la transformation de Laplace est injective : une fonction holomorphe ne peut être la transformée de Laplace que d'une seule fonction. L'importance des applications de la transformée de Laplace tient à la propriété exposée dans le paragraphe suivant et elle tient aussi au fait que les fonctions exponentielles et sinusoïdales (sans cesse utilisées en électricité et en électronique) admettent une transformée de Laplace qui s'exprime simplement : $\forall\alpha$ complexe, $f(t) = \mathbf{e}^{-\alpha t}$:

$$\boxed{F(p) = \int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-\alpha t}\,\mathbf{e}^{-pt}\,dt = \int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-(\alpha+p)t}\,dt = \frac{1}{p+\alpha}}$$

(d'après le calcul de 1).

Comme la transformée de Laplace est linéaire, on en déduit les transformées de Laplace des fonctions sinusoïdales :

$$f(t) = \sin\omega t = \frac{1}{2j}(\mathbf{e}^{j\omega t} - \mathbf{e}^{-j\omega t}) :$$

$$F(p) = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{-j\omega + p} - \frac{1}{j\omega + p}\right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

$$\boxed{F(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}}$$

$$f(t) = \cos \omega t = \frac{1}{2}\left(\mathbf{e}^{j\omega t} + \mathbf{e}^{-j\omega t}\right)$$

$$F(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p - j\omega} + \frac{1}{p + j\omega}\right) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

$$\boxed{F(p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}}$$

3. TRANSFORMATION DE LAPLACE ET DÉRIVATION

Supposons maintenant que la fonction complexe $f(t)$ de variable réelle t :

— admette une transformée de Laplace ;
— soit nulle en 0 ;
— soit continue et dérivable sur la demi-droite réelle ;
— que sa dérivée f' admette une transformée de Laplace.

Nous allons calculer cette dernière grâce à une intégration par parties :

$$\int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-pt} f'(t)\,dt = \Big[\mathbf{e}^{-pt} f(t)\Big]_0^{+\infty} - (-p)\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathbf{e}^{-pt}\,dt.$$

Or $f(0) = 0$. De plus, $f(t)\ \mathbf{e}^{-pt}$ étant intégrable, cette fonction tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini. D'où :

$$\int_0^{\infty} \mathbf{e}^{-pt} f'(t)\,dt = p\int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-pt} f(t)\,dt$$

La transformée de Laplace de la dérivée de la fonction $f(t)$ est égale au produit par p de la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$. Nous retrouvons ainsi la formule donnant la transformée de Laplace de la fonction cosinus à partir de la formule donnant la transformée de Laplace de la fonction sinus : $\left(\frac{d(\sin \omega x)}{dx} = \omega \cos \omega x\right)$

4. APPLICATION À L'ÉTUDE D'UN CIRCUIT ÉLECTRIQUE

La loi d'Ohm appliquée à un circuit électrique comportant une résistance R, une inductance L et un condensateur C s'écrit (V. t. 1, Électricité, chap. 32) :

$$u(t) = R\,i(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt$$

Dans cette équation la tension $u(t)$ est une fonction connue et l'intensité $i(t)$ du courant est une fonction cherchée. Si nous écrivons l'égalité des transformées de Laplace des deux membres, nous obtenons la relation suivante :

$$U(p) = I(p)\left(R + Lp + \frac{1}{Cp}\right)$$

Elle permet de calculer la transformée de Laplace de la solution et de déduire cette dernière ensuite. Dans le cadre de la théorie des fonctions, ces méthodes ne sont pas satisfaisantes car les discontinuités à l'origine introduisent des difficultés de calcul. La théorie de la transformation de Laplace doit être appliquée dans l'espace des distributions tempérées introduit par L. Schwartz en 1945. Cette théorie et ses multiples applications à la physique ont été rassemblées par cet auteur dans un ouvrage de base intitulé : « Méthodes mathématiques de la physique ». Elles sont utilisées notamment dans l'étude des automatismes (V. t. 2, Automatismes, chap. 2) ; elles représentent un outil extrêmement commode.

Tableau des transformées de Laplace

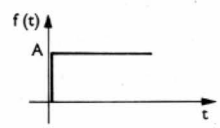
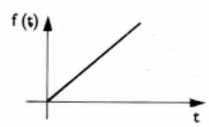
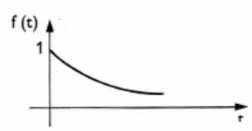
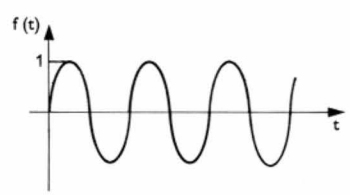
Fonction $f(t)$		Transformée de Laplace $F(p)$
	A	$\frac{A}{p}$
	t	$\frac{1}{p^2}$
	At	$\frac{A}{p^2}$
	$\mathbf{e}^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p + \alpha}$
	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$

Tableau des transformées de Laplace (suite)

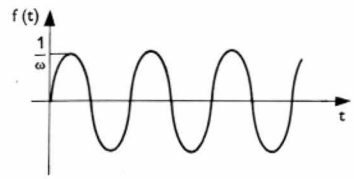
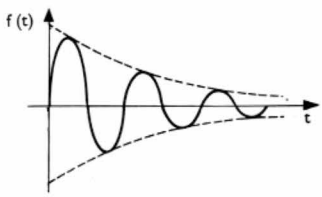
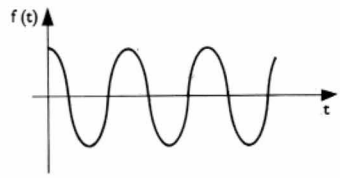
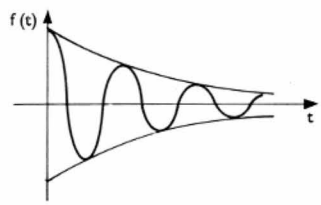
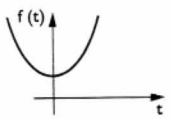
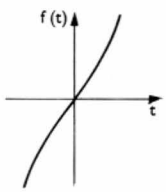
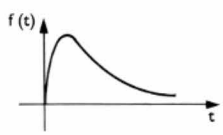
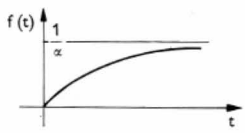
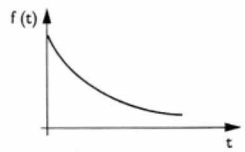
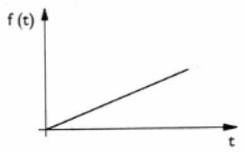
Fonction $f(t)$		Transformée de Laplace $F(p)$
	$\frac{\sin \omega t}{\omega}$	$\frac{1}{p^2 + \omega^2}$
	$\mathbf{e}^{-\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}$
	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
	$\mathbf{e}^{-\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}$
	$\mathrm{ch}\ \omega t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$
	$\mathrm{sh}\ \omega\ t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
	$t\ \mathbf{e}^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p + \alpha)^2}$

Tableau des transformées de Laplace (suite)

Fonction $f(t)$		Transformée de Laplace $F(p)$
	$\frac{1}{\alpha}\ (1 - \mathbf{e}^{-\alpha t})$	$\frac{1}{p(p+\alpha)}$
	$\frac{\mathbf{e}^{-\alpha t} - \mathbf{e}^{-\beta t}}{\beta - \alpha}$	$\frac{1}{(p+\alpha)\ (p+\beta)}$
	$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{p^n + 1}$

SCIENCES PHYSIQUES

MÉCANIQUE DES SOLIDES

La mécanique est une science très ancienne : elle constitue aujourd'hui encore une part importante de la physique et elle est à la base de la formation de nombreux ingénieurs.

Le développement constant de cette discipline et l'intérêt qui lui est porté tiennent au double aspect de la mécanique : *mécanique rigoureuse*, dite encore *rationnelle* (terrain de choix pour les mathématiciens et les chercheurs) et *mécanique appliquée* (domaine très exploité par les ingénieurs).

Plus que dans d'autres sciences ce clivage existe car l'application, qui doit tenir compte des exigences technologiques, est souvent loin du modèle que lui a proposé la théorie. Néanmoins, il est nécessaire de savoir associer ces deux aspects également importants et c'est en cela que réside la difficulté. La rigueur n'engendre pas nécessairement la stérilité et la création n'est pas forcément basée sur l'empirisme et la routine. Aussi dans les quelques pages qui vont suivre, nous essayerons constamment de dégager l'aspect pratique de résultats établis avec le maximum de rigueur.

CHAPITRE PREMIER

LES VECTEURS

Au-delà des nombres arithmétiques et des nombres algébriques, la mécanique introduit des grandeurs d'espèce et de structure nouvelles : *force*, *vitesse* et *accélération*. En effet, à ces grandeurs sont liées les notions supplémentaires de direction et de sens. On est donc amené à envisager un nouvel être mathématique représentant ces espèces : le **vecteur,** et une nouvelle structure : la **structure vectorielle.** Réciproquement, toute grandeur qui pourra être représentée par un vecteur sera de structure vectorielle.

On rencontre alors deux types de grandeurs : les *grandeurs scalaires* représentées par des nombres arithmétiques ou algébriques, telles que distance, surface ou volume, et les *grandeurs vectorielles* représentées par des vecteurs, telles que force, vitesse ou accélération.

1. DÉFINITIONS

1.1. Vecteur. — Un vecteur est un ensemble de deux points ordonnés.

— En effet, deux points A et B peuvent être considérés soit dans l'ordre AB, soit dans l'ordre BA (fig. I-1).

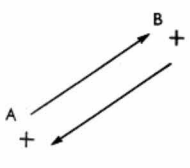


Fig. I-1

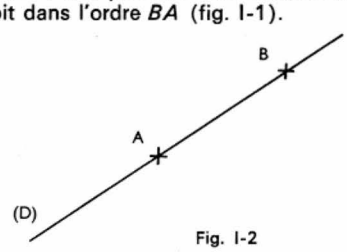


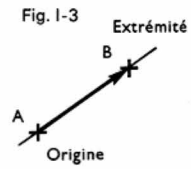
Fig. I-2

— La droite D à laquelle appartiennent les deux points A et B est le support, ou encore « la ligne d'action » du vecteur (expression fréquemment utilisée en mécanique). Elle définit la direction du vecteur (fig. I-2).

— L'ordre : A origine, B extrémité, définit le sens du vecteur (fig. I-3).

— La longueur AB représente le module du vecteur et se note : $|\overrightarrow{AB}| = AB$ (fig. I-4).

Fig. I-3



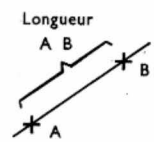


Fig. I-4

Remarque : Un vecteur est donc caractérisé par son origine ou son extrémité, son support ou sa direction, son sens, son module ou sa norme.

1.2. Égalité de deux vecteurs, ensemble de vecteurs

Équipollence. — Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont équipollents s'ils ont leurs supports parallèles : $(D_1) // (D_2)$, le même module : $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ et le même sens (fig. I-5).

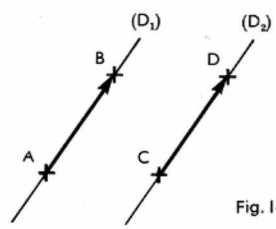


Fig. I-5

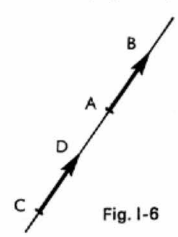
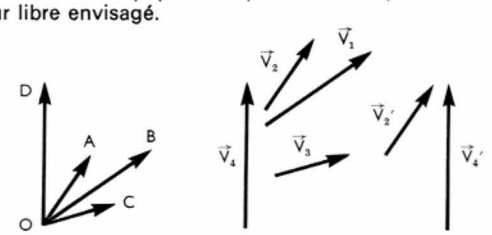


Fig. I-6

Équivalence. — Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont équivalents s'ils ont le même support, le même module et le même sens (fig. I-6).

Ensemble de vecteurs libres. — Un ensemble de vecteurs libres est constitué par des vecteurs dont l'origine (ou l'extrémité) est arbitraire mais dont *la direction, le sens et le module sont fixés.* À chacun de ces vecteurs peut être associé un vecteur équipollent qui sera le représentant du vecteur libre envisagé.

Fig. I-7



Soit $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ les représentants d'un ensemble de vecteurs libres (fig. I-7) :

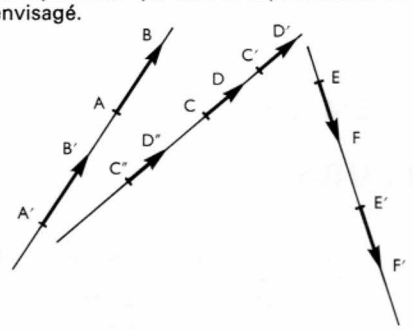
$\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, $\vec{V}_3$, $\vec{V}_4$ est l'ensemble de vecteurs libres correspondants ;

$\vec{V}_1$, $\vec{V}'_2$, $\vec{V}_3$, $\vec{V}'_4$ est un ensemble de vecteurs libres identique au précédent.

À un représentant correspond une infinité de vecteurs libres : ces derniers sont représentés par le symbole $\vec{V}$ ou $\vec{F}$, etc., car il n'est plus nécessaire de préciser l'origine et l'extrémité.

Ensemble de vecteurs glissants. — Un ensemble de vecteurs glissants est constitué par des vecteurs dont l'origine (ou l'extrémité) est arbitraire mais dont *le support, le sens et le module sont fixés.* À chacun de ces vecteurs peut être associé un vecteur équivalent qui sera le représentant du vecteur glissant envisagé.

Fig. I-8



Soit : $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ les représentants d'un ensemble de vecteurs glissants (fig. I-8) :

$\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{C'D'}$, $\overrightarrow{E'F'}$ est l'ensemble de vecteurs glissants correspondants ;

$\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{C''D''}$, $\overrightarrow{E'F'}$ est un ensemble de vecteurs glissants identique au précédent.

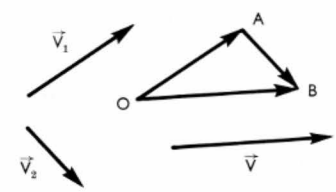
Remarque : À un représentant correspond une infinité de vecteurs glissants : ce sont tous les vecteurs équivalents au représentant. Un ensemble de vecteurs glissants est encore appelé *torseur.*

2. OPÉRATIONS EFFECTUÉES SUR LES VECTEURS LIBRES

2.1. Somme et différence de vecteurs

2.1.1. Cas de deux vecteurs (fig. I-9). — Étant donné deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$, on appelle somme géométrique $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$ de ces deux vecteurs le vecteur $\vec{V}$ obtenu en construisant à partir d'un point O arbitraire : $\overrightarrow{OA} = \vec{V}_1$, puis : $\overrightarrow{AB} = \vec{V}_2$, et : $\overrightarrow{OB}$, qui représente le vecteur-somme.

Fig. I-9



La somme obtenue est indépendante du point O choisi. $\vec{V}$ est un vecteur libre, dont un représentant est $\overrightarrow{OB}$.

Propriétés de cette somme :

— commutativité :

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_2 + \vec{V}_1$$

$$\vec{V} + \vec{0} = \vec{V}$$

où $\vec{0}$ est l'élément neutre de la somme géométrique.

Deux vecteurs opposés étant deux vecteurs de même direction et de même module, mais de sens différent, on obtient :

$$\vec{V} + \text{opposé de } \vec{V} = \vec{0}$$

2.1.2. Cas de plusieurs vecteurs (fig. I-10). Soit n vecteurs $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, $\vec{V}_3$, . . . ,$\vec{V}_n$. On appelle somme géométrique de ces n vecteurs le vecteur $\vec{V}$ obtenu en construisant à partir d'un point O arbitraire : $\overrightarrow{OA} = \vec{V}_1$,

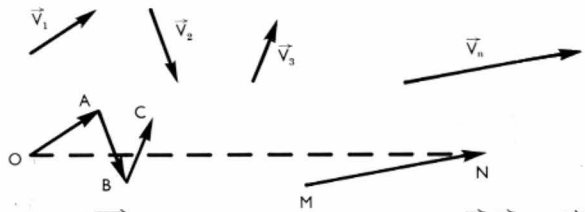


Fig. I-10 — $\overrightarrow{ON}$ est le vecteur qui représente la somme de $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, . . . , $\vec{V}_n$

puis : $\overrightarrow{AB} = \vec{V}_2$, puis : $\overrightarrow{BC} = \vec{V}_3$, et ainsi de suite, jusqu'à $\overrightarrow{MN} = \vec{V}_n$; $\overrightarrow{ON}$ représente le vecteur-somme. La somme obtenue est indépendante du point O choisi. $\vec{V}$ est un vecteur libre, dont un représentant est $\overrightarrow{ON}$.

Propriétés de cette somme :

— il est possible d'échanger deux vecteurs consécutifs ;
— il est possible d'échanger deux vecteurs quelconques ;
— la somme géométrique de n vecteurs est commutative ;
— la somme géométrique de n vecteurs est associative.

2.1.3. Différence de deux vecteurs (fig. I-11). Étant donné deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$, on appelle différence géométrique $\vec{V}_1 - \vec{V}_2$ de ces deux vecteurs, le vecteur $\vec{X}$ tel que : $\vec{V}_1 = \vec{V}_2 + \vec{X}$.

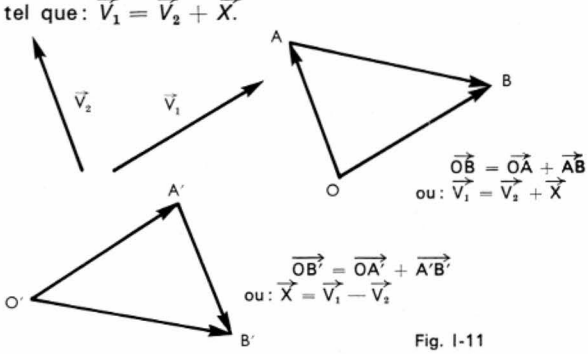


Fig. I-11

Détermination de $\vec{X}$: $\vec{V}_1$ + opposé de $\vec{V}_2 = \vec{V}_2 + \vec{X}$ + opposé de $\vec{V}_2$,

or : $\vec{V}_2$ + opposé de $\vec{V}_2 = \vec{0}$

donc : $\vec{V}_1$ + opposé de $\vec{V}_2 = \vec{X}$, que l'on notera :

$$\vec{X} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$$

Remarque : Si : $\vec{V}_1 = \vec{0}$, $\vec{X}$ = opposé de $\vec{V}_2$, et : opposé de $\vec{V}_2 = \vec{0} - \vec{V}_2 = -\vec{V}_2$.

2.2. Produit d'un vecteur par une grandeur scalaire

2.2.1. Définition. — On appelle produit du vecteur libre $\vec{V}$ par le nombre algébrique k, ou produit du nombre k par le vecteur libre $\vec{V}$, le vecteur libre $\vec{V}'$ ayant la même

direction que $\vec{V}$, dont le module est le produit du module de $\vec{V}$ par $|k|$ et dont le sens est celui de $\vec{V}$ si k est positif, et le sens opposé de celui de $\vec{V}$ si k est négatif (fig. I-12).

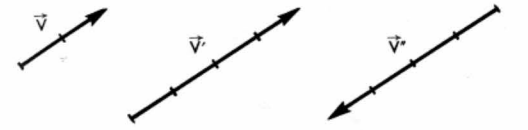


Fig. I-12

On écrit par convention : $\vec{V'} = k.\vec{V} = \vec{V}.k$

Remarque : Cas particuliers pour $k = +1$ et $k = -1$:

— si $k = +1$: $\vec{V'} = \vec{V}$,

$\vec{V'} = (+1) \times \vec{V}$, or : $(+1) \times \vec{V} = \vec{V}$;

— si $k = -1$: $\vec{V'} = -\vec{V}$,

$\vec{V'} = (-1) \times \vec{V}$, or : $(-1) \times \vec{V} = -\vec{V}$.

2.2.2. Étude réciproque. — Étant donné deux vecteurs *parallèles* $\vec{V}$ et $\vec{V'}$, on appelle rapport du vecteur $\vec{V'}$ au vecteur $\vec{V}$ le nombre algébrique k tel que $\vec{V'} = k\vec{V}$. Ce nombre k existe et est unique, car : $|k| = \dfrac{|\vec{V'}|}{|\vec{V}|}$; il est positif si les deux vecteurs ont le même sens, et négatif si les deux vecteurs ont des sens opposés.

On écrit par convention : $\dfrac{\vec{V'}}{\vec{V}} = k$,

d'où : $$\vec{V'} = k.\vec{V} \Longleftrightarrow k = \frac{\vec{V'}}{\vec{V}}$$

2.2.3. Mesure algébrique d'un vecteur parallèle à un axe (fig. I-13). — On appelle *axe* une droite sur laquelle on a choisi un sens. Une telle droite est encore appelée *droite orientée*. Sur l'axe $x'x$ orienté de x' vers x,

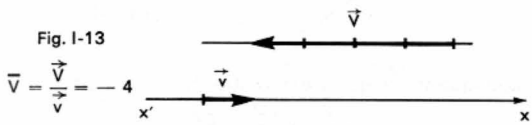


Fig. I-13

$\overline{V} = \dfrac{\vec{V}}{\vec{v}} = -4$

il est possible de définir un vecteur glissant $\vec{v}$ de module égal à l'unité de longueur et de même sens que l'axe : $\vec{v}$ est appelé *vecteur unitaire de l'axe* $x'x$ et a comme mesure algébrique : $\overline{v} = 1$.

Par définition, la mesure algébrique du vecteur libre $\vec{V}$ relativement à l'axe $x'x$, qui lui est parallèle, est le nombre algébrique $\overline{V}$ rapport du vecteur $\vec{V}$ et du vecteur unitaire de l'axe :

$$\overline{V} = \frac{\vec{V}}{\vec{v}} \Longleftrightarrow \vec{V} = \overline{V}.\vec{v}$$

Conséquences : Le rapport de deux vecteurs parallèles est égal au rapport de leur mesure algébrique relativement à un même axe (fig. I-14). La condition nécessaire et suffisante pour qu'un vecteur soit parallèle à une droite est qu'il soit le produit d'un vecteur porté par cette droite et d'un scalaire.

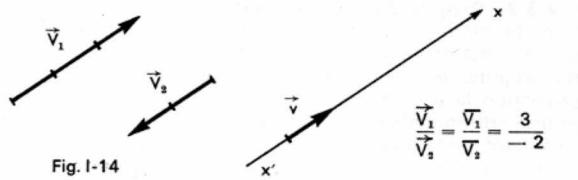


Fig. I-14

2.2.4. Propriétés de la multiplication d'un vecteur par un nombre. — Quel que soit k, nombre réel, et quel que soit $\vec{V}$, on a :

$$k \times \vec{0} = \vec{0}, \text{ et : } 0 \times \vec{V} = \vec{0}$$

Si l'on multiplie plusieurs vecteurs par un même nombre leur somme est multipliée par ce nombre :

$$k.\vec{V_1} + k.\vec{V_2} + k.\vec{V_3} + \ldots + k.\vec{V_n} = k\,[\vec{V_1} + \vec{V_2} + \vec{V_3} + \ldots + \vec{V_n}]$$

De même :

$$[k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_n] \times \vec{V} = k_1\vec{V} + k_2\vec{V} + k_3\vec{V} + \ldots + k_n\vec{V}$$

Ces propriétés sont connues sous le nom de distributivité par rapport à l'addition des vecteurs et par rapport à l'addition des nombres réels.

Conséquence :

$$(k_1 + k_2).(\vec{V_1} + \vec{V_2}) = k_1.\vec{V_1} + k_1.\vec{V_2} + k_2.\vec{V_1} + k_2.\vec{V_2}$$

2.3. Projection des vecteurs. — Il existe plusieurs types de projections d'un vecteur :

— Projection sur une droite parallèlement à la direction d'un plan (fig. I-15).

— Projection sur un plan parallèlement à la direction d'une droite (fig. I-16).

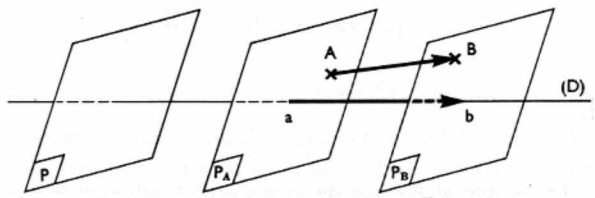


Fig. I-15 $\vec{ab} = \overrightarrow{\text{proj}}_{D//P}(\vec{AB})$

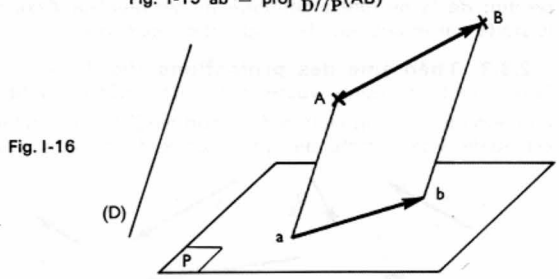


Fig. I-16

$\vec{ab} = \overrightarrow{\text{proj}}_{P//D}(\vec{AB})$

2.3.1. Propriétés des projections. — Les projections de deux vecteurs équipollents sont deux vecteurs équipollents. Les projections d'un même vecteur sur deux supports parallèles sont deux vecteurs équipollents. Les projections, sur un même support ou sur deux supports parallèles, de deux vecteurs parallèles de rapport k sont deux vecteurs de rapport k (fig. I-17).

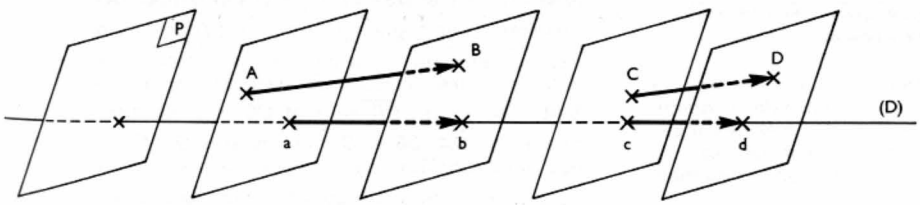


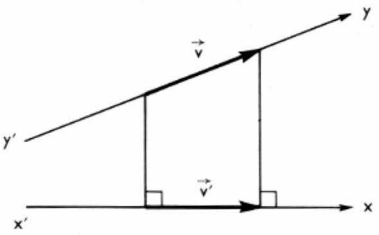
Fig. I-17

$\dfrac{\vec{AB}}{\vec{CD}} = \dfrac{3}{2}$; d'où : $\dfrac{\vec{ab}}{\vec{cd}} = \dfrac{3}{2}$

2.3.2. Projection orthogonale. — Lorsque la direction de plan ou de droite, parallèlement à laquelle on projette, est orthogonale à la droite ou au plan sur lequel on projette, la projection est dite orthogonale. C'est la projection la plus utilisée en mécanique. Lorsque la projection orthogonale est réalisée sur un axe, il est intéressant de déterminer la mesure algébrique du vecteur issu de cette projection. On considère, d'une part, la projection orthogonale d'un vecteur unitaire $\vec{v}$ d'un axe $y'y$ sur un autre

Fig. I-18

$\overline{v'} = \overline{\text{proj}}_{x'x}\,\vec{v}$



$\overline{v'} = \overline{v}.\cos(x'x, y'y) = \cos(x'x, y'y)$

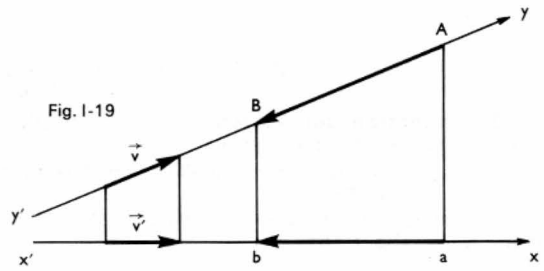


Fig. I-19

$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{v}} = \dfrac{\overline{ab}}{\overline{v'}}$ d'où : $\overline{AB} = \dfrac{\overline{ab}}{\overline{v'}}\overline{v} = \dfrac{\overline{ab}}{\overline{v'}} = \dfrac{\overline{ab}}{\cos(x'x, y'y)}$

donc : $\overline{ab} = \overline{AB}.\cos(x'x, y'y) = \overline{\text{proj}}_{x'x}\overrightarrow{AB}$

axe $x'x$ (fig. I-18), et d'autre part la projection orthogonale sur l'axe $x'x$ d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ porté par l'axe $y'y$ (fig. I-19).

La mesure algébrique de la projection orthogonale sur un axe d'un vecteur porté par un autre axe est égale au produit de la mesure algébrique du vecteur sur l'axe qui le porte par le cosinus de l'angle des deux axes.

2.3.3. Théorème des projections (fig. I-20). — Si l'on projette plusieurs vecteurs sur une même droite ou un même plan, la projection de la somme $\vec{S}$ de ces vecteurs est égale à la somme des projections de chacun d'eux.

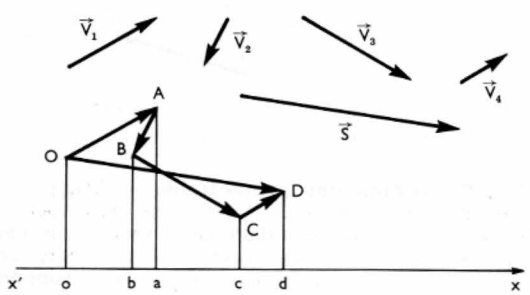


Fig. I-20

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \vec{S}$ $\quad \overline{od} = \overline{oa} + \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{cd}$

$\vec{S}$ est la somme géométrique des quatre vecteurs libres

Si l'on projette plusieurs vecteurs sur un même axe, la mesure algébrique de la projection sur cet axe de la somme de ces vecteurs est égale à la somme des mesures algébriques des projections de chacun d'eux sur cet axe.

Ces énoncés sont vrais que la projection soit orthogonale ou non.

2.3.4. Représentation d'un vecteur par ses projections. — Soit un vecteur libre $\vec{V}$, une direction de plan (P) et une direction de droite (D) (fig. I-21). Le vecteur $\vec{V}$

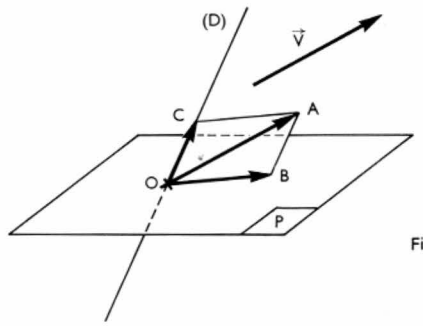


Fig. I-21

peut être projeté sur (P) parallèlement à (D), soit : $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{\text{proj}}_{P//D}\,(\overrightarrow{OA})$; ou projeté sur (D) parallèlement à (P), soit : $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{\text{proj}}_{D//P}\,(\overrightarrow{OA})$. La construction de ces projections permet d'écrire que : $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, donc que tout vecteur est la somme géométrique de sa projection sur une droite (D) parallèlement à un plan (P) et de sa projection sur le plan (P) parallèlement à la droite (D).

Soit un vecteur libre $\vec{V}$ et un trièdre (O, xyz) (fig. I-22).

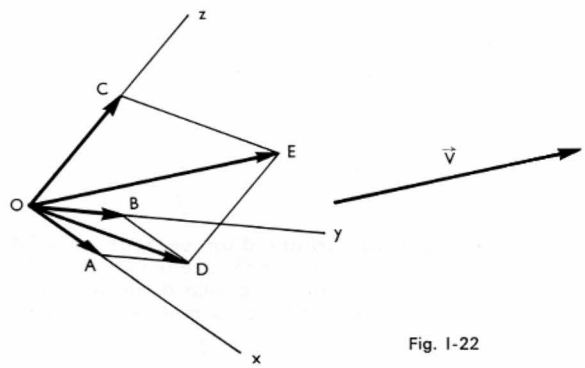


Fig. I-22

En appliquant ce qui vient d'être établi, on peut écrire :

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}$$

avec : $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{\text{proj}}_{xOy//Oz}\,(\overrightarrow{OE})$, et : $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{\text{proj}}_{Oz//xOy}\,(\overrightarrow{OE})$.

Par ailleurs, $\overrightarrow{OD}$ peut être considéré comme la somme géométrique de sa projection sur Ox parallèlement à Oy et de sa projection sur Oy parallèlement à Ox, soit :

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

D'où :

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

Comme $\overrightarrow{OA}$ représente la projection de $\overrightarrow{OE}$ sur Ox parallèlement à yOz, comme $\overrightarrow{OB}$ représente la projection de $\overrightarrow{OE}$ sur Oy parallèlement à zOx et comme $\overrightarrow{OC}$ représente la projection de $\overrightarrow{OE}$ sur Oz parallèlement à xOy, on peut écrire que tout vecteur est la somme géométrique de ses projections sur les trois arêtes d'un trièdre parallèlement à la face opposée à chacune d'elles.

Soit un vecteur libre $\vec{V}$ et un trièdre (O, xyz) dont les arêtes Ox, Oy et Oz sont orientées et munies des vecteurs unitaires $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$. Une telle figure est appelée *repère cartésien* ; $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$, qui n'ont pas nécessairement le même module, sont les vecteurs de base du repère (fig. I-23). Soit : $\overline{OA} = X$, $\overline{OB} = Y$ et $\overline{OC} = Z$ les mesures algébriques de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sur les axes Ox, Oy et Oz. X, Y et Z sont appelées *composantes scalaires* ou *coordonnées* du vecteur $\vec{V}$ dans le trièdre (O, xyz). Les relations précé-

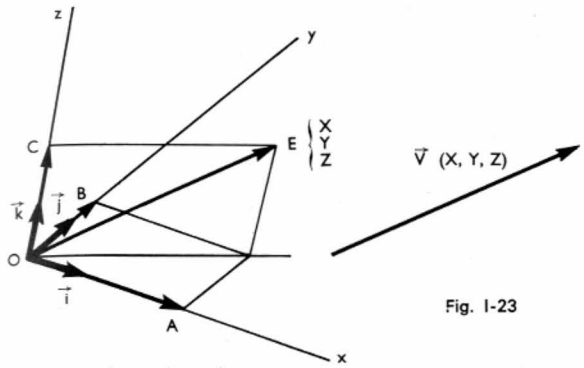


Fig. I-23

$\vec{V} = \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$
$\overrightarrow{OA} = \overline{OA}.\vec{i}, \overrightarrow{OB} = \overline{OB}.\vec{j}$ et $\overrightarrow{OC} = \overline{OC}.\vec{k}$

dentes montrent que $\vec{V}$ peut alors s'exprimer en fonction des vecteurs de base $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$:

$$[\vec{V} = X.\vec{i} + Y.\vec{j} + Z.\vec{k}]$$

$\vec{V}$ se note encore: $\vec{V}$ (X, Y, Z). Il y a correspondance bi-univoque entre tout vecteur libre de l'espace et tout triplet de nombre X, Y, Z.

Application à la détermination de la somme de plusieurs vecteurs. — Soit n vecteurs libres: $\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3}, \ldots, \vec{V_n}$ et un trièdre (O, xyz). Les composantes scalaires de $\vec{V_1}, \vec{V_2}, \ldots, \vec{V_n}$ dans (O, xyz) sont: X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2; $\ldots$; X_n, Y_n, Z_n.

D'où:

$$\vec{V_1} = X_1.\vec{i} + Y_1.\vec{j} + Z_1.\vec{k}$$
$$\vec{V_2} = X_2.\vec{i} + Y_2.\vec{j} + Z_2.\vec{k}$$
$$\vec{V_3} = X_3.\vec{i} + Y_3.\vec{j} + Z_3.\vec{k}$$

et: $\vec{V_1} + \vec{V_2} + \ldots + \vec{V_n} = (X_1 + X_2 + \ldots + X_n).\vec{i} + (Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n).\vec{j} + (Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n).\vec{k}$

Les composantes scalaires de: $\vec{S} = \vec{V_1} + \vec{V_2} + \ldots + \vec{V_n}$, dans (O, xyz) sont égales à la somme des composantes scalaires des n vecteurs $\vec{V_1}, \vec{V_2}, \ldots, \vec{V_n}$.

2.4. Produit scalaire de deux vecteurs

2.4.1. Définition. — Étant donné deux vecteurs libres $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$, on appelle *produit scalaire* de ces deux vecteurs le nombre algébrique, qui est le produit de leurs mesures algébriques, prises relativement à des axes qui leur sont parallèles, et du cosinus de l'angle de ces deux axes (fig. I-24).

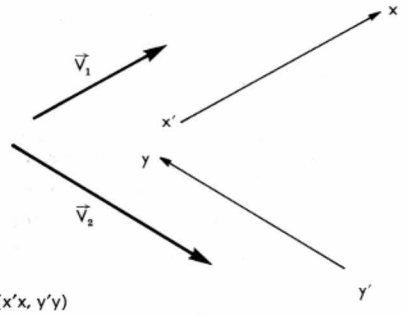


Fig. I-24

$\vec{V_1} \bullet \vec{V_2} = \overline{V_1}.\overline{V_2} \cos (x'x, y'y)$

L'opération effectuée est dite **externe,** car à deux grandeurs vectorielles elle fait correspondre une grandeur scalaire. Le résultat est indépendant du choix des axes $x'x$ et $y'y$: il ne dépend que de $\vec{V_1}$ et de $\vec{V_2}$.

Si l'on prend pour axe $x'x$ le vecteur $\vec{V_1}$ lui-même et pour axe $y'y$ le vecteur $\vec{V_2}$, on a alors:

$$\boxed{\vec{V_1} \bullet \vec{V_2} = V_1 . V_2 \cos (\vec{V_1}, \vec{V_2})}$$

On remarque que le signe du produit scalaire est celui du cosinus de l'angle que font les deux vecteurs.

$[(\vec{V_1}, \vec{V_2})$ aigu $\Rightarrow \vec{V_1} \bullet \vec{V_2} > 0$; $(\vec{V_1}, \vec{V_2})$ obtus $\Rightarrow \vec{V_1} \bullet \vec{V_2} < 0]$

On doit remarquer encore, d'après le paragraphe 2.3.2, que:

$$\overline{V_1} . \cos (x'x, y'y) = \overline{\text{proj}}_{y'y} (\vec{V_1})$$

donc que: $\vec{V_1} \bullet \vec{V_2} = \overline{V_2} . \overline{\text{proj}}_{y'y} (\vec{V_1})$ (fig. I-25): le produit scalaire de deux vecteurs est égal au produit de la mesure algébrique de l'un d'eux par la mesure algébrique de la projection orthogonale du second sur l'axe qui porte le premier.

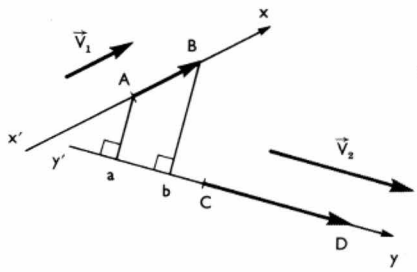


Fig. I-25

$\vec{V_1} \bullet \vec{V_2} = \overline{CD}\ \overline{ab} = \overline{V_2}\,\overline{\text{proj}}_{y'y}\,\vec{V_1}$

2.4.2. Cas particulier important. — Si $\vec{V_2}$ est égal à $\vec{v}$, vecteur unitaire de $y'y$, $\vec{V_1} \bullet \vec{v} = (1) . \overline{\text{proj}}_{y'y} (\vec{V_1})$. La projection orthogonale d'un vecteur sur un axe est égale au produit scalaire de ce vecteur par le vecteur unitaire de cet axe.

2.4.3. Propriétés du produit scalaire. — Le produit scalaire est commutatif. Le produit scalaire est nul si l'un des vecteurs est nul ou s'ils ont des directions orthogonales. Le produit scalaire est distributif par rapport à la somme géométrique:

$$\vec{V_1} \bullet (\vec{V_2} + \vec{V_3}) = \vec{V_1} \bullet \vec{V_2} + \vec{V_1} \bullet \vec{V_3}$$

Les règles de calcul relatives au produit scalaire sont identiques aux règles du calcul algébrique classique.

2.4.4. Expression analytique du produit scalaire (fig. I-26). — On dit qu'un repère cartésien est *rectangulaire,* ou *orthogonal,* lorsque le trièdre (O, xyz) est tri-

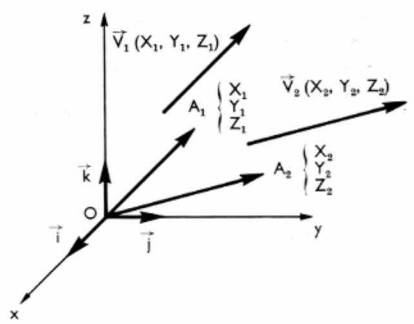


Fig. I-26

rectangle, *normé* lorsque les trois vecteurs de base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ont un même module égal à l'unité de longueur, *orthonormé,* lorsqu'il est à la fois orthogonal et normé. C'est ce dernier repère qui sera plus particulièrement utilisé en mécanique *sauf mention contraire, tous les calculs seront effectués dans un tel repère.*

L'expression du produit scalaire $\vec{V_1} \bullet \vec{V_2}$ peut être écrite à l'aide des composantes de ces vecteurs dans un repère cartésien orthonormé. Si l'on a:

$$\vec{V_1} = X_1.\vec{i} + Y_1.\vec{j} + Z_1.\vec{k}$$
$$\vec{V_2} = X_2.\vec{i} + Y_2.\vec{j} + Z_2.\vec{k}$$
$$\vec{V_1} \bullet \vec{V_2} = (X_1.\vec{i} + Y_1.\vec{j} + Z_1.\vec{k}) \bullet (X_2.\vec{i} + Y_2.\vec{j} + Z_2.\vec{k})$$

Les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ étant orthogonaux et de module 1

il vient :

$$\vec{i}\bullet\vec{i} = \vec{j}\bullet\vec{j} = \vec{k}\bullet\vec{k} = 1$$
$$\vec{i}\bullet\vec{j} = \vec{j}\bullet\vec{k} = \vec{k}\bullet\vec{i} = 0$$

Le développement du produit précédent entraîne :

$$\boxed{\vec{V_1}\bullet\vec{V_2} = X_1.X_2 + Y_1.Y_2 + Z_1.Z_2}$$

Remarque : Afin de rendre l'écriture des résultats plus concise, il est souvent fait appel à l'écriture indicielle dans laquelle les lettres sont affectées d'indices significatifs (fig. I-27). Ainsi, si l'on reprend l'expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs $\vec{V_l}$ et $\vec{V_m}$ dans un repère

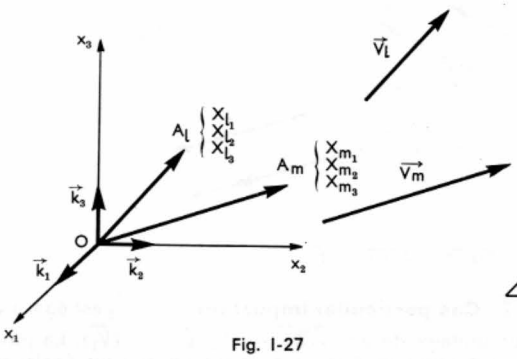


Fig. I-27

orthonormé dont on appelle Ox_1, Ox_2 et Ox_3 les axes et $\vec{k_1}$, $\vec{k_2}$ et $\vec{k_3}$ les vecteurs de base, les composantes de $\vec{V_l}$ et $\vec{V_m}$ seront alors notées X_{li} et X_{mj}, le premier indice correspondant au vecteur considéré, le second à la composante considérée ; X_{l_3} sera donc la composante sur Ox_3 du vecteur $\vec{V_l}$ et l'on écrit :

$$\vec{V_l} = X_{l_1}.\vec{k_1} + X_{l_2}.\vec{k_2} + X_{l_3}.\vec{k_3}$$
$$= \sum_{i=1}^{i=3} X_{li}.\vec{k_i} = X_{li}.\vec{k_i} \qquad (1)$$

$$\vec{V_m} = X_{m_1}.\vec{k_1} + X_{m_2}.\vec{k_2} + X_{m_3}.\vec{k_3}$$
$$= \sum_{j=1}^{j=3} X_{mj}.\vec{k_j} = X_{mj}.\vec{k_j} \qquad (2)$$

Les écritures contractées (1) et (2) de $\vec{V_l}$ et $\vec{V_m}$ utilisent la *convention de l'indice muet :* cette convention stipule que lorsqu'un indice *littéral* est répété deux fois dans un même monôme, celui-ci doit être remplacé par la somme de tous les termes obtenus en donnant à cet indice les valeurs comprises entre les limites inscrites au-dessous et au-dessus du signe Σ (ici 1, 2, 3). Ainsi $a_i.b_i$ représente la somme :

$$\sum_{i=1}^{i=3} a_i.b_i = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$$

et $X_{li}.\vec{k_i}$ représente la somme :

$$\sum_{i=1}^{i=3} X_{li}.\vec{k_i} = X_{l_1}.\vec{k_1} + X_{l_2}.\vec{k_2} + X_{l_3}.\vec{k_3}$$

Dans les expressions ci-dessus i est l'indice muet ; un indice non muet est dit *franc*. Ainsi dans : $X_{li}.k_i$, l est un indice littéral franc ; il ne peut figurer qu'une seule fois dans une expression contractée. Un indice muet ne peut figurer que deux fois dans une expression contractée. Indice muet et indice franc doivent être désignés par des lettres différentes.

Avec cette convention le produit scalaire $\vec{V_l}\bullet\vec{V_m}$ s'écrit :

$$\vec{V_l}\bullet\vec{V_m} = X_{l_1}.X_{m_1} + X_{l_2}.X_{m_2} + X_{l_3}.X_{m_3} = X_{li}.X_{mi}$$

Ce résultat aurait pu être obtenu directement en effectuant le produit :

$$\vec{V_l}\bullet\vec{V_m} = X_{li}.\vec{k_i}\bullet X_{mj}.\vec{k_j} = X_{li}.X_{mj}.\vec{k_i}\bullet\vec{k_j} \qquad (1)$$

Dans cette expression le monôme (1) représente la somme de tous les termes obtenus en donnant *indépendamment* aux indices muets i et j toutes les valeurs 1, 2 et 3.

Or : $\vec{k_i}\bullet\vec{k_j} = 0$, si : $i \neq j$, et : $\vec{k_i}\bullet\vec{k_j} = 1$, si : $i = j$; $\vec{k_i}\bullet\vec{k_j}$ est donc représenté par le symbole de Kronecker : δ_{ij}, qui représente 0 si l'on a $i \neq j$ et 1 si $i = j$.

D'où : $\vec{V_l}\bullet\vec{V_m} = X_{li}.X_{mj}.\delta_{ij} = X_{lk}.X_{mk}$, puisque seuls les monômes dans lesquels $i = j$ seront différents de zéro.

2.5. Produit vectoriel de deux vecteurs

2.5.1. Plan orienté. — On désigne par plan orienté un plan sur lequel on a fixé un sens positif de rotation au moyen d'un axe perpendiculaire au plan (fig. I-28). Pour un observateur placé sur cet axe, toute rotation s'effectuant autour de l'axe de sa droite vers sa gauche en passant devant lui est de sens positif. Il est aussi possible d'orienter

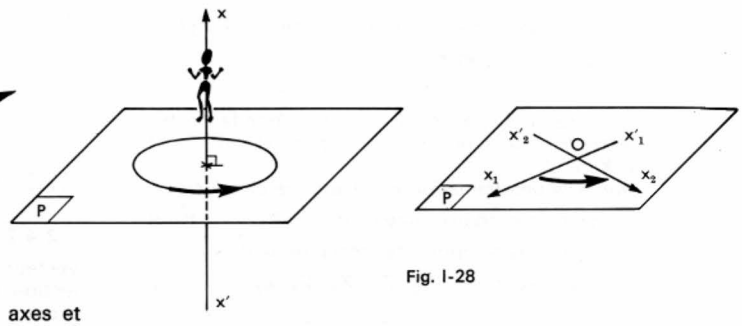
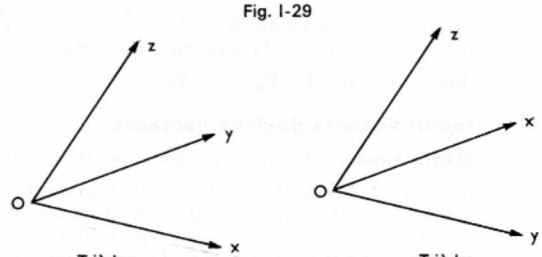


Fig. I-28

un plan à l'aide de deux axes ordonnés placés sur celui-ci, l'ordre définissant alors le sens positif.

On désigne par trièdre de sens *direct* un trièdre tel qu'un observateur placé sur l'arête orientée Oz du trièdre voit Ox à sa droite et Oy à sa gauche (l'ordre étant x, y, z) ; dans le cas contraire, le trièdre est dit de sens *rétrograde* (fig. I-29).

Fig. I-29



L'espace peut être orienté par un trièdre trirectangle, dit de référence, défini par une base orthonormée $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Tout trièdre de même sens que le trièdre de référence est dit de sens positif.

2.5.2. Définition. — Soit un espace orienté par un trièdre de référence de sens direct et deux vecteurs de cet espace $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ non nuls et non parallèles, de représentant $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ (fig. I-30). On appelle produit vectoriel de $\vec{V_1}$ par $\vec{V_2}$, que l'on note $\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}$, le vecteur $\vec{U} = \overrightarrow{OC}$ défini comme il suit :

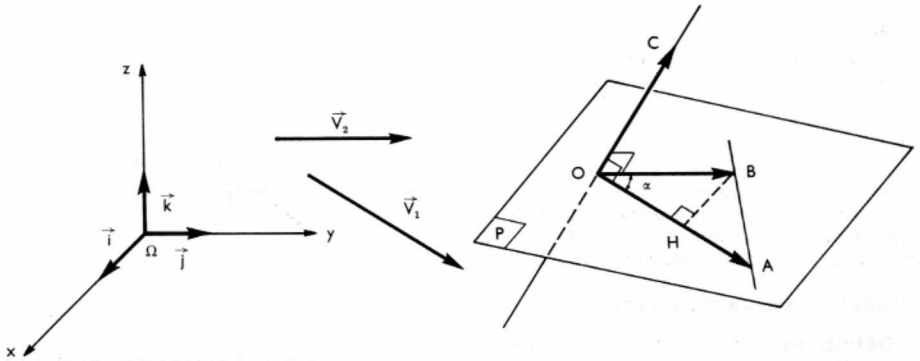
— $\overrightarrow{OC}$ est de direction perpendiculaire au plan AOB.

— Le sens de $\overrightarrow{OC}$ est tel que le trièdre (O, ABC) est de sens positif.

— Le module de $\overrightarrow{OC}$ est : $|\overrightarrow{OC}| = |\vec{V_1}|.|\vec{V_2}|.\sin\alpha$, α étant l'angle géométrique (non orienté et compris entre 0 et π) des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

On doit remarquer que le module de $\overrightarrow{OC}$ est aussi égal au double de l'aire du triangle OAB (en effet : $OB.\sin\alpha = BH$, et : $OA.OB.\sin\alpha = OA.BH =$ 2 fois l'aire OAB) et que $\vec{U}$

Fig. I-30



est indépendant du point O choisi : c'est donc un vecteur libre. L'opération effectuée est dite *interne* (V. § 2.4.1) : la grandeur issue du produit vectoriel $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ est vectorielle (alors que celle issue du produit scalaire $\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2$ est scalaire). Le produit vectoriel $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ est nul si l'un des vecteurs $\vec{V}_1$ ou $\vec{V}_2$ est nul ou s'ils ont des supports parallèles, car sin α est alors nul.

2.5.3. Propriétés du produit vectoriel. — Le produit vectoriel est anticommutatif car le sens de $\vec{U}$ est fonction de l'ordre $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ et : $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = -(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1)$.

— Le produit vectoriel est une fonction linéaire de ses arguments $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$:

$$\forall\lambda : \quad \lambda.\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \lambda.(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)$$

$$\forall\lambda \text{ et } \forall\mu : \quad \lambda.\vec{V}_1 \wedge \mu.\vec{V}_2 = \lambda.\mu.(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)$$

— Le produit vectoriel est distributif par rapport à l'addition vectorielle :

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_3$$

$$(\vec{V}_1 + \vec{V}_4) \wedge (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = (\vec{V}_1 + \vec{V}_4) \wedge \vec{V}_2 + (\vec{V}_1 + \vec{V}_4) \wedge \vec{V}_3$$

$$= \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 + \vec{V}_4 \wedge \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_3 + \vec{V}_4 \wedge \vec{V}_3$$

2.5.4. Composantes scalaires du produit vectoriel dans un repère orthonormé. — Soit deux vecteurs $\vec{V}_1$ (X_1, Y_1, Z_1) et $\vec{V}_2(X_2, Y_2, Z_2)$ et un repère orthonormé $(O, x\,y\,z)$ (fig. I-31) :

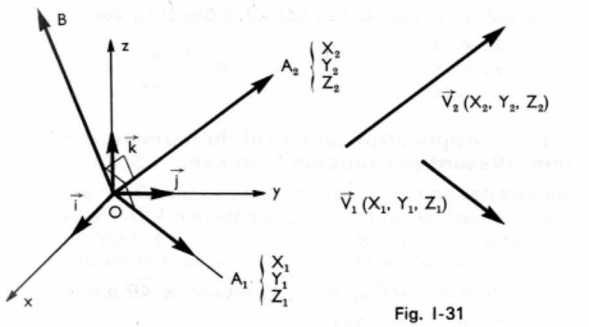


Fig. I-31

$$\vec{V}_1 = X_1.\vec{i} + Y_1.\vec{j} + Z_1.\vec{k}$$

$$\vec{V}_2 = X_2.\vec{i} + Y_2.\vec{j} + Z_2.\vec{k}$$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = (X_1.\vec{i} + Y_1.\vec{j} + Z_1.\vec{k}) \wedge (X_2.\vec{i} + Y_2.\vec{j} + Z_2.\vec{k}) \quad (1)$$

Or :

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{0}; \quad \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}; \quad \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$$

$$\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}; \quad \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{0}; \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$$

$$\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}; \quad \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}; \quad \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$$

En utilisant ces résultats et les propriétés énoncées précédemment, l'expression (1) s'écrit :

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = (Y_1.Z_2 - Z_1.Y_2).\vec{i} + (Z_1.X_2 - X_1.Z_2).\vec{j} + (X_1.Y_2 - Y_1.X_2).\vec{k}$$

Remarque : Les composantes du produit vectoriel peuvent se retenir en remarquant qu'elles s'obtiennent à partir des tableaux suivants (qui ne sont pas sans rapport avec les calculs de déterminants) :

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & X_1 & X_2 \\ \vec{j} & Y_1 & Y_2 \\ \vec{k} & Z_1 & Z_2 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{i} \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Z_1 & Z_2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ Z_1 & Z_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ Y_1 & Y_2 \end{vmatrix}}$$

2.5.5. Application au calcul du moment d'un vecteur glissant par rapport à un point (fig. I-32). — Soit un vecteur glissant de support (D) et de représentant $\overrightarrow{AB}$.

Le moment de ce vecteur glissant par rapport au point O est le vecteur $\overrightarrow{OC}$, de direction perpendiculaire au plan (AOB), de sens tel que le trièdre (O, ABC) soit direct, et de

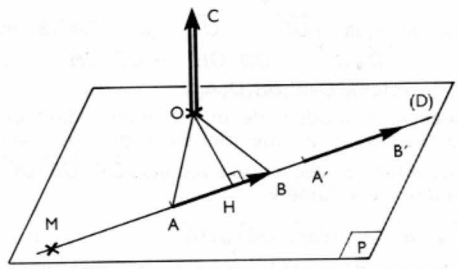


Fig. I-32

Pour différencier les vecteurs-moments des autres vecteurs, on les représente par deux droites parallèles munies d'une flèche

module égal au produit du module de $\overrightarrow{AB}$ par la distance OH du point O au support (D) de $\overrightarrow{AB}$ (soit deux fois l'aire du triangle OAB). Le vecteur $\overrightarrow{OC}$ est égal au produit vectoriel $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$. Or : $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$, donc :

$$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \wedge (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) = [\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}].$$

Comme : $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OA} = \vec{0}$ (vecteurs parallèles), il reste :

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}$$

Le vecteur $\overrightarrow{OC}$, vecteur-moment du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par rapport au point O se note : $\overrightarrow{\mathfrak{M}}_O(\overrightarrow{AB})$ (lire *moment en O de* $\overrightarrow{AB}$) :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathfrak{M}}_O(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}}$$

Ce vecteur-moment dépend de O : il est nul si O appartient à (D) ou si $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

Remarque : Pour que la définition ci-dessus ait un sens, il est nécessaire que $\overrightarrow{\mathfrak{M}}_O(\overrightarrow{AB})$ ne dépende pas du représentant choisi pour définir le vecteur glissant. On démontre qu'il en est bien ainsi.

Tout vecteur glissant $\overrightarrow{AB}$ peut être défini par un vecteur libre $\vec{V}$ ($\vec{V} = \overrightarrow{AB}$), et par le moment en un point de l'espace de ce vecteur glissant. On note :

$$\overrightarrow{AB} \longleftrightarrow \left\{ \begin{matrix} \vec{V} \\ \overrightarrow{\mathfrak{M}} \end{matrix} \right\}_O$$

Dans l'accolade on trouve les deux éléments (vecteur libre et moment) définissant le vecteur glissant et à l'extérieur de l'accolade, en indice, le point de l'espace où est déterminé le moment du vecteur glissant.

2.6. Produit mixte de trois vecteurs

2.6.1. Définition. — Soit l'espace orienté par un trièdre de référence (O, xyz) de sens direct et trois vecteurs libres $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ non nuls, non coplanaires et de représentants respectifs $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ (fig. I-33). On appelle *produit mixte de* $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ le produit scalaire de $\vec{V}_3$ par le vecteur libre $\vec{U}$ issu du produit vectoriel $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ on le note :

$$m = (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) . \vec{V}_3$$

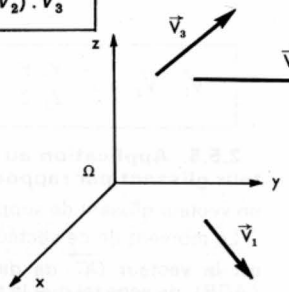


Fig. I-33

La grandeur obtenue est une grandeur scalaire.

On doit remarquer que : $|\overrightarrow{OD}| = |\vec{U}|$ = aire OAC_1B, et que : $|\vec{U} \bullet \vec{V}_3| = |\overrightarrow{OD} \bullet \overrightarrow{OC}| = OD \,.\, OH = OD \,.\, CH_1 = v$ = volume $OAC_1BB_1O_1A_1C$

En conséquence, le module de m est indépendant de l'ordre des vecteurs dans les opérations car, quel que soit le produit mixte effectué avec les trois vecteurs $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$, on obtient toujours le volume v :

$$|(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OC}) \bullet \overrightarrow{OB}| = |(\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC}) \bullet \overrightarrow{OA}| = \ldots = |m|$$

Au contraire, le signe de m est fonction de cet ordre : m est positif si, et seulement si, l'ordre V_1, V_2, V_3 correspond à un trièdre (O, ABC) de sens positif. Toute permutation circulaire sur V_1, V_2, V_3 laisse inchangé le signe de m, car le sens du trièdre correspondant n'est pas changé. On peut donc écrire :

$$(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \bullet \vec{V}_3 = (\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_1) \bullet \vec{V}_2 = (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) \bullet \vec{V}_1 = m$$

On note simplement : $m = (\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3)$.

Le produit mixte $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3)$ sera nul si v est nul, donc si $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ sont parallèles à un même plan ou si deux quelconques de ces vecteurs sont parallèles.

2.6.2. Propriété du produit mixte. — Le produit mixte est anticommutatif, car il change de signe lorsque l'on commute deux éléments entre eux :

$$(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3) = -(\vec{V}_2, \vec{V}_1, \vec{V}_3)$$

— Le produit mixte est une fonction linéaire de ses arguments $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$:

$\forall\lambda$: $(\lambda \vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3) = \lambda (\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3)$

$\forall\lambda, \forall\mu$ et $\forall\nu$: $(\lambda \vec{V}_1, \mu \vec{V}_2, \nu \vec{V}_3) = \lambda\mu\nu (\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3)$

— Le produit mixte est distributif par rapport à l'addition vectorielle :

$$([\vec{V}_1 + \vec{V}'_1], \vec{V}_2, \vec{V}_3) = (\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3) + (\vec{V}'_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3)$$

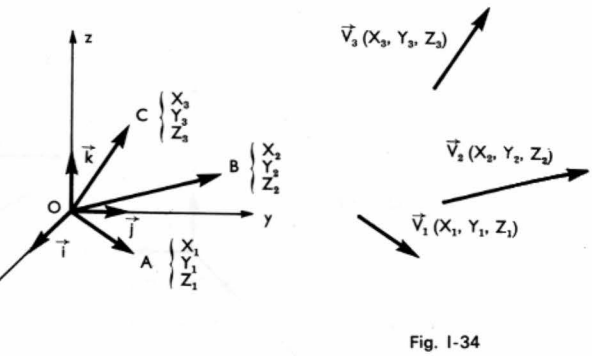
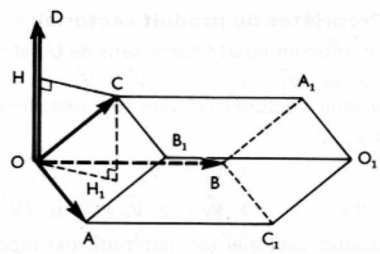


Fig. I-34

2.6.3. Expression analytique du produit mixte dans un repère orthonormé (fig. I-34). — Soit trois vecteurs $\vec{V}_1 (X_1, Y_1, Z_1)$, $\vec{V}_2 (X_2, Y_2, Z_2)$, $\vec{V}_3 (X_3, Y_3, Z_3)$ et un repère orthonormé $(O, x\,y\,z)$:

$$\vec{V}_1 = X_1 . \vec{i} + Y_1 . \vec{j} + Z_1 . \vec{k}$$
$$\vec{V}_2 = X_2 . \vec{i} + Y_2 . \vec{j} + Z_2 . \vec{k}$$
$$\vec{V}_3 = X_3 . \vec{i} + Y_3 . \vec{j} + Z_3 . \vec{k}$$



D'après le paragraphe 2.5.4 :

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$$
$$= (Y_1Z_2 - Z_1Y_2) . \vec{i} + (Z_1X_2 - X_1Z_2) . \vec{j} + (X_1Y_2 - Y_1X_2) . \vec{k}$$

D'où :

$$(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) . \vec{V}_3$$
$$= (Y_1Z_2 - Z_1Y_2) X_3 + (Z_1X_2 - X_1Z_2) Y_3 + (X_1Y_2 - Y_1X_2) Z_3$$

Remarque : L'expression analytique du produit mixte peut se retenir en remarquant qu'elle s'obtient en calculant le déterminant du tableau dont les trois colonnes sont constituées par les composantes scalaires des trois vecteurs :

$$m = \begin{vmatrix} X_3 & X_1 & X_2 \\ Y_3 & Y_1 & Y_2 \\ Z_3 & Z_1 & Z_2 \end{vmatrix} = X_3 \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Z_1 & Z_2 \end{vmatrix} - Y_3 \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ Z_1 & Z_2 \end{vmatrix} + Z_3 \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ Y_1 & Y_2 \end{vmatrix}$$

2.6.4. Application au calcul du moment d'un vecteur glissant par rapport à un axe. — Soit un vecteur glissant de support (D) et de représentant $\overrightarrow{AB}$, un axe $x'x$ ne coupant pas (D) et n'étant pas parallèle à (D) et un point quelconque O de cet axe (fig. I-35). Le moment de ce vecteur glissant par rapport à $x'x$ est la *mesure algébrique sur $x'x$ de la projection de $\overrightarrow{OC}$, moment de $\overrightarrow{AB}$ par rapport à O* ; on le note $\overrightarrow{\mathfrak{M}}_{x'x} (\overrightarrow{AB})$.

Pour que cette définition ait un sens il est nécessaire de vérifier que $\overrightarrow{\mathfrak{M}}_{x'x} (\overrightarrow{AB})$ est indépendant du point O choisi.

On remarque tout d'abord que $\overrightarrow{\mathfrak{M}}_{x'x} (\overrightarrow{AB})$ est positif si l'angle que fait le vecteur $\overrightarrow{OC}$ avec l'axe $x'x$ est aigu, donc si ce vecteur et cet axe sont orientés du même côté par rapport au plan AOB. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que le trièdre (O, ABx) soit de sens direct puisque (O, ABC) l'est. Dans le cas contraire $\overrightarrow{\mathfrak{M}}_{x'x} (\overrightarrow{AB})$ est négatif. Or le sens du trièdre (O, ABx) ne dépend que de la position relative de $x'x$ et de $\overrightarrow{AB}$; donc le signe de $\overrightarrow{\mathfrak{M}}_{x'x} (\overrightarrow{AB})$ est indépendant de la position du point O sur $x'x$.

Soit un plan (P) perpendiculaire à $x'x$ et coupant $x'x$ en ω. On projette orthogonalement $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{ab}$ sur ce plan. Soit

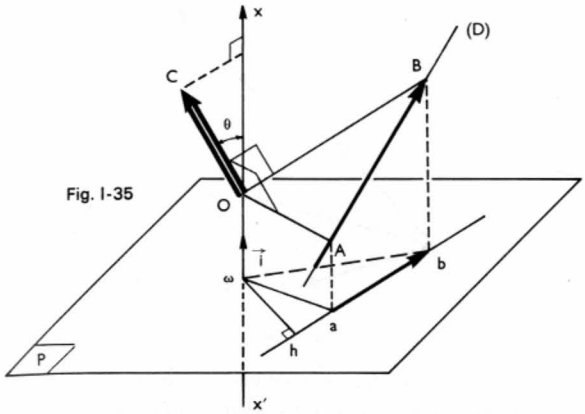


Fig. I-35

θ l'angle que fait $\overrightarrow{OC}$, perpendiculaire au plan (AOB) avec $x'x$ perpendiculaire au plan (P), il *représente* l'angle de ces deux plans. On peut écrire :

$|\,\overrightarrow{\mathfrak{M}_{x'x}}\,(\overrightarrow{AB})\,| = 2 \times \text{aire } OAB \,.\cos\,\theta,$

or : aire $OAB \,.\cos\,\theta =$ aire ωab, donc :

$$[\,|\,\overrightarrow{\mathfrak{M}_{x'x}}\,(\overrightarrow{AB})\,| = 2\,.\,\text{aire}\,\omega ab]$$

Cette aire ωab étant indépendante de la position de O sur $x'x$, il en est de même de $|\,\overrightarrow{\mathfrak{M}_{x'x}}\,(\overrightarrow{AB})\,|$. De plus :

$$|\,\overrightarrow{\mathfrak{M}_{x'x}}\,(\overrightarrow{AB})\,| = \omega h\,.\,ab$$

Ce que l'on vient d'établir à l'aide de remarques géométriques peut être obtenu d'une manière plus directe à l'aide des propriétés du produit mixte établies précédemment.

En effet par définition même :

$\overrightarrow{\mathfrak{M}_{x'x}}\,(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{\text{proj}_{x'x}}\,\overrightarrow{\mathfrak{M}_O}(\overrightarrow{AB})$. et $\overrightarrow{\mathfrak{M}_O}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}$

Si $\vec{i}$ est le vecteur unitaire de l'axe $x'x$ il vient :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathfrak{M}_{x'x}}\,(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{\text{proj}_{x'x}}\,(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}) \bullet \vec{i}}$$

c'est un produit mixte. On montre que ce dernier produit est indépendant du choix de O sur $x'x$:

$\forall O' \in x'x$: $[\overrightarrow{\mathfrak{M}_{O'}}(\overrightarrow{AB})] \bullet \vec{i} = [\overrightarrow{\mathfrak{M}_O}(\overrightarrow{AB})] \bullet \vec{i} = \overrightarrow{\mathfrak{M}_{x'x}}(\overrightarrow{AB})$

Remarque 1 : Pour que le moment d'un vecteur glissant $\overrightarrow{AB}$ par rapport à un axe $x'x$ soit nul, il faut et il suffit que le vecteur glissant et l'axe soient dans le même plan. C'est en effet la condition nécessaire et suffisante pour avoir :

$$(\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{AB},\ \vec{i}) = 0$$

Remarque 2 (fig. I-36) : Dans le cas particulier où le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est orthogonal à l'axe $x'x$, $\overrightarrow{AB}$ se projette en

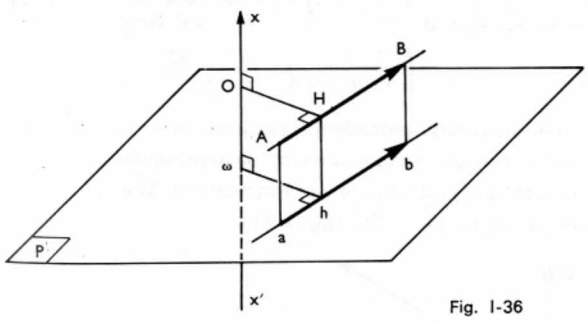


Fig. I-36

vraie grandeur sur (P). Si OH est la perpendiculaire commune à ce vecteur et à cet axe, on a alors $|\,\overrightarrow{\mathfrak{M}_{x'x}}\,(\overrightarrow{AB})\,| = \omega h\,.\,ab = OH\,.\,AB$. Quant au signe de $\overrightarrow{\mathfrak{M}_{x'x}}\,(\overrightarrow{AB})$, il est donné par le sens du trièdre (O, ABx). On a là un procédé très simple de calcul pour le moment du vecteur glissant $\overrightarrow{AB}$ par rapport à l'axe $x'x$.

Remarque 3 (fig. I-37) : Si tous les vecteurs glissants $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$... sont situés dans un même plan (P) et si l'on désire déterminer leur moment en un point O de ce plan, il est très important de remarquer que tous ces vecteurs-moments ont même direction (perpendiculaire au plan (P)). En conséquence il peut être suffisant de ne calculer que leur mesure algébrique sur l'axe $x'x$ passant par O

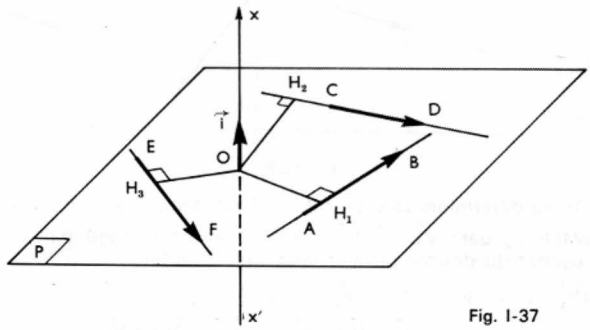


Fig. I-37

et perpendiculaire au plan (P). On définit alors le *moment algébrique* du vecteur glissant $\overrightarrow{AB}$ par rapport au point O. C'est le moment $\overrightarrow{\mathfrak{M}_{x'x}}\,(\overrightarrow{AB})$ et on le note $\overrightarrow{\mathfrak{M}_0}\,(\overrightarrow{AB})$.

Ainsi dans le cas de la figure I-37, compte tenu du sens de $x'x$ et des différents vecteurs :

$\overrightarrow{\mathfrak{M}_O}\,(\overrightarrow{AB}) = +\ OH_1\,.\,AB$ ou $\overrightarrow{\mathfrak{M}_O}\,(\overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}) \bullet \vec{i}$

$\overrightarrow{\mathfrak{M}_O}\,(\overrightarrow{CD}) = -\ OH_2\,.\,CD$ ou $\overrightarrow{\mathfrak{M}_O}\,(\overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{CD}) \bullet \vec{i}$

$\overrightarrow{\mathfrak{M}_O}\,(\overrightarrow{EF}) = +\ OH_3\,.\,EF$ ou $\overrightarrow{\mathfrak{M}_O}\,(\overrightarrow{EF}) = (\overrightarrow{OE} \wedge \overrightarrow{EF}) \bullet \vec{i}$

2.7. Double produit vectoriel

2.7.1. Définition. — Soit l'espace orienté par un trièdre de référence (O, xyz) de sens direct et trois vecteurs libres $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ non nuls et de représentants respectifs $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ (fig. I-38).

On appelle *double produit vectoriel de $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ le produit vectoriel du vecteur libre $\vec{V}$, issu du produit vectoriel $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$, par le vecteur $\vec{V}_3$* :

$$\boxed{\vec{W} = (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \wedge \vec{V}_3 = (\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}) \wedge \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} \wedge \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE}}$$

La grandeur obtenue est une grandeur vectorielle.

2.7.2. Propriété du double produit vectoriel (fig. I-38). — Le vecteur $\overrightarrow{OE} = \vec{W}$ est, par construction, perpendiculaire à $\overrightarrow{OD}$: il est donc dans le plan (AOB) et l'on peut écrire :

$$\vec{W} = \overrightarrow{OE} = a\,.\,\overrightarrow{OA} + b\,.\,\overrightarrow{OB} = a\,.\,\vec{V}_1 + b\,.\,\vec{V}_2$$

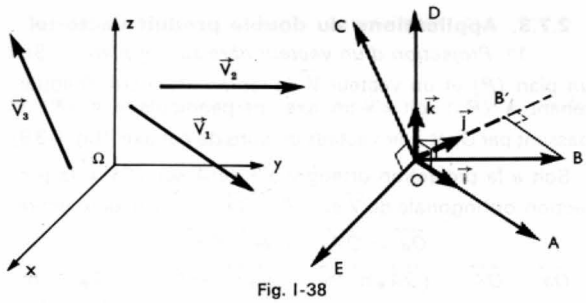


Fig. I-38

Le vecteur $\overrightarrow{OE} = \vec{W}$ étant orthogonal à $\overrightarrow{OC}$, il vient :

$$\vec{W} \bullet \vec{V}_3 = \overrightarrow{OE} \bullet \overrightarrow{OC} = a\,.\,\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_3 + b\,.\,\vec{V}_2 \bullet \vec{V}_3 = 0$$

Soit :
$$\frac{a}{\vec{V}_2 \bullet \vec{V}_3} = -\frac{b}{\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_3} = \lambda$$

d'où :
$$\vec{W} = \lambda\,.\,[(\vec{V}_2 \bullet \vec{V}_3)\,.\,\vec{V}_1 - (\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_3)\,.\,\vec{V}_2] \qquad (1)$$

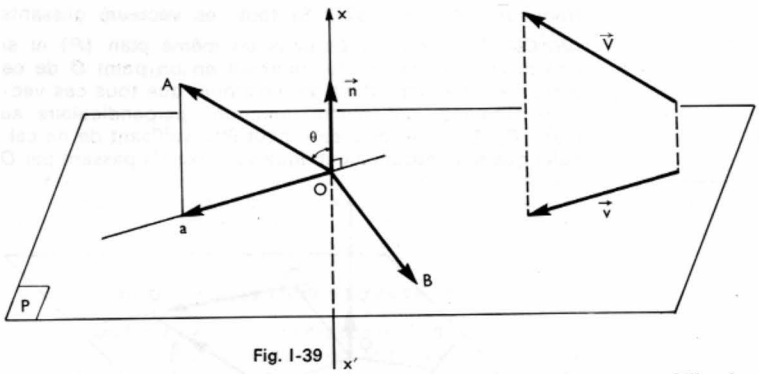


Fig. I-39

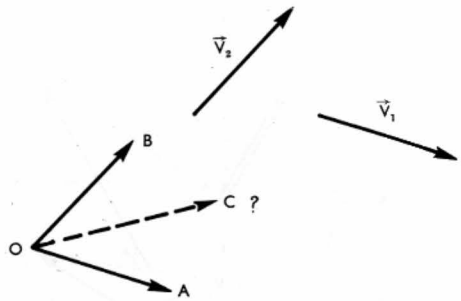


Fig. I-40

On va déterminer la valeur de λ. Tout d'abord si l'on remplace $\vec{V_2}$ par: $\vec{V_2}' = (\vec{V_2} + \alpha.\vec{V_1})$ on ne change pas le résultat du double produit vectoriel. En effet:

$$(\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}') \wedge \vec{V_3} = [\vec{V_1} \wedge (\vec{V_2} + \alpha.\vec{V_1})] \wedge \vec{V_3}$$
$$= (\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}) \wedge \vec{V_3} + (\vec{V_1} \wedge \alpha.\vec{V_1}) \wedge \vec{V_3}$$
$$= (\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}) \wedge \vec{V_3}$$

car: $\vec{V_1} \wedge \alpha.\vec{V_1} = 0$

En choisissant α tel que $\vec{V_2}' = \vec{V_2} + \alpha.\vec{V_1}$ soit orthogonal à $\vec{V_1}$ ou encore: $\overrightarrow{OB'} = \vec{V_2}' = \overrightarrow{OB} + \alpha.\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BB'}$ orthogonal à $\overrightarrow{OA}$, on peut alors munir les arêtes de l'orthotrièdre $(O, AB'D)$ de vecteurs unitaires $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, tels que le trièdre $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ soit de sens direct. Dans ces conditions:

$$\overrightarrow{OA} = \vec{V_1} = V_1.\vec{i}\,; \overrightarrow{OB'} = \vec{V_2}' = V_2'.\vec{j}\,; \overrightarrow{OC} = \vec{V_3} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$
$$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB'} = \vec{V_1} \wedge \vec{V_2}' = (V_1.V_2')(\vec{i} \wedge \vec{j}) = (V_1.V_2').\vec{k}$$
$$\overrightarrow{OE} = (\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB'}) \wedge \overrightarrow{OC} = \vec{W} = (\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}') \wedge \vec{V_3}$$
$$= (x.V_1.V_2')(\vec{k} \wedge \vec{i}) + (y.V_1.V_2')(\vec{k} \wedge \vec{j}) + (z.V_1V_2')\,\vec{0}$$
$$= x.V_1.V_2'.\vec{j} - y.V_1.V_2'.\vec{i} + 0$$

Or: $\vec{V_2}'.\vec{j} = \vec{V_2}'$ et $x.V_1 = \vec{V_3} \bullet \vec{V_1}$

$\vec{V_1}.\vec{i} = \vec{V_1}$ et $y.\vec{V_2}' = \vec{V_3} \bullet \vec{V_2}'$

D'où: $\vec{W} = (\vec{V_1} \bullet \vec{V_3}).\vec{V_2}' - (\vec{V_2}' \bullet \vec{V_3}).\vec{V_1}$

En remplaçant $\vec{V_2}'$ par $\vec{V_2} + \alpha.\vec{V_1}$; il vient:

$$\vec{W} = (\vec{V_1} \bullet \vec{V_3}).(\vec{V_2} + \alpha.\vec{V_1}) - [(\vec{V_2} + \alpha.\vec{V_1}) \bullet \vec{V_3}].\vec{V_1}$$
$$= (\vec{V_1} \bullet \vec{V_3}).\vec{V_2} - (\vec{V_2} \bullet \vec{V_3}).\vec{V_1} + (\vec{V_1} \bullet \vec{V_3}).\alpha.\vec{V_1} - (\alpha.\vec{V_1} \bullet \vec{V_3}).\vec{V_1}$$

Donc, en comparant avec (1): $\lambda = -1$ et on écrit:

$$\vec{W} = (\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}) \wedge \vec{V_3} = (\vec{V_1} \bullet \vec{V_3}).\vec{V_2} - (\vec{V_2} \bullet \vec{V_3}).\vec{V_1}$$

2.7.3. Applications du double produit vectoriel

1° *Projection d'un vecteur libre sur un plan.* — Soit un plan (P) et un vecteur $\vec{V}$ de représentant $\overrightarrow{OA}$, O appartenant à (P); soit $x'x$ un axe, perpendiculaire à (P) et passant par O, et $\vec{n}$ le vecteur unitaire de cet axe (fig. I-39)

Soit a la projection orthogonale de A sur (P), $\vec{v}$ la projection orthogonale de $\vec{V}$ sur (P): $\overrightarrow{Oa} = \vec{v}$. On peut écrire:

$$\overrightarrow{Oa} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{\text{proj}_n}\,(\overrightarrow{OA}),$$
$$\overrightarrow{Oa} = \overrightarrow{OA} - (\overrightarrow{OA} \bullet \vec{n}).\vec{n} = (\vec{n} \bullet \vec{n}).\overrightarrow{OA} - (\overrightarrow{OA} \bullet \vec{n}).\vec{n}$$

Cette dernière expression est égale à: $(\vec{n} \wedge \overrightarrow{OA}) \wedge \vec{n}$

d'où: $\overrightarrow{Oa} = \vec{v} = (\vec{n} \wedge \overrightarrow{OA}) \wedge \vec{n}$

2° *Division vectorielle* (fig. I-40). — Étant donné deux vecteurs libres $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ de représentant $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$, existe-t-il un vecteur $\vec{X}$ de représentant $\overrightarrow{OC}$ tel que:

$$\vec{V_1} \wedge \vec{X} = \vec{V_2}$$

S'il existe une solution $\vec{X}$, il en existe une infinité d'autres, car tout vecteur $\vec{X} + \alpha.\vec{V_1}$ est encore solution. Parmi toutes ces solutions il existe une solution particulière $\vec{X_0}$, vecteur orthogonal à $\vec{V_1}$ ($\overrightarrow{OC}$ perpendiculaire à $\overrightarrow{OA}$), et tel que:

$$\vec{V_1} \wedge \vec{X_0} = \vec{V_2}, \text{ avec: } \vec{X_0} \perp \vec{V_1}$$

Afin de déterminer $\vec{X_0}$, on multiplie vectoriellement les deux membres de l'équation précédente par $\vec{V_1}$, ce qui donne:

$$(\vec{V_1} \wedge \vec{X_0}) \wedge \vec{V_1} = \vec{V_2} \wedge \vec{V_1}$$

ou, d'après le paragraphe 2.7.2:

$$(\vec{V_1})^2.\vec{X_0} - (\vec{X_0} \bullet \vec{V_1}).\vec{V_1} = \vec{V_2} \wedge \vec{V_1}$$

Or: $\vec{X_0} \bullet \vec{V_1} = 0$, puisque: $\vec{X_0}$ est normal à $\vec{V_1}$;

d'où: $$\vec{X_0} = \frac{\vec{V_2} \wedge \vec{V_1}}{V_1^2}$$

On doit alors vérifier que cette solution est acceptable; pour qu'il en soit ainsi, il faut que:

$$\vec{V_1} \wedge \vec{X_0} = \vec{V_1} \wedge \frac{(\vec{V_2} \wedge \vec{V_1})}{V_1^2}$$

soit égal à $\vec{V_2}$

Or: $$\vec{V_1} \wedge \frac{(\vec{V_2} \wedge \vec{V_1})}{V_1^2} = V_1^2.\frac{\vec{V_2}}{V_1^2} - \frac{(\vec{V_2} \bullet \vec{V_1})}{V_1^2}.\vec{V_1}$$

Pour que X_0 soit une des solutions, il est donc nécessaire que: $$\vec{V_1} \bullet \vec{V_2} = 0$$

et dans le cas particulier où: $\vec{V_1} = \vec{0}$, il est également nécessaire que $\vec{V_2}$ soit nul.

En résumé:

— Si: $\vec{V_1} \bullet \vec{V_2} \neq 0$: pas de solution,

— si: $\vec{V_1}.\vec{V_2} = 0$:
- $\vec{V_1} = \vec{0}$:
  - $\vec{V_2} \neq \vec{0}$: pas de solution
  - $\vec{V_2} = \vec{0}$: tout vecteur $\vec{V}$ est solution
- $\vec{V_1} \neq \vec{0}$: $\vec{X} = \frac{\vec{V_2} \wedge \vec{V_1}}{V_1^2} + \alpha.\vec{V_1}$

Les résultats précédents peuvent être utilisés pour déterminer un vecteur glissant de représentant $\overrightarrow{AB}$, connaissant son vecteur libre $\vec{V}$ et son moment $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ en un point O de l'espace: $\overrightarrow{\mathcal{M}} = \overrightarrow{OC}$ (fig. I-41).

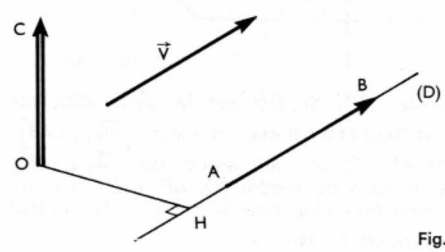


Fig. I-41

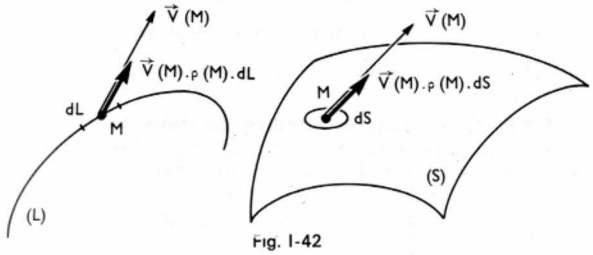


Fig. I-42

On suppose le problème résolu. Soit alors OH la perpendiculaire issue de O sur (D) support de $\overrightarrow{AB}$. Pour que $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{\mathfrak{M}}$ soit le moment en O de $\overrightarrow{AB}$, il faut et il suffit que :

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}} = \overrightarrow{OH} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OH} \wedge \vec{V}$$

Existe-t-il donc un vecteur $\overrightarrow{OH}$ orthogonal à $\vec{V}$ et tel que : $\overrightarrow{\mathfrak{M}} = \overrightarrow{OH} \wedge \vec{V}$?

Or : $\quad \overrightarrow{\mathfrak{M}} \wedge \vec{V} = (\overrightarrow{OH} \wedge \vec{V}) \wedge \vec{V} = -V^2 . \overrightarrow{OH}$

d'où : $$\overrightarrow{OH} = -\frac{\overrightarrow{\mathfrak{M}} \wedge \vec{V}}{V^2}$$

Il existe donc un seul vecteur glissant dont le moment en O soit $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$ et dont le vecteur libre soit $\vec{V}$. Ce vecteur glissant est défini à partir de $\vec{V}$ et $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$ par $\vec{V}$ et le point H de son support tel que :

$$\overrightarrow{OH} = -\frac{\overrightarrow{\mathfrak{M}} \wedge \vec{V}}{V^2}$$

3. LES ENSEMBLES DE VECTEURS GLISSANTS

Les efforts appliqués sur un solide, ou les quantités de mouvement $(\vec{V}(M) . dm)$, les quantités d'accélération $(\vec{\Gamma}(M) . dm)$ des différents points d'un solide peuvent être représentés par des ensembles de vecteurs glissants. Ces ensembles sont munis de propriétés qu'il importe de connaître si l'on veut établir une formulation concise mais rigoureuse des lois de la mécanique.

Les ensembles de vecteurs glissants peuvent comporter un nombre limité de vecteurs constituant un *ensemble fini de vecteurs glissants*, ou bien un nombre illimité de vecteurs constituant un *ensemble infini de vecteurs glissants*.

De tels ensembles infinis peuvent être définis à l'aide de distributions linéiques, ou surfaciques, ou volumiques de vecteurs. À chaque *élément infiniment petit,* contenant le point M, dL pour une ligne (L), dS pour une surface (S), ou dV pour un volume (V) est associé le vecteur $\vec{V}(M) . \rho(M) . dL$, ou $\vec{V}(M) . \rho(M) . dS$, ou $\vec{V}(M) . \rho(M) . dV$, $\vec{V}(M)$ et $\rho(M)$ étant des fonctions continues, respectivement vectorielle et scalaire définies sur la ligne (L), ou sur la surface (S), ou dans le volume (V) (fig. I-42).

À titre d'exemple, on peut citer la détermination du poids d'un corps solide (fig. I-43) ; à chaque élément infiniment petit de volume dV entourant un point M est associé le vecteur : $\quad d\vec{P}(M) = \vec{g}(M) . \rho(M) . dV$

qui représente le poids de l'élément de matière de volume dV entourant M. Le coefficient $\rho(M)$ est la masse volumique (masse de l'unité de volume) de la matière en M et $\vec{g}(M)$ est le poids massique (poids de l'unité de masse) en M. Le poids total sera $\vec{P} = \int_{(D)} \vec{g}(M) . \rho(M) . dV$, ($D$: domaine de l'espace occupé par le solide tout entier).

Dans ce qui suit on examinera surtout le cas des ensembles finis de vecteurs glissants, les résultats obtenus se généralisant au cas des ensembles infinis.

3.1. Définitions relatives aux ensembles de vecteurs glissants

3.1.1. Moment d'un ensemble de vecteurs glissants en un point, ou moment résultant. — Soit un ensemble $[E]$ constitué d'un nombre fini n de vecteurs glissants, de représentants $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2}$, ..., $\overrightarrow{A_nB_n}$ et auquel

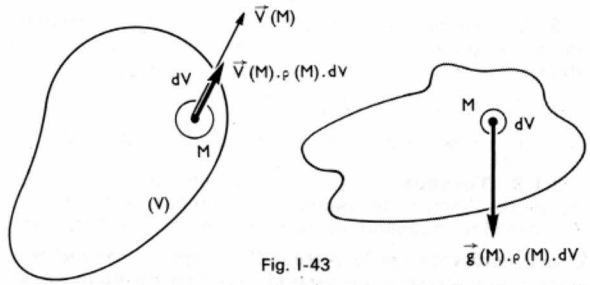


Fig. I-43

est associé un ensemble de vecteurs libres $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$, ..., $\vec{V_n}$ (fig. I-44). Le moment en O de $\overrightarrow{AB}$ est égal à :

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}_O}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}$$

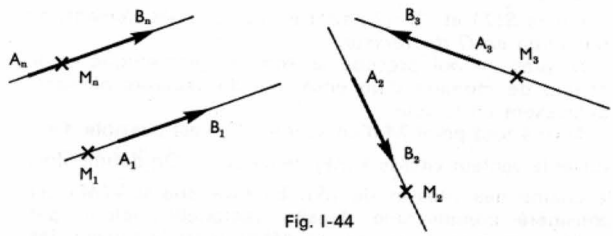


Fig. I-44

Le moment de l'ensemble $[E]$ en un point O est la somme géométrique des moments en O des différents vecteurs glissants constituant cet ensemble.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[E] &= \overrightarrow{\mathfrak{M}_O}(\overrightarrow{A_1B_1}) + \overrightarrow{\mathfrak{M}_O}(\overrightarrow{A_2B_2}) + \ldots + \overrightarrow{\mathfrak{M}_O}(\overrightarrow{A_nB_n}) \\ &= \overrightarrow{OA_1} \wedge \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{OA_2} \wedge \overrightarrow{A_2B_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n} \wedge \overrightarrow{A_nB_n} \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} \overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{A_iB_i} \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{V_i}\end{aligned}$$

Ainsi pour un ensemble donné, à tout point de l'espace peut être associé le moment de l'ensemble en ce point. Cette association définit un champ de vecteurs appelé *champ de moments*.

Si le système envisagé est constitué par un ensemble infini de vecteurs glissants défini sur une ligne (L), ou sur une surface (S), ou dans un volume (V) par une fonction vectorielle continue $\vec{V}(M)$ et une fonction scalaire continue $\rho(M)$, le moment en O de cet ensemble sera égal à :

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[E] = \int_{(L)} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}(M) . \rho(M) . dL$$

Ou à : $\quad \int_{(S)} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}(M) . \rho(M) . dS$

ou à : $\quad \int_{(V)} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}(M) . \rho(M) . dV$

Entre les moments d'un ensemble en deux points différents O et O', il existe la relation fondamentale suivante :

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}_{O'}}[E] = \overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[E] + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{S}[E]$$

$\vec{S}(E)$ désignant la résultante générale de ces vecteurs (V. ci-après).

En effet :

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}_{O'}}[E] = \overrightarrow{O'A_1} \wedge \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{O'A_2} \wedge \overrightarrow{A_2B_2} + \ldots + \overrightarrow{O'A_n} \wedge \overrightarrow{A_nB_n}$$

Or : $\quad \overrightarrow{O'M_i} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM_i}$

et : $\overrightarrow{\mathfrak{M}_{O'}}[E] = \sum_1^n (\overrightarrow{O'A_i} \wedge \overrightarrow{A_iB_i}) = \sum_1^n \overrightarrow{O'M_i} \wedge \vec{V_i}$

d'où : $\overrightarrow{\mathfrak{M}_{O'}}[E] = \sum_1^n (\overrightarrow{O'O} \wedge \vec{V_i}) + \sum_1^n (\overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{V_i})$

$$= \overrightarrow{O'O} \wedge \sum_1^n (\vec{V_i}) + \sum_1^n \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{V_i}$$

$$= \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{S}[E] + \overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[E]$$

3.1.2. Somme géométrique d'un ensemble de vecteurs glissants, ou résultante générale. — C'est le vecteur libre somme géométrique des différents vecteurs libres $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$, ..., $\vec{V_n}$ de l'ensemble. On note cette somme : $\vec{S}[E]$.

Si le système envisagé est constitué par un ensemble infini de vecteurs glissants, sa somme géométrique est définie par :

$$\vec{S}[E] = \int_{(L)} \vec{V}(M) \,.\, \rho(M) \,.\, dL$$

ou : $\int_{(S)} \vec{V}(M) \,.\, \rho(M) \,.\, dS$, ou : $\int_{(V)} \vec{V}(M) \,.\, \rho(M) \,.\, dV$

3.1.3. Torseur. — Un torseur est défini par un ensemble de deux champs de vecteurs. Le premier est uniforme (c'est-à-dire indépendant du point de l'espace considéré) et est représenté par le vecteur $\vec{S}[T]$, appelé *somme géométrique du torseur*. Le second, fonction du point considéré, est noté en O : $\overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T]$, et il vérifie la relation :

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}_{O'}}[T] = \overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T] + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{S}[T]$$

$\overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T]$ est appelé moment en O du torseur. Les deux vecteurs $\vec{S}[T]$ et $\overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T]$ sont encore appelés *éléments de réduction en O du torseur*.

D'après ce qui précède la somme géométrique et le champ de moment d'un ensemble de vecteurs glissants définissent un torseur.

Ainsi à tout point M d'un solide (S) il est possible d'associer le vecteur vitesse $\vec{V}(M)$ de ce point. On définit alors le champ des vitesses de (S). En revanche si $\vec{V}(M)$ est considéré comme une densité vectorielle définie par unité de mesure de masse, on définit alors le torseur des quantités de mouvement, de somme géométrique :

$$\vec{S}[T] = \int_{(S)} \vec{V}(M) \,.\, dm$$

et de moment résultant en P :

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}_P}[T] = \int_{(S)} \overrightarrow{PM} \wedge \vec{V}(M) \,.\, dm$$

Dans de nombreux cas on définit donc des torseurs à partir de champs de vecteurs glissants considérés comme densité vectorielle.

3.2. Propriétés des torseurs et opérations effectuées sur les torseurs

3.2.1. Égalité. — Deux torseurs sont égaux si leurs sommes géométriques sont égales ainsi que leurs moments en un point quelconque.

Cette condition est suffisante. Si l'on considère deux torseurs T_1 et T_2 on peut écrire :

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}_{O'}}[T_1] = \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{S}[T_1] + \overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T_1]$$

et : $\overrightarrow{\mathfrak{M}_{O'}}[T_2] = \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{S}[T_2] + \overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T_2]$

Si : $\vec{S}[T_1] = \vec{S}[T_2]$ (sommes géométriques égales)

et : $\overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T_1] = \overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T_2]$ (moments au point O égaux)

alors : $\overrightarrow{\mathfrak{M}_{O'}}[T_1] = \overrightarrow{\mathfrak{M}_{O'}}[T_2]$

et, O' ayant été choisi arbitrairement, il en est de même en tous les points de l'espace : les deux torseurs sont équivalents.

Cette condition est nécessaire : si deux torseurs sont équivalents, ils ont le même moment en tout point de l'espace et donc, en particulier, aux points O et O', ce qui entraîne :

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}_{O'}}[T_1] = \overrightarrow{\mathfrak{M}_{O'}}[T_2] = \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{S}[T_1] + \overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T_1] = \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{S}[T_2] + \overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T_2]$$

ou : $\overrightarrow{\mathfrak{M}_{O'}}[T_1] - \overrightarrow{\mathfrak{M}_{O'}}[T_2] = \overrightarrow{O'O} \wedge (\vec{S}[T_1] - \vec{S}[T_2]) = 0$

d'où : $\vec{S}[T_1] = \vec{S}[T_2]$

La condition : $\vec{S}[T_1] = \vec{S}[T_2]$, est donc bien nécessaire.

Un torseur sera nul si sa somme géométrique $\vec{S}[T] = \vec{0}$ et si son moment en un point O arbitraire $\overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T] = \vec{0}$, puisque dans ces conditions, quel que soit O' :

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}_{O'}}[T] = \overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T] + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{S}[T] = \vec{0}$$

ce qui signifie que le champ de moment de $[T]$ est nul.

Étant donné la relation d'égalité définie entre deux torseurs, il suffira, pour définir, un torseur $[T]$, de connaître sa somme géométrique $\vec{S}[T]$, vecteur libre, et son moment en un point O de l'espace. Ces deux éléments définissent entièrement le champ de moment du torseur puisque :

$$\forall O' : \quad [\overrightarrow{\mathfrak{M}_{O'}}[T] = \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{S}[T] + \overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T]]$$

expression dans laquelle $\overrightarrow{O'O}$ est connu, $\vec{S}[T]$ et $\overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T]$ sont donnés.

3.2.2. Combinaison linéaire de deux torseurs. — Soit λ_1 et λ_2 deux scalaires, et $[T_1]$ et $[T_2]$ deux torseurs. On définit le torseur $[T]$, combinaison linéaire de $[T_1]$ et de $[T_2]$, par : $[T] = \lambda_1[T_1] + \lambda_2[T_2]$

tel que : $\vec{S}[T] = \lambda_1 . \vec{S}[T_1] + \lambda_2 . \vec{S}[T_2]$

et : $\overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T] = \lambda_1 \overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T_1] + \lambda_2 \overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T_2]$

3.2.3. Produit scalaire de deux torseurs. — Soit deux torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$ définis par $\vec{S}[T_1]$ et $\overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T_1]$, $\vec{S}[T_2]$ et $\overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T_2]$. On appelle produit scalaire de $[T_1]$ et $[T_2]$, que l'on note $[T_1] \bullet [T_2]$, le scalaire défini par :

$$\vec{S}[T_1] \bullet \overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T_2] + \vec{S}[T_2] \bullet \overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T_1]$$

Cette même expression est encore appelée *comoment des torseurs* $[T_1]$ et $[T_2]$. Ce produit est indépendant du point O qui entre dans sa définition ; en effet, pour un autre point O' on a :

$$[T_1] \bullet [T_2] = \vec{S}[T_1] \,.\, \overrightarrow{\mathfrak{M}_{O'}}[T_2] + \vec{S}[T_2] \,.\, \overrightarrow{\mathfrak{M}_{O'}}[T_1]$$

Or : $\overrightarrow{\mathfrak{M}_{O'}}[T_2] = \overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T_2] + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{S}[T_2]$

et : $\overrightarrow{\mathfrak{M}_{O'}}[T_1] = \overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T_1] + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{S}[T_1]$

d'où :

$$[T_1] \bullet [T_2] = \vec{S}[T_1] \bullet \overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T_2] + \vec{S}[T_1] \bullet (\overrightarrow{O'O} \wedge \vec{S}[T_2]) + \vec{S}[T_2] \,.\, \overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T_1] + \vec{S}[T_2] \bullet (\overrightarrow{O'O} \wedge \vec{S}[T_1])$$

Or (V. § 2.6.2) :

$$\vec{S}[T_1] \bullet (\overrightarrow{O'O} \wedge \vec{S}[T_2]) + \vec{S}[T_2] \bullet (\overrightarrow{O'O} \wedge \vec{S}[T_1]) = 0$$

d'où : $[T_1] \bullet [T_2] = \vec{S}[T_1] \bullet \overrightarrow{\mathfrak{M}_{O'}}[T_2] + \vec{S}[T_2] \bullet \overrightarrow{\mathfrak{M}_{O'}}[T_1] = \vec{S}[T_1] \bullet \overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T_2] + \vec{S}[T_2] \bullet \overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T_1]$

$[T_1] \bullet [T_2]$ a tous les caractères d'un produit :

— symétrique $[T_1] \bullet [T_2] = [T_2] \bullet [T_1]$

— multiplication par un scalaire :

$$[\lambda . T_1] \bullet [T_2] = \lambda . [T_1] \bullet [T_2]$$

— distributivité par rapport à l'addition :

$$([T_1'] + [T_1'']) \bullet [T_2] = [T_1'] \bullet [T_2] + [T_1''] \bullet [T_2]$$

Il faut remarquer que ce produit n'est pas analogue au produit scalaire de deux vecteurs, car le carré d'un torseur peut être négatif :

$$[T_1] \bullet [T_1] = 2 \vec{S}[T_1] \bullet \overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T_1]$$

Ce carré est appelé *automoment du torseur*.

Expression analytique. — Soit deux torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$ et un repère orthonormé (O, xyz) ; soit X_i, Y_i, Z_i les composantes scalaires de $\vec{S}[T_i]$ et L_i, M_i, N_i les composantes scalaires de $\overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T_i]$ dans ce repère (fig. I-45) :

$$[T_1] \bullet [T_2] = \vec{S}[T_1] \bullet \overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T_2] + \vec{S}[T_2] \bullet \overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T_1] = X_1L_2 + Y_1M_2 + Z_1N_2 + X_2L_1 + Y_2M_1 + Z_2N_1$$

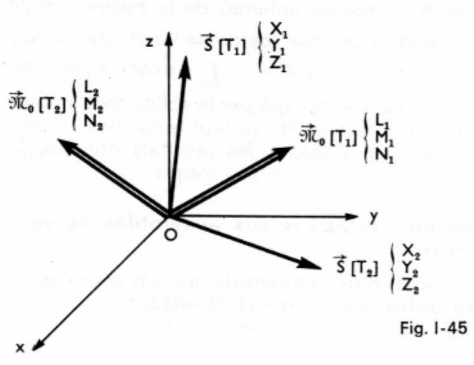


Fig. I-45

3.2.4. Invariants d'un torseur. — Le produit scalaire des éléments de réduction d'un torseur $[T]$ en un point O est indépendant de ce point :

$$\vec{S}[T] \bullet \overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T] = \vec{S}[T] \bullet \overrightarrow{\mathfrak{M}_{O'}}[T]$$

car : $$\overrightarrow{\mathfrak{M}_{O'}}[T] = \overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T] + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{S}[T]$$

Conséquence : À tout torseur $[T]$ on peut associer deux éléments indépendants du point O, ou *invariants :* $\vec{S}[T]$ et $\vec{S}[T] \bullet \overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T]$. L'étude de ces invariants permet de définir des torseurs particuliers.

3.2.5. Propriétés géométriques du champ des moments d'un torseur

1° $\vec{S}[T] = \vec{0}$: *le champ des moments est uniforme*

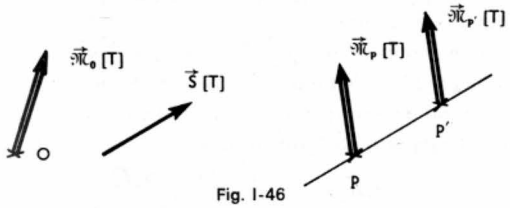


Fig. I-46

2° *Le long d'une parallèle à $\vec{S}[T]$, les vecteurs-moments sont équipollents entre eux* (fig. I-46) :

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}_{P'}}[T] = \overrightarrow{\mathfrak{M}_P}[T] + \overrightarrow{P'P} \wedge \vec{S}[T],$$

comme $\overrightarrow{P'P} \wedge \vec{S}[T] = \vec{0}$ on déduit : $\overrightarrow{\mathfrak{M}_{P'}}[T] = \overrightarrow{\mathfrak{M}_P}[T]$

3° *Tous les vecteurs moments ont même projection sur $\vec{S}[T]$* (fig. I-47) :

$$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{P'A'} = \vec{S}[T]$$

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}_{P'}}[T] = \overrightarrow{\mathfrak{M}_P}[T] + \overrightarrow{P'P} \wedge \vec{S}[T]$$

d'où : $\overrightarrow{\mathfrak{M}_{P'}}[T] \bullet \vec{S}[T] = \overrightarrow{\mathfrak{M}_P}[T] \bullet \vec{S}[T] + (\overrightarrow{P'P} \wedge \vec{S}[T]) \bullet \vec{S}[T]$

or : $$(\overrightarrow{P'P} \wedge \vec{S}[T]) \bullet \vec{S}[T] = 0$$

d'où : $\overrightarrow{\mathfrak{M}_{P'}}[T] \bullet \vec{S}[T] = \overrightarrow{\mathfrak{M}_P}[T] \bullet \vec{S}[T]$; et : $\overrightarrow{P'p'} = \overrightarrow{Pp}$

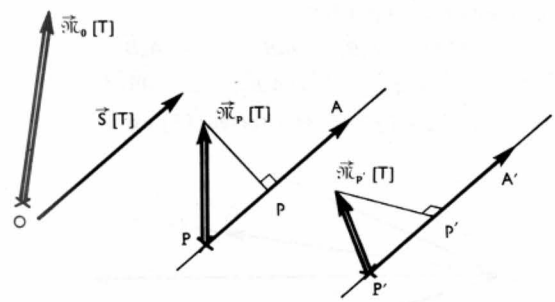


Fig. I-47

4° *Point central et axe central.* — Un point P de l'espace est point central du torseur $[T]$, si $\overrightarrow{\mathfrak{M}_P}[T]$ est colinéaire à $\vec{S}[T]$. L'ensemble des points centraux définit une droite parallèle à $\vec{S}[T]$, que l'on peut orienter à l'aide de $\vec{S}[T]$ et appelée axe central du torseur. Effectivement, soit C et C' deux points centraux du torseur : d'après ce qui précède, la droite joignant ces deux points est parallèle à $\vec{S}[T]$. Donc : toute droite joignant deux points centraux quelconques d'un même torseur est parallèle à $\vec{S}[T]$; en conséquence, tous les points centraux appartiennent à une droite (Δ) parallèle à $\vec{S}[T]$. Pour déterminer la position de l'axe central (Δ), il suffit de connaître un point de ce dernier : analytiquement, il est possible de déterminer le point M_0 de (Δ) connaissant $\overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T]$ et $\vec{S}[T]$, M_0 étant le pied de la perpendiculaire issue de O sur (Δ) (fig. I-48).

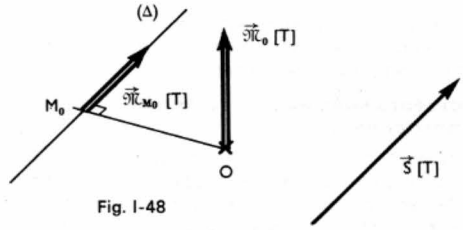


Fig. I-48

En effet : $\overrightarrow{\mathfrak{M}_{M_0}}[T] = \overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T] + \overrightarrow{M_0O} \wedge \vec{S}[T]$

et, M_0 appartenant à (Δ) :

$$\vec{0} = \overrightarrow{\mathfrak{M}_{M_0}}[T] \wedge \vec{S}[T]$$

$$= \overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T] \wedge \vec{S}[T] + (\overrightarrow{M_0O} \wedge \vec{S}[T]) \wedge \vec{S}[T]$$

$$= \overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T] \wedge \vec{S}[T] \wedge \vec{S}[T] + 0.\vec{S}[T] - \vec{S}[T]^2.\overrightarrow{M_0O}$$

puisque $\overrightarrow{M_0O} \perp \vec{S}[T]$; d'où :

$$\overrightarrow{OM_0} = -\frac{\overrightarrow{\mathfrak{M}_O} \wedge \vec{S}[T]}{\vec{S}[T]^2}$$

Remarque : Tous les vecteurs-moments étant équipollents entre eux en tous les points de l'axe central, on appelle *moment central du torseur,* le moment du torseur en un point quelconque de l'axe central.

Tous les vecteurs-moments ayant même projection sur $\vec{S}[T]$, le moment central est le moment de module minimal.

5° *Le champ des vecteurs-moments d'un torseur est équiprojectif* (fig. I-49). — Soit P et P' deux points quelconques et un torseur $[T]$:

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}_{P'}}[T] = \overrightarrow{\mathfrak{M}_P}[T] + \overrightarrow{P'P} \wedge \vec{S}[T]$$

d'où : $\overrightarrow{\mathfrak{M}_{P'}}[T] \bullet \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{\mathfrak{M}_P}[T] \bullet \overrightarrow{PP'} + (\overrightarrow{P'P} \wedge \vec{S}[T]) \bullet \overrightarrow{PP'}$

Or : $(\overrightarrow{P'P} \wedge \vec{S}[T]) \bullet \overrightarrow{PP'} = (\overrightarrow{PP'} \wedge \overrightarrow{PP'}).\vec{S}[T] = 0$

donc : $\overrightarrow{\mathfrak{M}_{P'}}[T] \bullet \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{\mathfrak{M}_P}[T] \bullet \overrightarrow{PP'}$; et :

$$\overrightarrow{Pp} = \overrightarrow{P'p'}$$

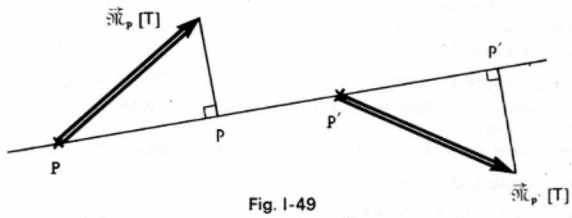


Fig. I-49

Le moment en P et le moment en P' ont mêmes projections $\overrightarrow{Pp}$ et $\overrightarrow{P'p'}$ sur PP', cela quels que soient P et P' : on dit que le champ des moments est équiprojectif.

Réciproquement, tout champ de vecteur $\vec{V}(M)$ équiprojectif est le champ des moments d'un torseur ; si $\vec{V}(M)$ et $\vec{V}(M')$ sont deux vecteurs du champ en deux points M et M', ils sont liés par la relation :

$$\vec{V}(M') = \vec{V}(M) + \overrightarrow{M'M} \wedge \vec{\Omega}[T]$$
$$= \vec{V}(M) + \vec{\Omega}[T] \wedge \overrightarrow{MM'}$$

$\vec{\Omega}[T]$ étant la résultante générale du torseur défini par ce champ de vecteurs. Cette réciproque est très largement utilisée en cinématique.

3.3. Réduction des systèmes de vecteurs glissants

3.3.1. Équivalence de deux systèmes de vecteurs glissants. — À tout système de vecteurs glissants il est possible d'associer un torseur $[T]$. Mais un même torseur $[T]$ peut être déterminé à partir de différents ensembles de vecteurs glissants : si deux ensembles distincts $[E_1]$ et $[E_2]$ déterminent le même torseur $[T]$, ces deux ensembles sont dits équivalents par définition.

L'intérêt pratique de l'étude des torseurs est de pouvoir substituer à un ensemble donné quelconque de vecteurs glissants, déterminant un torseur, un autre ensemble beaucoup plus simple géométriquement mais, déterminant le

même torseur. Cette opération est appelée *réduction des systèmes de vecteurs ;* elle se fait en étudiant les particularités du torseur déterminé par l'ensemble de vecteurs.

3.3.2. Torseurs spéciaux ou systèmes de vecteurs glissants particuliers

1° *Torseurs de somme géométrique* $\vec{S}[T] = \vec{0}$. — Ces torseurs sont appelés *torseurs-couple*. La propriété fondamentale de ces torseurs est que leur champ de moment est uniforme. En effet quel que soit O' :

$$\vec{\mathfrak{M}}_{O'}[T] = \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{S}[T] + \vec{\mathfrak{M}}_O[T] = \vec{\mathfrak{M}}_O[T]$$

Le moment d'un couple est donc le même en tous les points de l'espace, il sera noté : $\vec{\mathfrak{M}}[C]$.

Un torseur-couple est représenté d'une infinité de manières par un ensemble de deux vecteurs glissants de supports parallèles, de même module et de sens opposés (fig. I-50).

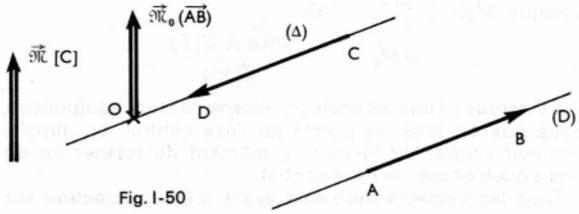


Fig. I-50

En effet, étant donné un torseur-couple de moment connu $\vec{\mathfrak{M}}[C]$, il est toujours possible de trouver un vecteur glissant, de support (D) orthogonal à $\vec{\mathfrak{M}}[C]$ et de représentant $\vec{AB}$, tel que : $\vec{OA} \wedge \vec{AB} = \vec{\mathfrak{M}}_O(\vec{AB}) = \vec{\mathfrak{M}}_O[C]$. On trace ensuite le vecteur glissant de support (Δ), parallèle à (D) et passant par O, et de représentant : $\vec{CD} = -\vec{AB}$. L'ensemble de ces deux vecteurs glissants détermine bien le torseur couple considéré, puisque :

$$\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{0}, \quad \text{et :} \quad \vec{\mathfrak{M}}_O(\vec{AB}) + \vec{\mathfrak{M}}_O(\vec{CD}) = \vec{\mathfrak{M}}[C]$$

L'ensemble de ces deux vecteurs glissants est appelé *couple*.

Réciproquement, si un système de vecteurs glissants est tel que sa somme géométrique est nulle, ce système est équivalent à un couple. Lorsqu'un couple est défini par deux vecteurs glissants opposés $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$, il est possible de calculer simplement le moment de ce couple. Il n'est pas nécessaire, du reste, de préciser le point de l'espace où le moment est calculé puisqu'un couple a même moment en tout point de l'espace. Soit (P) le plan contenant $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$, H_1H_2 la perpendiculaire commune aux supports (D_1) et (D_2) de $\vec{AB}$ et de $\vec{CD}$ (fig. I-51).

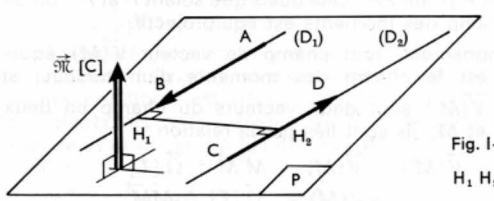


Fig. I-51

$H_1 H_2 = d$

$$\vec{\mathfrak{M}}[C] = \vec{\mathfrak{M}}_O[C] = \vec{\mathfrak{M}}_A[C] = \vec{\mathfrak{M}}_A(\vec{AB}) + \vec{\mathfrak{M}}_A(\vec{CD}) = \vec{AC} \wedge \vec{CD}$$

d'où : $|\vec{\mathfrak{M}}[C]| = d.CD = d.AB$. La direction de $\vec{\mathfrak{M}}[C]$ est perpendiculaire au plan (P) et le sens est tel que l'orientation de (P) par $\vec{\mathfrak{M}}[C]$ soit identique à l'orientation de (P) par $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$. La distance $H_1H_2 = d$ est appelée *bras de levier du couple*.

2° *Système de vecteurs se réduisant à un vecteur glissant unique ou torseur univectoriel* (fig. I-52). — Si un torseur $[T]$ est déterminé à partir d'un seul vecteur glissant $\vec{AB}$, $[T]$ est alors tel que :

$$\vec{S}[T] = \vec{AB}$$
$$\vec{\mathfrak{M}}_O[T] = \vec{OA} \wedge \vec{AB}$$

D'où : $\vec{\mathfrak{M}}_O[T] \bullet \vec{S}[T] = (\vec{OA} \wedge \vec{AB}) \bullet \vec{AB} = 0$

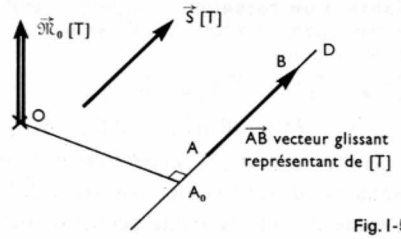


Fig. I-52

Dans ce cas l'invariant scalaire du torseur est nul.

Réciproquement, si un ensemble de vecteurs glissants détermine un torseur dont l'invariant scalaire $\vec{\mathfrak{M}}[T] \bullet \vec{S}[T]$ est nul, cet ensemble est équivalent à un vecteur glissant unique : il peut être réduit à un seul vecteur. On dit qu'il admet une résultante.

En effet, connaissant $\vec{\mathfrak{M}}_O[T]$ et $\vec{S}[T] \neq \vec{0}$, et sachant que $\vec{\mathfrak{M}}_O[T] \bullet \vec{S}[T] = 0$, on peut trouver le vecteur glissant $\vec{AB}$. En effet, on démontre que l'on sait déterminer $\vec{OA_0}$, qui est perpendiculaire à $\vec{S}[T]$ et tel que :

$$\vec{OA_0} = -\frac{\vec{\mathfrak{M}}_O[T] \wedge \vec{S}[T]}{(S[T])^2}$$

à condition que $\vec{\mathfrak{M}}_O[T] \bullet \vec{S}[T] = 0$

La connaissance de A_0 permet alors de tracer AB. Si $\vec{\mathfrak{M}}_O[T] = \vec{0}$, $\vec{OA_0} = \vec{0}$ et si (D), support de $\vec{AB}$, passe par O, il est encore possible de tracer $\vec{AB}$. D'où, la condition nécessaire et suffisante, pour qu'un torseur $[T]$ défini par $\vec{\mathfrak{M}}_O[T]$ et $\vec{S}[T] \neq \vec{0}$ soit univectoriel, est que :

$$\vec{\mathfrak{M}}[T] \bullet \vec{S}[T] = 0$$

Conséquence : Si un ensemble de vecteurs glissants est composé de vecteurs glissants $\vec{A_iB_i}$ dont les supports concourent en un point O, ce système admet une résultante de représentant $\vec{AB} = \vec{A_1B_1} + \vec{A_2B_2} + \ldots + \vec{A_nB_n}$ dont le support passe par O. Cet énoncé est connu sous le nom de *théorème de Varignon*. Pour le démontrer, supposons que $[T]$ soit le torseur associé au système de vecteurs glissants concourants $\vec{A_iB_i}$ (fig. I-53) :

$$\vec{S}[T] = \vec{A_1B_1} + \vec{A_2B_2} + \ldots + \vec{A_nB_n}$$

$$\vec{\mathfrak{M}}_O[T] = \vec{\mathfrak{M}}_O(\vec{A_1B_1}) + \vec{\mathfrak{M}}_O(\vec{A_2B_2}) + \ldots + \vec{\mathfrak{M}}_O(\vec{A_nB_n}) = \vec{0}$$

Donc : $\vec{\mathfrak{M}}_O[T] \bullet \vec{S}[T] = 0$, et le torseur $[T]$ est univectoriel.

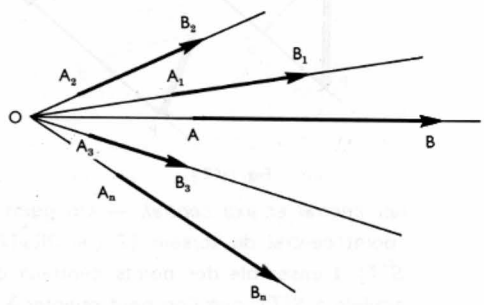


Fig. I-53

$\vec{S}[T] = \vec{A_1B_1} + \vec{A_2B_2} + \ldots + \vec{A_nB_n}$

L'ensemble de vecteurs glissants considéré admet donc une résultante $\vec{AB}$ et cette dernière passe par O puisque : $\vec{\mathfrak{M}}_O[T] = \vec{0}$, et : $\vec{AB} = \vec{S}[T] = \vec{A_1B_1} + \vec{A_2B_2} + \ldots + \vec{A_nB_n}$

Applications à la composition, ou à la décomposition, de vecteurs glissants concourants. Respectivement, composer ou décomposer un système de vecteurs glissants concourants, c'est le remplacer par un autre système admettant même résultante mais constitué d'un nombre moindre ou supérieur de vecteurs glissants. Ainsi un vecteur glissant de représentant $\vec{AB}$ peut se décomposer en trois vecteurs

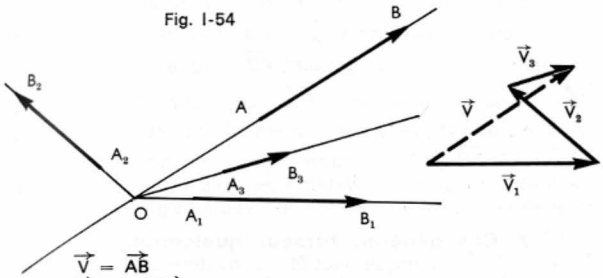
glissants, concourants en un point arbitraire O du support de $\overrightarrow{AB}$, et de représentants $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2}$, $\overrightarrow{A_3B_3}$ tels que (fig. I-54) :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{S}[T] = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \overrightarrow{A_3B_3}$$

Le système $\overrightarrow{AB}$ a pour résultante $\overrightarrow{AB}$; le système $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2}$, $\overrightarrow{A_3B_3}$ a aussi pour résultante $\overrightarrow{AB}$.

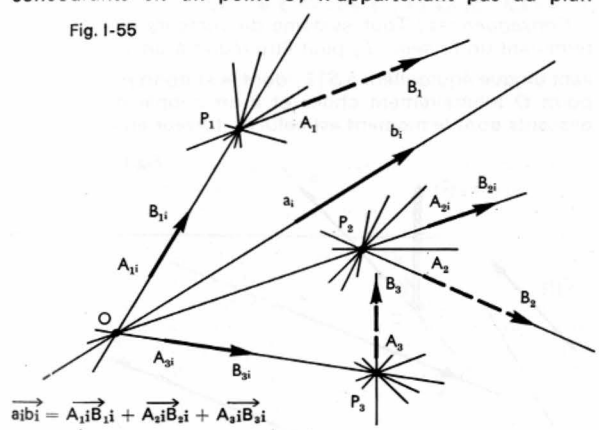
Première application. — On cherche à réduire un ensemble quelconque de vecteurs glissants en un système de trois vecteurs glissants passant par trois points P_1, P_2, P_3 arbitrairement choisis mais non alignés (de façon à ce que O, P_1, P_2 et P_3 ne soient pas dans un même plan) (fig. I-55). Soit $\overrightarrow{a_ib_i}$ le représentant de l'un des vecteurs glissants constituant le système : ce vecteur, d'après ce qui précède, peut être décomposé en trois vecteurs glissants concourants en un point O, n'appartenant pas au plan

Fig. I-54



$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{A_1B_1}$
$\overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{A_2B_2}$
$\overrightarrow{V_3} = \overrightarrow{A_3B_3}$

Fig. I-55



$\overrightarrow{a_ib_i} = \overrightarrow{A_{1i}B_{1i}} + \overrightarrow{A_{2i}B_{2i}} + \overrightarrow{A_{3i}B_{3i}}$

$\overrightarrow{A_1B_1} = \sum_{i=1}^{i=n} \overrightarrow{A_{1i}B_{1i}}$; $\overrightarrow{A_2B_2} = \sum_{i=1}^{i=n} \overrightarrow{A_{2i}B_{2i}}$

$\overrightarrow{A_3B_3} = \sum_{i=1}^{i=n} \overrightarrow{A_{3i}B_{3i}}$

(P_1, P_2, P_3), du support de $\overrightarrow{a_ib_i}$ et portés par les droites (OP_1), (OP_2) et (OP_3). De même, on peut décomposer tous les autres vecteurs glissants du système considéré et on obtient finalement trois gerbes de vecteurs glissants issues de P_1, P_2 et P_3, vecteurs que l'on peut composer séparément pour obtenir trois vecteurs glissants de représentants $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2}$, $\overrightarrow{A_3B_3}$.

Deuxième application. — Si un ensemble de vecteurs glissants est composé de n vecteurs glissants $\overrightarrow{A_iB_i}$ parallèles et si $\overrightarrow{S}[T] = \sum_{i=1}^{i=n} (\overrightarrow{A_iB_i}) \neq \overrightarrow{0}$, ce système admet une résultante (fig. I-56). Cette résultante passe par le barycentre des n points M_i, appartenant aux supports des $\overrightarrow{A_iB_i}$, affectés de coefficients proportionnels aux mesures algébriques des vecteurs prises par rapport à un axe $x'x$ parallèle aux $\overrightarrow{A_iB_i}$ et de vecteur unitaire $\overrightarrow{k}$. En effet un tel système admet une résultante, car le torseur $[T]$ associé est univectoriel. Pour le montrer, on calcule $\overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T]$ et l'on

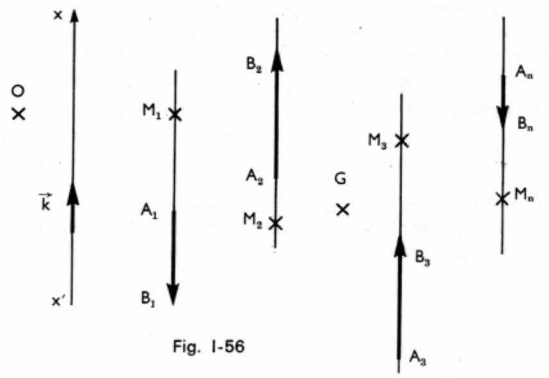


Fig. I-56

vérifie que : $\overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T] \bullet \overrightarrow{S}[T] = 0$.

On a : $\overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T] = \sum_1^n \overrightarrow{\mathfrak{M}_O}(\overrightarrow{A_iB_i}) = \sum_1^n (\overrightarrow{OM_i} \wedge \overrightarrow{A_iB_i})$

Or : $\overrightarrow{A_iB_i} = \overrightarrow{V_i}.\overrightarrow{k}$

d'où : $\overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T] = \sum_1^n (\overrightarrow{V_i}.\overrightarrow{OM_i} \wedge \overrightarrow{k}) = [\sum_1^n (\overrightarrow{V_i}.\overrightarrow{OM_i})] \wedge \overrightarrow{k}$

Si G est le barycentre des points M_i affectés des coefficients $\overrightarrow{V_i}$ on peut écrire :

$$\sum_1^n (\overrightarrow{V_i}.\overrightarrow{OM_i}) = [\sum_1^n (\overrightarrow{V_i})].\overrightarrow{OG}$$

et : $\overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T] = (\sum_1^n \overrightarrow{V_i}).\overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{k} = \overrightarrow{OG} \wedge (\sum_1^n \overrightarrow{V_i}).\overrightarrow{k}$

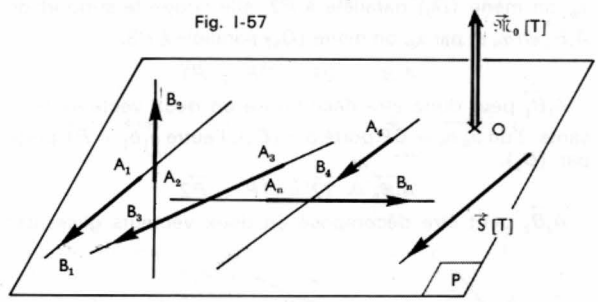
Or : $(\Sigma \overrightarrow{V_i}).\overrightarrow{k} = \Sigma \overrightarrow{A_iB_i} = \overrightarrow{S}[T]$, donc : $\overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T] = \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{S}[T]$

et : $\overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T] \bullet \overrightarrow{S}[T] = (\overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{S}[T]) \bullet \overrightarrow{S}[T] = 0$: $[T]$ est donc univectoriel. La résultante du système considéré passe par G car : $\overrightarrow{\mathfrak{M}_G}[T] = [\sum_1^n (\overrightarrow{V_i}.\overrightarrow{GM_i})] \wedge \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}$

puisque $\sum_1^n (\overrightarrow{V_i}.\overrightarrow{GM_i}) = \overrightarrow{0}$

Troisième application. — Si un ensemble de vecteurs glissants est composé de n vecteurs glissants $\overrightarrow{A_iB_i}$ appartenant à un même plan (P) et si $\overrightarrow{S}[T] = \sum_1^n \overrightarrow{A_iB_i} \neq \overrightarrow{0}$, ce système admet une résultante contenue dans le plan (P) (fig. I-57).

Fig. I-57



Soit $[T]$ le torseur associé à l'ensemble des vecteurs glissants $\overrightarrow{A_iB_i}$ envisagés et soit O un point de (P).

$\overrightarrow{S}[T] = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \ldots + \overrightarrow{A_nB_n}$; $\overrightarrow{S}[T]$ est donc parallèle à (P) puisque tous les vecteurs $\overrightarrow{A_iB_i}$ appartiennent à (P).

$\overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T] = \overrightarrow{\mathfrak{M}_O}(\overrightarrow{A_1B_1}) + \overrightarrow{\mathfrak{M}_O}(\overrightarrow{A_2B_2}) + \ldots + \overrightarrow{\mathfrak{M}_O}(\overrightarrow{A_nB_n})$: $\overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T]$ est donc perpendiculaire à (P) puisque les moments $\overrightarrow{\mathfrak{M}_O}(\overrightarrow{A_iB_i})$ sont perpendiculaires au plan (P).

En conséquence : $\overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T] \bullet \overrightarrow{S}[T] = 0$, et le torseur associé au système envisagé est univectoriel. Ce dernier système peut donc être réduit à un seul vecteur glissant $\overrightarrow{AB}$ tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{S}[T]$ et $\overrightarrow{\mathfrak{M}_O}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T]$. Pour déterminer la posi-

tion de la résultante $\overrightarrow{AB}$, dans le plan (P), il suffit de connaître un point quelconque de son support : ce point peut être obtenu analytiquement ou graphiquement.

Analytiquement, soit A_O le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur le support de $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{OA_O} = -\frac{\overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T] \wedge \overrightarrow{S}[T]}{(S[T])^2}$$

Graphiquement, il existe un procédé basé sur la composition et la décomposition des systèmes de vecteurs glissants (fig. I-58) : soit un système de trois vecteurs glis-

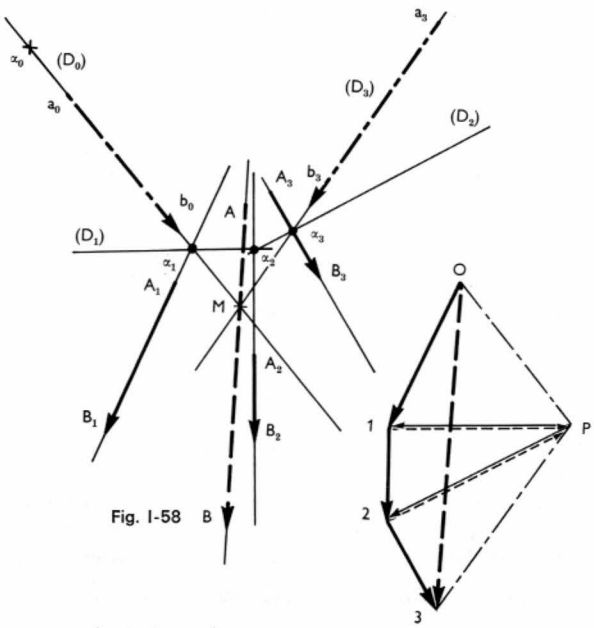


Fig. I-58

sants $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2}$, $\overrightarrow{A_3B_3}$ coplanaires et deux points arbitraires, α_0 et P ; on trace la ligne brisée 0123, appelée *dynamique*, telle que $\overrightarrow{01} = \overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{12} = \overrightarrow{A_2B_2}$ et $\overrightarrow{23} = \overrightarrow{A_3B_3}$, puis on joint $P0$, $P1$, $P2$ et $P3$. P est le *pôle* du dynamique et $P0$, $P1$, $P2$ et $P3$ sont les *rayons polaires* du dynamique.

Par le point α_0, on mène la droite (D_0) parallèle à $P0$: elle coupe le support de $\overrightarrow{A_1B_1}$ en α_1 ; par α_1 on mène, (D_1) parallèle à $P1$: elle coupe le support de $\overrightarrow{A_2B_2}$ en α_2 ; par α_2, on mène (D_2) parallèle à $P2$, elle coupe le support de $\overrightarrow{A_3B_3}$ en α_3 et par α_3, on mène (D_3) parallèle à $P3$.

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{01} = \overrightarrow{0P} + \overrightarrow{P1}$$

$\overrightarrow{A_1B_1}$ peut donc être décomposé en deux vecteurs glissants : l'un $\overrightarrow{a_0b_0} = \overrightarrow{0P}$ porté par (D_0), l'autre $\overrightarrow{a_1b_1} = \overrightarrow{P1}$ porté par (D_1).

$$\overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{12} = \overrightarrow{1P} + \overrightarrow{P2}$$

$\overrightarrow{A_2B_2}$ peut être décomposé en deux vecteurs glissants : l'un $\overrightarrow{b_1a_1} = \overrightarrow{1P}$ porté par (D_1), l'autre $\overrightarrow{a_2b_2} = \overrightarrow{P2}$ porté par (D_2). $\overrightarrow{A_1B_1}$ et $\overrightarrow{A_2B_2}$ peuvent donc être remplacés par le système de vecteurs glissants $\overrightarrow{a_0b_0}$ et $\overrightarrow{a_2b_2}$, puisque $\overrightarrow{a_1b_1}$ et $\overrightarrow{b_1a_1}$ s'éliminent.

$$\overrightarrow{A_3B_3} = \overrightarrow{23} = \overrightarrow{2P} + \overrightarrow{P3}$$

$\overrightarrow{A_3B_3}$ peut être décomposé en deux vecteurs glissants : l'un $\overrightarrow{b_2a_2} = \overrightarrow{2P}$ porté par (D_2), l'autre $\overrightarrow{a_3b_3} = \overrightarrow{P3}$ porté par (D_3). Le système $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2}$ et $\overrightarrow{A_3B_3}$ peut donc être réduit aux deux vecteurs glissants $\overrightarrow{a_0b_0}$ et $\overrightarrow{a_3b_3}$, ces derniers pouvant être réduits au vecteur glissant $\overrightarrow{AB}$ tel que :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a_0b_0} + \overrightarrow{a_3b_3} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{P3} = \overrightarrow{03} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \overrightarrow{A_3B_3}$$

dont le support passe par le point M, intersection de (D_0) avec (D_3). $\overrightarrow{AB}$ est la résultante du système initial. Ce raisonnement tenu pour un système de trois vecteurs glissants peut être étendu à un système de n vecteurs glissants.

3.3.3. Cas général, torseur quelconque. — Tout torseur $[T]$ quelconque peut être considéré comme étant la somme de deux torseurs spéciaux : un torseur-couple $[C]$ et un torseur univectoriel $[U]$. Pour que $[C] + [U] = [T]$, le support du vecteur glissant, déterminant $[U]$ (il passe par un point O arbitrairement choisi), il faut et il suffit que :

$\overrightarrow{\mathfrak{M}}[C] + \overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[U] = \overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T]$, et que : $\overrightarrow{S}[C] + \overrightarrow{S}[U] = \overrightarrow{S}[T]$

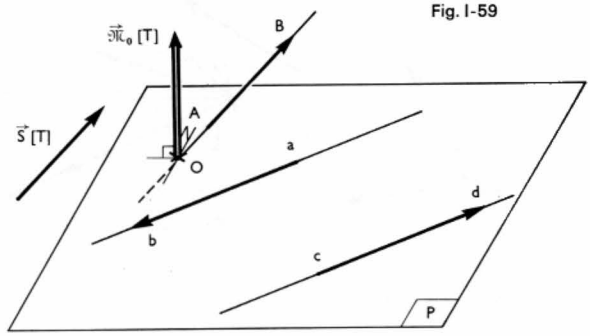
Les deux torseurs $[C]$ et $[U]$ sont donc entièrement définis :

$[C]$ est tel que : $\quad \overrightarrow{\mathfrak{M}}[C] = \overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T]$

et $[U]$ est tel que : $\quad \overrightarrow{S}[U] = \overrightarrow{S}[T]$

Conséquences : Tout système de vecteurs glissants déterminant un torseur $[T]$ peut être réduit à un vecteur glissant unique équipollent à $\overrightarrow{S}[T]$ dont le support passe par un point O arbitrairement choisi et à un couple de vecteurs glissants dont le moment est celui du torseur en O.

Fig. I-59



On envisage un système de n vecteurs glissants, représentatif du torseur $[T]$ défini par $\overrightarrow{S}[T]$ et $\overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T]$ (fig. I-59). Soit un couple de vecteurs glissants $\overrightarrow{ab}$ et $\overrightarrow{cd}$ dont le moment est égal à $\overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T]$, ces deux vecteurs sont contenus dans un

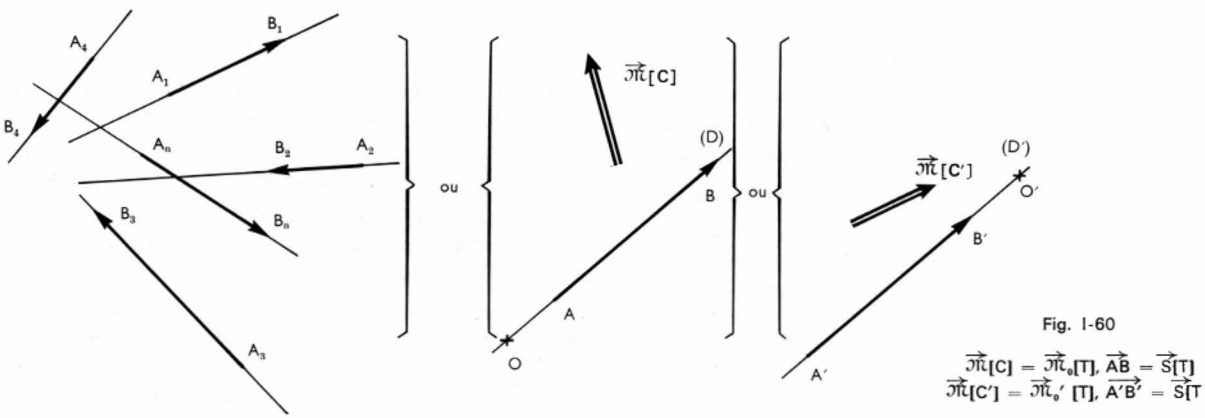


Fig. I-60

$\overrightarrow{\mathfrak{M}}[C] = \overrightarrow{\mathfrak{M}_o}[T]$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{S}[T]$

$\overrightarrow{\mathfrak{M}}[C'] = \overrightarrow{\mathfrak{M}_{o'}}[T]$, $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{S}[T]$

plan (P) orthogonal à $\overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T]$, et soit $\overrightarrow{AB}$ le représentant d'un vecteur glissant de support passant par O et tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{S}[T]$. Cet ensemble de vecteurs glissants $\overrightarrow{ab}$, $\overrightarrow{cd}$, $\overrightarrow{AB}$ détermine bien le torseur $[T]$ puisque :

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}_O}(\overrightarrow{ab}) + \overrightarrow{\mathfrak{M}_O}(\overrightarrow{cd}) + \overrightarrow{\mathfrak{M}_O}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T]$$

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[C] + 0 = \overrightarrow{\mathfrak{M}_O}[T]$$

et :

$$\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{cd} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{S}[T]$$

$$0 + \overrightarrow{S}[U] = \overrightarrow{S}[T]$$

D'une manière générale, au lieu de tracer les vecteurs glissants $\overrightarrow{A_iB_i}$ constitutifs d'un ensemble de n vecteurs glissants, on trace uniquement les éléments du système réduit, c'est-à-dire le couple et le vecteur glissant. Ce tracé est fonction du choix de O (fig. I-60).

Les vecteurs libres $\overrightarrow{\mathfrak{M}}[C]$ ou $\overrightarrow{\mathfrak{M}}[C']$ et glissants $\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{A'B'}$ définissent des systèmes réduits équivalents au système initial. Ils sont appelés éléments de réduction respectivement en O et O' du système de vecteurs glissants $\overrightarrow{A_iB_i}$ considéré. Ces deux derniers tracés sont moins précis car ils ne permettent pas de mettre en évidence et de définir les vecteurs glissants constitutifs de l'ensemble initial, mais dans de nombreux cas ils sont suffisants.

On remarque d'autre part que tout système de vecteurs glissants étant réductible à un couple de vecteurs glissants $\overrightarrow{ab}$, $\overrightarrow{cd}$ et à un vecteur glissant $\overrightarrow{AB}$, il est toujours possible de choisir le support de $\overrightarrow{ab}$ (ou de $\overrightarrow{cd}$) tel qu'il coupe le support de $\overrightarrow{AB}$. Les deux vecteurs glissants $\overrightarrow{ab}$ (ou $\overrightarrow{cd}$) et $\overrightarrow{AB}$ peuvent alors être composés et définir le vecteur glissant $\overrightarrow{CD}$. Le système initial est donc réduit à deux vecteurs glissants $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{cd}$ (fig. I-61).

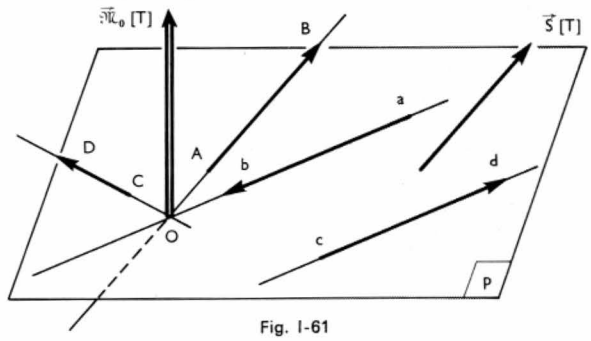


Fig. I-61

CHAPITRE II

CINÉMATIQUE OU ÉTUDE DU MOUVEMENT

La cinématique étudie les propriétés géométriques des mouvements d'un point ou de corps solides en fonction du temps, sans tenir compte des causes qui ont provoqué ces mouvements.

Pour étudier un mouvement, il est nécessaire de se fixer un repère qui sert de référence. Un corps rigide est au repos par rapport à un repère défini par trois axes orthogonaux, si les coordonnées de tous ses points dans ce trièdre restent constantes au cours du temps. En revanche, s'il est en mouvement par rapport à ce repère, les distances précédentes varient au cours du temps. Le mouvement est donc toujours relatif à un repère : dans les applications ce repère peut être la Terre, ou tout corps rigide en mouvement par rapport à la Terre. Ainsi, si l'on observe une goutte de pluie glissant sur la vitre d'un train en marche, on peut étudier deux mouvements en fonction du temps : le mouvement par rapport à la vitre, que l'on observe directement si l'on est dans le wagon, et le mouvement par rapport aux rails qui est différent du précédent. On remarque également, qu'au cours du temps, la goutte d'eau décrit sur la vitre une courbe appelée *trajectoire par rapport au wagon* (ou à la vitre) et qu'elle parcourt un certain espace en un temps mesurable. Les notions d'espace parcouru et de temps mis pour le parcourir sont inséparables dans l'étude des mouvements.

1. DÉRIVATIONS VECTORIELLES

1.1. Dérivation dans un même repère. — Soit un trièdre trirectangle orthonormé $(O, X_0Y_0Z_0)$ définissant un repère $(\mathcal{R}_0)$. Soit un vecteur libre $\overrightarrow{V}(u)$ dont la direction dans $(\mathcal{R}_0)$, le sens et le module — ou les composantes scalaires $X(u)$, $Y(u)$, $Z(u)$ sur $(O, X_0\,Y_0\,Z_0)$ — dépendent d'un paramètre u. Si $\overrightarrow{OM}$ est un représentant de $\overrightarrow{V}$, on peut écrire :

$$\overrightarrow{OM}(u) = \overrightarrow{V}(u) = X(u).\overrightarrow{i} + Y(u).\overrightarrow{j} + Z(u).\overrightarrow{k}$$

$\overrightarrow{V}(u)$ est une fonction vectorielle de u (fig. II-1). Lorsque u croît de Δu, $\overrightarrow{V}(u) = \overrightarrow{OM}(u)$ varie en direction dans $(\mathcal{R}_0)$ et en module : il devient $\overrightarrow{V}(u + \Delta u) = \overrightarrow{OM}(u + \Delta u)$.

La variation du vecteur libre $\overrightarrow{V}(u)$ dans $(\mathcal{R}_0)$ est égale à :

$$\overrightarrow{V}(u + \Delta u) - \overrightarrow{V}(u) = \overrightarrow{OM}(u + \Delta u) - \overrightarrow{OM}(u)$$

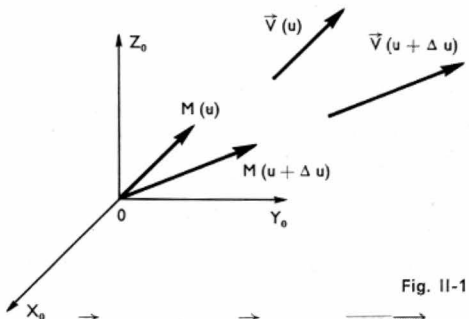


Fig. II-1

$$\overrightarrow{V}(u + \Delta u) - \overrightarrow{V}(u) = \overrightarrow{M(u)\,M}(u + \Delta u)$$

La variation de $\overrightarrow{V}(u)$ rapportée à la variation de u, ou encore variation relative, est aussi un vecteur. Cette variation sera représentée par :

$$\frac{\overrightarrow{V}(u + \Delta u) - \overrightarrow{V}(u)}{\Delta u} = \frac{\overrightarrow{OM}(u + \Delta u) - \overrightarrow{OM}(u)}{\Delta u} = \frac{\overrightarrow{M(u)\,M}(u + \Delta u)}{\Delta u}$$

Par définition, on appelle *dérivée du vecteur libre* $\overrightarrow{V}(u)$ *par rapport au paramètre u et dans le repère* $(\mathcal{R}_0)$ la limite, si elle existe, du rapport précédent lorsque Δu tend vers 0. On écrit :

$$\left\{\frac{d\overrightarrow{V}(u)}{du}\right\}_{\mathcal{R}_0} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\overrightarrow{V}(u + \Delta u) - \overrightarrow{V}(u)}{\Delta u}$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\overrightarrow{OM}(u + \Delta u) - \overrightarrow{OM}(u)}{\Delta u} = \left\{\frac{d\,\overrightarrow{OM}}{du}\right\}_{\mathcal{R}_0}$$

Il faut remarquer que la dérivée dans $(\mathcal{R}_0)$ du vecteur libre $\overrightarrow{V}(u)$ est un vecteur libre ; ce dernier est indépendant de la base choisie pour définir $(\mathcal{R}_0)$ et quel que soit P appartenant à $(\mathcal{R}_0)$ il vient :

$$\left\{\frac{d\,\overrightarrow{PM}(u)}{du}\right\}_{\mathcal{R}_0} = \left\{\frac{d\,\overrightarrow{OM}(u)}{du}\right\}_{\mathcal{R}_0}$$

En effet, soit P un point de $(\mathcal{R}_0)$:

$$\left\{\frac{d\overrightarrow{PM}(u)}{du}\right\}_{\mathcal{R}_0} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\overrightarrow{PM}(u+\Delta u) - \overrightarrow{PM}(u)}{\Delta u}$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\overrightarrow{M(u)M}(u+\Delta u)}{\Delta u} = \left\{\frac{d\overrightarrow{OM}(u)}{du}\right\}_{\mathcal{R}_0}$$

Étant donné cette remarque et afin de simplifier l'écriture, dans de nombreux cas, on se contente de désigner la dérivée du vecteur $\overrightarrow{OM}(u)$ représentant d'un vecteur libre $\overrightarrow{V}(u)$ par : $\left\{\frac{d\overrightarrow{M}(u)}{du}\right\}_{\mathcal{R}_0}$

Obtention analytique de la dérivée d'un vecteur. — Le rapport $\frac{\overrightarrow{V}(u+\Delta u) - \overrightarrow{V}(u)}{\Delta u}$ peut s'exprimer à l'aide de ses composantes scalaires dans le trièdre orthonormé $(O, X_0Y_0Z_0)$ définissant $(\mathcal{R}_0)$:

$$\overrightarrow{V}(u) = X(u).\overrightarrow{i_0} + Y(u).\overrightarrow{j_0} + Z(u).\overrightarrow{k_0}$$

$$\overrightarrow{V}(u+\Delta u) = X(u+\Delta u).\overrightarrow{i_0} + Y(u+\Delta u).\overrightarrow{j_0} + Z(u+\Delta u).\overrightarrow{k_0}$$

$$\frac{\overrightarrow{V}(u+\Delta u) - V(u)}{\Delta u} = \frac{\overrightarrow{X}(u+\Delta u) - X(u)}{\Delta u}.\overrightarrow{i_0} + \frac{Y(u+\Delta u) - Y(u)}{\Delta u}.\overrightarrow{j_0} + \frac{Z(u+\Delta u) - Z(u)}{\Delta u}.\overrightarrow{k_0}$$

Il en est de même pour la limite de ce rapport, si elle existe, lorsque Δu tend vers 0. En tenant compte des dérivées des fonctions scalaires $X(u)$, $Y(u)$ et $Z(u)$ par rapport à u on peut écrire :

$$\boxed{\left\{\frac{d\overrightarrow{V}(u)}{du}\right\}_{\mathcal{R}_0} = \frac{dX(u)}{du}.\overrightarrow{i_0} + \frac{dY(u)}{du}.\overrightarrow{j_0} + \frac{dZ(u)}{du}.\overrightarrow{k_0}}$$

Le vecteur dérivé de $\overrightarrow{V}(u)$ par rapport à u dans $(\mathcal{R}_0)$ a pour composantes scalaires, dans une base donnée définissant $(\mathcal{R}_0)$, les dérivées par rapport à u des composantes scalaires de $\overrightarrow{V}(u)$ dans cette même base.

Exemple : Soit $\overrightarrow{V}(u)$ un vecteur dont les composantes sur $(O, X_0Y_0Z_0)$ sont : $X(u) = 2$, $Y(u) = 3u^2 + 2u$, $Z(u) = 0$

Sa dérivée par rapport à u dans $(\mathcal{R}_0)$ a pour composantes sur $(O, X_0Y_0Z_0)$:

$$\frac{dX(u)}{du} = 0, \quad \frac{dY(u)}{du} = 6u + 2, \quad \frac{dZ(u)}{du} = 0$$

$$\overrightarrow{V}(u) = 2\overrightarrow{i_0} + (3u^2 + 2u).\overrightarrow{j_0}, \Rightarrow \frac{d\overrightarrow{V}(u)}{du} = (6u+2).\overrightarrow{j_0}$$

1.1.1. Dérivation d'une somme de vecteurs

$$\left\{\frac{d[\overrightarrow{V}(u) + \overrightarrow{W}(u)]}{du}\right\}_{\mathcal{R}_0} = \left\{\frac{d\overrightarrow{V}(u)}{du}\right\}_{\mathcal{R}_0} + \left\{\frac{d\overrightarrow{W}(u)}{du}\right\}_{\mathcal{R}_0}$$

La dérivation de la somme de plusieurs vecteurs est égale à la somme des dérivées vectorielles de chacun d'eux.

1.1.2. Dérivation du produit d'un scalaire et d'un vecteur

$$\left\{\frac{d[\lambda(u).\overrightarrow{V}(u)]}{du}\right\}_{\mathcal{R}_0} = \frac{d\lambda(u)}{du}.\overrightarrow{V}(u) + \lambda(u).\left\{\frac{d\overrightarrow{V}(u)}{du}\right\}_{\mathcal{R}_0}$$

La dérivée du produit $\lambda(u).\overrightarrow{V}(u)$ dans $(\mathcal{R}_0)$ est égale à la dérivée de $\lambda(u)$ multipliée par $\overrightarrow{V}(u)$ augmentée du produit de $\lambda(u)$ par la dérivée de $\overrightarrow{V}(u)$ dans $(\mathcal{R}_0)$.

1.1.3. Dérivation d'un produit scalaire

$$\left\{\frac{d[\overrightarrow{V}(u)\bullet\overrightarrow{W}(u)]}{du}\right\}_{\mathcal{R}_0} = \left\{\frac{d\overrightarrow{V}(u)}{du}\right\}_{\mathcal{R}_0}\bullet\overrightarrow{W}(u) + \overrightarrow{V}(u)\bullet\left\{\frac{d\overrightarrow{W}(u)}{du}\right\}_{\mathcal{R}_0}$$

La dérivée du produit scalaire de deux vecteurs dans $(\mathcal{R}_0)$ est égale à la dérivée du premier dans $(\mathcal{R}_0)$ multipliée scalairement par le second augmentée du produit scalaire du premier par la dérivée du second dans $(\mathcal{R}_0)$.

1.1.4. Dérivation d'un produit vectoriel

$$\left\{\frac{d[\overrightarrow{V}(u)\wedge\overrightarrow{W}(u)]}{du}\right\}_{\mathcal{R}_0} = \left\{\frac{d\overrightarrow{V}(u)}{du}\right\}_{\mathcal{R}_0}\wedge\overrightarrow{W}(u) + \overrightarrow{V}(u)\wedge\left\{\frac{d\overrightarrow{W}(u)}{du}\right\}_{\mathcal{R}_0}$$

La dérivée du produit vectoriel de deux vecteurs dans $(\mathcal{R}_0)$ est égale au produit vectoriel de la dérivée du premier dans $(\mathcal{R}_0)$ par le second augmenté du produit vectoriel du premier par la dérivée du second dans $(\mathcal{R}_0)$.

1.1.5. Dérivation d'un produit mixte

$$\left\{\frac{d[\overrightarrow{U}(u), \overrightarrow{V}(u), \overrightarrow{W}(u)]}{du}\right\}_{\mathcal{R}_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{U}(u)}{du}, \overrightarrow{V}(u), \overrightarrow{W}(u)\right] + \left[\overrightarrow{U}(u), \frac{d\overrightarrow{V}(u)}{du}, \overrightarrow{W}(u)\right] + \left[\overrightarrow{U}(u), \overrightarrow{V}(u), \frac{d\overrightarrow{W}(u)}{du}\right]$$

La dérivée du produit mixte dans $(\mathcal{R}_0)$ est égale à la somme des trois produits mixtes obtenus en dérivant successivement dans $(\mathcal{R}_0)$ les trois vecteurs $\overrightarrow{U}(u)$, $\overrightarrow{V}(u)$, $\overrightarrow{W}(u)$ du produit.

1.1.6. Cas particulier de la dérivation d'un vecteur unitaire

Soit un vecteur $\overrightarrow{V}(u)$ tel que : $|\overrightarrow{V}(u)| = 1$ quel que soit u.

$$\overrightarrow{V}(u)\bullet\overrightarrow{V}(u) = [\overrightarrow{V}(u)]^2 = 1, \text{ et : } \frac{d[\overrightarrow{V}(u)\bullet\overrightarrow{V}(u)]}{du} = 0$$

Or : $$\frac{d[\overrightarrow{V}(u)\bullet\overrightarrow{V}(u)]}{du} = \frac{d\overrightarrow{V}(u)}{du}\bullet\overrightarrow{V}(u) + \overrightarrow{V}(u)\bullet\frac{d\overrightarrow{V}(u)}{du} = 2\,\overrightarrow{V}(u)\bullet\frac{d\overrightarrow{V}(u)}{du}$$

Le vecteur $\frac{d\overrightarrow{V}(u)}{du}$ est donc perpendiculaire à $\overrightarrow{V}(u)$.

La dérivée d'un vecteur unitaire dans un repère arbitraire est orthogonale à ce vecteur.

Premier exemple (fig. II-2). — Soit $\overrightarrow{V}$ un vecteur unitaire, de représentant $\overrightarrow{OM}$, se déplaçant par rapport au repère $(\mathcal{R})$ parallèlement au plan (xOy). On va montrer que la

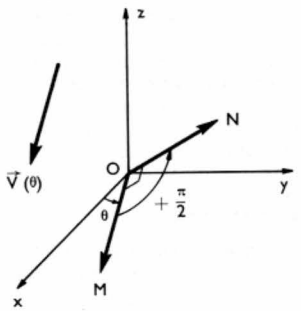


Fig. II-2

dérivée de ce vecteur par rapport à $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$ est un vecteur *unitaire* parallèle à (xOy) et directement perpendiculaire à $\overrightarrow{V}$, c'est-à-dire obtenu par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ rad autour de Oz.

$\overrightarrow{V}(\theta)$ a pour composante sur (O, xyz) : $x(\theta) = \cos\theta$, $y(\theta) = \sin\theta$, $z(\theta) = 0$; d'où $\frac{d\overrightarrow{V}(\theta)}{d\theta}$ a pour composantes sur (O, xyz) : $\frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta$, $\frac{dy}{d\theta} = \cos\theta$, $\frac{dz}{d\theta} = 0$.

Ou : $\vec{V}(\theta) = \cos\theta \,.\, \vec{i} + \sin\theta \,.\, \vec{j}$

et : $\left\{\frac{d\vec{V}(\theta)}{d\theta}\right\}_{\mathcal{R}} = -\sin\theta \,.\, \vec{i} + \cos\theta \,.\, \vec{j}$

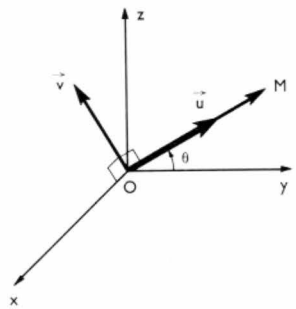
Puisque : $\left[\left\{\frac{d\vec{V}(\theta)}{d\theta}\right\}_{\mathcal{R}}\right]^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

le vecteur dérivée de $\vec{V}(\theta)$ par rapport à θ dans $(\mathcal{R})$ est donc unitaire. Sa composante $\frac{dz}{d\theta}$ sur Oz est nulle : il est donc parallèle à (xOy). Ses composantes sur Ox et Oy étant $-\sin\theta$ et $\cos\theta$, il est orthogonal au vecteur $\vec{V}(\theta)$.

On peut vérifier que, si θ est une fonction d'un autre paramètre (par exemple : soit $\theta = 3t^2 + t$), $\vec{V}$ est une fonction de t et $\left\{\frac{d\vec{V}}{dt}\right\}_{\mathcal{R}}$ n'est plus un vecteur unitaire comme l'était $\left\{\frac{d\vec{V}(\theta)}{d\theta}\right\}_{\mathcal{R}}$

Deuxième exemple (fig. II-3). — Soit un trièdre orthonormé (O, xyz) définissant un repère $(\mathcal{R})$ et un vecteur $\overrightarrow{OM}$ dont l'extrémité M se déplace dans le plan (yOz). Le

Fig. II-3



vecteur $\overrightarrow{OM}$ est défini à l'aide du vecteur unitaire $\vec{u}$ par : $\overrightarrow{OM} = \lambda(t) \,.\, \vec{u}$, avec $\lambda(t) = 2at$, et $(\overrightarrow{Oy}, \vec{u}) = \theta(t)$ avec $\theta(t) = at$ (a est une constante et t un paramètre). La dérivée $\left\{\frac{d\,\overrightarrow{OM}(t)}{dt}\right\}_{\mathcal{R}}$ peut être obtenue en dérivant les composantes de $\overrightarrow{OM}$ sur (O, xyz) par rapport à t.

On peut aussi utiliser les propriétés de la dérivation vectorielle et les résultats de l'exemple précédent :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \lambda(t) \,.\, \vec{u}$$

$$\left\{\frac{d\,\overrightarrow{OM}(t)}{dt}\right\}_{\mathcal{R}} = \frac{d\lambda(t)}{dt} \,.\, \vec{u} + \lambda(t) \,.\, \left\{\frac{d\vec{u}(t)}{dt}\right\}_{\mathcal{R}}$$

or, d'après l'exemple 1 :

$$\left\{\frac{d\vec{u}(t)}{dt}\right\}_{\mathcal{R}} = \left\{\frac{d\vec{u}(\theta)}{d\theta}\right\}_{\mathcal{R}} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \vec{v} \,.\, \frac{d\theta}{dt}$$

d'où : $\left\{\frac{d\,\overrightarrow{OM}(t)}{dt}\right\}_{\mathcal{R}} = \frac{d\lambda(t)}{dt} \,.\, \vec{u} + \lambda(t) \,.\, \frac{d\theta}{dt} \,.\, \vec{v}$

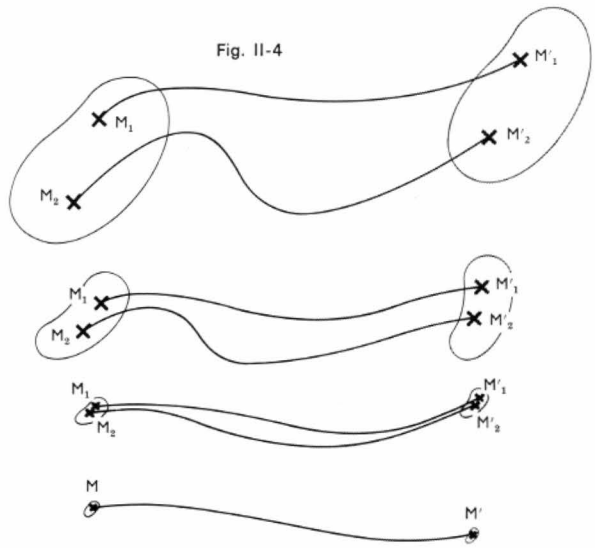
$$= 2a \,.\, \vec{u} + 2a^2 \,.\, t \,.\, \vec{v}$$

2. MOUVEMENT DU POINT MATÉRIEL

2.1. Point matériel, trajectoire, position

2.1.1. Point matériel. — Soit un corps rigide se déplaçant par rapport à un repère $(\mathcal{R})$, M_1 et M_2 étant deux points géométriques de ce corps (fig. II-4). Dans la plupart des cas, si les dimensions du solide sont suffisantes, il est possible de distinguer le chemin suivi par M_1 du chemin suivi par M_2. Au contraire, avec des corps dont les dimensions sont très petites, une telle distinction n'est plus possible, et à la limite le corps rigide est assimilable à un point matériel.

Fig. II-4



2.1.2. Trajectoire et position. — Un point matériel est au repos ou immobile par rapport à un repère $(\mathcal{R})$ défini par un trièdre orthonormé (O, xyz), si les coordonnées de ce point dans ce repère restent constantes au cours du temps. Il est en mouvement par rapport à ce repère si ces coordonnées varient au cours du temps. Le mouvement ou l'immobilité d'un point sont des notions relatives, ces deux états étant relatifs à un repère déterminé dit de référence. Ainsi les rivets d'assemblage d'un wagon d'un train en marche sont immobiles par rapport à celui-ci, mais en mouvement par rapport à la voie. Quand un point se déplace dans un repère $(\mathcal{R})$, l'ensemble des positions qu'il prend dans ce repère s'appelle la *trajectoire du point* dans son mouvement par rapport au repère $(\mathcal{R})$. Cette courbe peut être plane ou gauche.

À un instant déterminé, le point M occupe une certaine position dans $(\mathcal{R})$ et durant un intervalle de temps donné il parcourt un certain espace dans $(\mathcal{R})$. Ces notions d'instant et de position, de temps et d'espace parcouru sont inséparables dans l'étude du mouvement du point matériel.

Pour situer le point mobile M dans $(\mathcal{R})$ à un instant t quelconque, il est nécessaire de connaître la trajectoire (C) de M dans $(\mathcal{R})$ et sa position sur (C) à cet instant, ou bien les coordonnées : $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ de M dans (O, xyz) (fig. II-5).

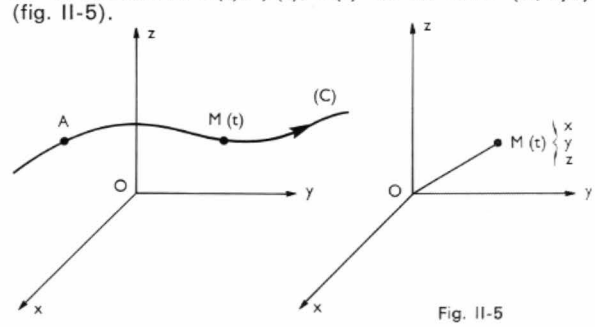


Fig. II-5

Dans le premier cas, ayant fixé sur (C) une origine A et un sens de parcours, la position de M sur (C) à un instant t est définie par la longueur de l'arc $\widehat{AM}(t)$; elle est affectée du signe + ou — selon que le sens de parcours, de A vers $M(t)$, coïncide ou non avec le sens choisi. L'arc $\widehat{AM}(t)$ est encore appelé *abscisse curviligne de M sur* (C) à l'instant t ; on le note en général $s = \widehat{AM}(t)$.

La connaissance de la fonction $s = f(t)$ permet de donner *la loi du mouvement* de M sur sa trajectoire ; $s = f(t)$ est encore appelée *équation horaire du mouvement*. La fonction $s = f(t)$ peut être représentée graphiquement dans un système d'axes orthogonaux Ox, Oy, en portant en abscisse les valeurs de t et en ordonnée les valeurs de s correspondantes. Cette courbe n'a évidemment rien à voir avec la

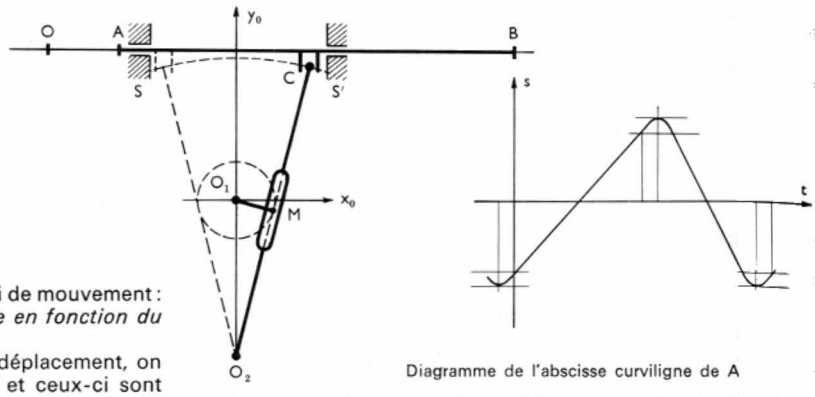


Fig. II-6

Schéma d'un étau limeur. Le repère de référence est constitué par le trièdre $(O_1, x_0y_0z_0)$ lié au bâti de la machine. Comme origine des espaces on choisit le point O correspondant à la position de A lorsque O_2C est confondu avec O_1O_2 et, comme origine des temps l'instant correspondant à :

$$(\overrightarrow{O_1O_2}, \overrightarrow{O_1M}) = +\frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Diagramme de l'abscisse curviligne de A

trajectoire de M, elle traduit seulement la loi de mouvement : c'est le *diagramme de l'abscisse curviligne en fonction du temps* (fig. II-6).

Pour évaluer le temps écoulé lors d'un déplacement, on choisit également une origine des temps et ceux-ci sont comptés positivement ou négativement à partir de cette origine selon qu'ils correspondent à des instants postérieurs ou antérieurs à celle-là.

Dans le deuxième cas, la connaissance des trois fonctions $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = k(t)$ permet de situer à tout instant M dans $(\mathcal{R})$ et de tracer la trajectoire de M dans $(\mathcal{R})$

2.2. Vitesse et accélération

2.2.1. Vitesse. — Le point M, mobile dans $(\mathcal{R})$, décrit dans $(\mathcal{R})$, pendant la variation de temps $(t_1 - t) = \Delta t$, l'arc de courbe orienté $\overset{\frown}{M(t)M(t_1)}$ égal à :

$$\overset{\frown}{AM}(t_1) - \overset{\frown}{AM}(t) = s(t_1) - s(t) \text{ (fig. II-7).}$$

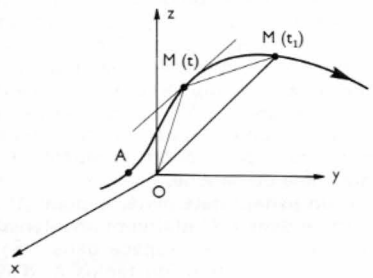


Fig. II-7

La *vitesse algébrique moyenne* de M durant cet intervalle de temps est, par définition, le rapport de l'espace parcouru et du temps mis pour le parcourir, soit :

$$\overline{V}_{moy}(M/\mathcal{R}, t_1 - t) = \frac{\overset{\frown}{M(t)M(t_1)}}{t_1 - t} = \frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t}$$

Cette vitesse algébrique se mesure en mètres par seconde.

Ce résultat traduit l'évolution moyenne, plus ou moins rapide du point M au cours de l'intervalle de temps $(t_1 - t)$. Pour avoir une idée plus précise de l'évolution de M dans $(\mathcal{R})$, il faut réduire l'intervalle de temps considéré. On est amené ainsi à définir la *vitesse algébrique instantanée* de M par rapport à $(\mathcal{R})$ par :

$$\overline{V}(M/\mathcal{R}, t) = \lim_{t_1 \to t} \frac{\overset{\frown}{M(t)M(t_1)}}{t_1 - t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s(t)}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

Cette vitesse instantanée se retrouve sur le diagramme de l'abscisse curviligne en prenant la pente de sa tangente au point d'abscisse t et d'ordonnée $s(t)$.

Vitesse algébrique moyenne et vitesse algébrique instantanée, ne donnent que des indications sur la rapidité ou la lenteur de l'évolution de M dans $(\mathcal{R})$. Or, au cours de l'intervalle de temps $(t_1 - t)$, M s'est déplacé dans $(\mathcal{R})$ de $M(t)$ à $M(t_1)$; il a donc suivi *la direction moyenne* donnée par le vecteur $\overrightarrow{M(t)M(t_1)}$ dans le même sens que celui-ci. Le *vecteur-vitesse moyenne de M dans* $(\mathcal{R})$, défini par : $\vec{V}_{moy}(M/\mathcal{R}, t_1 - t) = \dfrac{\overrightarrow{M(t)M(t_1)}}{t_1 - t}$ rend compte de cette direction moyenne. Plus $(t_1 - t)$ sera petit, plus cette direction moyenne se rapprochera de la direction réelle suivie par M. À la limite, lorsque $(t_1 - t)$ tend vers 0, la direction du vecteur $\dfrac{\overrightarrow{M(t)M(t_1)}}{t_1 - t}$ tendra vers la direction de la tangente à la trajectoire en $M(t)$ qui représente effectivement la direction suivie par M à l'instant t.

Le *vecteur-vitesse instantanée* de M dans $(\mathcal{R})$ défini par :

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}, t) = \lim_{t_1 \to t} \frac{\overrightarrow{M(t)M(t_1)}}{t_1 - t} = \lim_{t_1 \to t} \frac{\overrightarrow{OM}(t_1) - \overrightarrow{OM}(t)}{t_1 - t}$$

rendra compte de cette direction instantanée. Il reste à déterminer si ce vecteur est apte à renseigner sur l'évolution, rapide ou lente, du point M. Pour cela, cherchons la signification, de la mesure algébrique de ce vecteur sur la *tangente orientée* en $M(t)$ à la trajectoire (on appelle tangente orientée, une tangente sur laquelle on a défini un sens correspondant au sens de la trajectoire ; fig. II-8).

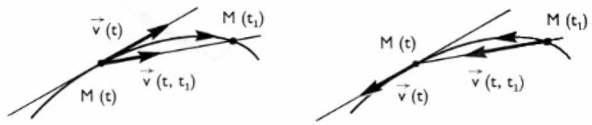


Fig. II-8

Soit $\vec{v}(t, t_1)$ le vecteur unitaire porté par la direction $[M(t)M(t_1)]$ et de sens correspondant à celui arbitrairement choisi sur la trajectoire. Soit $\vec{v}(t)$, le vecteur unitaire de la tangente orientée à la trajectoire en $M(t)$. Si $\overline{M(t)M(t_1)}$ est la mesure algébrique de $\overrightarrow{M(t)M(t_1)}$ relativement à $\vec{v}(t, t_1)$, le rapport précédent pourra s'écrire :

$$\lim_{t_1 \to t} \frac{\overrightarrow{M(t)\,M(t_1)}}{t_1 - t} = \lim_{t_1 \to t} \left[\frac{\overline{M(t)\,M(t_1)}}{t_1 - t} \cdot \vec{v}(t, t_1) \right]$$

$$= \lim_{t_1 \to t} \left[\frac{\overline{M(t)\,M(t_1)}}{\overset{\frown}{M(t)\,M(t_1)}} \cdot \frac{\overset{\frown}{M(t)\,M(t_1)}}{t_1 - t} \right] \cdot \vec{v}(t, t_1)$$

Or, lorsque $(t_1 - t)$ tend vers 0, ou encore lorsque $M(t_1)$ tend vers $M(t)$, le rapport de la corde et de l'arc tend vers 1 et la direction de la corde tend vers la direction de la tangente,

d'où : $$\lim_{t_1 \to t} \frac{\overline{M(t)\,M(t_1)}}{\overset{\frown}{M(t)\,M(t_1)}} = +1$$

et : $$\lim_{t_1 \to t} \vec{v}(t, t_1) = \vec{v}(t)$$

De plus, d'après la définition de la vitesse algébrique instantanée :

$$\lim_{t_1 \to t} \frac{\overset{\frown}{M(t)\,M(t_1)}}{t_1 - t} = \overline{V}(M/\mathcal{R}, t)$$

On a donc :

$$\boxed{\vec{V}(M/\mathcal{R}, t) = \lim_{t_1 \to t} \frac{\overrightarrow{M(t)\,M(t_1)}}{t_1 - t} = \overline{V}(M/\mathcal{R}, t) \cdot \vec{v}(t)}$$

Le vecteur-vitesse du point M à l'instant t, dans $(\mathcal{R})$, a pour direction la direction de la tangente en $M(t)$ à la trajectoire de M dans $(\mathcal{R})$; sa mesure algébrique, sur cette tangente orientée est égale, à l'instant t, à la vitesse algébrique de M sur sa trajectoire orientée. Ce vecteur définit

donc à la fois la direction instantanée et la vitesse instantanée du point M dans son déplacement par rapport à $(\mathcal{R})$. Le vecteur-vitesse instantanée de M dans $(\mathcal{R})$ peut aussi s'obtenir par dérivation vectorielle des vecteurs $\overrightarrow{OM}(t)$ ou $\overrightarrow{AM}(t)$ dans $(\mathcal{R})$, puisque par définition même :

$$\lim_{t_1 \to t} \frac{\overrightarrow{M(t)\,M(t_1)}}{t_1 - t} = \lim_{t_1 \to t} \frac{\overrightarrow{OM}(t_1) - \overrightarrow{OM}(t)}{t_1 - t} = \left\{\frac{d\,\overrightarrow{OM}(t)}{dt}\right\}_{\mathcal{R}} = \left\{\frac{d\overrightarrow{M}(t)}{dt}\right\}_{\mathcal{R}}$$

Exemple (fig. II-9). — La vitesse d'un point M dans un repère $(\mathcal{R}_0)$ est telle que : $\vec{V}(M/\mathcal{R}_0, t) = \lambda(t) \cdot \overrightarrow{OM}(t)$, O étant un point fixe de $(\mathcal{R}_0)$ et $\lambda(t)$ une fonction connue du temps. On va chercher la trajectoire de M dans $(\mathcal{R}_0)$

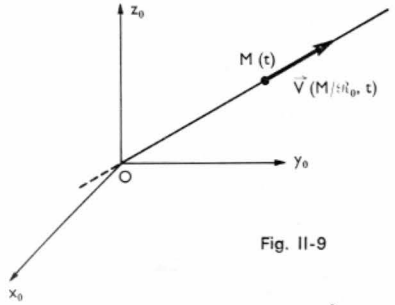


Fig. II-9

sachant qu'à l'instant $t = 0$, $\overrightarrow{OM}_0 = a \cdot \vec{i}_0 + b \cdot \vec{j}_0 + c \cdot \vec{k}_0$, dans le trièdre $(O, x_0 y_0 z_0)$ définissant $(\mathcal{R}_0)$. À l'instant t :

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t) \cdot \vec{i}_0 + y(t) \cdot \vec{j}_0 + z(t) \cdot \vec{k}_0$$

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_0, t) = \left\{\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}\right\}_{\mathcal{R}_0} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{i}_0 + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{j}_0 + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k}_0$$

Or :

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_0, t) = \lambda(t)\overrightarrow{OM}(t) = \lambda(t) \cdot x(t) \cdot \vec{i}_0 + \lambda(t) \cdot y(t) \cdot \vec{j}_0 + \lambda(t) \cdot z(t) \cdot \vec{k}_0$$

On peut donc écrire les égalités suivantes :

$$\frac{dx}{dt} = \lambda(t) \cdot x(t), \quad \text{soit :} \quad \frac{dx}{x} = \lambda(t) \cdot dt$$

$$\frac{dy}{dt} = \lambda(t) \cdot y(t), \quad \text{soit :} \quad \frac{dy}{y} = \lambda(t) \cdot dt$$

$$\frac{dz}{dt} = \lambda(t) \cdot z(t), \quad \text{soit :} \quad \frac{dz}{z} = \lambda(t) \cdot dt$$

La résolution du système précédent entraîne :

$$x(t) = a \cdot e^{\int_0^t \lambda(t)dt}$$

$$y(t) = b \cdot e^{\int_0^t \lambda(t)dt}$$

$$z(t) = c \cdot e^{\int_0^t \lambda(t)dt}$$

d'où : $$\frac{x(t)}{a} = \frac{y(t)}{b} = \frac{z(t)}{c}$$

Cela signifie que $\overrightarrow{OM}(t)$ est parallèle à $\overrightarrow{OM}_0$.

La trajectoire de M dans $(\mathcal{R}_0)$ est donc la droite définie par $\overrightarrow{OM}_0$.

Un tel mouvement est dit à *vitesse centrale,* le vecteur-vitesse passe toujours par un même point fixe dans $(\mathcal{R}_0)$. La trajectoire d'un point dont le vecteur-vitesse est central dans un repère donné est une droite dans ce repère.

2.2.2. Accélération. — Le point M mobile dans $(\mathcal{R})$ (fig. II-10) décrit sur sa trajectoire (C), pendant la variation de temps $\Delta t = (t_1 - t)$, l'arc :

$$\overset{\frown}{M(t)\,M(t_1)} = s(t_1) - s(t) = \Delta s$$

Pendant ce même intervalle de temps, sa vitesse algébrique varie de $\Delta\overline{V} = \overline{V}(M/\mathcal{R}, t_1) - \overline{V}(M/\mathcal{R}, t)$. Le rapport de cette variation de vitesse à la variation de temps correspondante traduit l'évolution moyenne de la vitesse algébrique de M dans $(\mathcal{R})$ en fonction du temps.

Ce rapport est appelé *accélération algébrique moyenne* de M dans $(\mathcal{R})$ entre les instants t et t_1 et se note :

$$\overline{\gamma}_{moy}(M/\mathcal{R}, t_1 - t) = \frac{\overline{V}(M/\mathcal{R}, t_1) - \overline{V}(M/\mathcal{R}, t)}{t_1 - t} = \frac{\Delta\overline{V}}{\Delta t}$$

Pour avoir une idée plus exacte de cette évolution il faut réduire l'intervalle de temps considéré et passer d'une valeur moyenne à une valeur instantanée. On définit ainsi l'accélération algébrique de M dans $(\mathcal{R})$ à l'instant t par :

$$\overline{\gamma}(M/\mathcal{R}, t) = \lim_{t_1 \to t} \frac{\overline{V}(M/\mathcal{R}, t_1) - \overline{V}(M/\mathcal{R}, t)}{t_1 - t} = \frac{d\overline{V}(M/\mathcal{R}, t)}{dt}$$

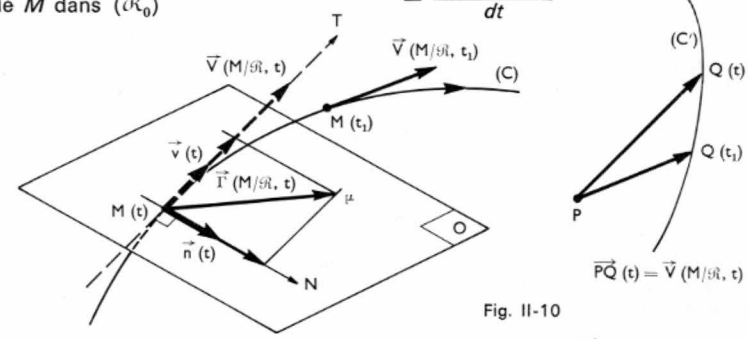


Fig. II-10

Or : $$\overline{V}(M/\mathcal{R}, t) = \frac{ds}{dt}$$

d'où : $$\boxed{\overline{\gamma}(M/\mathcal{R}, t) = \frac{d\overline{V}(M/\mathcal{R})}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}}$$

Si l'on étudie maintenant les variations du vecteur-vitesse de M dans $(\mathcal{R})$ au cours du temps, on définit, comme pour les accélérations algébriques :

1° Le *vecteur-accélération moyenne* entre les instants t_1 et t :

$$\vec{\Gamma}_{moy}(M/\mathcal{R}, t_1 - t) = \frac{\vec{V}(M/\mathcal{R}, t_1) - \vec{V}(M/\mathcal{R}, t)}{t_1 - t} = \frac{\overrightarrow{PQ}(t_1) - \overrightarrow{PQ}(t)}{t_1 - t}$$

P étant un point arbitraire de $(\mathcal{R})$ et $\overrightarrow{PQ}(t)$ étant équipollent à $\vec{V}(M/\mathcal{R}, t)$.

2° Le vecteur-accélération à l'instant t de M dans $(\mathcal{R})$:

$$\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}, t) = \lim_{t_1 \to t} \frac{\vec{V}(M/\mathcal{R}, t_1) - \vec{V}(M/\mathcal{R}, t)}{t_1 - t}$$

$$\boxed{\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}, t) = \lim_{t_1 \to t} \frac{\overline{V}(M/\mathcal{R}, t_1) \cdot \vec{v}(t_1) - \overline{V}(M/\mathcal{R}, t) \cdot \vec{v}(t)}{t_1 - t}}$$

Cette expression traduit la variation instantanée du vecteur vitesse, donc la variation instantanée de la direction suivie par M et de la vitesse linéaire (ou algébrique) sur sa trajectoire.

Analytiquement le rapport :

$$\lim_{t_1 \to t} \frac{\vec{V}(M/\mathcal{R}, t_1) - \vec{V}(M/\mathcal{R}, t)}{t_1 - t}$$

représente la dérivée par rapport au temps dans $(\mathcal{R})$ du vecteur vitesse de M dans $(\mathcal{R})$, d'où :

$$\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}, t) = \left\{\frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R}, t)}{dt}\right\}_{\mathcal{R}} = \left\{\frac{d\overrightarrow{PQ}(t)}{dt}\right\}_{\mathcal{R}} = \vec{V}(Q/\mathcal{R}, t)$$

La courbe (C'), lieu des points $Q(t)$ lorsque t varie, est appelé *hodographe*. Le plan (O) défini par $\vec{V}(M/\mathcal{R}, t)$ et $\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}, t)$ est appelé *plan osculateur de la trajectoire* en $M(t)$.

Le vecteur-accélération de M peut être défini à l'aide de ses composantes sur deux axes du plan osculateur.

En effet on peut écrire :

$$\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}, t) = \frac{d[\vec{V}(M/\mathcal{R}, t) \cdot \vec{v}(t)]}{dt} = \frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R}, t)}{dt} \cdot \vec{v}(t) + \vec{V}(M/\mathcal{R}, t) \cdot \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

Or, $\vec{v}(t)$ qui est le vecteur unitaire de la tangente orientée à (C) en $M(t)$ est connu, et si $s(t)$ représente l'abscisse curviligne de M sur (C) à l'instant t :

$$\vec{v}(t) = \lim_{s(t_1) \to s(t)} \frac{\overrightarrow{M(t)\,M(t_1)}}{s(t_1) - s(t)} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} = \vec{v}[s(t)]$$

D'où :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d\vec{v}}{ds} \cdot \vec{V}(M/\mathcal{R}, t) = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{ds^2} \cdot \vec{V}(M/\mathcal{R}, t)$$

$\vec{v}$ étant unitaire, $\frac{d\vec{v}}{dt} \bullet \vec{v} = 0$: $\frac{d\vec{v}}{dt}$ est orthogonal à $\vec{v}$, et $\frac{d\vec{v}}{ds}$ est perpendiculaire à $\vec{v}$. On peut alors poser $\frac{d\vec{v}}{ds} = \frac{\vec{n}}{\rho}$, avec :

— $\vec{n}$, vecteur unitaire de l'axe orthogonal à $\vec{v}$, appelé *axe normal principal* à (C) en $M(t)$ et défini par $\frac{d\vec{v}}{ds}$

— ρ, scalaire positif appelé *rayon de courbure* de la courbe (C) en $M(t)$; ρ est obtenu en utilisant la relation précédente où chacun des membres est élevé au carré,

$$\left(\frac{d\vec{v}}{ds}\right)^2 = \left(\frac{\vec{n}}{\rho}\right)^2, \text{ ou : } \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{ds^2}\right)^2 = \frac{1}{\rho^2}$$

d'où : $$\rho = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}$$

En reportant ces résultats dans l'expression de $\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}, t)$ on obtient :

$$\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}, t) = \frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R}, t)}{dt} \cdot \vec{v}(t) + \vec{V}(M/\mathcal{R}, t) \cdot \vec{V}(M/\mathcal{R}, t) \cdot \frac{\vec{n}}{\rho}$$

soit :

$$\boxed{\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}, t) = \frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R}, t)}{dt} \cdot \vec{v}(t) + V^2(M/\mathcal{R}, t) \cdot \frac{\vec{n}}{\rho}}$$

La mesure algébrique de la projection du vecteur accélération de M sur la tangente orientée MT à la trajectoire — appelée *accélération tangentielle* — est égale à l'accélération algébrique de M. La mesure algébrique de la projection du vecteur accélération sur la normale orientée MN à la trajectoire — appelée *accélération normale* — est égale à la vitesse algébrique de M élevée au carré et rapportée au rayon de courbure de la trajectoire au point coïncidant avec M.

Exemple. — Dans un plan $(\mathcal{P})$, défini par un système d'axes orthogonaux Ox,Oy, se déplace une barre NM de longueur l, de telle manière que son extrémité N puisse glisser le long de Ox (fig. II-11). Sachant que :

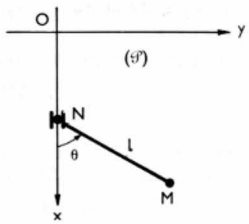


Fig. II-11

$\overline{ON} = \lambda(t) = a_0 \sin(\omega t)$, et que : $(Ox, NM) = \theta(t) = \Omega . t$, avec : $\Omega = \text{Cte}$; on va chercher analytiquement le vecteur vitesse et le vecteur accélération de M par rapport à $(\mathcal{P})$.

Vitesse de M :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM} = \lambda(t) . \vec{i} + l . \cos\theta(t) . \vec{i} + l . \sin\theta(t) . \vec{j}$$

$$\vec{V}(M/\mathcal{P}) = \left\{\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right\}_{\mathcal{P}} = \frac{d\lambda}{dt} . \vec{i} - l . \frac{d\theta}{dt} . \sin\theta . \vec{i} + l . \frac{d\theta}{dt} . \cos\theta . \vec{j}$$

$$\vec{V}(M/\mathcal{P}) = [a_0\omega \cos\omega t - l\Omega \sin\Omega t] . \vec{i} + l\Omega \cos\Omega t . \vec{j}$$

Accélération de M

$$\vec{\Gamma}(M/\mathcal{P}) = \left\{\frac{d\vec{V}(M/\mathcal{P})}{dt}\right\}_{\mathcal{P}} = -[a_0\omega^2 \sin\omega t + l\Omega^2 \sin\Omega t] . \vec{i} - l\Omega^2 \sin\Omega t . \vec{j}$$

2.2.3. Composition des vitesses et des accélérations

Composition des vitesses (fig. II-12). — Soit deux repères $(\mathcal{R}_0)$ et $(\mathcal{R}_1)$, définis par les trièdres $(O, x_0y_0z_0)$ et $(O_1, x_1y_1z_1)$, et un point M mobile par rapport à $(\mathcal{R}_0)$ et $(\mathcal{R}_1)$.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$$
$$\overrightarrow{O_1M} = x_1 . \vec{i}_1 + y_1 . \vec{j}_1 + z_1 . \vec{k}_1$$
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + x_1 . \vec{i}_1 + y_1 . \vec{j}_1 + z_1 . \vec{k}_1$$

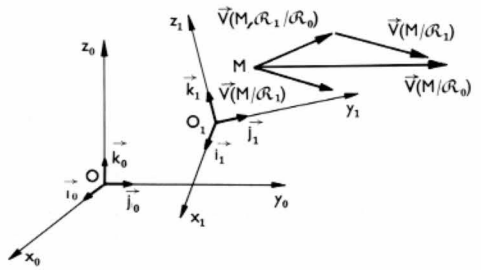


Fig. II-12

La vitesse de M par rapport à $(\mathcal{R}_1)$ est égale à :

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_1) = \left(\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_1} = \frac{dx_1}{dt} . \vec{i}_1 + \frac{dy_1}{dt} . \vec{j}_1 + \frac{dz_1}{dt} . \vec{k}_1$$

Si M appartenait à $(\mathcal{R}_1)$, c'est-à-dire était fixe dans $(\mathcal{R}_1)$, sa vitesse par rapport à $(\mathcal{R}_0)$ serait donnée par la relation suivante :

$$\vec{V}(M, \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) = \left(\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} + x_1 \left(\frac{d\vec{i}_1}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} + y_1 \left(\frac{d\vec{j}_1}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} + z_1 \left(\frac{d\vec{k}_1}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0}$$

La vitesse de M par rapport à $(\mathcal{R}_0)$ est donnée par l'expression :

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} = \left(\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} + \left[\frac{d}{dt}(x_1 . \vec{i}_1 + y_1 . \vec{j}_1 + z_1 . \vec{k}_1)\right]_{\mathcal{R}_0}$$

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) = \left(\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} + x_1 \left(\frac{d\vec{i}_1}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} + y_1 \left(\frac{d\vec{j}_1}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} + z_1 \left(\frac{d\vec{k}_1}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} + \frac{dx_1}{dt} . \vec{i}_1 + \frac{dy_1}{dt} . \vec{j}_1 + \frac{dz_1}{dt} . \vec{k}_1$$

D'où : $$\boxed{\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(M, \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) + \vec{V}(M/\mathcal{R}_1)}$$

Si $(\mathcal{R}_0)$ est considéré comme repère absolu, on appelle *vitesse absolue* $\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)$, *vitesse relative* $\vec{V}(M/\mathcal{R}_1)$ et *vitesse d'entraînement* $\vec{V}(M, \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)$, (vitesse qu'aurait le point M s'il était *entraîné* par le repère $\mathcal{R}_1$). La vitesse absolue est donc égale à la somme géométrique de la vitesse d'entraînement et de la vitesse relative.

Composition des accélérations (fig. II-13) . — L'accélération de M par rapport à $(\mathcal{R}_1)$ est égale à :

$$\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_1) = \frac{d^2\overrightarrow{O_1M}}{dt^2} = \frac{d^2x_1}{dt^2} . \vec{i}_1 + \frac{d^2y_1}{dt^2} . \vec{j}_1 + \frac{d^2z_1}{dt^2} . \vec{k}_1$$

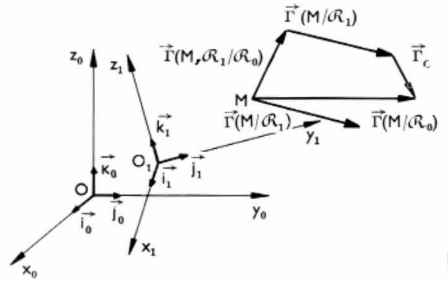


Fig. II-13

Si M appartenait à $(\mathcal{R}_1)$ son accélération par rapport à $(\mathcal{R}_0)$ serait donnée par l'expression suivante :

$$\vec{\Gamma}(M,\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OO_1}}{dt^2}\right)_{\mathcal{R}_0} + x_1\left(\frac{d^2\vec{i}_1}{dt^2}\right)_{\mathcal{R}_0} + y_1\left(\frac{d^2\vec{j}_1}{dt^2}\right)_{\mathcal{R}_0} + z_1\left(\frac{d^2\vec{k}_1}{dt^2}\right)_{\mathcal{R}_0}$$

L'accélération de M par rapport à $(\mathcal{R}_0)$ est égale à :

$$\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0) = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OO_1}}{dt^2}\right)_{\mathcal{R}_0} + \left[\frac{d^2}{dt^2}(x_1.\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1.\vec{k}_1)\right]_{\mathcal{R}_0}$$

$$\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0) = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OO_1}}{dt^2}\right)_{\mathcal{R}_0} + x_1\left(\frac{d^2\vec{i}_1}{dt^2}\right)_{\mathcal{R}_0} + y_1\left(\frac{d^2\vec{j}_1}{dt^2}\right)_{\mathcal{R}_0} + z_1\left(\frac{d^2\vec{k}_1}{dt^2}\right)_{\mathcal{R}_0} + \frac{d^2x_1}{dt^2}.\vec{i}_1 + \frac{d^2y_1}{dt^2}.\vec{j}_1 + \frac{d^2z_1}{dt^2}.\vec{k}_1 + 2\frac{dx_1}{dt}\left(\frac{d\vec{i}_1}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} + 2\frac{dy_1}{dt}\left(\frac{d\vec{j}_1}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} + 2\frac{dz_1}{dt}\left(\frac{d\vec{k}_1}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0}$$

D'où : $\boxed{\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0) = \vec{\Gamma}(M,\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) + \vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_1) + \Gamma_C}$

Si $(\mathcal{R}_0)$ est considéré comme repère absolu on appelle *accélération absolue* $\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0)$, *accélération d'entraînement* $\vec{\Gamma}(M,\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)$, *accélération relative* $\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_1)$ et *accélération complémentaire* ou *accélération de Corriolis* $\vec{\Gamma}_C$. L'accélération absolue est donc égale à la somme géométrique de l'accélération d'entraînement, de l'accélération relative et de l'accélération complémentaire.

Remarque : Si les axes du trièdre définissant $(\mathcal{R}_1)$ gardent la même direction par rapport à $(\mathcal{R}_0)$ au cours du temps, on a :

$$\left(\frac{d\vec{i}_1}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} = \left(\frac{d\vec{j}_1}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} = \left(\frac{d\vec{k}_1}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} = \vec{0}$$

D'où :
$$\vec{V}(M,\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(O_1/\mathcal{R}_0)$$
$$\vec{\Gamma}(M,\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) = \vec{\Gamma}(O_1/\mathcal{R}_0)$$
$$\vec{\Gamma}_C = \vec{0}$$

2.3. Mouvement uniforme, uniformément varié, périodique

2.3.1. Mouvement uniforme. — Si $\overline{\gamma}(M/\mathcal{R}) = 0$, la vitesse linéaire (ou algébrique) de M sur sa trajectoire dans $(\mathcal{R})$ est constante :

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\overline{V}(M/\mathcal{R})}{dt} &= \overline{\gamma}(M/\mathcal{R})\\ \overline{\gamma}(M/\mathcal{R}) &= 0\ \forall t\end{aligned}\right\} \Rightarrow \overline{V}(M/\mathcal{R}) = \text{Cte}$$

Le mouvement est alors appelé *mouvement uniforme*. Le point M se déplace toujours dans le même sens sur sa trajectoire orientée et il parcourt des espaces égaux en des temps égaux (fig. II-14).

Soit O l'origine des espaces fixée sur la trajectoire de M dans $(\mathcal{R})$. La position de M à un instant t est donnée par $\widehat{OM}(t) = s(t)$. Puisque la vitesse algébrique instantanée est constante, il en est de même de la vitesse moyenne, quel que soit l'intervalle de temps considéré ; donc : vitesse instantanée et vitesse moyenne sont égales. D'où, si t_0 est l'instant correspondant au passage de M en O :

$$\overline{V}(M/\mathcal{R}) = \frac{s(t) - 0}{t - t_0}$$

et :
$$s(t) = V.t - V.t_0$$

Au temps $t = 0$ le mobile se trouve au point d'abscisse :

$$s(0) = V.0 - V.t_0$$

L'abscisse du point M sur sa trajectoire à l'instant $t = 0$ est donc égale à : $-V.t_0$.

La loi du mouvement de M sur sa trajectoire dans $(\mathcal{R})$ est par conséquent la suivante : $s(t) = V.t + s(0)$.

Cette loi est une fonction linéaire du temps et la courbe, représentative du diagramme de l'abscisse curviligne en fonction du temps, est une droite de pente égale à V. Cette droite passe par l'intersection des deux axes si : $s(t) = V.t$, ou encore si : $s(0) = 0$, ce qui laisse supposer qu'au temps $t = 0$ le point M se trouve à l'origine des espaces en O. Dans le cas général, le point M a, au temps $t = 0$, une abscisse $s(0)$ différente de 0, positive ou négative.

Pour un tel mouvement, le vecteur-vitesse de M n'est pas forcément constant car :

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \overline{V}(M/\mathcal{R}).\vec{v}$$

Dans cette expression $\overline{V}(M/\mathcal{R})$ est constant mais $\vec{v}$, qui représente le vecteur unitaire de la tangente orientée à la trajectoire au point M à l'instant envisagé, varie en direction au cours du temps, sauf dans le cas particulier du mouvement rectiligne. Le vecteur-vitesse n'étant pas constant, le vecteur-accélération est différent de zéro.

$$\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}) = \overline{\gamma}(M/\mathcal{R}).\vec{v}(t) + \frac{[\overline{V}(M/\mathcal{R})]^2}{\rho}.\vec{n}(t)$$

Donc, dans le cas particulier du mouvement uniforme, bien que l'accélération algébrique $\overline{\gamma}(M/\mathcal{R})$ soit nulle, le vecteur-accélération, lui, est en général différent de zéro. L'accélération tangentielle de M est constamment nulle, mais son accélération normale $\frac{V^2}{\rho}$ est en général différente de zéro. Pour que cette dernière s'annule, V étant différent de zéro, il faut que ρ soit infini : c'est le cas particulier de la trajectoire rectiligne qui, en tout point, a un rayon de courbure infini.

2.3.2. Mouvement uniformément varié. — Si l'accélération algébrique instantanée de M par rapport à $(\mathcal{R})$, $\overline{\gamma}(M/\mathcal{R})$, est constante, il en est de même de l'accélération algébrique moyenne et cela quel que soit l'intervalle de temps considéré ; donc accélérations moyenne et instantanée sont égales.

D'où :

$$\overline{\gamma}(M/\mathcal{R}) = \frac{\overline{V}(M/\mathcal{R},t) - \overline{V}(M/\mathcal{R},0)}{t - 0} = \text{Cte} = \gamma$$

$$\overline{V}(M/\mathcal{R}) = \gamma.t + \overline{V}(M/\mathcal{R},0)$$

La vitesse algébrique de M sur sa trajectoire dans $(\mathcal{R})$ varie donc proportionnellement au temps. Un tel mouvement est appelé *mouvement uniformément varié*.

$\overline{V}(M/\mathcal{R},0)$ que l'on note V_0 représente la vitesse algébrique de M à l'instant $t = 0$.

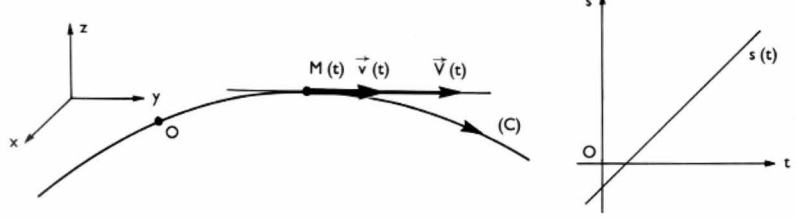
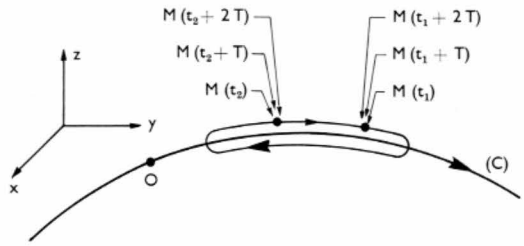


Fig. II-14

Fig. II-15



Sachant que : $\overline{V}(M/\mathcal{R}, t) = \dfrac{ds}{dt}$, on peut établir l'égalité :

$$\frac{ds}{dt} = \gamma . t + V_0$$

dans laquelle γ et V_0 sont des constantes, d'où, après intégration de cette équation différentielle, il vient :

$$s(t) = \frac{1}{2}\gamma . t^2 + V_0 . t + C$$

Au temps $t = 0$ le mobile se trouve au point d'abscisse s_0 tel que :

$$s_0 = s(0) = \frac{1}{2}\gamma . 0 + V_0 . 0 + C$$

La loi du mouvement de M sur sa trajectoire dans $(\mathcal{R})$ est donc donnée par :

$$s(t) = \frac{1}{2}\gamma . t^2 + V_0 . t + s_0$$

Cette loi est une fonction du second degré du temps. La courbe représentative du diagramme de l'abscisse curviligne en fonction du temps est une parabole. Cette parabole a son sommet confondu avec l'intersection des deux axes si $s(t) = \dfrac{1}{2}\gamma . t^2$ (ou encore si $V_0 = 0$ et $s_0 = 0$) ce qui laisse supposer qu'au temps $t = 0$, le point M se trouve à l'origine des espaces avec une vitesse nulle.

Si $\gamma > 0$, la parabole a sa concavité tournée vers les y positifs : le mouvement est uniformément accéléré.

Si $\gamma < 0$, la parabole a sa concavité tournée vers les y négatifs : le mouvement est uniformément retardé.

Dans le cas particulier où : $V_0 = s_0 = 0$, il est possible d'éliminer le temps entre les deux équations :

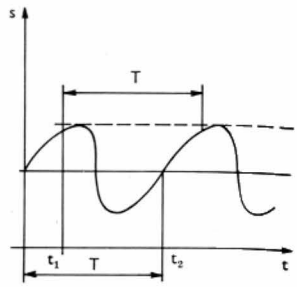
$$s(t) = \frac{1}{2}\gamma . t^2 \qquad \overline{V}(M/\mathcal{R}, t) = \gamma . t$$

Ce qui entraîne :

$$[\overline{V}(M/\mathcal{R}, t)]^2 = 2\,\gamma s, \text{ ou : } |\overline{V}(M/\mathcal{R}, t)| = \sqrt{2\,\gamma s}$$

2.3.3. Mouvement périodique. — Si lors de son mouvement dans $(\mathcal{R})$ (fig. II-15), le point M occupe la même position à l'instant t_1 (quelconque), puis à l'instant $t_1 + T$ et à l'instant $t_1 + 2T$, T étant une constante, le mouvement est appelé *mouvement périodique* de période T. Dans ces conditions, O étant l'origine des espaces fixée sur la trajectoire : $\widehat{OM}(t) = s(t)$ est une fonction périodique du temps, il en est de même de :

$$\overline{V}(M/\mathcal{R}) = \frac{ds}{dt}, \text{ et de : } \overline{\gamma}(M/\mathcal{R}) = \frac{d\overline{V}}{dt}.$$



La courbe représentative du diagramme de l'abscisse curviligne en fonction du temps est une courbe périodique. Dans l'exemple du paragraphe 2.1, le mouvement du point A est périodique.

Parmi les fonctions périodiques simples, on peut citer les fonctions sinusoïdales, telles que : $s(t) = a . \sin \omega t$, ou : $s(t) = s_0 + a . \sin \omega t$ qui définissent des mouvements appelés *mouvements harmoniques simples* (fig. II-16).

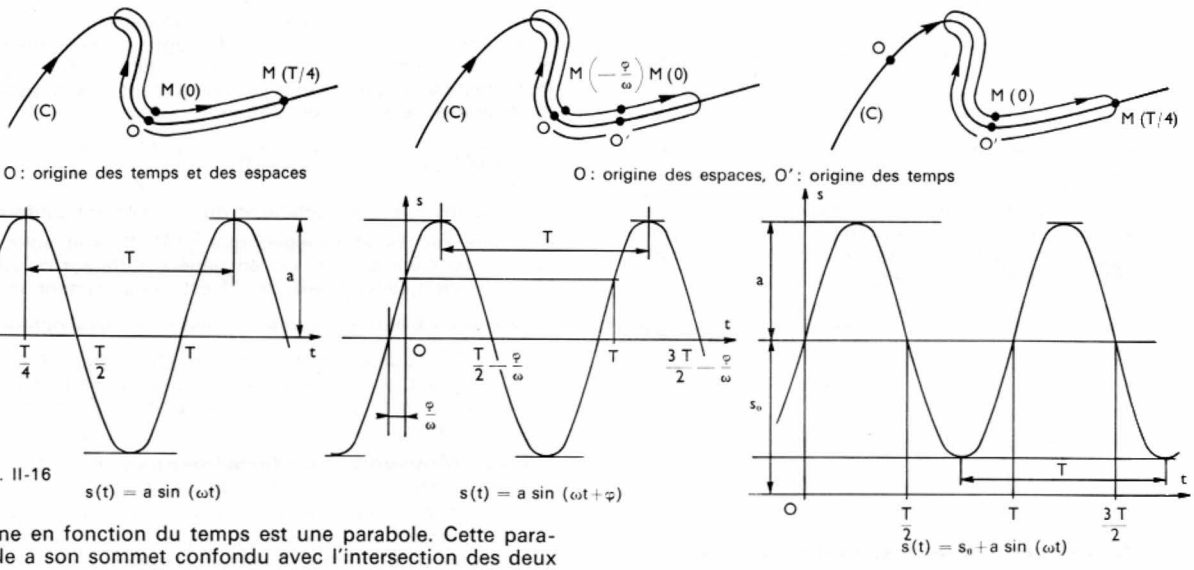


Fig. II-16

2.4. Étude de mouvements particuliers

2.4.1. Mouvement rectiligne. — Un point M est animé d'un mouvement rectiligne par rapport au repère $(\mathcal{R}_0)$, si sa trajectoire dans ce repère est une droite (D) (fig. II-17).

À tout instant, le vecteur-vitesse et le vecteur-accélération ont même direction que la trajectoire. En effet, le

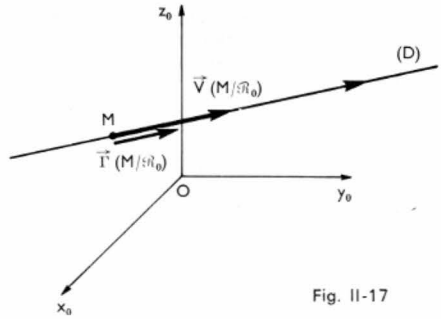


Fig. II-17

rayon de courbure de la trajectoire étant infini, l'accélération est réduite à la seule accélération tangentielle :

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) = \frac{ds}{dt}\,.\,\vec{v} = \overline{V}\,.\,\vec{v}$$

$$\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0) = \frac{d\overline{V}}{dt}\,.\,\vec{v} + \frac{V^2}{\rho}\,.\,\vec{n} = \frac{d\overline{V}}{dt}\,.\,\vec{v}$$

Dans ces conditions, la connaissance de la vitesse algébrique et de l'accélération algébrique est suffisante pour l'étude du mouvement.

Si $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_0) = 0$ le mouvement est rectiligne uniforme et le vecteur-vitesse de M reste constant. Quant au vecteur-accélération, il est nul.

Si $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}_0) =$ constante, le mouvement est rectiligne uniformément varié : le vecteur-accélération reste constant. Dans ces deux cas, les lois de mouvement établies au paragraphe 2.3 pour des trajectoires quelconques restent applicables.

Exemple. — Lorsqu'une bille M tombe en chute libre, son mouvement par rapport à la Terre est assimilable à un mouvement rectiligne uniformément varié d'accélération $\gamma = 9{,}81$ m/s². Si la bille est abandonnée sans vitesse initiale depuis une cote $h = 4$ m, on peut déterminer la vitesse avec laquelle elle touche le sol et le temps mis pour atteindre le sol (fig. II-18).

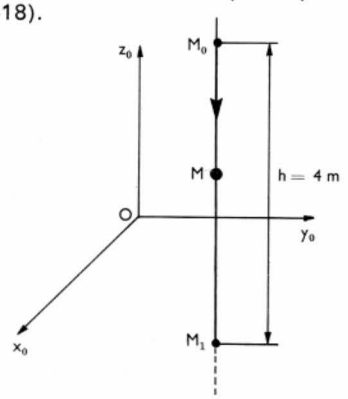


Fig. II-18

On prend comme origine des temps l'instant où la bille est abandonnée ; dans ces conditions et d'après le paragraphe 2.3.2 :

$$s(t) = \overline{M_0M} = \frac{1}{2}\gamma\,.\,t^2 = \frac{9{,}81}{2}\,t^2$$

$$\overline{V}(t) = \gamma\,.\,t = 9{,}81\,t$$

$$|\,\overline{V}(t)\,| = \sqrt{2\,.\,\gamma\,.\,s(t)} = \sqrt{2 \times 9{,}81\,.\,s(t)}$$

D'où la vitesse au moment de l'impact à l'instant T :

$$|\,\overline{V}(T)\,| = \sqrt{2 \times 9{,}81 \times 4} \approx 8{,}86 \text{ m/s}$$

Et le temps de chute est égal à :

$$T = \left|\frac{V(t)}{\gamma}\right| \approx \frac{8{,}86}{9{,}81} = 0{,}9 \text{ s}$$

2.4.2. Mouvement circulaire. — Un point M est animé d'un mouvement circulaire par rapport au repère $(\mathcal{R}_0)$, si la trajectoire de M dans $(\mathcal{R}_0)$ est un cercle (fig. II-19 a et b). Le plan de la trajectoire étant orienté, pour donner la position de M sur sa trajectoire, deux solutions sont possibles : définir une origine des espaces M_0 et donner $s(t) = \overset{\frown}{M_0M}(t)$; ou bien préciser l'angle $\alpha(t) = (\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM}(t))$. Ces deux fonctions du temps $s(t)$ et $\alpha(t)$ sont reliées par l'équation $s(t) = R\,.\,\alpha(t)$, R étant le rayon de la trajectoire. Le vecteur-vitesse de M, qui est tangent à la trajectoire, est perpendiculaire au rayon OM. Si $\vec{u}$ est le vecteur unitaire de $\overrightarrow{OM}$:

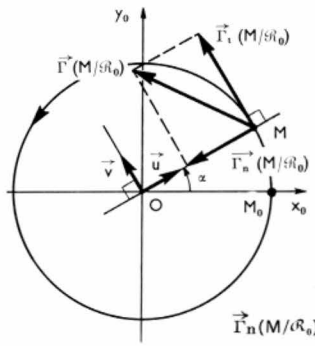


Fig. II-19b

$$\vec{\Gamma}_t(M/\mathcal{R}_0) = R\,\alpha''\,\vec{v} = R\,\omega'\,\vec{v}$$

$$\vec{\Gamma}_n(M/\mathcal{R}_0) = -R\alpha'^2\,.\,\vec{u} = -R\omega^2\vec{u} = -\frac{V^2}{R}\,.\,\vec{u}$$

$$\overrightarrow{OM} = R\,.\,\vec{u}$$

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) = \overline{V}(t)\,.\,\vec{v} = \frac{ds}{dt}\,.\,\vec{v} = R\,.\,\frac{d\alpha}{dt}\,.\,\vec{v} = R\,.\,\alpha'\,.\,\vec{v}$$

$\alpha'(t) = \dfrac{d\alpha}{dt} = \omega(t)$ est appelée *vitesse angulaire* de M. Cette vitesse angulaire représente la variation instantanée de l'angle *balayé* par le rayon OM rapporté à la variation de temps correspondante. L'angle est exprimé en radians et la vitesse angulaire en radians par seconde. La notion de vitesse angulaire n'a un sens que si le mouvement est circulaire. On oriente l'axe de la trajectoire de manière à ce qu'un observateur placé sur cet axe puisse voir la rotation s'accomplir positivement de la droite vers la gauche. Soit $\vec{k}$ le vecteur unitaire de cet axe. Le vecteur $\dfrac{d\alpha}{dt}\,.\,\vec{k} = \omega\,.\,\vec{k} = \vec{\Omega}(M/\mathcal{R}_0)$ est appelé *vecteur-vitesse angulaire* de M. On peut alors vérifier que :

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) = \vec{\Omega}(M/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{OM}$$

L'accélération vectorielle de M, dans son mouvement par rapport à $(\mathcal{R}_0)$ se compose :

— de l'accélération tangentielle :

$$\vec{\Gamma}_t(M/\mathcal{R}_0) = \overline{\gamma}(M/\mathcal{R}_0)\,.\,\vec{v} = \frac{d\overline{V}(t)}{dt}\,.\,\vec{v} = R\,.\,\frac{d^2\alpha}{dt^2}\,.\,\vec{v}$$

$$= R\,.\,\frac{d\omega}{dt}\,.\,\vec{v} = R\,.\,\omega'\,.\,\vec{v}$$

qui est proportionnelle à l'accélération angulaire ω' et au rayon de la trajectoire ;

— de l'accélération normale :

$$\vec{\Gamma}_n(M/\mathcal{R}_0) = \frac{V^2}{R}\,.\,\vec{n} = -\frac{V^2}{R}\,.\,\vec{u} = -\frac{R^2\omega^2}{R}\,.\,\vec{u} = -R\,.\,\omega^2\,.\,\vec{u}$$

qui est proportionnelle au carré de la vitesse angulaire et au rayon de la trajectoire.

Si $\overline{\gamma}(M/\mathcal{R}_0) = R\,.\,\omega' = 0$, le mouvement est appelé *mouvement circulaire uniforme,* la vitesse angulaire $\omega(M/\mathcal{R}_0)$ est constante.

La loi du mouvement $s(t) = V_0\,.\,t + s_0$ peut être remplacée par $\alpha(t) = \omega_0\,.\,t + \alpha_0$. Le vecteur-accélération est réduit à l'accélération normale : $\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0) = -R\,.\,\omega^2\,.\,\vec{u}$

Si $\overline{\gamma}(M/\mathcal{R}_0) = R\,.\,\omega' =$ Cte, le mouvement est appelé *mouvement circulaire uniformément varié,* l'accélération angulaire $\omega'(M/\mathcal{R}_0) = \dfrac{d\omega}{dt}$ est constante. La loi du mouvement :

$$s(t) = \frac{1}{2}\,\gamma\,.\,t^2 + V_0\,.\,t + s_0$$

peut être remplacée par :

$$\alpha(t) = \frac{1}{2}\,\omega'\,.\,t^2 + \omega_0\,.\,t + \alpha_0$$

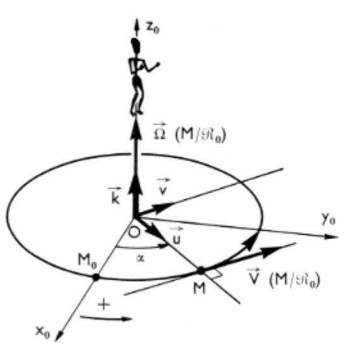


Fig. II-19a

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) = R\alpha'\,.\,\vec{v} = R\omega\,.\,\vec{v}$$

De même la loi de vitesse :

$$V(t) = \gamma . t + V_0$$

peut être remplacée par : $\omega(t) = \omega' . t + \omega_0$

Exemple. — Le déplacement d'un objet, assimilable à un point matériel M, s'effectue mécaniquement à l'aide d'un

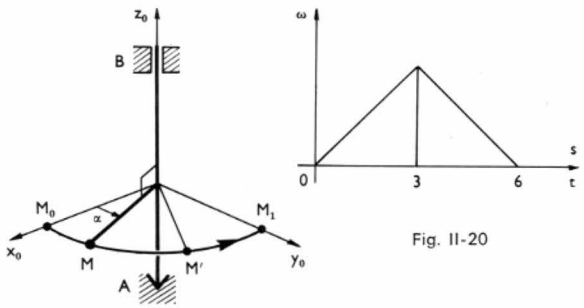


Fig. II-20

bras, muni de pinces, tournant autour de l'axe AB (fig. II-20). Sachant que le passage de M_0 à M_1 demande six secondes et que le diagramme des vitesses angulaires est donné par la figure II-20, on va déterminer la nature des

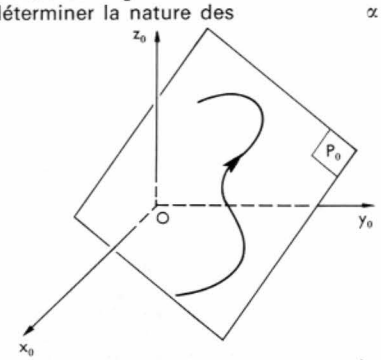


Fig. II-21

mouvements et chercher la fonction $\alpha(t)$ représentant les angles « balayés » par le rayon OM.

Nature du mouvement. — Au départ le mouvement est circulaire uniformément accéléré, il dure 3 secondes. Ensuite, il y a ralentissement pendant 3 secondes jusqu'à l'arrêt complet de M et le mouvement est circulaire uniformément retardé. L'angle décrit par OM est de $\frac{\pi}{2}$ rad.

Fonction αt :

— Mouvement uniformément accéléré :

$$\alpha_1(t) = \frac{1}{2}\omega'_1 . t^2 ; \ \alpha_1(t = 3) = \frac{1}{2}\omega'_1 \times 9$$

$$\omega_1(t) = \omega'_1 . t ; \ \omega_1(t = 3) = \omega'_1 \times 3$$

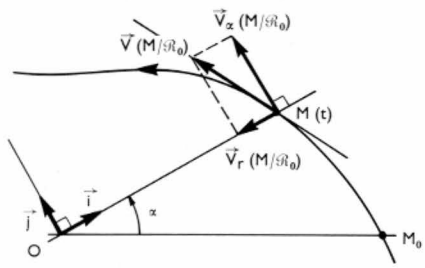


Fig. II-22

— Mouvement uniformément retardé : l'origine des angles est définie par le rayon OM', M' étant la position de M correspondant à la fin de l'accélération, et l'origine des temps est l'instant correspondant :

$$\alpha_2(t) = \frac{1}{2}\omega'_2 . t^2 + \omega_2(0) . t$$

$$\alpha_2(t = 3) = \frac{1}{2}\omega'_2 \times 9 + \omega_2(0) \times 3$$

$$\omega_2(t) = \omega'_2 . t + \omega_2(0) ; \ \omega_2(t = 3) = \omega'_2 \times 3 + \omega_2(0) = 0$$

Or : $\omega'_2 = -\omega'_1 = -\omega'$

d'où : $\omega_2(0) = +3\omega', \ \alpha_2(t) = -\frac{\omega'}{2}t^2 + 3\omega' . t,$

$$\alpha_2(t = 3) = -\frac{9\omega'}{2} + 9\omega' = \frac{9\omega'}{2}$$

L'angle total décrit étant de $\frac{\pi}{2}$ rad on en déduit :

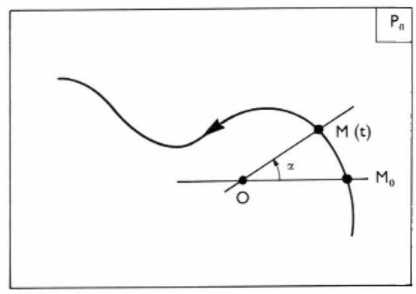
$$9\omega' = \frac{\pi}{2}, \text{ ou : } \omega' = \frac{\pi}{18} \text{ rad/s}^2$$

d'où : $\alpha_1(t) = \frac{\pi}{36}t^2$, et : $\alpha_2(t) = -\frac{\pi}{36}t^2 + \frac{\pi}{6}t$

2.4.3. Mouvement à trajectoire plane. — Un point M est animé d'un mouvement à trajectoire plane dans $(\mathcal{R}_0)$ lorsque la courbe décrite par M au cours de son déplacement dans $(\mathcal{R}_0)$ est inscrite sur un plan (P_0) (fig. II-21).

La position de M dans (P_0) peut être définie dans ce cas particulier au moyen de deux fonctions du temps : $\alpha(t)$ et $r(t)$. Elles représentent les coordonnées polaires de M dans (P_0) :

$$\alpha(t) = [\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM}(t)] \qquad r(t) = \overline{OM}(t)$$



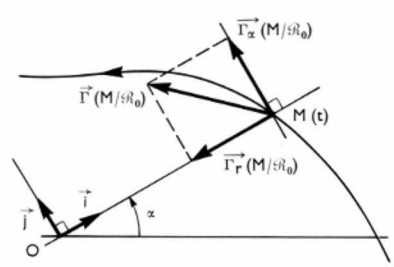
Si $\vec{i}(t)$ est le vecteur unitaire de $\overrightarrow{OM}(t)$ et $\vec{j}(t)$ le vecteur unitaire directement perpendiculaire à $\vec{i}(t)$ dans (P_0), le vecteur-vitesse de M peut être défini à l'aide de ses composantes sur deux axes portant ces vecteurs unitaires (fig. II-22) :

$$\overrightarrow{OM}(t) = r(t) . \vec{i}(t)$$

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) = \left\{\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right\}_{\mathcal{R}_0} = \frac{dr(t)}{dt} . \vec{i}(t) + r(t) . \left\{\frac{d\vec{i}(t)}{dt}\right\}_{\mathcal{R}_0}$$

Comme : $\left\{\frac{d\vec{i}(t)}{dt}\right\}_{\mathcal{R}_0} = \frac{d\alpha}{dt} . \vec{j}(t)$, on peut écrire :

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) = \frac{dr}{dt} . \vec{i}(t) + r . \frac{d\alpha}{dt} . \vec{j}(t) = r' . \vec{i} + r . \alpha' . \vec{j}$$



Il en est de même pour le vecteur-accélération :

$$\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0) = \frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)}{dt} = \left\{\frac{d[r' . \vec{i} + r . \alpha' . \vec{j}]}{dt}\right\}_{\mathcal{R}_0}$$

Or : $\left\{\frac{d\vec{j}}{dt}\right\}_{\mathcal{R}_0} = -\frac{d\alpha}{dt} . \vec{i}(t) = -\alpha' . \vec{i}(t)$

d'où : $\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0) = (r'' - r\alpha'^2) . \vec{i}(t) + (2r'\alpha' + r\alpha'') . \vec{j}(t)$

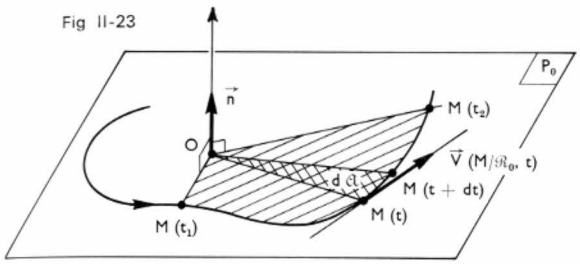
$r' = \overline{V}_r$ et $r'' - r\alpha'^2 = \overline{\gamma}_r$ représentent respectivement les *composantes radiales* de la vitesse et de l'accélération du point M.

$r\alpha' = \overline{V}_\alpha$ et $2r'\alpha' + r\alpha'' = \overline{\gamma}_\alpha$ représentent respectivement les composantes *transversales* ou *orthoradiales* de la vitesse et de l'accélération du point M.

Dans de tels mouvements, on définit également la vitesse aréolaire qui est le rapport de l'aire balayée par le rayon vecteur OM au temps correspondant, lorsque ce dernier tend vers zéro. On note cette vitesse aréolaire : $V_{\mathcal{A}}$ (fig. II-23) :

$$\overline{V}_{\mathcal{A}} = \frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \cdot \alpha'$$

Fig II-23



On remarque que $\overline{V}_{\mathcal{A}} = \left[\frac{1}{2}\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}_0)\right] \bullet \vec{n}$, $\vec{n}$ étant le vecteur unitaire de la normale au plan (P_0).

La notion de vitesse aréolaire a été introduite lors de l'étude du mouvement des planètes. À la suite des observations de Tycho Brahé (1546-1601), Kepler (1571-1630) put établir trois lois, qui portent son nom, concernant le *mouvement central*.

— les planètes tournent autour du soleil en décrivant des ellipses dont le soleil est l'un des foyers ;

— les aires décrites par les rayons vecteurs joignant l'un des foyers de l'ellipse à la planète, sont proportionnelles aux temps mis pour les balayer ;

— les carrés des temps des révolutions planétaires sont proportionnels aux cubes des grands axes des ellipses.

La première loi montre que les trajectoires sont planes et elliptiques, la deuxième loi indique que les vitesses aréolaires des planètes sont constantes.

On remarque également que, si l'accélération d'un point M par rapport au repère $(\mathcal{R}_0)$ passe constamment par un point O fixe dans $(\mathcal{R}_0)$, le mouvement de M dans $(\mathcal{R}_0)$ est à trajectoire plane. Un tel mouvement est appelé *mouvement central*.

$\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0) = \vec{0}$, car $\overrightarrow{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0)$ passe constamment par O.

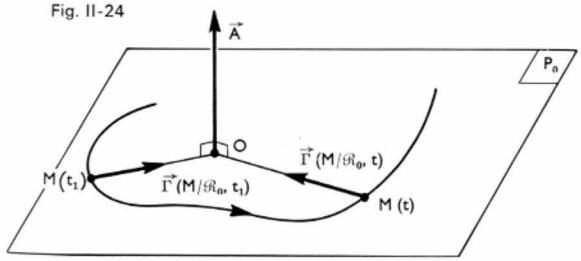
Or : $\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0) = \left\{ \frac{d[\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}_0)]}{dt} \right\}_{\mathcal{R}_0}$

d'où : $\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}_0) = \vec{A}$, $\vec{A}$ étant un vecteur constant dans $(\mathcal{R}_0)$.

et : $\vec{A} \bullet \overrightarrow{OM} = [\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}_0)] \bullet \overrightarrow{OM} = 0$

Le point M décrit donc une courbe plane, contenue dans le plan (P_0), perpendiculaire au vecteur $\vec{A}$ et passant par O (fig. II-24).

Fig. II-24



Dans un mouvement central, la vitesse aréolaire est constante.

$$\overline{V}_{\mathcal{A}} = \frac{1}{2}[\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}_0)] \bullet \vec{n} = \frac{1}{2} \vec{A} \bullet \vec{n}$$

$$\vec{A} = r.\vec{i} \wedge (r'.\vec{i} + r.\alpha'.\vec{j}) = r^2.\alpha'.\vec{n}$$

$$\overline{V}_{\mathcal{A}} = \frac{r^2\alpha'}{2} = \text{Cte} = C$$

Vitesse radiale, vitesse transversale, accélération radiale peuvent alors s'exprimer indépendamment du temps, ce qui permet de déterminer la trajectoire, géométriquement, sans connaître la loi du mouvement :

$$\overline{V}_r = r' = \frac{dr}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt}$$

Or : $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{2C}{r^2}$

D'où : $\overline{V}_r = \frac{dr}{d\alpha} \cdot \frac{2C}{r^2} = -2C \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\alpha}$

$$\overline{V}_\alpha = r.\alpha' = \frac{2C}{r}$$

$$\overline{\gamma}_r = r'' - r\alpha'^2$$

Puisque : $r'' = -2C \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\alpha^2} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = -\frac{4C^2}{r^2} \cdot \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\alpha^2}$

et : $r\alpha'^2 = r\left(\frac{2C}{r^2}\right)^2 = \frac{4C^2}{r^3}$

on écrit aussi : $\overline{\gamma}_r = -\frac{4C^2}{r^2}\left[\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\alpha^2}\right]$

Ces relations donnent $\overline{V}_r$, $\overline{V}_\alpha$ et $\overline{\gamma}_r$ en fonction de r et de ses dérivées par rapport à α ; elles portent le nom de *formules de Binet*.

Dans l'étude des mouvements à trajectoire plane, on a utilisé les coordonnées polaires. Si l'on connait la trajectoire, il est également possible de repérer la position de M par la fonction du temps s (fig. II-25) :

$$s = s(t) = \widehat{M_0M}(t)$$

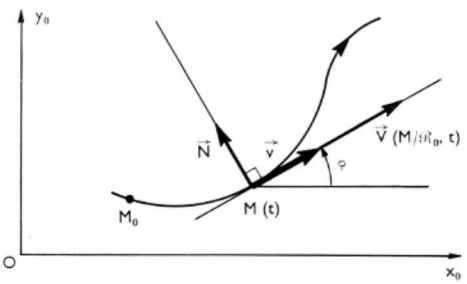
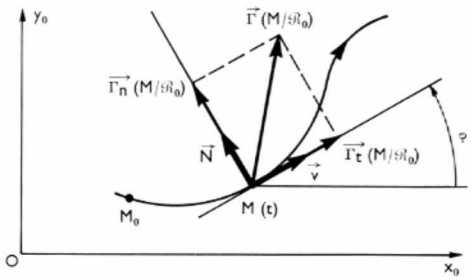


Fig. II-25



Dans ces conditions la vitesse de M par rapport à $(\mathcal{R}_0)$ est donnée par :

$$\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}_0) = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{v}(t) = \overline{V}(M/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{v}(t)$$

avec $\vec{v}(t)$, vecteur unitaire de la tangente orientée à la trajectoire en $M(t)$.

L'accélération de M par rapport à $(\mathcal{R}_0)$ est égale à :

$$\overrightarrow{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0) = \left\{ \frac{d[\overline{V}(M/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{v}(t)]}{dt} \right\}_{\mathcal{R}_0}$$

Or : $$\frac{\vec{dv}}{dt} = \frac{\vec{dv}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \vec{N} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

avec $\vec{N}$, vecteur unitaire directement perpendiculaire à $\vec{v}(t)$ dans (P_0),

et : $$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{1}{R(t)} \cdot V(M/\mathcal{R}_0),$$

(R, rayon de courbure algébrique de la trajectoire en $M(t)$).

d'où : $$\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0) = \overline{\gamma}(M/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{v}(t) + \frac{V^2}{R}\vec{N}(t)$$

$$= \vec{\Gamma}_t(M/\mathcal{R}_0) + \vec{\Gamma}_n(M/\mathcal{R}_0)$$

On retrouve, dans ce cas particulier de mouvement, le résultat général établi en 2.2.2 en remarquant que :

$$\frac{\vec{N}(t)}{R} = \frac{\vec{n}(t)}{\rho}$$

3. MOUVEMENT DU SOLIDE INDÉFORMABLE

Soit M_1 et M_2 deux points quelconques appartenant à un solide. Celui-ci est appelé *solide indéformable*, ou *corps rigide* si au cours du mouvement la distance M_1M_2 séparant les deux points reste constante. Cette propriété doit être vérifiée pour tout couple de points appartenant au solide. L'hypothèse de rigidité des corps reste acceptable dans de nombreuses études, bien que la plupart des corps soient plus ou moins déformables. Dans ce qui suit, on suppose que les corps étudiés sont indéformables.

3.1. Trajectoire, vitesse et accélération

3.1.1. Trajectoire. — Il n'est pas possible de définir la trajectoire d'un solide. En revanche tout point appartenant au solide décrit, au cours du mouvement, une certaine trajectoire. Les trajectoires des différents points d'un même solide ne sont pas identiques, sauf dans certains mouvements particuliers qui seront étudiés par la suite.

3.1.2. Vitesse (fig. II-26). — À tout point M appartenant au solide (S) en mouvement, il est possible d'associer

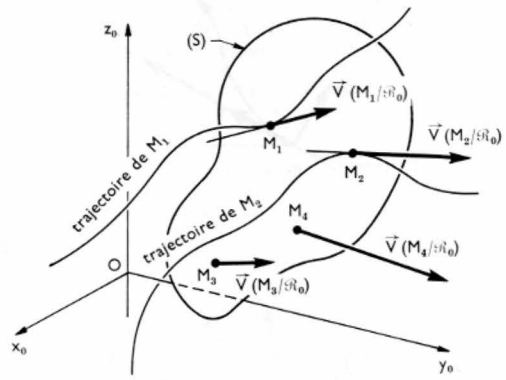


Fig. II-26

un vecteur-vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)$. On définit ainsi un champ de vitesse sur (S). Dans la plupart des cas ce champ de vitesse n'est pas uniforme. Mais l'indéformabilité de (S) permet de lier entre eux les vecteurs-vitesses des différents points de (S). Afin de faire apparaître les relations entre les vitesses des différents points d'un même solide, on envisage deux points M_1 et M_2 appartenant à (S). Soit l la distance séparant ces deux points et $\vec{u}$ le vecteur unitaire de M_1M_2 (fig. II-27). Le corps étant supposé rigide, on peut écrire :

$$M_1M_2 = l = \text{Cte}$$

$$\{\vec{M_1M_2} \bullet \vec{M_1M_2}\} = (\vec{M_1M_2})^2 = l^2 = \text{Cte}$$

d'où : $$\left[\frac{d(\vec{M_1M_2} \bullet \vec{M_1M_2})}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0} = \frac{dl^2}{dt} = 0$$

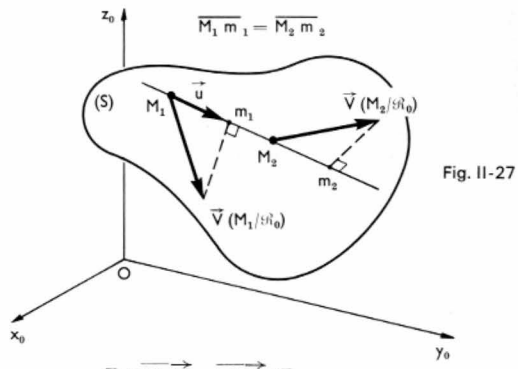


Fig. II-27

Or : $$\left[\frac{d(\vec{M_1M_2} \bullet \vec{M_1M_2})}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0}$$

$$= 2\,\vec{M_1M_2} \bullet \left[\frac{d(\vec{M_1M_2})}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0}$$

$$= 2\,\vec{M_1M_2} \bullet \left[\frac{d(\vec{M_1O} + \vec{OM_2})}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0}$$

$$= 2\,\vec{M_1M_2} \bullet \left[\frac{d(\vec{OM_2} - \vec{OM_1})}{dt}\right]_{\mathcal{R}_0}$$

$$= 2\,\vec{M_1M_2} \bullet [\vec{V}(M_2/\mathcal{R}_0) - \vec{V}(M_1/\mathcal{R}_0)]$$

Comme $\vec{M_1M_2} = l.\vec{u}$, on peut écrire :

$$2\,l\vec{u} \bullet [\vec{V}(M_2/\mathcal{R}_0) - \vec{V}(M_1/\mathcal{R}_0)] = \frac{dl^2}{dt} = 0$$

$$\vec{V}(M_2/\mathcal{R}_0) \bullet \vec{u} = \vec{V}(M_1/\mathcal{R}_0) \bullet \vec{u}$$

La projection de la vitesse de M_1 sur $\vec{M_1M_2}$ est égale à la projection de la vitesse de M_2 sur $\vec{M_1M_2}$. M_1 et M_2 étant deux points quelconques de (S), cette propriété est vraie pour tout couple de points appartenant à (S). Le champ des vitesses est donc un *champ équiprojectif*. On démontre d'autre part que tout champ de vecteurs équiprojectif est le champ des moments d'un torseur ; donc on peut écrire (fig. II-28) :

$$\vec{V}(M_2/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(M_1/\mathcal{R}_0) + \vec{\Omega} \wedge \vec{M_1M_2} \qquad (1)$$

Relation analogue à :

$$\vec{\mathcal{M}}_{M_2}[\mathcal{T}] = \vec{\mathcal{M}}_{M_1}[\mathcal{T}] + \vec{M_2M_1} \wedge \vec{S}[\mathcal{T}]$$

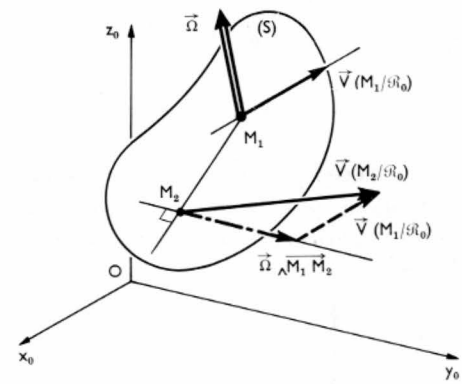


Fig. II-28

L'étude des mouvements particuliers de solide permettra de donner une signification au vecteur $\vec{\Omega}$ que l'on note $\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0)$ ou $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_0)$, car ce vecteur caractérise le mouvement de (S) par rapport au repère $(\mathcal{R}_0)$.

3.1.3. Accélération. — À tout point M de (S), il est possible d'associer le vecteur accélération $\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0)$. On définit donc un nouveau champ de vecteurs, c'est le champ des accélérations de (S) dans son mouvement par rapport à $(\mathcal{R}_0)$. Les vitesses étant liées entre elles par la relation (1) établie au paragraphe 3.1.2, les accélérations sont également liées entre elles :

$$\Gamma\vec{(}M_2/\mathcal{R}_0)$$

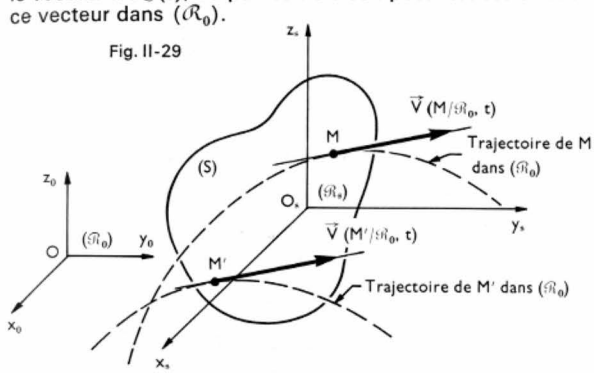
$$= \vec{\Gamma}(M_1/\mathcal{R}_0) + \left\{\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right\}_{\mathcal{R}_0} \wedge \overrightarrow{M_1M_2} + \vec{\Omega} \wedge \left\{\frac{d\overrightarrow{M_1M_2}}{dt}\right\}_{\mathcal{R}_0}$$

Or : $$\left\{\frac{d\overrightarrow{M_1M_2}}{dt}\right\}_{\mathcal{R}_0} = \vec{V}(M_2/\mathcal{R}_0) - \vec{V}(M_1/\mathcal{R}_0)$$

d'où : $$\vec{\Gamma}(M_2/\mathcal{R}_0) = \vec{\Gamma}(M_1/\mathcal{R}_0) + \vec{\Omega'} \wedge \overrightarrow{M_1M_2} + \vec{\Omega} \wedge [\vec{V}(M_2/\mathcal{R}_0) - \vec{V}(M_1/\mathcal{R}_0)]$$

3.2. Mouvement de translation. — Un solide (S) est animé d'un mouvement de translation par rapport au repère de référence $(\mathcal{R}_0)$, si des axes liés à (S) et constituant un repère $(\mathcal{R}_S)$ gardent même direction par rapport à $(\mathcal{R}_0)$ au cours du temps. En particulier si les axes définissant $(\mathcal{R}_S)$ sont parallèles aux axes de $(\mathcal{R}_0)$ à un instant donné, ils le sont à tout instant (fig. II-29). Dans un tel mouvement, la position de (S) dans $(\mathcal{R}_0)$ peut être définie à tout instant par le vecteur $\overrightarrow{OO_S}(t)$, ou par les trois composantes scalaires de ce vecteur dans $(\mathcal{R}_0)$.

Fig. II-29



Tous les points appartenant à (S) ont dans $(\mathcal{R}_0)$ des trajectoires parallèles, c'est-à-dire superposables. Si ces trajectoires sont des droites ou des cercles, le mouvement est dit de *translation rectiligne* ou *circulaire*. Si ces trajectoires sont des courbes quelconques le mouvement est dit de *translation curviligne*. Les vecteurs-vitesses des divers points de (S) sont équipollents à un instant donné. En effet :

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) = \left\{\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right\}_{\mathcal{R}_0} = \left\{\frac{d\overrightarrow{OO_S}}{dt}\right\}_{\mathcal{R}_0} + \left\{\frac{d\overrightarrow{O_SM}}{dt}\right\}_{\mathcal{R}_0}$$

or, d'après la définition du mouvement de translation, $\overrightarrow{O_SM}$ garde même direction par rapport à $(\mathcal{R}_0)$, d'où :

$$\left\{\frac{d\overrightarrow{O_SM}}{dt}\right\}_{\mathcal{R}_0} = \vec{0}$$

et donc, quel que soit M appartenant à (S) :

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) = \left\{\frac{d\overrightarrow{OO_S}}{dt}\right\}_{\mathcal{R}_0} = \vec{V}(O_S/\mathcal{R}_0)$$

Il en est de même des vecteurs-accélération. On peut donc désigner par vitesse et accélération de (S) à un instant donné, la vitesse et l'accélération d'un point quelconque du solide, mais cela ne s'applique qu'au mouvement de translation.

3.3. Mouvement de rotation. — Un solide (S) est animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe dans $(\mathcal{R}_0)$ (fig. II-30), si un axe lié à (S) reste fixe dans $(\mathcal{R}_0)$ au cours du mouvement (par exemple $O_Sz_S = Oz_0$). Il en est de même si deux points de (S) restent fixes dans $(\mathcal{R}_0)$: par exemple $O_S = O$ et $O'_S = O'$; O_Sz_S, ou $O_SO'_S$, est appelé *axe de rotation*. Au cours du mouvement tous les points de l'axe O_Sz_S restent immobiles dans $(\mathcal{R}_0)$.

Soit $(\mathcal{R}_S)$ un repère défini par les axes $(O, x_Sy_Sz_S)$ liés à (S) et tels que O_Sz_S soit l'axe de la rotation : la position de (S) dans $(\mathcal{R}_0)$ peut alors être définie à tout instant par l'angle $(Ox_0, Ox_S) = \varphi(t)$. Tous les points de (S) sont animés de mouvements circulaires, ils décrivent des circonférences dont les plans sont perpendiculaires à l'axe de la rotation et dont les centres sont sur cet axe.

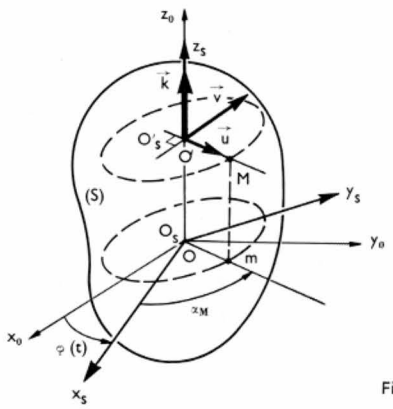


Fig. II-30

Un point quelconque M de (S) décrit sa trajectoire avec une vitesse angulaire : $\omega(t) = \dfrac{d[\varphi(t) + \alpha_M]}{dt} = \dfrac{d\varphi(t)}{dt} = \varphi'(t)$

et une accélération angulaire : $\dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\varphi(t)}{dt^2} = \varphi''(t)$

$\omega(t) = \dfrac{d\varphi}{dt}$ est encore appelée *vitesse de rotation* de (S).

Si $\dfrac{d\varphi}{dt} = \omega =$ Cte, le solide est animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de Oz_0 et ω est exprimé en radians par seconde. On définit aussi la *fréquence de rotation* N de ce solide : $N = \dfrac{\omega}{2\pi}$ si l'on exprime N en tours par seconde (en tours par minute : $N = \dfrac{60\,\omega}{2\pi}$).

Par rapport à $(\mathcal{R}_0)$ le vecteur-vitesse d'un point M quelconque du solide est égal à :

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) = r.\varphi'.\vec{v} = \varphi'.\vec{k} \wedge \overrightarrow{O'_SM}$$

ou, en remarquant que $\vec{k} \wedge \overrightarrow{mM} = \vec{0}$:

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) = \varphi'.\vec{k} \wedge \overrightarrow{O_SM}$$

En comparant avec l'expression générale :

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(O_S/\mathcal{R}_0) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{O_SM}$$

on constate que : $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_0) = \varphi'.\vec{k}$ (puisque $\vec{V}(O_S/\mathcal{R}_0) = \vec{0}$) et donc, pour un mouvement de rotation :

$$\vec{V}(M_S/\mathcal{R}_0) = \vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{O_SM}$$

L'expression $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_0)$ est appelée *vecteur-vitesse angulaire instantanée de* (S) *par rapport à* $(\mathcal{R}_0)$, puisque $\varphi'(t)$ est la vitesse de rotation, ou vitesse angulaire, de (S) et $\vec{k}$ est un vecteur unitaire de l'axe de la rotation. Cette appellation de $\vec{\Omega}$ est également utilisée pour les autres mouvements.

Le vecteur-accélération d'un point M quelconque de (S) par rapport à $(\mathcal{R}_0)$ est donné par l'expression suivante :

$$\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0) = -r.\varphi'^2.\vec{u} + r.\varphi''.\vec{v}$$

Il faut remarquer que tous les points situés sur une même parallèle à O_Sz_S ont des vecteurs vitesse équipollents et des vecteurs accélération équipollents à tout instant.

3.4. Mouvement hélicoïdal. — Un solide (S) est animé d'un mouvement hélicoïdal par rapport à un repère de référence $(\mathcal{R}_0)$ si un axe O_Sz_S lié à (S) reste au cours du mouvement en coïncidence avec un axe de $(\mathcal{R}_0)$ (fig. II-31).

Soit $(\mathcal{R}_S)$ un repère attaché au solide et défini par le trièdre $(O_S, x_Sy_Sz_S)$ lié à (S) et tel que O_Sz_S coïncide avec Oz_0 ; soit $(\mathcal{R}_1)$ un repère défini par le trièdre $(O_S, x_1y_1z_1)$ parallèle au trièdre $(O, x_0y_0z_0)$. La position de (S) dans $(\mathcal{R}_0)$ peut être définie à tout instant par l'angle $(O_Sx_1, O_Sx_S) = \varphi(t)$ et par le vecteur $\overrightarrow{OO_S}(t)$, ou sa mesure algébrique $z(t)$ sur Oz_0. Dans $(\mathcal{R}_0)$ tous les points de (S) ont des trajectoires inscrites sur des cylindres de révolution. Si

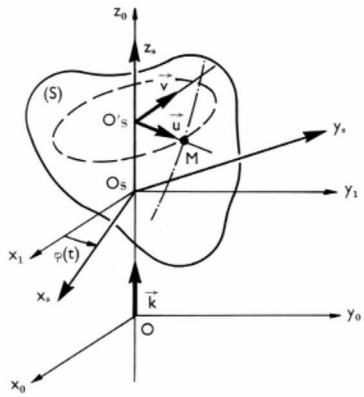


Fig. II-31

$\frac{d\varphi}{dt} = \omega = \text{Cte}$ et si $\frac{dz}{dt} = w = \text{Cte}$, ces trajectoires sont des hélices.

D'après la loi de composition des vitesses, la vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R}_0, t)$ d'un point quelconque de (S) est égale à :

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_0, t) = \vec{V}(M/\mathcal{R}_1, t) + \vec{V}(M, \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0, t)$$

Or : $\vec{V}(M/\mathcal{R}_1) = r.\varphi'.\vec{v} = \varphi'.\vec{k} \wedge \overrightarrow{O_S M}$

$$= \vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_1) \wedge \overrightarrow{O_S M}$$

et : $\vec{V}(M, \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(O_S/\mathcal{R}_0)$

d'où : $\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(O_S/\mathcal{R}_0) + \varphi'.\vec{k} \wedge \overrightarrow{O_S M}$

En comparant avec l'expression générale :

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(O_S/\mathcal{R}_0) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{O_S M}$$

on constate que : $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_0) = \varphi'.\vec{k} = \vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_1)$

Le vecteur-accélération d'un point quelconque M de (S) est donné par la relation suivante :

$$\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0) = \vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_1) + \vec{\Gamma}(M, \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) + \vec{\Gamma}_C$$

Or : $\vec{\Gamma}_C = \vec{0}$ puisque le mouvement de $\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0$ est une translation

$$\vec{\Gamma}(M, \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) = \vec{\Gamma}(O_S/\mathcal{R}_0) = z''(t).\vec{k}$$

et : $\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_1) = -r.\varphi'^2.\vec{u} + r.\varphi''.\vec{v}$

d'où : $\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0) = -r.\varphi'^2.\vec{u} + r.\varphi''.\vec{v} + \vec{\Gamma}(O_S/\mathcal{R}_0)$

Le mouvement hélicoïdal d'un solide peut être considéré comme étant, à tout instant, la composition d'un mouvement de translation rectiligne le long de Oz_0 et d'un mouvement de rotation autour de Oz_0. D'autre part, comme dans le cas de la rotation, tous les points de (S) situés sur une même parallèle à Oz_0 ont des vecteurs-vitesses équipollents et des vecteurs-accélérations équipollents à tout instant.

3.5. Mouvement plan

3.5.1. Généralités. — Un solide (S) est animé d'un mouvement plan par rapport à un repère de référence $(\mathcal{R}_0)$ si, au cours du mouvement, un axe $O_S z_S$ lié à (S) reste constamment perpendiculaire à un plan (P_0) appartenant à $(\mathcal{R}_0)$ et si le point d'intersection de $O_S z_S$ avec (P_0) est un point fixe de $O_S z_S$: soit O_S ce point. D'après cette définition le mouvement de rotation est un mouvement plan particulier (fig. II-32).

Soit donc : $(\mathcal{R}_0)$ un repère de référence défini par le trièdre orthonormé $(O, x_0 y_0 z_0)$ tel que Ox_0 et Oy_0 appartiennent à (P_0), $(\mathcal{R}_1)$ un repère défini par le trièdre orthonormé $(O_S, x_1 y_1 z_1)$ parallèle au trièdre $(O, x_0 y_0 z_0)$, et $(\mathcal{R}_S)$ un repère défini par le trièdre orthonormé $(O_S, x_S y_S z_S)$ lié à (S) et tel que $O_S z_S$ soit perpendiculaire à (P_0).

La position de (S) dans $(\mathcal{R}_0)$ peut être définie à tout instant par l'angle $(O_S x_1, O_S x_S) = \varphi(t)$ et par le vecteur $\overrightarrow{OO_S}(t)$, ou ses composantes scalaires sur $(O, x_0 y_0 z_0)$: $x_S(t)$, $y_S(t)$.

Dans $(\mathcal{R}_0)$ tous les points de (S) ont des trajectoires planes situées dans des plans parallèles à (P_0). Un point quelconque M de (S) a pour vecteur vitesse :

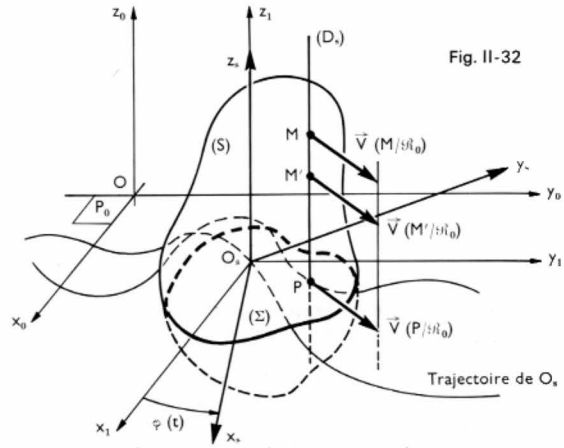


Fig. II-32

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(M/\mathcal{R}_1) + \vec{V}(M, \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)$$

Or : $\vec{V}(M/\mathcal{R}_1) = r.\varphi'.\vec{v} = \varphi'.\vec{k} \wedge \overrightarrow{O_S M}$

$$= \vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_1) \wedge \overrightarrow{O_S M}$$

et : $\vec{V}(M, \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(O_S/\mathcal{R}_0)$

d'où : $\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(O_S/\mathcal{R}_0) + \varphi'.\vec{k} \wedge \overrightarrow{O_S M}$

En comparant avec l'expression générale :

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(O_S/\mathcal{R}_0) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{O_S M}$$

on constate que :

$$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_0) = \varphi'.\vec{k} = \vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_1)$$

Ces résultats sont analogues à ceux obtenus dans le cas du mouvement hélicoïdal ; il en est de même pour le vecteur-accélération d'un point quelconque M de (S) qui est donné par : $\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0) = \vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_1) + \vec{\Gamma}(O_S/\mathcal{R}_0)$

$$= -r.\varphi'^2.\vec{u} + r.\varphi''\vec{v} + \vec{\Gamma}(O_S/\mathcal{R}_0)$$

Le mouvement plan d'un solide peut être considéré comme étant à tout instant la composition d'un mouvement de translation curviligne plan de plan directeur (P_0) et d'un mouvement de rotation autour d'un axe orthogonal à (P_0). Il y a lieu de remarquer que $O_S z_S$ est un axe arbitraire appartenant à (S) : tout autre axe appartenant à (S) et perpendiculaire à (P_0) peut jouer le même rôle.

Comme pour la rotation, et pour le mouvement hélicoïdal, on remarque que tous les points de (S), situés sur une même parallèle à Oz_0, ont des vecteurs-vitesses équipollents et des vecteurs-accélérations équipollents à tout instant. De plus, comme dans la rotation, mais à la différence du mouvement hélicoïdal, les vecteurs-vitesses et les vecteurs-accélérations sont parallèles à (P_0) : ainsi, deux points M et M' de (S), appartenant à une droite (D_S), liée à (S) et parallèle à Oz_0, et le point P, intersection de (D_S) avec (P_0), ont des vecteurs-vitesses équipollents et parallèles à (P_0).

Étant donné ces propriétés, il suffit donc, pour étudier le mouvement plan d'un solide (S) par rapport à $(\mathcal{R}_0)$, d'étudier le mouvement par rapport à $(\mathcal{R}_0)$ de la figure plane (Σ) intersection de (S) et de (P_0) : on est ramené à l'étude du mouvement d'un plan (P_S) lié à (Σ) par rapport à un plan de référence (P_0) sur lequel (P_S) se déplace (fig. II-33).

Pour un point P de (Σ) :

$$\vec{V}(P/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(P/\mathcal{R}_1) + \vec{V}(P, \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)$$

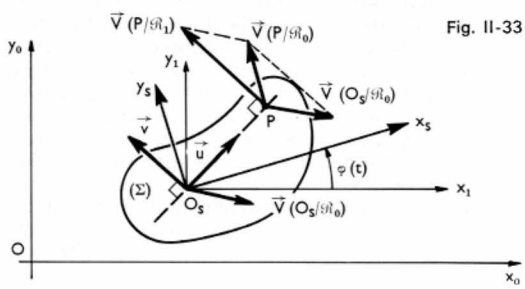


Fig. II-33

$$\vec{V}(P/\mathcal{R}_0) = r.\varphi'.\vec{v} + \vec{V}(O_S/\mathcal{R}_0)$$

et : $$\vec{\Gamma}(P/\mathcal{R}_0) = \vec{\Gamma}(P/\mathcal{R}_1) + \vec{\Gamma}(P, \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)$$
$$= -r.\varphi'^2.\vec{u} + r.\varphi''.\vec{v} + \vec{\Gamma}(O_S/\mathcal{R}_0)$$

Le point O_S est appelé *pôle* et l'angle $\varphi(t)$ caractérisant la rotation par rapport aux axes de $(\mathcal{R}_0)$ est appelé *angle polaire*.

Voici quelques exemples de solides animés de mouvement plan (fig. II-34) :

a) la manivelle OA, la bielle AB et le piston B d'un moteur sont animés de mouvements plans par rapport au carter ; plus précisément : le piston est animé d'un mouvement de translation rectiligne, qui est un mouvement plan particulier, et la manivelle est animée d'un mouvement de rotation autour de Oz_0, qui est aussi un mouvement plan particulier ;

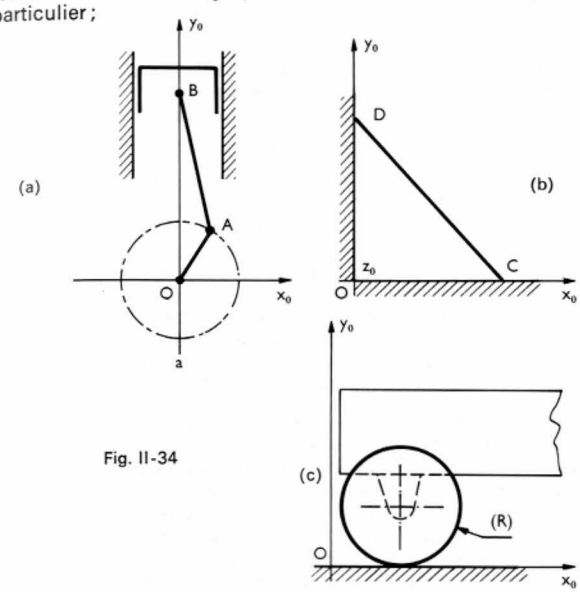


Fig. II-34

b) l'échelle CD, dont l'une des extrémités C glisse sur un sol horizontal z_0Ox_0 et dont l'autre extrémité D glisse sur une paroi verticale y_0Oz_0, est animée d'un mouvement plan par rapport au repère $(\mathcal{R}_0)$ défini par $(O, x_0y_0z_0)$;

c) la roue (R) d'un wagonnet, roulant sur un rail rectiligne, est animée d'un mouvement plan par rapport à tout repère lié au rail, ou lié au sol si le rail est fixe par rapport au sol.

Exemple de problèmes posés par l'étude de mouvements plans. — Un cylindre circulaire droit roule sans glisser sur un plan horizontal (H) et à l'instant T son centre O_S a une vitesse $\vec{V}(O_S/\mathcal{R}_0, T) = V.\vec{i_0}$. On va chercher les vitesses des points B_S, C_S et A_S au même instant T (fig. II-35).

$$\vec{V}(A_S/\mathcal{R}_0, T) = \vec{0}$$ (d'après l'hypothèse de roulement sans glissement)

$$\vec{V}(B_S/\mathcal{R}_0, T) = -R.\varphi'(t=T).\vec{i_0} + V.\vec{i_0}$$

$$\vec{V}(C_S/\mathcal{R}_0, T) = -R.\varphi'(t=T).\vec{j_0} + V.\vec{i_0}$$

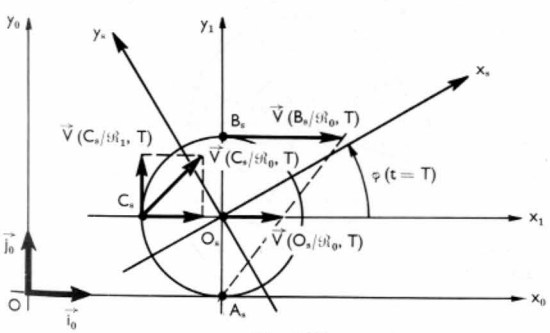


Fig. II-35

Or : $\vec{V}(A_S/\mathcal{R}_0, T) = R.\varphi'(t=T).\vec{i_0} + V.\vec{i_0} = \vec{0}$,

d'où : $$\varphi'(t=T) = -\frac{V}{R}$$

et : $\vec{V}(B_S/\mathcal{R}_0, T) = 2V.\vec{i_0}$

$\vec{V}(C_S/\mathcal{R}_0, T) = V.(\vec{i_0} + \vec{j_0})$

3.5.2. Centre instantané de rotation. — Soit : O_S un point ou pôle de (Σ), O_Sx_1 et O_Sy_1 des axes parallèles à Ox_0 et Oy_0 et O_Sx_S et O_Sy_S des axes liés à (Σ). Soit M_S et A_S deux points quelconques de (Σ) (fig. II-36).

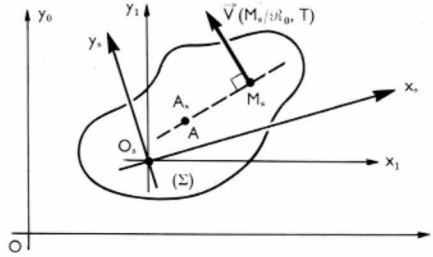


Fig. II-36

D'après l'expression générale du champ des vitesses d'un solide :

$$\vec{V}(M_S/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(O_S/\mathcal{R}_0) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{O_SM_S}$$
$$= \vec{V}(A_S/\mathcal{R}_0) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{A_SM_S}$$

D'après ce qui précède : $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_0) = \varphi'.\vec{k}$

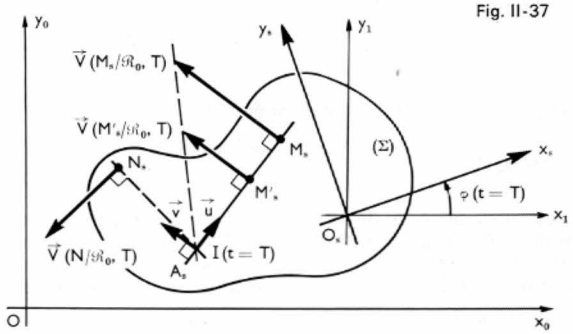
Si au cours du mouvement, à un instant T, $\vec{V}(A_S/\mathcal{R}_0)$ s'annule, $\vec{V}(A_S/\mathcal{R}_0, T) = \vec{0}$, alors :

$$\vec{V}(M_S/\mathcal{R}_0, T) = \vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{A_SM_S}$$

et cela quel que soit M_S appartenant à (Σ).

À cet instant T, le mouvement de Σ dans $\mathcal{R}_0$ est un mouvement de rotation autour du point A_S. Le point géométrique A confondu avec A_S est appelé *centre instantané de rotation* (C.I.R.). D'où la définition du C.I.R. : c'est le point géométrique confondu avec le point de (Σ) qui est animé d'une vitesse nulle par rapport à $(\mathcal{R}_0)$ à un instant t au cours du mouvement. En conséquence : si M_S appartient à (Σ) et si l'on connaît à un instant T au cours du mouvement le point géométrique $I(t=T)$ qui est C.I.R., à cet instant T le mouvement de $(\Sigma/\mathcal{R}_0)$ est un mouvement de rotation autour de I et, quel que soit le point M_S de (Σ), le vecteur-vitesse de ce point est orthogonal à IM_S.

Fig. II-37



Réciproquement (fig. II-37) : à un instant T donné le C.I.R. se trouve sur la normale en M_S au vecteur $\vec{V}(M_S/\mathcal{R}_0, T)$. Le point A_S de (Σ) confondu avec $I(t=T)$ a une vitesse nulle par rapport à $(\mathcal{R}_0)$. Si l'on connaît $\vec{V}(M_S/\mathcal{R}_0, T)$ et $I(t=T)$, il est possible de déterminer $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{t=T}$ et le vecteur-vitesse de tout autre point de (Σ). En effet :

$$\vec{V}(M_S/\mathcal{R}_0, T) = IM_S.\varphi'(t=T).\vec{v} = \vec{V}.\vec{v}$$

$$\varphi'(t=T) = \frac{V}{IM_S}$$

Connaissant alors $\varphi'(t = T)$ et $I(t = T)$, on en déduit la vitesse de n'importe quel point de (Σ). Cette opération peut d'ailleurs se faire graphiquement en remarquant que tous les points de (Σ) situés sur une droite issue de I ont l'extrémité de leur vecteur vitesse alignée avec I.

Pour rechercher à un instant donné T le centre instantané de rotation il est possible de procéder analytiquement à condition de connaître les vecteurs $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_0, t)$ et $\vec{V}(O_S/\mathcal{R}_0, t)$ définissant le champ des vitesses de (Σ), donc le torseur $[T]$ admettant pour champ de moments le champ des vitesses de (Σ). A_S, point de vitesse nulle de (Σ) à l'instant T, est tel que :

$$\vec{V}(O_S/\mathcal{R}_0, t) = \vec{V}(A_S/\mathcal{R}_0, t) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_0, t) \wedge \overrightarrow{A_S O_S}$$

Le point géométrique I confondu avec A_S à l'instant T est donc défini par l'égalité vectorielle :

$$\vec{V}(O_S/\mathcal{R}_0, T) = \vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_0, T) \wedge \overrightarrow{IO_S}$$

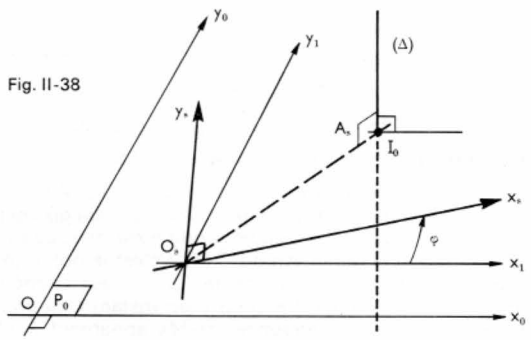
Une telle équation n'admet pas une solution unique, mais une infinité de solutions définies par :

$$\overrightarrow{O_S I} = \overrightarrow{O_S I_0} + \lambda \vec{\Omega}$$

et tous les points I solutions sont alignés sur une droite (Δ) parallèle à $\vec{\Omega}$, I_0 étant le pied de la perpendiculaire issue de O_S sur (Δ). À cet instant (Δ) est l'axe central du torseur $[T]$ et I_0 est le C.I.R. de (Σ), point que l'on recherche :

$$\overrightarrow{O_S I_0}\ (t = T) = \frac{\vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_0, T) \wedge \vec{V}(O_S/\mathcal{R}_0, T)}{[\vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_0, T)]^2} \quad \text{(fig. II-38)}$$

Fig. II-38



Il y a lieu de souligner que ce point I_0 n'est pas fixe dans (P_0) défini par (x_0Oy_0) ou dans (P_S) défini par $(x_S O_S y_S)$. À un instant quelconque, sa position dans (P_0) est donnée par :

$$\overrightarrow{OI_0}(t) = \overrightarrow{OO_S}(t) + \overrightarrow{O_S I_0}(t)$$

$$= \overrightarrow{OO_S}(t) + \frac{\vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_0, t) \wedge \vec{V}(O_S/\mathcal{R}_0, t)}{[\vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_0, t)]^2}$$

et sa position dans (P_S) est donnée par :

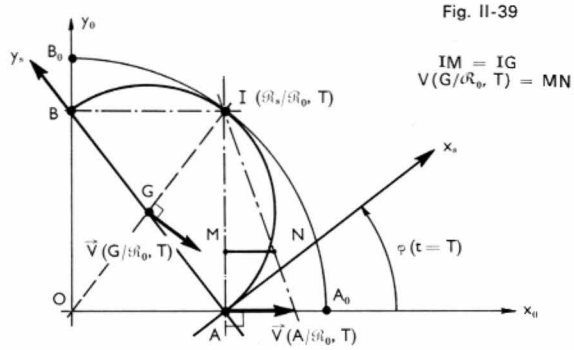
$$\overrightarrow{O_S I_0}(t) = \frac{\vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_0, t) \wedge \vec{V}(O_S/\mathcal{R}_0, t)}{[\vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_0, t)]^2}$$

Il est aussi possible de rechercher graphiquement la position de I, C.I.R. à un instant donné T, à condition de connaître les directions des vecteurs-vitesses en deux points M_S et N_S de (Σ) (V. fig. II-37) : I se trouve sur la normale en M_S à la direction de $\vec{V}(M_S/\mathcal{R}_0, T)$ et aussi sur la normale en N_S à la direction de $\vec{V}(N_S/\mathcal{R}_0, T)$, donc à leur intersection.

Exemples de recherches de C.I.R. et d'application des propriétés précédentes

Premier exemple. — Soit une barre prismatique AB, de longueur L, dont les extrémités A et B sont astreintes à se déplacer horizontalement et verticalement. L'extrémité A se déplace avec une vitesse constante : $\vec{V}(A/\mathcal{R}_0) = V.\vec{i}_0$, ($V$ = Cte). On va déterminer à un instant T donné, correspondant à une position donnée de la barre, son C.I.R. et la vitesse par rapport à $(\mathcal{R}_0)$ de son centre de gravité G. On va chercher le lieu du C.I.R., dans $(\mathcal{R}_0)$ et dans $(\mathcal{R}_S)$ lorsque A décrit le segment OA_0 tel que $OA_0 = L$ (fig. II-39).

Fig. II-39



I est sur la perpendiculaire en A à $\vec{V}(A/\mathcal{R}_0, T)$ qui est entièrement connue ; il est aussi sur la perpendiculaire en B à $\vec{V}(B/\mathcal{R}_0, T)$ dont on connaît la direction qui est Oy_0 puisque B est animé d'un mouvement rectiligne le long de Oy_0. Ces deux perpendiculaires définissent $I(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_0, T)$.

$\vec{V}(G/\mathcal{R}_0, T)$ est perpendiculaire à IG. Son module est donné par : $\frac{V}{IA}.IG = MN$. Son sens est défini par le sens de rotation autour de I qui est lui-même fixé par le sens de $\vec{V}(A/\mathcal{R}_0, T)$.

Au cours du mouvement, le triangle AIB reste rectangle : donc le lieu de $I(t)$ dans $(\mathcal{R}_S)$ est le demi-cercle de diamètre AB. Au cours du mouvement $OAIB$ reste un rectangle, d'où OI diagonale du rectangle est égale à AB diagonale de ce même rectangle. Donc le lieu de $I(t)$ dans $(\mathcal{R}_0)$ est le quart de cercle de centre O et de rayon $OI = L$.

Deuxième exemple. — Soit un cylindre circulaire droit (S_0), creux, de rayon intérieur R et un arbre (S) d'axe parallèle à (S_0), de rayon r, roulant sans glisser à l'intérieur de (S_0). $(\mathcal{R}_0)$ est un repère de référence défini par le trièdre $(O, x_0y_0z_0)$ lié à (S_0) et tel que Oz_0 soit confondu avec l'axe de (S_0) ; $(\mathcal{R}_S)$ est un repère défini par le trièdre $(O_S, x_S y_S z_S)$ lié à (S) et tel que $O_S z_S$ soit confondu avec l'axe de (S) et que O_S appartienne à (x_0Oy_0) ; $(\mathcal{R}_1)$ est un repère défini par le trièdre $(O_S, x_1y_1z_1)$ tel que les axes de ce dernier soient constamment parallèles aux axes de $(O, x_0y_0z_0)$; est $(\mathcal{R}_2)$, un repère défini par le trièdre $(O, x_2y_2z_2)$ tel que Oz_2 soit confondu avec Oz_0 et Ox_2 avec OO_S.

Connaissant $\omega(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_1) = \frac{d\varphi}{dt}$ = Cte > 0, on va chercher, en fonction de R, r et ω, la vitesse et l'accélération du point O_S dans son mouvement par rapport à $(\mathcal{R}_0)$.

Application numérique : $R = 22$ mm, $r = 20$ mm et $\omega(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_0) = 300$ rad/s.

Le mouvement de S par rapport à S_0 étant un mouvement plan, il est possible de raisonner sur les traces (Σ) et (Σ_0) de ces deux cylindres dans le plan (x_0Oy_0) (fig. II-40).

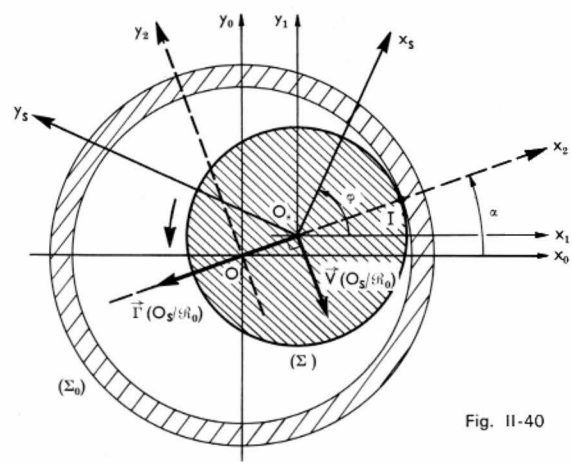


Fig. II-40

Puisqu'il y a roulement sans glissement au contact de (Σ) et de (Σ_0), I, point géométrique de contact est le C.I.R. à l'instant considéré.

D'où :

$$\vec{V}(O_S/\mathcal{R}_0) = -IO_S \cdot \varphi' \cdot \vec{j_2} = -r \cdot \omega(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{j_2} \quad (1)$$

D'autre part, O_S appartient aussi à $(\mathcal{R}_2)$ qui est animé d'un mouvement de rotation autour de Oz_0 ; d'où :

$$\vec{V}(O_S/\mathcal{R}_0) = OO_S \cdot \alpha' \cdot \vec{j_2} = (R - r) \cdot \omega(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{j_2} \quad (2)$$

En comparant (1) et (2) on tire :

$$\omega(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0) = -\frac{r}{R-r} \cdot \omega(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_0)$$

$$= -\frac{20}{2} \times 300 = -3\,000 \text{ rad/s}$$

Donc, dans son mouvement par rapport à $(\mathcal{R}_0)$, le point O_S est animé d'un mouvement circulaire uniforme d'axe Oz_0, de rayon $R - r$ et de vitesse angulaire $\omega = -3\,000$ rad/s. En utilisant directement les résultats du mouvement circulaire, on déduit :

$$\vec{\Gamma}(O_S/\mathcal{R}_0) = -(R - r) \cdot \omega^2 \cdot \vec{i_2}$$

Remarque : Il y a lieu de ne pas confondre la vitesse angulaire d'un solide par rapport à un autre, ou d'un repère par rapport à un autre, telle que $\omega(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_0)$, et la vitesse angulaire ω d'un point décrivant une trajectoire circulaire dans un repère déterminé.

3.5.3. Base et roulante. — On appelle base, dans le mouvement du plan (P_S), lié à (Σ), sur (P_0), l'ensemble des positions du C.I.R. dans (P_0) et on appelle roulante, dans le même mouvement, l'ensemble des positions du C.I.R. dans (P_S) lorsque t varie. Ainsi, dans le premier exemple du paragraphe 3.5.2, ont été définies la base (quart de cercle de rayon OA_0) et la roulante (demi-cercle de diamètre AB).

À tout instant, dans le mouvement de (P_S) sur (P_0), base et roulante sont tangentes (fig. II-41).

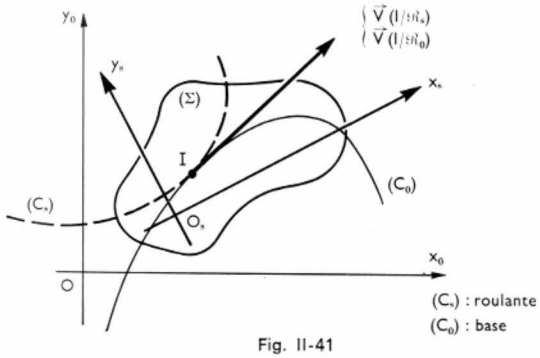


Fig. II-41

En effet, I étant centre instantané de rotation, on a :

$$\vec{V}(I, \mathcal{R}_S/\mathcal{R}_0) = \vec{0}$$

Or, d'après la loi de composition des vitesses, le vecteur-vitesse du point géométrique I est égal à :

$$\vec{V}(I/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(I, \mathcal{R}_S/\mathcal{R}_0) + \vec{V}(I/\mathcal{R}_S)$$

d'où : $$\vec{V}(I/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(I/\mathcal{R}_S)$$

Ces deux vecteurs-vitesses étant tangents aux courbes (C_0) et (C_S) que décrit le point géométrique I dans (P_0) et dans (P_S), et ces deux courbes étant à tout instant en contact en I, elles sont tangentes à tout instant en I.

D'autre part, la vitesse de glissement de (C_S) sur (C_0) : $\vec{V}(I, \mathcal{R}_S/\mathcal{R}_0)$ étant nulle, on en déduit que la roulante (C_S) roule sans glisser sur la base (C_0).

Conséquence : Tout mouvement plan sur plan peut toujours se ramener au mouvement engendré par une courbe plane, appelée roulante et liée au plan mobile, roulant sans glisser sur une autre courbe plane, appelée base, les plans des deux courbes étant confondus.

3.6. Mouvement sphérique ou à point fixe. — Un solide (S) est animé d'un mouvement sphérique par rapport à un repère de référence $(\mathcal{R}_0)$, si au cours du mouvement un point O de (S) reste fixe dans $(\mathcal{R}_0)$.

Soit un repère $(\mathcal{R}_S)$ défini par le trièdre $(O_S, x_S y_S z_S)$ lié au solide (S). La position de (S) dans $(\mathcal{R}_0)$ peut être définie à tout instant par les angles d'Euler $\psi(t)$, $\theta(t)$ et $\varphi(t)$ (fig. II-42).

Soit $O_S x_1$ l'axe perpendiculaire au plan $(z_0 O z_S)$: Ox_1 représente encore la trace du plan $(x_S O_S y_S)$ dans $(x_0 O y_0)$ et soit $(\mathcal{R}_1)$ le repère défini par le trièdre $(O, x_1 y_1 z_1)$ tel que Oz_1 soit confondu avec Oz_0. La position de $(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)$ est donnée par :

$$\psi(t) = (Ox_0, Ox_1)$$

Le mouvement de $\mathcal{R}_1$ par rapport à $\mathcal{R}_0$ est un mouvement de rotation autour de Oz_0 et :

$$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) = \psi'(t) \cdot \vec{k_0}$$

Soit $(\mathcal{R}_2)$ le trièdre trirectangle direct défini par $(O, x_2 y_2 z_2)$ tel que Ox_2 soit confondu avec Ox_1 et Oz_2 avec Oz_S. La position de $(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)$ est donnée par :

$$\theta(t) = (Oz_1, Oz_2)$$

Le mouvement de $\mathcal{R}_2$ par rapport à $\mathcal{R}_1$ est un mouvement de rotation autour de Ox_1 et :

$$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1) = \theta'(t) \cdot \vec{i_1}$$

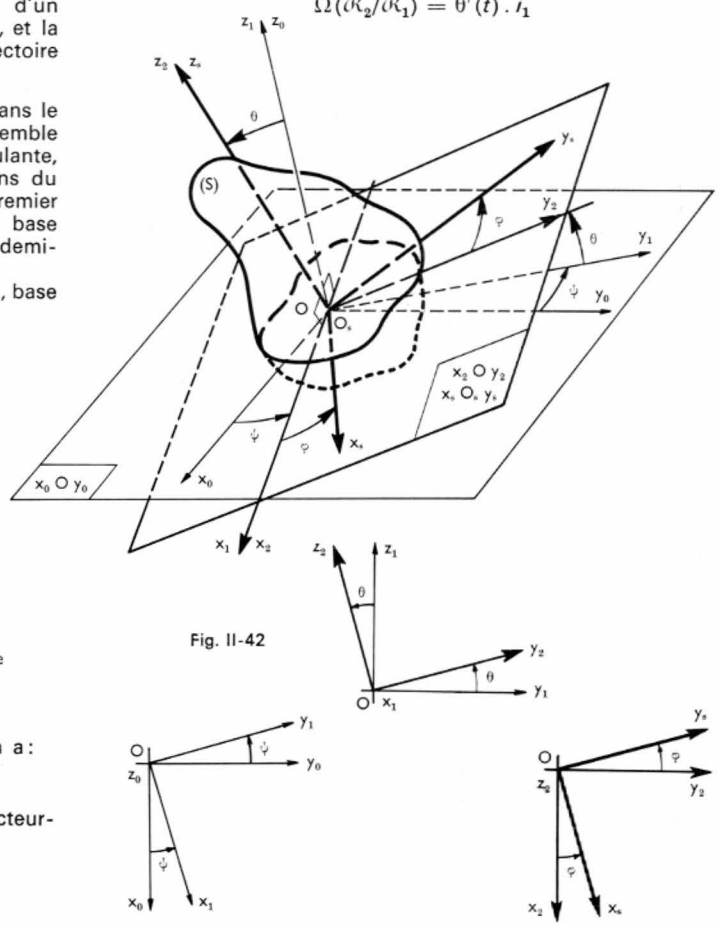


Fig. II-42

De plus, $(\mathcal{R}_S)$ et $(\mathcal{R}_2)$ ayant OSz_S et O_2z_2 en commun, la position de $\mathcal{R}_S$ par rapport à $\mathcal{R}_2$ est donnée par :

$$\varphi(t) = (Ox_2, Ox_S)$$

Le mouvement de $\mathcal{R}_S$ par rapport à $\mathcal{R}_2$ est un mouvement de rotation autour de Oz_2 et :

$$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_2) = \varphi'(t) \cdot \vec{k_2} = \varphi'(t) \cdot \vec{k_S}$$

Les trois angles $\varphi(t)$, $\theta(t)$, $\psi(t)$ définissent respectivement les positions de $(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_2)$, de $(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1)$ et de $(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0)$: il définissent donc la position de $(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_0)$. $\psi(t)$ est appelé angle de *précession*, $\theta(t)$ angle de *nutation* et $\varphi(t)$ angle de *rotation propre*.

Au cours du mouvement de $(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_0)$, tous les points de (S) décrivent des trajectoires inscrites sur des sphères de centre O.

Un point quelconque M_S de (S) a pour vecteur-vitesse : par rapport à $(\mathcal{R}_0)$:

$$\vec{V}(M_S/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(M_S, \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) + \vec{V}(M_S/\mathcal{R}_1)$$

par rapport à $(\mathcal{R}_1)$:

$$\vec{V}(M_S/\mathcal{R}_1) = \vec{V}(M_S, \mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1) + \vec{V}(M_S/\mathcal{R}_2)$$

d'où :

$$\vec{V}(M_S/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(M_S, \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) + \vec{V}(M_S, \mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1) + \vec{V}(M_S/\mathcal{R}_2)$$

or :

$$\vec{V}(M_S, \mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) = \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{O_S M_S}$$
$$\vec{V}(M_S, \mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1) = \vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1) \wedge \overrightarrow{O_S M_S}$$
$$\vec{V}(M_S/\mathcal{R}_2) = \vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_2) \wedge \overrightarrow{O_S M_S}$$

donc :

$$\vec{V}(M_S/\mathcal{R}_0) = [\vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_2)] \wedge \overrightarrow{O_S M_S}$$

En comparant avec l'expression générale :

$$\vec{V}(M_S/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(O_S/\mathcal{R}_0) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{O_S M_S}$$

on en déduit, puisque $\vec{V}(O_S/\mathcal{R}_0) = \vec{0}$:

$$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_0) = \vec{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_1) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_2)$$
$$= \psi' \cdot \vec{k_0} + \theta' \cdot \vec{i_1} + \varphi' \cdot \vec{k_S}$$

et : $$\vec{V}(M_S/\mathcal{R}_0) = \vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{O_S M_S}$$

Le mouvement de (S) par rapport à $(\mathcal{R}_0)$ peut être considéré comme étant à tout instant un mouvement de rotation autour d'un axe $On(t)$ dont la position dans $(\mathcal{R}_0)$ est donnée à tout instant par :

$$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_0) = \psi' \cdot \vec{k_0} + \theta' \cdot \vec{i_1} + \varphi' \cdot \vec{k_S}$$

$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_0)$ représente le vecteur-vitesse angulaire instantanée de $(\mathcal{R}_S)$ dans son mouvement autour de O dans $(\mathcal{R}_0)$.

Le vecteur-accélération d'un point M_S quelconque de (S) par rapport à $(\mathcal{R}_0)$ est égal à :

$$\vec{\Gamma}(M_S/\mathcal{R}_0, t) = \left\{ \frac{d\vec{V}(O_S/\mathcal{R}_0, t)}{dt} \right\}_{\mathcal{R}_0}$$
$$= \left\{ \frac{d[\vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_0, t) \wedge \overrightarrow{O_S M_S}]}{dt} \right\}_{\mathcal{R}_0}$$

$$\vec{\Gamma}(M_S/\mathcal{R}_0, t) = \left\{ \frac{d[\vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_0, t)]}{dt} \right\}_{\mathcal{R}_0} \wedge \overrightarrow{O_S M_S} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_0, t) \wedge \left\{ \frac{d\overrightarrow{O_S M_S}}{dt} \right\}_{\mathcal{R}_0}$$

$$\vec{\Gamma}(M_S/\mathcal{R}_0, t) = \vec{\Omega}'(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_0, t) \wedge \overrightarrow{O_S M_S} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_0, t) \wedge \vec{V}(M_S/\mathcal{R}_0, t)$$

Exemples. — Parmi les solides animés d'un mouvement à point fixe, on peut citer la toupie et le rotor d'un gyroscope.

● *La toupie* est constituée d'un axe $O_S P$ effilé à l'une de ses extrémités O_S et d'un cylindre de très faible longueur d'axe $O_S P$ (fig. II-43).

Si l'on imprime à la toupie (S) un mouvement de rotation très rapide autour de son axe (mouvement de rotation propre) et si on l'abandonne, seul O_S est en contact avec un point fixe O de $(\mathcal{R}_0)$ lié à la Terre, $O_S P$ fait un angle θ avec la verticale Oz_0 ; le mouvement de la toupie met bien en évidence : un mouvement lent de rotation du plan $(z_0 O z_S)$ autour de Oz_0, c'est le mouvement de précession ; un mouvement vibratoire autour de l'axe Ox_1 perpendiculaire à $(z_0 O z_S)$, c'est le mouvement de nutation.

La courbe décrite par l'extrémité P de l'axe de la toupie est inscrite sur une sphère de centre O et de rayon OP. Elle permet de constater que l'angle θ varie périodiquement entre θ_{max} et θ_{min} ; la différence $(\theta_{max} - \theta_{min})$ est d'autant plus faible que la vitesse de rotation propre est plus grande. L'expérimentation montre d'autre part que la stabilité du

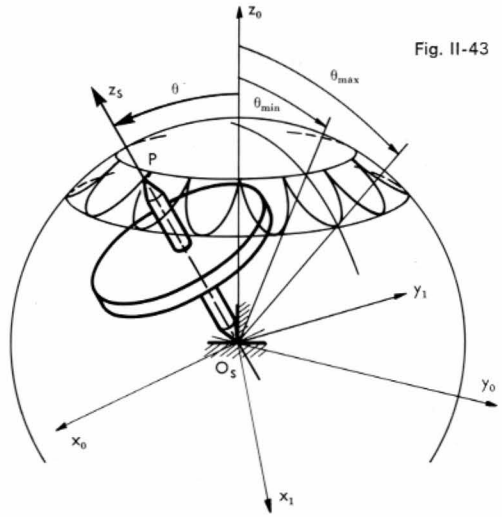


Fig. II-43

mouvement est fonction de la vitesse de rotation propre, celle-ci devant rester supérieure à une certaine valeur qui dépend de la masse et de la forme de la toupie ; il en est de même de la vitesse de précession. La dynamique permet de faire apparaître avec précision les propriétés intéressantes de ce mouvement.

● *Le gyroscope* est constitué d'un rotor supporté par un jeu d'armatures permettant à celui-ci d'avoir un point fixe dans $(\mathcal{R}_0)$ et toutes les libertés de mouvement autour de ce point (fig. II-44).

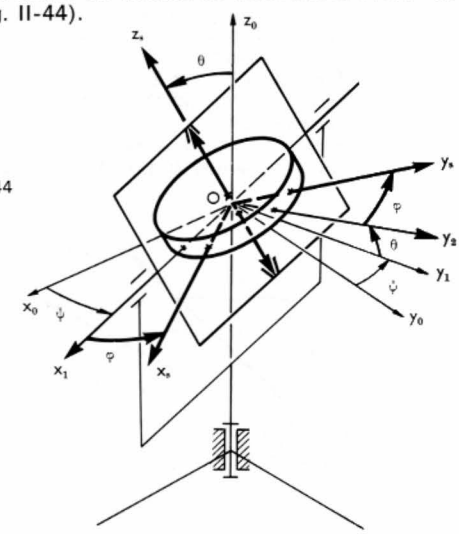


Fig. II-44

Là encore, les propriétés du mouvement du rotor du gyroscope sont très intéressantes et les applications industrielles sont nombreuses, par exemple : stabilisation et guidage des avions et des bateaux.

3.7. Mouvement quelconque. — Soit un repère $(\mathcal{R}_S)$ défini par les axes $(O_S, x_S y_S z_S)$ liés au solide (S) et le repère $(\mathcal{R}'_0)$ défini par les axes $(O_S, x'_0 y'_0 z'_0)$ parallèles aux axes définissant $(\mathcal{R}_0)$ (fig. II-45). La position de (S) dans $(\mathcal{R}_0)$ peut être définie à tout instant par le vecteur $\overrightarrow{OO_S}$, ou par les trois composantes scalaires $x_S(t)$, $y_S(t)$ et $z_S(t)$ de ce vecteur dans $(\mathcal{R}_0)$, et par les trois angles d'Euler

$$\psi(t) = (\overrightarrow{O_S x'_0}, \overrightarrow{O_S x_1}), \theta(t) = (\overrightarrow{O_S z'_0}, \overrightarrow{O_S z_S})$$

et : $$\varphi(t) = (\overrightarrow{O_S x_1}, \overrightarrow{O_S x_S})$$

donnant la position de $(\mathcal{R}_S)$ par rapport à $(\mathcal{R}'_0)$.

Un point quelconque M de (S) a pour vecteur-vitesse par rapport à $(\mathcal{R}_0)$:

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(M, \mathcal{R}'_0/\mathcal{R}_0) + \vec{V}(M/\mathcal{R}'_0)$$

Or : $$\vec{V}(M/\mathcal{R}'_0) = (\psi' \cdot \vec{k'_0} + \theta' \cdot \vec{i_1} + \varphi' \cdot \vec{k_S}) \wedge \overrightarrow{O_S M}$$
$$= \vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}'_0) \wedge \overrightarrow{O_S M}$$

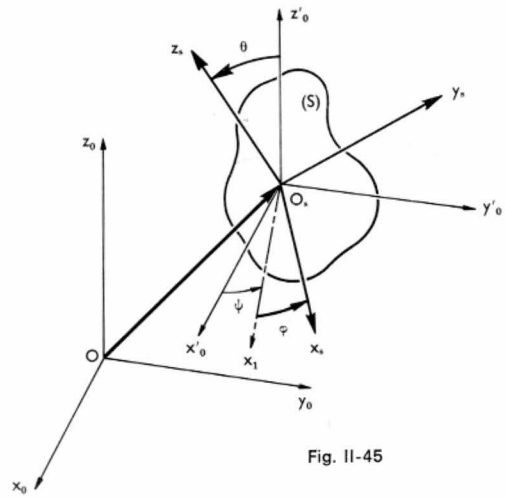


Fig. II-45

et : $\vec{V}(M, \mathcal{R}'_0/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(O_S/\mathcal{R}_0)$

puisque le mouvement de $(\mathcal{R}'_0/\mathcal{R}_0)$ est un mouvement de translation, d'où :

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(O_S/\mathcal{R}_0) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}'_0) \wedge \overrightarrow{O_S M}$$

En comparant avec l'expression générale :

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(O_S/\mathcal{R}_0) + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{O_S M}$$

on constate que :

$$\vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_0) = \vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}'_0) = \psi' . \vec{k'_0} + \theta' . \vec{i_1} + \varphi' . \vec{k_S}$$

Ce résultat était prévisible puisque le mouvement de $(\mathcal{R}'_0)$ par rapport à $(\mathcal{R}_0)$ est un mouvement de translation.

Le mouvement quelconque de (S) par rapport à $(\mathcal{R}_0)$ peut donc être considéré comme étant à tout instant la composition d'un mouvement de translation, mouvement de $(\mathcal{R}'_0/\mathcal{R}_0)$, et d'un mouvement de rotation instantanée, mouvement de $(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}'_0)$, d'axe $O_S n(t)$ parallèle à $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}'_0, t)$ et de vitesse angulaire $\omega(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}'_0, t)$, mesure algébrique de $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}'_0, t)$ sur cet axe.

Le vecteur accélération d'un point quelconque M de (S) est donné par :

$$\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0) = \vec{\Gamma}(M, \mathcal{R}'_0/\mathcal{R}_0) + \vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}'_0)$$

Or :

$$\vec{\Gamma}(M, \mathcal{R}'_0/\mathcal{R}_0) = \vec{\Gamma}(O_S/\mathcal{R}_0)$$

$$\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}'_0) = \left\{ \frac{d[\vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}'_0)]}{dt} \right\}_{\mathcal{R}'_0} \wedge \overrightarrow{O_S M} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}'_0) \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R}'_0)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0) &= \vec{\Gamma}(O_S/\mathcal{R}_0) + \vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}'_0) \\ &= \vec{\Gamma}(O_S/\mathcal{R}_0) \\ &\quad + \vec{\Omega}'(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}'_0) \wedge \overrightarrow{O_S M} \\ &\quad + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R}'_0) \end{aligned}$$

Il faut remarquer que $\vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}'_0) = \vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_0)$, alors que $\vec{V}(M/\mathcal{R}'_0) \neq \vec{V}(M/\mathcal{R}_0)$; $\vec{\Omega}$, vecteur qui définit le mouvement de rotation instantanée de (S) par rapport à un repère de référence reste inchangé pour des repères de référence parallèles, mais il n'en est pas de même pour le vecteur-vitesse d'un point quelconque M de (S).

CHAPITRE III

STATIQUE OU ÉQUILIBRE DES CORPS RIGIDES

1. REPÈRES DE RÉFÉRENCE

1.1. Référentiel absolu. — La théorie de la mécanique des corps rigides a été établie à partir de plusieurs lois formulées au cours des siècles. Pour énoncer ces dernières, les positions et les mouvements des corps ont été rapportés à un système d'axes appelés *axes absolus* ou *axes absolument fixes* défini par un trièdre ayant pour sommet (s), *centre de gravité du système solaire*, et pour arêtes trois droites issues de (s) et passant par trois étoiles dites *étoiles fixes*.

1.2. Référentiel terrestre. — Pratiquement en mécanique industrielle, les positions et les mouvements des corps seront rapportés à des axes liés à la Terre : les lois de la mécanique, énoncées pour des axes absolus, ne seront alors qu'approchées pour de tels systèmes d'axes et leur application entraîne certaines erreurs. Néanmoins, dans la plupart des cas, ces erreurs restent faibles et les lois de la mécanique seront utilisées comme si elles avaient été énoncées pour un système d'axes liés à la Terre. Un trièdre trirectangle direct, dont le sommet O sera proche du lieu du phénomène étudié, définira les axes liés à la Terre : ce système d'axes, solidaire de la Terre, aura même mouvement qu'elle par rapport aux axes absolus.

2. LES FORCES

2.1. Principe de l'inertie. — Parmi les axiomes de la mécanique qui conduisent aux relations entre le mouvement et ce qui le provoque, le premier est dû à Galilée (1564-1642), c'est le principe de l'inertie :

Tout point matériel isolé est au repos ou est animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

Bien que cet axiome ne puisse pas être vérifié directement par l'expérience, car il est très difficile d'isoler complètement un point matériel, il entraîne des conséquences qui sont vérifiables ; et ces dernières s'étant révélées toujours exactes, on peut conclure à la validité de cet axiome.

2.2. Notion de force. — L'une des conséquences du principe de l'inertie est que tout corps au repos, ou en mouvement, ne peut modifier de lui-même cet état. En revanche, s'il y a modification de cet état, c'est que le corps est soumis à des influences et l'on définira alors la force comme *cause de la modification*, qui peut être le passage du repos au mouvement, le ralentissement du mouvement (en des temps égaux, les espaces parcourus diminuent), l'accélération du mouvement (en des temps égaux, les espaces parcourus augmentent), etc.

Toute force est caractérisée par le point où elle s'applique, son intensité, sa direction et son sens ; elle peut donc être représentée par un vecteur.

On distingue deux types de force :

1° *Les forces de contact,* lorsque l'influence est exercée par contact avec un autre corps (cas d'une balle dont on modifie la trajectoire par contact avec une raquette) ;

2° *Les forces à distance,* lorsque l'influence est exercée à distance par un autre corps (cas d'un projectile se déplaçant au voisinage de la Terre et soumis à l'influence de la force attractive de cette dernière, qui modifie sa trajectoire).

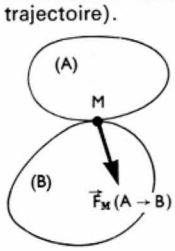


Fig. III-1

Dans tous les cas une force pourra être notée : $\overrightarrow{F_M}\ (A \rightarrow B)$ (lire : force exercée au point M par le corps A sur le corps B). Cette notation peut être simplifiée, quand il n'y a pas de confusion possible (fig. III-1).

2.3. Égalité de l'action et de la réaction. — Le deuxième axiome de la mécanique est dû à Newton (1642-1727) et il exprime que *si un corps* (1) *est soumis à l'action d'un corps* (2), *par contact ou à distance, réciproquement le corps* (2) *est soumis à la réaction du corps* (1) *et ces forces ont la même intensité*. Ainsi la Terre exerce une action à distance sur un point matériel situé dans son voisinage et réciproquement ce même point matériel exerce sur la Terre une réaction de même intensité mais de sens opposé. Lorsque la raquette touche la balle, elle exerce sur cette dernière une action de contact

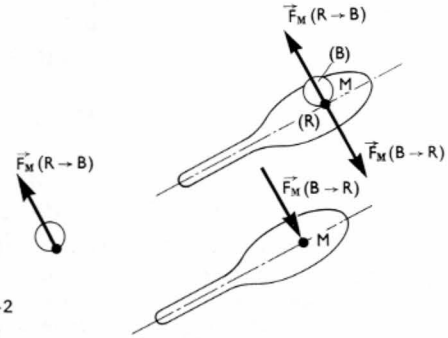
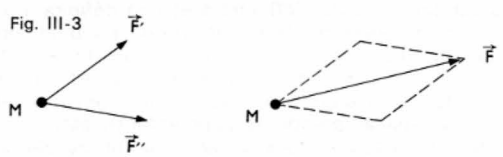


Fig. III-2

$\overrightarrow{F_M}\ (R \rightarrow B)$ et réciproquement la balle exerce sur la raquette une force $\overrightarrow{F_M}\ (B \rightarrow R)$ telle que (fig. III-2) :

$$\overrightarrow{F_M}\ (R \rightarrow B) = -\overrightarrow{F_M}\ (B \rightarrow R)$$

2.4. Systèmes de forces équivalents agissant sur un même point matériel. — On dit que deux systèmes de forces sont équivalents s'ils ont même influence sur l'état de mouvement ou de repos du point matériel considéré. La recherche des systèmes équivalents est basée sur le troisième axiome de la mécanique, dû à Léonard de Vinci (1452-1519), qui stipule que *le système constitué par deux forces* $\vec{F'}$ et $\vec{F''}$ *agissant sur un même point matériel est équivalent à la seule force* $\vec{F}$ *obtenue en construisant la diagonale du parallélogramme dont* $\vec{F'}$ *et* $\vec{F''}$ *sont les côtés* (fig. III-3). On dit que $\vec{F}$ est la *résultante* de $\vec{F'}$ et $\vec{F''}$.



On constate d'autre part que $\vec{F}$ est égale à la somme géométrique de $\vec{F'}$ et $\vec{F''}$; son module R est donné par l'égalité suivante : $R^2 = F'^2 + F''^2 + 2\,F'.F''\cos(\vec{F'}, \vec{F''})$. En particulier $R = \sqrt{F'^2 + F''^2}$, si $\vec{F'}$ et $\vec{F''}$ sont orthogonales.

Dans le cas du point matériel soumis à l'action de n forces $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \ldots, \vec{F_n}$, on peut remplacer $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ par leur résultante $\vec{F_{12}}$ ($\vec{F_{12}} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$) puis $\vec{F_{12}}$ et $\vec{F_3}$ par leur résultante $\vec{F_{123}}$ ($\vec{F_{123}} = \vec{F_{12}} + \vec{F_3} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}$,) et ainsi de suite (fig. III-4). Finalement un système de n forces agissant sur un point matériel M est équivalent à une seule force $\vec{F}$ exercée sur ce même point ; elle est représentée par la somme géométrique des n forces et est appelée résultante du système de forces $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \ldots, \vec{F_n}$. Réciproquement, une force $\vec{F}$ appliquée sur un point matériel peut être remplacée par plusieurs forces $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \ldots, \vec{F_n}$ constituant un système équivalent à $\vec{F}$.

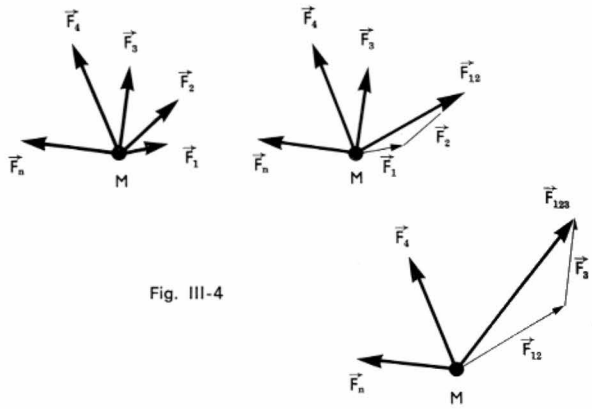


Fig. III-4

La notion physique d'équivalence entre deux systèmes de forces qui vient d'être introduite ici est en accord avec la définition théorique de l'équivalence de deux systèmes de vecteur (V. chap. 1, § 3.3.1) : deux ensembles de vecteurs sont équivalents s'ils déterminent le même torseur ; $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}, \ldots, \vec{F_n}$ d'une part et $\vec{F}$ d'autre part déterminent bien le même torseur.

2.5. Forces agissant sur un corps rigide

2.5.1. Systèmes de forces équivalents. — On dit que deux systèmes de forces agissant successivement sur un même solide sont équivalents s'ils ont la *même influence sur l'état de mouvement ou de repos de ce solide*. Par exemple, plusieurs forces appliquées en un même point d'un solide (S), peuvent être remplacées par leur résultante sans modifier l'état de mouvement ou de repos du solide (fig. III-5). Ce sont deux systèmes de forces équivalents.

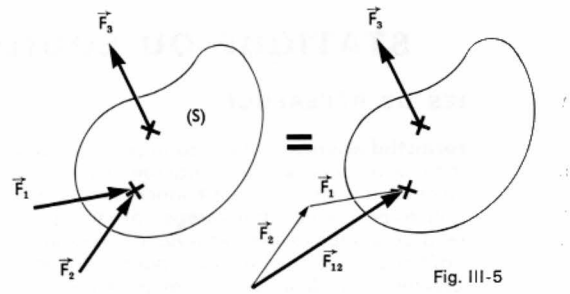


Fig. III-5

2.5.2. Propriétés fondamentales des forces appliquées sur un corps rigide. — Soit un corps rigide (S) soumis à l'action de deux forces appliquées en des points différents, ayant la même ligne d'action et le même module, mais de sens opposés (fig. III-6) : tout se passe comme si ces deux forces étaient nulles, car elles n'ont aucune influence pour le mouvement du corps.

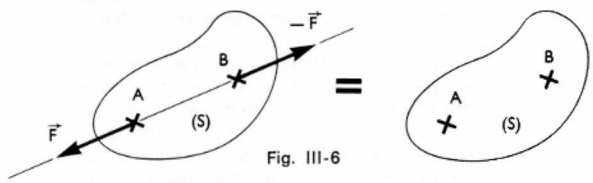


Fig. III-6

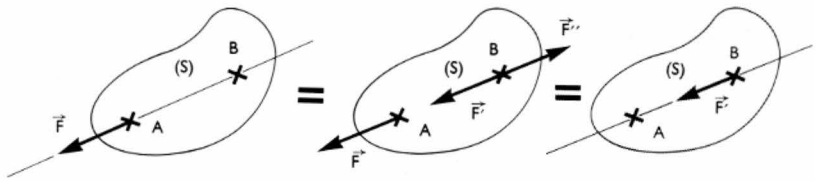
De cette observation, découle le quatrième axiome de la mécanique : *on ne change pas l'état de mouvement ou de repos d'un corps rigide en lui appliquant deux forces ayant la même ligne d'action et le même module, mais de sens opposés*. On dit que les deux forces se détruisent ou qu'elles forment un *système équivalent à zéro*.

Conséquence. Soit un solide (S) soumis à une seule force $\vec{F}$ exercée en A (fig. III-7) : si l'on applique en un point B, situé sur la ligne d'action de $\vec{F}$, deux forces $\vec{F'}$ et $\vec{F''}$ telles que : $\vec{F'} = \vec{F}$, et : $\vec{F''} = -\vec{F}$, d'après ce qui précède, l'état de mouvement ou de repos de (S) n'est pas

Fig. III-7

$\vec{F'} = \vec{F}$

$\vec{F''} = -\vec{F}$



modifié. D'autre part, le système de forces $\vec{F}$, $\vec{F''}$ étant équivalent à zéro, tout se passe comme si seule la force $\vec{F'}$ était appliquée au solide : $\vec{F}$ et $\vec{F'}$ sont donc deux forces équivalentes. Par conséquent, *lorsqu'une force est appliquée sur un solide rigide, on peut déplacer son point d'application sur sa ligne d'action sans modifier l'état de mouvement ou de repos de ce solide*. Toute force appliquée sur un solide possède donc les propriétés du vecteur glissant et un ensemble de forces appliqué sur un corps rigide peut être considéré comme un ensemble de vecteurs glissants.

Toutefois, ces propriétés ne sont vraies que pour des forces appliquées sur le même corps rigide. Dans le cas d'un corps élastique, l'influence d'une force dépend de son point d'application ; dans le cas de plusieurs corps rigides, cette influence est différente suivant le corps auquel est appliquée la force (fig. III-8).

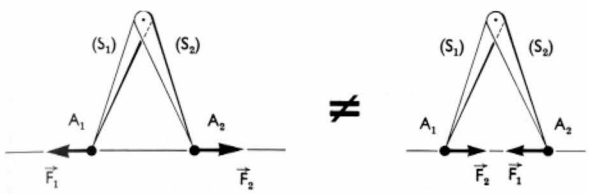


Fig. III-8 — Les deux systèmes de forces ne sont pas équivalents car le corps n'est pas rigide

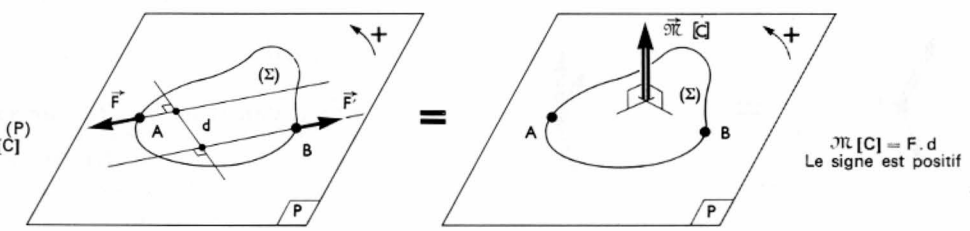
2.5.3. Couple de forces. — On dit qu'un solide est soumis à un couple de forces lorsqu'il subit l'action de deux forces ayant des lignes d'action parallèles, des intensités égales et dont les sens sont opposés (fig. III-9).

On appelle *moment du couple* le produit $F.d$ affecté du signe (+) ou du signe (—) selon que le sens du couple est positif ou négatif vis-à-vis du plan orienté contenant le couple.

On démontre, en utilisant les propriétés précédentes, que deux couples de forces sont équivalents s'ils sont dans des plans parallèles et s'ils ont même moment. Ce résultat rejoint la définition de l'équivalence de deux systèmes de vecteurs glissants (V. chap. 1, § 3.3.1). Dans ces conditions, un couple $[C]$ pourra être représenté par un vecteur

Fig. III-9

(Σ) : trace de (S) dans (P)
(P) : plan contenant [C]



$\mathfrak{M}$ [C] = F.d
Le signe est positif

libre $\overrightarrow{\mathfrak{M}}[C]$ dont la direction est celle de la normale au plan du couple, le sens celui correspondant au sens du couple et dont le module est proportionnel à la valeur absolue du moment du couple. $\overrightarrow{\mathfrak{M}}[C]$ est le *moment vectoriel du couple*. Par extension de langage, on dira simplement le couple $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$. Ce vecteur représente tous les couples de forces de même moment situés dans des plans perpendiculaires au support de $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$. Pour différencier ce vecteur et les vecteurs-forces on le représente à l'aide de deux traits (fig. III-9).

Si un solide est sollicité par plusieurs couples de forces $[C_1]$, $[C_2]$, ..., $[C_n]$ situés dans des plans non parallèles, on démontre que le système de ces 2 n forces, ou n couples de forces, est équivalent à un couple unique $[C]$, défini par le vecteur $\overrightarrow{\mathfrak{M}}[C]$, tel que (fig. III-10) :

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}}[C] = \overrightarrow{\mathfrak{M}}[C_1] + \overrightarrow{\mathfrak{M}}[C_2] + \ldots + \overrightarrow{\mathfrak{M}}[C_n]$$

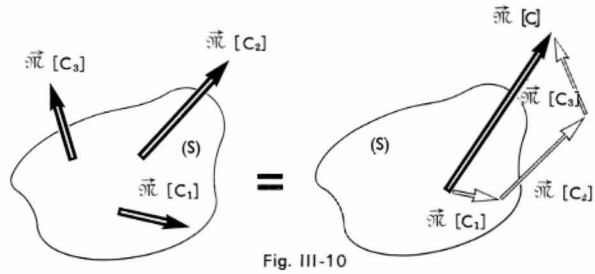


Fig. III-10

$$\vec{\mathfrak{M}}\ [C] = \vec{\mathfrak{M}}\ [C_1] + \vec{\mathfrak{M}}\ [C_2] + \vec{\mathfrak{M}}\ [C_3]$$

Un couple ou un ensemble de plusieurs couples constitue un système particulier de vecteurs glissants et détermine donc un torseur spécial appelé *torseur couple* (V. chap. 1, § 3.3.2).

2.5.4. Moment d'une force par rapport à un point (fig. III-11). — Soit un solide soumis à l'action d'une seule force $\vec{F}$ appliquée en M. D'après l'axiome n° 4, on peut appliquer au point P du solide deux forces $\vec{F'}$ et $\vec{F''}$ telles

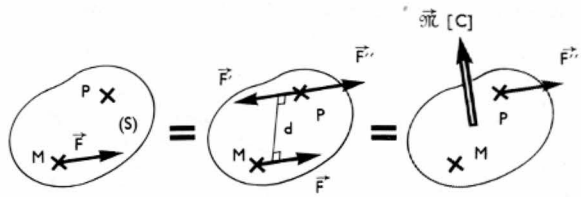
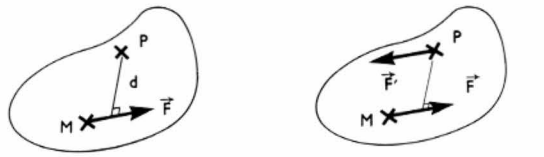


Fig. III-11 $\mathfrak{M}$ [C] = F.d

que : $\vec{F''} = -\vec{F'} = \vec{F}$, sans pour cela modifier l'état de mouvement ou de repos du solide : le système $\vec{F}$, $\vec{F'}$, $\vec{F''}$ est donc équivalent à $\vec{F}$. Mais $\vec{F}$, $\vec{F'}$ constitue un couple de forces $[C]$ que l'on peut représenter par le vecteur $\overrightarrow{\mathfrak{M}}[C]$ de module égal $F.d$, et l'on peut dire que la force $\vec{F}$ appliquée en M est équivalente à une force $\vec{F''} = \vec{F}$ appliquée en P et à un couple défini par le vecteur libre $\overrightarrow{\mathfrak{M}}[C]$.

On définit alors le moment de la force $\vec{F}$ appliquée en M, par rapport au point P, comme le moment du couple $[C]$ constitué par $\vec{F}$, $\vec{F'}$ ($\vec{F'}$ étant appliquée en P) et l'on note : $\overrightarrow{\mathfrak{M}_P(F)}$, ce moment par rapport au point P de la force $\vec{F}$ (fig. III-12).

Remarque : D'après sa définition le moment de la force



$\overrightarrow{\mathfrak{M}}_P[\vec{F}] = \overrightarrow{\mathfrak{M}}[\vec{F}, \vec{F'}]$ $\qquad$ $\vec{F'} = -\vec{F}[\vec{F}.\vec{F'}] = [C]$

Fig. III-12

$\vec{F}$ par rapport à P est égal au moment du vecteur glissant $\vec{F}$ par rapport au point P (V. chap. 1, § 2.5.5), d'où :

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}_P}(\vec{F}) = \overrightarrow{PM} \wedge \vec{F}$$

En conclusion, toute force $\vec{F}$ appliquée en un point M d'un solide est équivalente à une force $\vec{F''} = \vec{F}$ appliquée en un point Q quelconque du solide, et à un couple $[C]$ défini par : $\overrightarrow{\mathfrak{M}}[C] = \overrightarrow{\mathfrak{M}_Q}(\vec{F})$.

2.5.5. Réduction des forces exercées sur un corps rigide. — Étant donné un système de n forces appliquées sur un corps solide, *on réduit ce système* lorsqu'on le remplace par un système équivalent constitué par un nombre moins grand de forces. Soit P un point arbitraire appartenant au solide (fig. III-13), chaque force $\vec{F_k}$ du système est équivalente à une force $\vec{F''_k} = \vec{F_k}$ appliquée en P et à un couple $\overrightarrow{\mathfrak{M}_{Pk}}$ défini par $\overrightarrow{\mathfrak{M}_{Pk}} = \overrightarrow{\mathfrak{M}_P}(\vec{F_k})$. L'ensemble des forces $\vec{F''_1}, \vec{F''_2}, \ldots, \vec{F''_n}$ appliquées en P est équivalent à une seule force $\vec{F}$ telle que : $\vec{F} = \vec{F''_1} + \vec{F''_2} + \ldots + \vec{F''_n}$. L'ensemble des couples de forces $\overrightarrow{\mathfrak{M}_{P_1}}, \overrightarrow{\mathfrak{M}_{P_2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathfrak{M}_{Pn}}$ est équivalent à un seul couple défini par $\overrightarrow{\mathfrak{M}_P}$ et tel que : $\overrightarrow{\mathfrak{M}_P} = \overrightarrow{\mathfrak{M}_{P_1}} + \overrightarrow{\mathfrak{M}_{P_2}} + \ldots + \overrightarrow{\mathfrak{M}_{Pn}}$. Finalement n forces appliquées sur un solide sont équivalentes à *une force* appliquée en un point arbitraire P et à *un couple*. Un

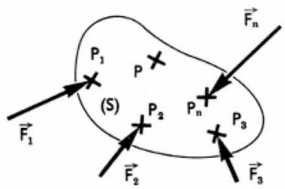


Fig. III-13

résultat identique a été obtenu dans l'étude théorique des systèmes de vecteurs glissants (V. chap. 1, § 3.3.3).

$\vec{F}$ et $\overrightarrow{\mathfrak{M}_P}$ définissent le système réduit en P. Si la réduction est faite en un point P' différent de P (fig. III-14), le système réduit en P' est défini par une force $\vec{F'} = \vec{F}$ appliquée en

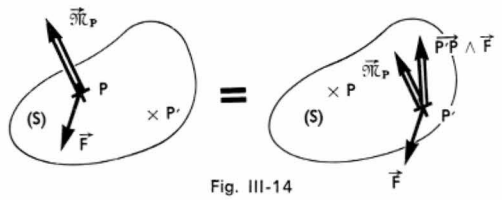


Fig. III-14

P' et par un couple de moment $\overrightarrow{\mathfrak{M}_{P'}} = \overrightarrow{\mathfrak{M}_P} + \overrightarrow{P'P} \wedge \vec{F}$, car $\vec{F}$ appliquée en P est équivalente à $\vec{F'} = \vec{F}$ appliquée en P' plus un couple de moment égal à $\overrightarrow{P'P} \wedge \vec{F}$. L'un des éléments du système réduit $\vec{F}$ est donc indépendant du point considéré et l'autre élément $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$ est fonction de ce point. Les deux champs de vecteurs définis sur (S) par $\vec{F}$ d'une part et $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$ d'autre part représentent le torseur associé à l'ensemble des vecteurs forces $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \ldots, \vec{F_n}$. Les vecteurs $\vec{F}$ et $\overrightarrow{\mathfrak{M}_P}$ sont les éléments de réduction en P de ce torseur.

Grâce à cette étude des forces, il est maintenant possible de voir la signification physique des éléments de réduction d'un torseur dans le cas où l'ensemble des vecteurs glissants est constitué par un système de forces exercées sur un solide (ou de densités de forces exercées sur un solide) ; la somme géométrique du torseur $\vec{S}[T]$, définit la force appliquée en P, élément du système réduit, et le moment résultant en P du torseur $\overrightarrow{\mathfrak{M}_P}[T]$ définit le couple, autre élément du système réduit.

Remarque : Si deux ensembles de forces appliquées sur un même solide admettent en un même point du solide le même système réduit, ils sont équivalents, et cela quel que soit le point considéré.

2.5.6. Systèmes de forces particuliers

a) *Ensemble de forces se réduisant à un couple.* Si la somme géométrique des efforts appliqués sur un solide est nulle, l'ensemble de forces est réductible à un couple défini par le moment résultant du torseur associé (fig. III-15).

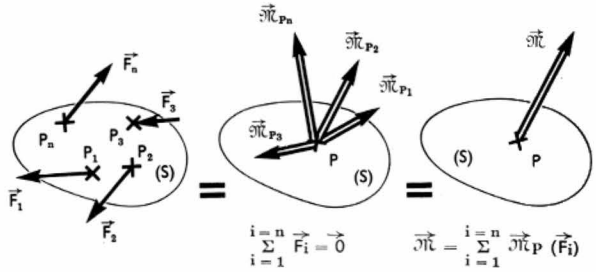
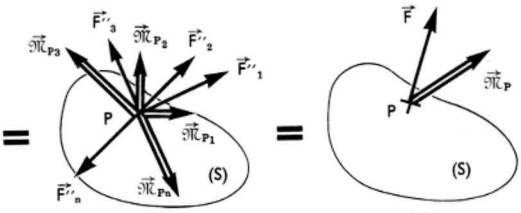


Fig. III-15

b) *Ensemble de forces se réduisant à une force unique.* Pour qu'un système de forces se réduise uniquement à une résultante, il faut que le torseur associé $[T]$ admette en un point A_0 un moment résultant nul. En effet, dans ce cas le système est équivalent à une force unique



passant par A_0 et parallèle à $\vec{S}[T]$. Or le scalaire $\overrightarrow{\mathfrak{M}_{A_0}}[T] . \vec{S}[T]$ étant un invariant pour le torseur, ce produit est nul en tout point. Réciproquement, si : $\overrightarrow{\mathfrak{M}_0}[T] . \vec{S}[T] = 0$, il est possible de trouver une droite en tout point de laquelle $\overrightarrow{\mathfrak{M}}[T] = \vec{0}$ (V. chap. 1, § 3.2.2). D'où : pour qu'un ensemble de forces, dont la somme géométrique est différente de zéro, admette une résultante, il est nécessaire et suffisant que le produit $\overrightarrow{\mathfrak{M}}[T] . \vec{S}[T]$ soit nul. C'est le cas des ensembles de forces concourantes, parallèles ou coplanaires.

2.5.7. Centre de gravité d'un solide. — Si l'on considère un point matériel M de volume Δv, on peut admettre que l'action exercée par la Terre sur M est une force verticale unique $\overrightarrow{\Delta P}$, appelée *poids* du point matériel.

On peut considérer qu'un solide (S) est constitué par un nombre n fini de points matériels M_i de volume $(\Delta v)_i$ (fig. III-16) : sur chacun de ces points matériels s'exerce l'action de la Terre $(\overrightarrow{\Delta P_i})$ et le système des forces de

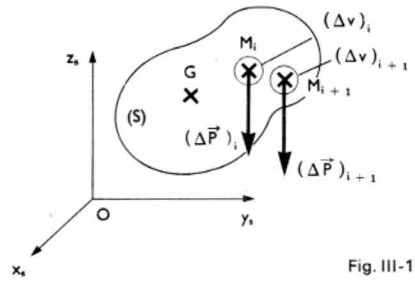


Fig. III-16

pesanteur est constitué d'un nombre fini de forces parallèles. Dans ce cas il existe une force P' équivalente à l'ensemble précédent et appliquée en G, barycentre des n points matériels constituant le solide, chacun affecté du coefficient $(\Delta P)_i$. Il faut remarquer que la position de G dans (S) est indépendante de l'orientation de (S) par rapport à la Terre. Cette position peut être obtenue en utilisant les résultats établis au chapitre 1, paragraphe 3.3.2 :

$$\left[\sum_{i=1}^{i=n} (\Delta P)_i\right] . \overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{i=n} [(\Delta P)_i . \overrightarrow{OM_i}]$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} [(\Delta P)_i . \overrightarrow{OM_i}]}{\sum_{i=1}^{i=n} (\Delta P)_i}$$

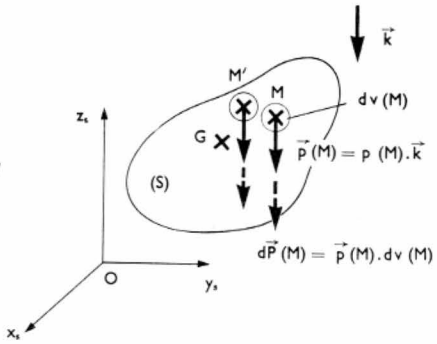
G est appelé *centre d'inertie* ou *centre de gravité de* (S), et $P = \sum_{i=1}^{i=n} (\Delta P)_i$, est le poids de (S).

Lorsque l'on fait tendre n vers l'infini, les volumes $(\Delta v)_i$ tendent vers zéro et l'on peut supposer que le rapport $\frac{\Delta P(M)}{\Delta v(M)}$ tend vers une limite. Le système fini des forces de pesanteur est alors remplacé par un ensemble de forces défini sur le milieu continu (S) : à tout point géométrique M de (S) est associée la force élémentaire :

$$\overrightarrow{dP}(M) = \overrightarrow{p}(M) . dv(M)$$

avec : $\overrightarrow{p}(M)$, densité vectorielle du champ des forces de pesanteur par unité de volume au point M, et : $dv(M)$, mesure d'un volume élémentaire entourant M (fig. III-17). Cet ensemble particulier est équivalent à une force unique $\overrightarrow{P}$ appliquée en un point G appartenant à (S) et indépendant de l'orientation de (S). Si $\overrightarrow{k}$ est le vecteur unitaire de la direction des vecteurs $\overrightarrow{p}(M)$, on peut écrire :

Fig. III-17



$$\overrightarrow{P} = \int_{(S)} \overrightarrow{p}(M) . dv(M) = \overrightarrow{k} \int_{(S)} p(M) . dv(M) = P . \overrightarrow{k}$$

Le point G est tel que : $\int_{(S)} \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{p}(M) . dv(M) = \overrightarrow{0}$

ou : $\overrightarrow{k} \wedge \int_{(S)} \overrightarrow{GM} . p(M) . dv(M) = \overrightarrow{0}$, et cela quel que soit $\overrightarrow{k}$

D'où : $$\int_{(S)} \overrightarrow{GM} . p(M) . dv(M) = \overrightarrow{0}$$

et :

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{\int_{(S)} p(M) . \overrightarrow{OM} . dv(M)}{\int_{(S)} p(M) . dv(M)}}$$

On remarque que si $p(M)$, poids volumique en M, est indépendant de M : $\overrightarrow{OG} = \frac{\int_{(S)} \overrightarrow{OM} . dv(M)}{V}$, avec : V, volume de (S). Dans ce cas, si le corps possède un plan, un axe ou un centre de symétrie, son centre de gravité G se trouve dans ce plan, sur cet axe ou en ce centre de symétrie.

2.6. Nature des forces exercées sur un solide

2.6.1. Forces de contact. — Lorsque deux corps (1) et (2) sont en contact, ils peuvent avoir en commun des points de contact isolés ou des surfaces de contact (fig. III-18) : le premier cas est théorique, car il suppose des solides parfaitement indéformables ; le second est plus proche de la réalité. À chaque point de contact correspond une force de contact si le contact est ponctuel, et une densité de force de contact (force par unité d'aire autour du point de contact considéré) si le contact est surfacique. Qu'il s'agisse de force de contact ou de densité de force de contact, ces actions sont orientées vers le solide considéré. Ainsi la force de contact exercée en M par (1) sur (2) est orientée vers (2), mais on ne connaît pas sa direction.

La détermination des directions et des intensités des forces, ou des densités de force de contact, est l'un des principaux problèmes que doit résoudre le mécanicien. À

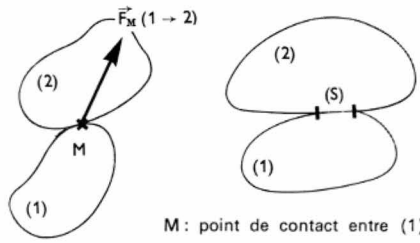


Fig. III-18

(S) : Surface de contact entre (1) et (2)

M : point de contact entre (1) et (2)

partir d'observations et d'expérimentations, des lois permettant de prévoir ces directions ont été établies. Elles ne sont pas toujours en parfait accord avec la réalité, mais elles ont l'avantage d'être simples. Ainsi on admet que *les forces ou densités de force de contact sont perpendiculaires aux surfaces en contact* si les surfaces sont parfaitement polies ; sinon, on dit qu'il y a *frottement au contact*.

Le frottement désigne les phénomènes qui prennent naissance au contact entre les solides (1) et (2) lors du mouvement de (2) par rapport à (1). On distingue plusieurs natures de frottement : le frottement de *glissement*, lorsque (2) glisse par rapport à (1) ; le frottement de *pivotement*, lorsque (2) et (1) conservent un point de contact commun lors du mouvement de (2) par rapport à (1) ; le frottement de *roulement*, lorsque (2) roule sans glisser sur (1).

Les directions des actions de contact, ou le torseur associé à ces forces, sont fonction du type de frottement. Si les surfaces ne sont pas parfaitement polies et si les deux corps sont immobiles l'un par rapport à l'autre, les actions de contact ne pourront être déterminées que par les équations d'équilibre.

Frottement de glissement. Dans le cas du glissement de (2) par rapport à (1) avec une surface commune de contact (fig. III-19), à tout point M de cette surface correspond une force élémentaire : $\overrightarrow{dF_M}(1 \to 2) = \overrightarrow{f_M}(1 \to 2) . \overrightarrow{dS_M}$,

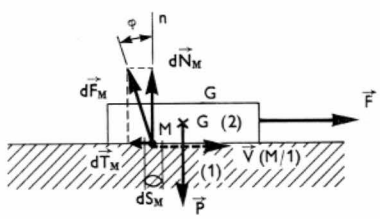


Fig. III-19

si l'on appelle $\overrightarrow{f_M}(1 \to 2)$ la densité vectorielle de force de contact par unité d'aire au point M et : dS_M, la mesure d'une surface élémentaire entourant M. Pour engendrer le glissement de (2) par rapport à (1), il est nécessaire d'exercer sur (2) une force $\overrightarrow{F}$. Dans ces conditions la force élémentaire de contact $\overrightarrow{dF_M}$ prend une direction bien déterminée : elle est située dans le plan défini par Mn, normale en M, et par $\overrightarrow{V}(M/1)$, vitesse de M par rapport à (1) ou vitesse de glissement $\overrightarrow{V_g}(M)$; elle est inclinée par rapport à Mn d'un angle φ ; et sa projection sur le plan tangent est opposée à la vitesse de glissement. C'est cette composante de l'effort

de contact qui tend à s'opposer au glissement de (2) par rapport à (1). Si on appelle $\overrightarrow{dN_M}$ (1 → 2) la projection de $\overrightarrow{dF_M}$ sur Mn et $\overrightarrow{dT_M}$ (1 → 2) la projection de $\overrightarrow{dF_M}$ sur le plan tangent en M aux deux solides en contact, on peut écrire : $dT_M = dN_M . \operatorname{tg}\varphi$; $\operatorname{tg}\varphi$ est appelé *coefficient de frottement :* c'est un nombre sans dimension, souvent noté f.

Les lois de frottement de glissement, établies par C.A. Coulomb (1736-1806), se résument ainsi :

1° Si : $\vec{V}(M/1) \neq \vec{0}$ (ou : $\vec{V_g}(M) \neq \vec{0}$), on a :

$$\overrightarrow{dT_M} \wedge \vec{V_g}(M) = \vec{0}$$
$$\overrightarrow{dT_M} . \vec{V_g}(M) < 0$$
$$dT_M = dN_M . f$$

2° Si : $\vec{V}(M/1) = \vec{0}$, (2) étant immobile par rapport à (1), quand : $\vec{F} \neq \vec{0}$, on a :

$$dT_M < dN_M . f$$

et $\overrightarrow{dF_M}$ est situé à l'intérieur d'un cône de sommet M et de demi-angle au sommet φ.

3° f, coefficient de frottement, d'une part est théoriquement indépendant de la valeur de la vitesse de glissement, de la valeur de dN_M et de l'étendue de la surface de contact, et d'autre part est fonction de la nature des matériaux constituant les deux solides et de l'état de surface des surfaces en contact.

Ces lois sur le frottement de glissement ne sont qu'approchées. En réalité, f est fonction de la vitesse de glissement et croît notablement lorsque V_g est voisine de zéro ; de plus il augmente en même temps que le rapport dN_M/dS_M. Pour de grandes vitesses de glissement, il y a un échauffement localisé au contact qui peut modifier superficiellement la nature des matériaux en contact, donc la valeur de f.

Pratiquement, pour l'ingénieur, le frottement de glissement intervient dans les problèmes de freinage où il cherche à utiliser la valeur maximale de f (voisine de 0,5) qui n'entraîne pas de détérioration des matériaux en contact, et dans les problèmes de rendement mécanique où il cherche au contraire la valeur minimale du coefficient de frottement : pour abaisser fortement cette valeur, on introduit entre les matériaux en contact un élément étranger, graisse ou huile. On obtient ainsi un coefficient de frottement de 0,10 au lieu de 0,16 à sec pour un contact acier sur acier graissé, et de 0,06 au lieu de 0,12 pour un contact acier sur bronze. Des valeurs plus petites sont obtenues avec certains matériaux comme le teflon ($f \approx 0{,}01$ à sec sur acier), ou en substituant au frottement de glissement le frottement de roulement (roulements à billes, à rouleaux et à aiguilles : $f \approx 0{,}005$).

2.6.2. Forces exercées à distance. — Les forces exercées à distance sur un solide correspondent à l'influence d'un corps séparé par une distance non nulle du solide sur lequel elles agissent. Elles sont attractives ou répulsives.

Les origines de ces forces sont très diverses (newtonienne, magnétique, électrostatique ou électrodynamique). En mécanique les actions exercées à distance les plus fréquemment rencontrées sont les forces d'attraction newtonienne. C'est Newton qui établit en 1687 la loi de la gravitation universelle selon laquelle deux masses ponc-

Fig. III-20

tuelles m_1 et m_2 exercent l'une sur l'autre une force attractive (fig. III-20) proportionnelle au produit de ces masses et inversement proportionnelle au carré de la distance r les séparant :

$$F(1 \to 2) = F(2 \to 1) = k \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

k est une constante universelle, indépendante des corps considérés. Cavendish en 1798, Bays en 1895 et Heyl en 1930 ont mesuré directement sa valeur en étudiant l'influence d'une lourde masse sur une petite (fig. III-21). On

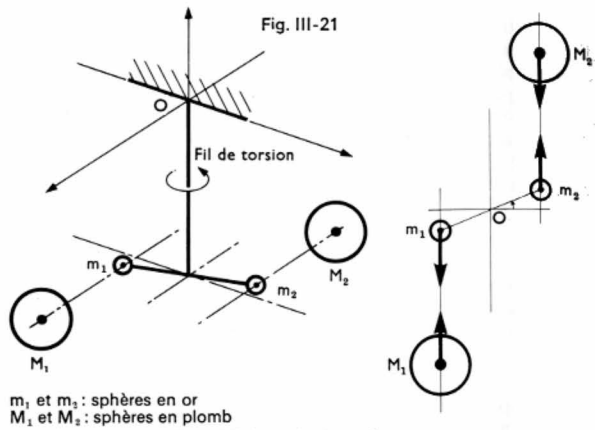


Fig. III-21

m_1 et m_2 : sphères en or
M_1 et M_2 : sphères en plomb
A droite, coupe du dispositif (vue de dessus)

admet aujourd'hui : $k = 0{,}67 . 10^{-10}$ (en unités SI). Cette valeur permet de calculer la masse de la Terre : connaissant la force que cette dernière exerce sur un point matériel de masse unité situé à proximité du sol et la distance r séparant ce point du centre de la Terre (elle est pratiquement égale au rayon de la Terre, soit 6 365 km). On obtient une masse de 6 000 trillions de tonnes et une masse volumique moyenne de 5,5 kg/dm³, soit la moyenne de celles de la fonte et du granit. La connaissance de k permet également d'évaluer la masse du Soleil et celles des planètes à satellites.

2.7. Forces exercées sur un ensemble de plusieurs solides

2.7.1. Forces intérieures et forces extérieures. — Si l'on envisage un ensemble de plusieurs solides (S_1), (S_2), (S_3), . . ., (S_n), les actions mécaniques exercées sur ces solides le sont à distance ou par contact. Si elles correspondent à l'action d'un des solides de l'ensemble sur un autre solide appartenant à l'ensemble, on dit qu'elles sont *intérieures à l'ensemble*. Si elles correspondent à l'action d'un solide n'appartenant pas à l'ensemble sur un solide quelconque de l'ensemble, on dit qu'elles sont *extérieures à l'ensemble*.

Dans le cas, par exemple, de trois sphères (1), (2), (3) maintenues dans un boîtier (4) (fig. III-22), si l'on considère l'ensemble constitué uniquement par les trois sphères.

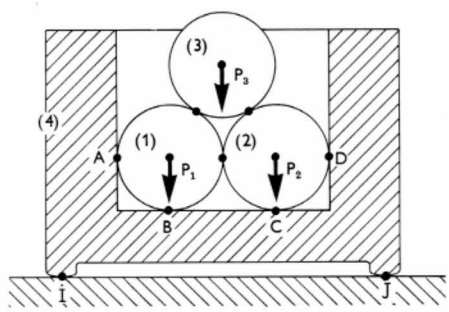


Fig. III-22

$\vec{F}(1 \to 3) = -\vec{F}(3 \to 1)$, $\vec{F}(2 \to 3) = -\vec{F}(3 \to 2)$ et $\vec{F}(1 \to 2) = -\vec{F}(2 \to 1)$ sont des forces de contact intérieures à l'ensemble ; $\vec{F_A}(4 \to 1)$, $\vec{F_B}(4 \to 1)$, $\vec{F_C}(4 \to 2)$ et $\vec{F_D}(4 \to 2)$ sont des forces de contact extérieures à l'ensemble ; $\vec{P_1}$, $\vec{P_2}$ et $\vec{P_3}$, actions à distance de la Terre sur (1), (2) et (3), sont des forces exercées à distance, extérieures à l'ensemble.

En revanche, si l'on considère l'ensemble constitué par les trois sphères (1), (2), (3) et le boîtier (4), les forces de contact $\vec{F_A}(4 \to 1)$, $\vec{F_B}(4 \to 1)$, $\vec{F_C}(4 \to 2)$ et $\vec{F_D}(4 \to 2)$, qui étaient extérieures dans l'ensemble précédent, deviennent intérieures pour ce nouvel ensemble.

2.7.2. Liaisons mécaniques. — Les solides constituant un système mécanique sont liés entre eux de façons diverses et au niveau de la liaison le contact peut être surfacique

linéique ou ponctuel. Souvent il est indispensable de connaître les efforts de liaison. Comme dans de nombreux cas il est impossible de les analyser dans le détail, car chaque fois que le contact n'est pas ponctuel, il faudrait connaître en tout point de la zone de contact la densité vectorielle de force de contact, on les étudie globalement à l'aide des éléments de réduction du torseur associé. S'il n'y a aucun frottement au niveau des contacts de la liaison on dit que cette dernière est parfaite.

Les différentes liaisons sont classées à partir de leurs propriétés géométriques.

1° *Liaison sphérique.* — Étant donné deux solides (1) et (2), on dit qu'ils sont liés par une articulation sphérique si un point P_1 de (1) coïncide en permanence avec un point P_2 de (2). Une telle liaison peut être réalisée, soit au moyen d'une rotule sphérique (fig. III-23) et elle est bilatérale permanente si α est supérieur à $\frac{\pi}{2}$ rad, soit à l'aide d'une pointe de (1) portant dans une coupelle de (2) (fig. III-24) et elle est unilatérale, soit (fig. III-25) à l'aide de corps auxiliaires (3) et (4) qui constituent les armatures d'une articulation dite *à la cardan*, du nom de son inventeur, le mathématicien Cardan (1501-1576). Cette dernière articulation est utilisée pour la suspension des gyroscopes.

Fig. III-23

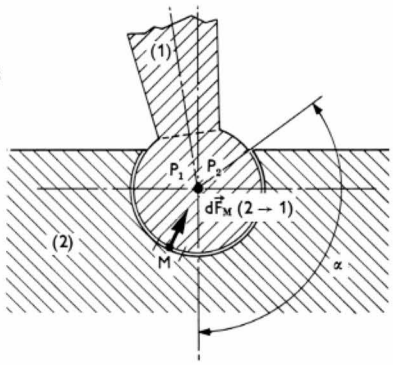


Fig. III-24

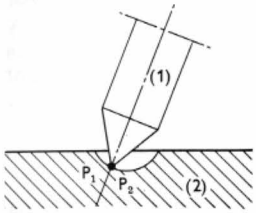
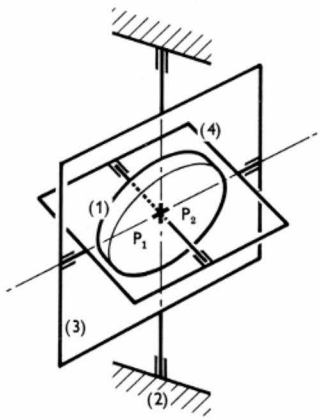


Fig. III-25



Le torseur associé aux actions de contact exercées par (2) sur (1) est défini dans le cas de la rotule sphérique (V. fig. III-23) par :

$$\vec{F}(2 \to 1) = \int_{(\mathcal{A})} d\vec{F}_M (2 \to 1) = \int_{(\mathcal{A})} \vec{f}_M (2 \to 1)\, d\mathcal{A}$$

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}}_{P_1} (2 \to 1) = \int_{(\mathcal{A})} \overrightarrow{P_1M} \wedge d\vec{F}_M (2 \to 1)$$

$$= \int_{(\mathcal{A})} \overrightarrow{P_1M} \wedge \vec{f}_M (2 \to 1)\, d\mathcal{A}$$

$(\mathcal{A})$ étant l'aire de la surface de contact, si l'articulation sphérique est parfaite, $d\vec{F}_M$ $(2 \to 1)$ est perpendiculaire en M aux surfaces en contact, d'où :

$$\forall M \in (\mathcal{A}) : \overrightarrow{P_1M} \wedge d\vec{F}_M (2 \to 1) = \vec{0}$$

et dans ce cas le torseur est défini par :

$$\vec{F}(2 \to 1) = \int_{(\mathcal{A})} d\vec{F}_M (2 \to 1)$$

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}}_{P_1} (2 \to 1) = \vec{0}$$

Il est donc spécial et correspond à un ensemble d'actions mécaniques admettant une résultante passant par le centre de l'articulation. Ce résultat peut se généraliser à toutes les articulations sphériques parfaites.

2° *Liaison rotoïde.* — Étant donné deux solides (1) et (2), on dit, qu'ils sont liés entre eux par une articulation rotoïde, s'il existe une infinité de points situés sur une droite (Δ_1) liée à (1) qui coïncident point par point avec une autre infinité de points situés sur une droite (Δ_2) liée à (2). Il est possible de réaliser une telle articulation en utilisant, soit le contact direct de deux surfaces de révolution liées l'une à (1), l'autre à (2) (fig. III-26 et III-27), soit le contact indirect par l'intermédiaire de solides auxiliaires tels que des billes (fig. III-28).

Fig. III-26

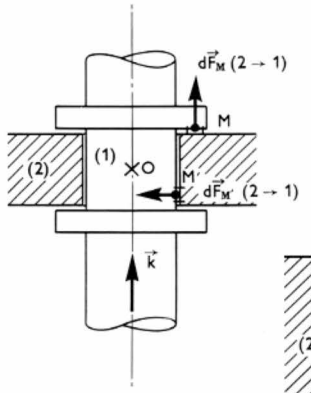


Fig. III-27

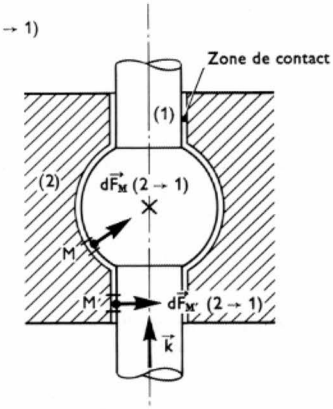
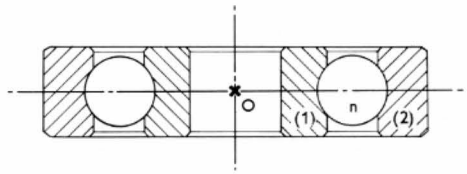


Fig. III-28



Dans le cas des réalisations des figures III-26 et III-27, O étant un point de l'axe de l'articulation et $(\mathcal{A})$, l'aire de la surface de contact, le torseur associé aux actions de contact exercées par (2) sur (1) est défini par :

$$\vec{F}(2 \to 1) = \int_{(\mathcal{A})} d\vec{F}_M (2 \to 1) = \int_{(\mathcal{A})} \vec{f}_M (2 \to 1)\, d\mathcal{A}$$

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}}_0 (2 \to 1) = \int_{(\mathcal{A})} \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{F}_M (2 \to 1)$$

$$= \int_{(\mathcal{A})} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}_M (2 \to 1)\, d\mathcal{A}$$

Si l'articulation est parfaite, toutes les forces élémentaires $d\vec{F}_M$ $(2 \to 1)$ sont perpendiculaires aux surfaces de contact et coupent l'axe de l'articulation ou lui sont parallèles. Dans ces conditions, si $\vec{k}$ est un vecteur unitaire de (Δ_1) ou (Δ_2) :

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}}_{\Delta_1} (2 \to 1) = \int_{(\mathcal{A})} \overrightarrow{\mathfrak{M}}_{\Delta_1} [d\vec{F}_M (2 \to 1)]$$

$$= \vec{k} \cdot \int_{(\mathcal{A})} \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{F}_M (2 \to 1) = \overline{0}$$

le torseur est alors défini par :

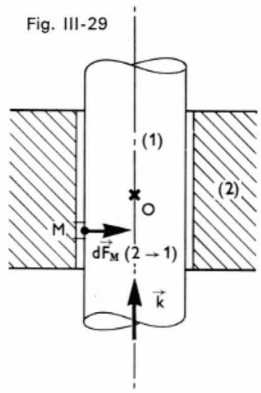
$$\vec{F}(2 \to 1) = \int_{(\mathcal{A})} d\vec{F}_M (2 \to 1)$$

et $\vec{\mathfrak{M}}_0(2 \to 1)$ tel que $\vec{\mathfrak{M}}_0(2 \to 1) \cdot \vec{k} = \vec{0}$

Ce résultat peut se généraliser à toutes les articulations rotoïdes parfaites.

3° *Liaison verrou.* — Étant donné deux solides (1) et (2), on dit qu'ils sont liés entre eux par une articulation verrou, si une droite (Δ_1) liée à (1) coïncide globalement, et non pas point par point, avec une droite (Δ_2) liée à (2), un glissement relatif de (1) par rapport à (2) dans la direction (Δ_1) étant permis. Il est possible de réaliser une telle articulation en ajustant une tige cylindrique dans un alésage, ce qui revient à mettre en contact deux cylindres de rayons voisins liés l'un à (1), l'autre à (2) (fig. III-29).

Fig. III-29



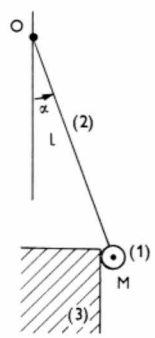


Fig. III-30

O étant un point de l'axe de l'articulation et $(\mathcal{A})$, l'aire de la surface de contact, le torseur associé aux actions de contact exercées par (2) sur (1) est défini par :

$$\vec{F}(2 \to 1) = \int_{(\mathcal{A})} d\vec{F}_M (2 \to 1) = \int_{(\mathcal{A})} \vec{f}_M (2 \to 1)\, d\mathcal{A}$$

$$\vec{\mathfrak{M}}_0(2 \to 1) = \int_{(\mathcal{A})} \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{F}_M (2 \to 1)$$

$$= \int_{(\mathcal{A})} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}_M (2 \to 1)\, d\mathcal{A}$$

Si l'articulation est parfaite, toutes les forces élémentaires $d\vec{F}_M(2 \to 1)$ sont perpendiculaires à la surface de contact et coupent l'axe d'articulation. Comme dans le cas de l'articulation rotoïde parfaite, $\vec{k}$ étant le vecteur unitaire de l'axe de l'articulation, le torseur associé aux forces de contact sera tel que :

$$\vec{\mathfrak{M}}_0 (2 \to 1) \cdot \vec{k} \equiv \vec{0}$$

De plus ici :

$$\vec{F}(2 \to 1) \cdot \vec{k} = \vec{0}$$

3. ÉQUILIBRE

3.1. Équilibre du point matériel

3.1.1. Définition. — Pratiquement on dira qu'un point matériel est en équilibre par rapport à un repère déterminé s'il est immobile par rapport à ce repère de référence.

L'équilibre est dit *absolu* si le point est immobile par rapport au référentiel absolu, il est dit *relatif* si le point est immobile par rapport à un autre référentiel. Souvent on assimile le référentiel terrestre au référentiel absolu, l'équilibre par rapport à la Terre sera considéré comme absolu ; dans ce qui suit il sera appelé simplement *équilibre*.

3.1.2. Condition d'équilibre. — Pour qu'un point matériel soit en équilibre, il est nécessaire que l'ensemble des forces exercées sur ce point admette une résultante nulle. Cela signifie que l'influence de ces efforts sur ce point matériel est nulle. Si ce dernier est initialement (avant l'application des efforts) au repos, il reste dans cet état ; s'il est animé initialement d'un mouvement rectiligne uniforme, ce mouvement n'est pas modifié.

3.1.3. Détermination des efforts inconnus. — Deux problèmes peuvent se poser au mécanicien : ou bien il faut trouver la ou les positions d'équilibre du point matériel, les efforts appliqués étant connus, ou bien le point matériel étant visiblement en équilibre, il faut déterminer les efforts qui lui sont appliqués. Dans les deux cas la solution peut être trouvée en utilisant la condition d'équilibre qui s'écrit :

$$\Sigma \vec{F}(\to M) = \vec{R}_M = \vec{0}$$

Cette condition est vectorielle et peut se traduire, soit par trois équations algébriques obtenues en projetant les vecteurs représentatifs des efforts sur trois axes orthogonaux, soit par un tracé graphique.

Exemple (fig. III-30). — Un corps (1), assimilable à un point matériel, est suspendu à l'extrémité d'un fil (2) et repose d'autre part sans frottement sur une paroi verticale (3). Sachant que (1) est en équilibre, on va déterminer la tension du fil et l'action exercée par (3) sur (1).

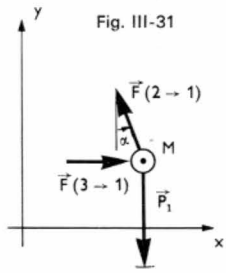
Dans toute étude mécanique, le premier réflexe doit être de chercher quels sont les efforts exercés sur le point matériel, le solide, ou l'ensemble de solides envisagés. Pour cela on isole le point matériel, le solide ou l'ensemble de solides et on cherche à répertorier les efforts de contact et les efforts exercés à distance appliqués sur le système isolé. Ainsi, le point matériel *M* (fig. III-31) est en contact avec le fil (2) : la force $\vec{F}(2 \to 1)$ exercée sur *M* par le fil a la direction du fil et correspond à sa tension ; il est également en contact avec la paroi (3) : la force $\vec{F}(3 \to 1)$ exercée par la paroi sur *M* est orthogonale au plan de la paroi (3) puisqu'il n'y a pas de frottement ; le point matériel *M* est aussi soumis à l'attraction de la Terre, c'est-à-dire à la force verticale $\vec{P}_1$.

Pour déterminer les inconnues on utilise la condition d'équilibre de *M* :

$$\vec{F}(3 \to 1) + \vec{F}(2 \to 1) + \vec{P}_1 = \vec{0} \qquad (1)$$

Dans cette équation seul $\vec{P}_1$ est entièrement connu ; $\vec{F}(3 \to 1)$ et $\vec{F}(2 \to 1)$ ne sont définis qu'en direction : il faut donc chercher leurs modules.

Fig. III-31



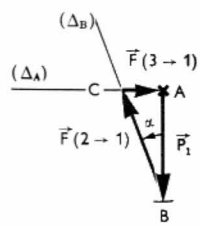


Fig. III-32

La solution analytique consiste à projeter l'équation (1) sur des axes *Ox* et *Oy*, choisis de façon à simplifier les calculs. Il vient :

$$-F(2 \to 1) \cdot \sin\alpha + F(3 \to 1) + 0 = 0$$

$$F(2 \to 1) \cdot \cos\alpha + 0 - P_1 = 0$$

D'où : $F(2 \to 1) = \dfrac{P_1}{\cos\alpha}$, et : $F(3 \to 1) = P_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha$

La solution graphique consiste à construire la somme géométrique des vecteurs équipollents aux efforts exercés sur *M*, en commençant par les efforts connus et en tenant compte des directions des efforts inconnus (fig. III-32) ; on trace ainsi à partir de *A* : le vecteur $\overrightarrow{AB}$ tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{P}_1$ et la droite (Δ_A) parallèle à $\vec{F}(3 \to 1)$; à partir de *B* on trace la droite (Δ_B) parallèle à $\vec{F}(2 \to 1)$. Si *C* est le point d'intersection de ces deux droites, on peut écrire :

$$\overrightarrow{BC} = \vec{F}(2 \to 1), \quad \text{et :} \quad \overrightarrow{CA} = \vec{F}(3 \to 1)$$

3.2. Équilibre du solide

3.2.1. Condition d'équilibre. — Pour qu'un solide (S), que l'on soumet à l'action d'un ensemble de forces soit, en équilibre, il est nécessaire que cet ensemble, ou tout ensemble équivalent n'ait aucune influence sur l'état de repos de (S). Or on a vu que tout ensemble de forces pouvait se réduire à un ensemble équivalent constitué d'une force et d'un couple : pour que le système initial n'ait aucune influence sur (S), il est donc nécessaire que la force et le couple du système réduit soient tous deux nuls ; ou, ce qui revient au même, que le torseur des efforts extérieurs soit équivalent à zéro. D'où les deux équations vectorielles d'équilibre :

1° Si l'ensemble de forces exercées sur (S) est discret et constitué de n forces :

$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \ldots + \vec{F_n} = \Sigma \vec{F_i} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}}[C] = \overrightarrow{\mathfrak{M}}_P = \overrightarrow{\mathfrak{M}}_P(\vec{F_1}) + \overrightarrow{\mathfrak{M}}_P(\vec{F_2}) + \ldots + \overrightarrow{\mathfrak{M}}_P(\vec{F_n}) = \vec{0}, \ \forall P$$

2° Si l'ensemble de forces exercées sur (S) est continu et défini sur une portion (σ) de la surface de (S) :

$$\vec{F} = \int_{(\sigma)} \vec{f}(M) \, . \, d\sigma(M) = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}}[C] = \overrightarrow{\mathfrak{M}}_P = \int_{(\sigma)} \overrightarrow{PM} \wedge \vec{f}(M) \, . \, d\sigma(M) = \vec{0}, \ \forall P$$

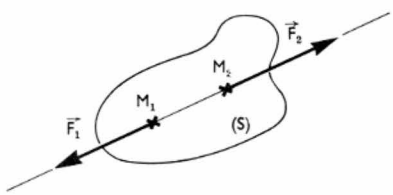
3° Si l'ensemble de forces exercées sur (S) est constitué d'un ensemble discret de n forces et d'un ensemble continu défini sur une portion (σ) de la surface de (S) :

$$\vec{F} = \Sigma \vec{F_i} + \int_{(\sigma)} \vec{f}(M) \, . \, d\sigma(M) = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}}[C] = \overrightarrow{\mathfrak{M}}_P = \Sigma [\overrightarrow{PM_i} \wedge \vec{F_i}] + \int_{(\sigma)} \overrightarrow{PM} \wedge \vec{f}(M) \, d\sigma(M) = \vec{0}, \ \forall P$$

Dans le cas particulier où (S) n'est soumis qu'à l'action de deux forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ et est en équilibre (fig. III-33), la

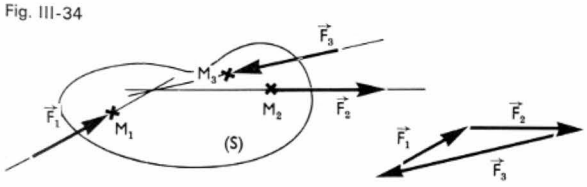
Fig. III-33



première équation d'équilibre entraîne : $\vec{F_1} + \vec{F_2} = \vec{0}$, soit : $\vec{F_1} = -\vec{F_2}$, et la deuxième équation indique que les lignes d'action de $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ sont confondues. Par conséquent, pour qu'un solide soit en équilibre sous l'action de deux forces, il est nécessaire que ces deux forces aient même ligne d'action et soient opposées.

Dans le cas particulier où (S) est en équilibre sous l'action de trois forces $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, $\vec{F_3}$ (fig. III-34), la première équation d'équilibre impose aux trois forces d'être situées dans des plans parallèles ou confondus, la deuxième équation, compte tenu de cette première condition, impose aux trois forces d'être coplanaires, et concourantes ou parallèles. Par conséquent, pour qu'un solide soit en équilibre sous l'action de trois forces il est nécessaire que ces forces soient dans un même plan et qu'elles soient concourantes ou parallèles.

Fig. III-34



3.2.2. Détermination analytique des efforts inconnus. — Comme pour l'équilibre du point matériel, deux problèmes peuvent se poser : tous les efforts exercés sur (S) sont connus et on cherche les possibilités d'équilibre de (S) ; ou bien (S) est manifestement en équilibre et on cherche à déterminer les efforts permettant cet équilibre. Pour trouver ces forces, on dispose des deux équations dites d'équilibre. Ces équations vectorielles peuvent être exploitées analytiquement en projetant sur trois axes orthogonaux, choisis de façon à simplifier au maximum les calculs. De cette façon on obtient six équations algébriques comme on va le voir à l'aide de l'exemple suivant.

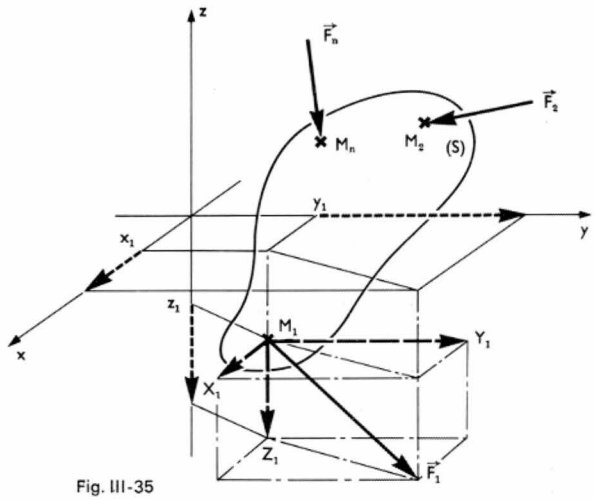


Fig. III-35

Ainsi (fig. III-35), si (S) est sollicité par n forces $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, ... et $\vec{F_n}$ de composantes X_1, Y_1, Z_1 pour F_1, X_2, Y_2, Z_2 pour F_2, ... et X_n, Y_n, Z_n pour $\vec{F_n}$ dans le système d'axes choisi, ces forces étant respectivement appliquées à (S) en M_1, M_2, ... et M_n de coordonnées x_1, y_1, z_1 pour M_1, x_2, y_2, z_2 pour M_2, ... et x_n, y_n, z_n pour M_n, on a alors les six équations algébriques suivantes :

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n = 0 \qquad (1)$$

$$Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n = 0 \qquad (2)$$

$$Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n = 0 \qquad (3)$$

$$(y_1Z_1 - z_1Y_1) + (y_2Z_2 - z_2Y_2) + \ldots + (y_nZ_n - z_nY_n) = 0 \qquad (4)$$

$$(z_1X_1 - x_1Z_1) + (z_2X_2 - x_2Z_2) + \ldots + (z_nX_n - x_nZ_n) = 0 \qquad (5)$$

$$(x_1Y_1 - y_1X_1) + (x_2Y_2 - y_2X_2) + \ldots + (x_nY_n - y_nX_n) = 0 \qquad (6)$$

Grâce aux équations d'équilibre on peut donc déterminer six inconnues parmi les composantes des efforts exercés sur un même solide ; s'il y a plus de six inconnues, le problème est indéterminé ; s'il y a moins de six inconnues, il faut vérifier que les six équations sont bien satisfaites. Dans le cas particulier d'un solide en équilibre sous l'action d'un ensemble de forces toutes contenues dans un même plan $(x\,O\,y)$, les six équations précédentes se réduisent aux trois équations (1), (2) et (6).

Les équations d'équilibre peuvent également être exploitées graphiquement (statique graphique), surtout lorsque les forces appliquées sont coplanes. Dans de nombreux cas aussi on peut faire appel à la fois à la méthode graphique et à la méthode analytique.

Exemple. — La figure III-36 représente un treuil (T) commandé manuellement. On va déterminer la force $\vec{R}$ qu'il faut appliquer en M, perpendiculairement au plan de la manivelle, pour maintenir le treuil en équilibre lorsqu'il supporte une charge de poids P et que le plan de la manivelle est horizontal. On cherchera également les actions exercées par les paliers (1) et (2) sur l'axe du treuil. On néglige le poids propre du treuil, on suppose que les articulations (1) et (2) sont sans frottement et que leurs actions sur (T) se

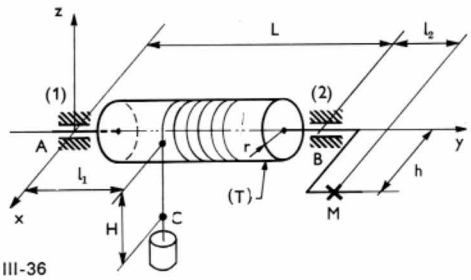


Fig. III-36

réduisent aux deux forces $\vec{F}(1 \to T)$ et $\vec{F}(2 \to T)$ appliquées en A et en B perpendiculairement à l'axe du treuil.

On *isole* le treuil et une partie du câble (fig. III-37) en supposant, dans la position envisagée, que le tout constitue un même corps solide. On cherche les efforts exercés: l'axe du treuil est soumis aux actions de contact des paliers (1) et (2), qui d'après les hypothèses précédentes

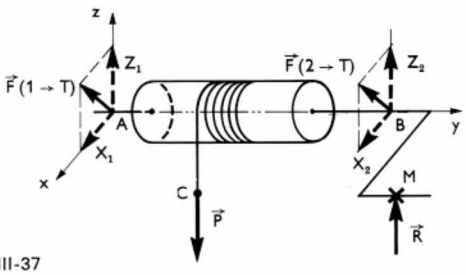


Fig. III-37

se réduisent aux seules forces $\vec{F}(1 \to T)$ et $\vec{F}(2 \to T)$ exercées en A et B dans des plans parallèles au plan (xAz); la manivelle du treuil est soumise à l'action de contact $\vec{R}$ permettant de maintenir l'équilibre, qui d'après les données est perpendiculaire au plan (xAy), le câble du treuil supporte l'action de contact de la partie du câble non représentée sur la figure et cette force est égale à P, poids du corps soulevé. Il n'y a aucune action exercée à distance étant donné que l'on néglige le poids propre du treuil.

Le treuil n'est en équilibre que si les deux équations vectorielles suivantes sont satisfaites:

$$\vec{F}(1 \to T) + \vec{P} + \vec{F}(2 \to T) + \vec{R} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}_A}[\vec{F}(1 \to T)] + \overrightarrow{\mathfrak{M}_A}(\vec{P}) + \overrightarrow{\mathfrak{M}_A}[\vec{F}(2 \to T)] + \overrightarrow{\mathfrak{M}_A}(\vec{R}) = \vec{0}$$

Les modules, les sens et, partiellement, les directions des efforts $\vec{F}(1 \to T)$ et $\vec{F}(2 \to T)$ sont inconnus. Le module de la force $\vec{R}$ est inconnu. Pour déterminer ces inconnues qui sont au nombre de cinq, quatre pour les forces $\vec{F}(1 \to T)$ et $\vec{F}(2 \to T)$, une pour la force $\vec{R}$, on peut utiliser les équations précédentes en projetant les vecteurs qu'elles contiennent sur les axes Ax, Ay et Az: on obtient alors les six équations algébriques d'équilibre.

Pour rendre l'étude plus méthodique et pour faciliter sa mise en équation, on trace un tableau dans lequel on porte pour chaque force: les composantes du vecteur définissant son point d'application, ses propres composantes et celles de son moment; on obtient ici le tableau suivant:

D'où les six équations d'équilibre:

$$X_1 + 0 + X_2 + 0 = 0 \quad (1)$$
$$0 + 0 + 0 + 0 = 0 \quad (2)$$
$$Z_1 - P + Z_2 + R = 0 \quad (3)$$
$$0 - P.l_1 + Z_2.L + R.(L + l_2) = 0 \quad (4)$$
$$0 + P.r + 0 - R.h = 0 \quad (5)$$
$$0 + 0 - X_2.L + 0 = 0 \quad (6)$$

L'équation (5) donne immédiatement: $R = P.r/h$, et plus le rapport r/h est faible, plus la force R à appliquer pour soulever la charge est faible.

Les équations (1) et (6) entraînent: $X_1 = X_2 = 0$, et les équations (3) et (4) permettent de calculer Z_1 et Z_2:

$$Z_2 = P\left(\frac{l_1}{L} - \frac{r}{h}\frac{(L + l_2)}{L}\right)$$

$$Z_1 = P\left(\frac{L - l_1}{L} + \frac{r.l_2}{h.L}\right)$$

Par conséquent, les forces $\vec{F}(1 \to T)$ et $\vec{F}(2 \to T)$, pour cette position du treuil (manivelle horizontale), sont verticales et de modules respectifs: $P\left|\frac{l_1}{L} - \frac{r}{h}\frac{L - l_2}{L}\right|$ et $P\left(\frac{L - l_1}{L} + \frac{rl_2}{hL}\right)$; selon le signe de l'expression: $\left(\frac{l_1}{L} - \frac{r}{h}\frac{L - l_2}{L}\right)$, la force $\vec{F}(2 \to T)$ a le sens de l'axe Az ou le sens opposé.

3.3. Équilibre d'un ensemble de corps solides

Condition d'équilibre. — Pour qu'un ensemble de n solides soit en équilibre, il est nécessaire que chacun des solides constituant cet ensemble soit en équilibre. Il faut donc que les équations d'équilibre relatives à chacun des n solides soient satisfaites.

Dans ces équations interviennent des efforts qui sont intérieurs à l'ensemble, d'autres qui sont extérieurs.

On démontre que pour qu'un tel ensemble soit en équilibre, il est nécessaire que les actions mécaniques extérieures à cet ensemble constituent un système équivalent à zéro. *Il est important de remarquer que cette condition n'est que nécessaire.* En effet, si l'on considère (fig. III-38) un ensemble de deux barres (1) et (2), de poids négligea-

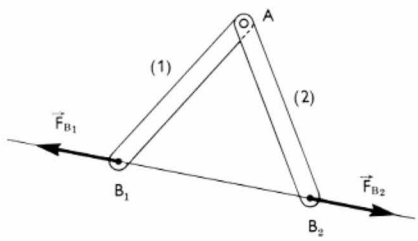


Fig. III-38

bles, articulées en A et soumises en B_1 et B_2 à deux forces extérieures à l'ensemble, de direction B_1B_2 et telles que: $\overrightarrow{F_{B_1}} = -\overrightarrow{F_{B_2}}$, un tel ensemble n'est pas en équilibre, alors que l'ensemble des efforts extérieurs est équivalent à zéro.

Exemple. — La figure III-39 représente le mécanisme d'une presse constituée par quatre barres égales (1), (2), (3) et (4) articulées: entre elles en A_1 et A_2, sur le bâti fixe (6) en O_1 et O_2 et sur un plateau mobile (5) en O_3 et O_4. Sous l'action des deux forces horizontales égales et opposées $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ appliquées en B_1 et B_2, le plateau (5) comprime le corps (7). Connaissant la valeur de $\vec{F}_1$, on va détermi-

	$\overrightarrow{AA}$	$\vec{F}(1 \to T)$	$\overrightarrow{\mathfrak{M}_A}[\vec{F}(1 \to T)]$	$\overrightarrow{AC}$	$\vec{P}$	$\overrightarrow{\mathfrak{M}_A}(\vec{P})$	$\overrightarrow{AB}$	$\vec{F}(2 \to T)$	$\overrightarrow{\mathfrak{M}_A}[\vec{F}(2 \to T)]$	$\overrightarrow{AM}$	$\vec{R}$	$\overrightarrow{\mathfrak{M}_A}(\vec{R})$
Ax	0	X_1	0	r	0	$-P.l_1$	0	X_2	$Z_2.L$	h	0	$R(L + l_2)$
Ay	0	0	0	l_1	0	$+P.r$	L	0	0	$L + l_2$	0	$-R.h$
Az	0	Z_1	0	$-H$	$-P$	0	0	Z_2	$-X_2.L$	0	R	0

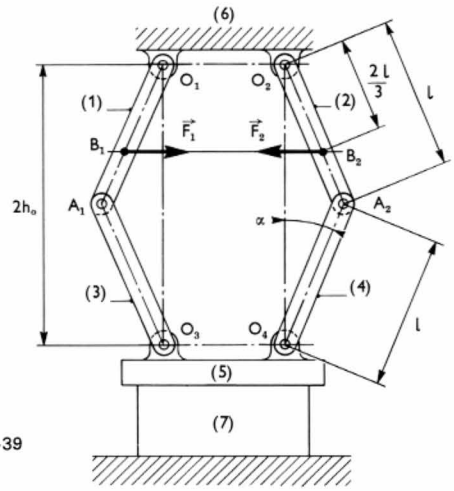


Fig. III-39

ner la résultante des efforts de compression exercés sur le corps (7) supposé indéformable et calculer les actions mécaniques exercées sur chacune des barres, la distance initiale $2h_0$ séparant O_1 de O_3 étant donnée. Dans toute l'étude, on négligera le poids propre de chacun des corps et on supposera les articulations parfaites.

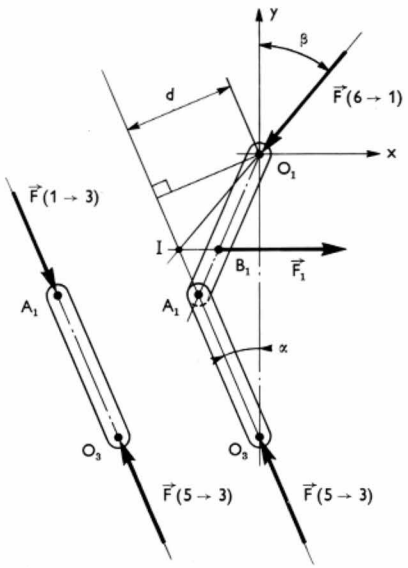


Fig. III-40

On isole d'abord l'ensemble partiel constitué par les deux barres (1) et (3) (fig. III-40) ; les efforts extérieurs à cet ensemble sont : l'action de contact $\vec{F}(6 \to 1)$, du bâti (6) sur la barre (1), l'action de contact $\vec{F_1}$ exercée en B_1 sur (1), force qui est entièrement connue, et l'action de contact $\vec{F}(5 \to 3)$ du plateau (5) sur la barre (3). Cette dernière force a pour ligne d'action la droite $O_3 A_1$, car si l'on isole la barre (3), elle est en équilibre sous l'action des deux forces $\vec{F}(1 \to 3)$ et $\vec{F}(5 \to 3)$ exercées en O_3 et A_1 : ces forces sont donc directement opposées et ont pour direction $O_3 A_1$. Pour que l'ensemble (1) et (3) soit en équilibre, il est nécessaire que les deux équations vectorielles suivantes soient vérifiées :

$$\vec{F}(5 \to 3) + \vec{F_1} + \vec{F}(6 \to 1) = \vec{0} \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}}_{O_1}[\vec{F}(5 \to 3)] + \overrightarrow{\mathfrak{M}}_{O_1}(\vec{F_1}) + \overrightarrow{\mathfrak{M}}_{O_1}[\vec{F}(6 \to 1)] = \vec{0} \quad (2).$$

L'équation (II) entraîne, sur l'axe $O_1 z$, l'équation algébrique :

$$\overline{\mathfrak{M}}_{O_1 z}[\vec{F}(5 \to 3)] + \overline{\mathfrak{M}}_{O_1 z}(\vec{F_1}) + \overline{\mathfrak{M}}_{O_1 z}[\vec{F}(6 \to 1)] = 0$$

$$\text{ou :} \quad -d \cdot F(5 \to 3) + \frac{2h_0}{3} \cdot F_1 + 0 = 0$$

Or : $d = 2h_0 \sin\alpha$, et : $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{l^2 - h_0^2}}{l}$

d'où : $F(5 \to 3) = \dfrac{2h_0}{3d} F_1 = \dfrac{2h_0}{3 \cdot 2h_0 \sin\alpha} F_1 = \dfrac{1}{3\sin\alpha} F_1$

L'équation (1) entraîne, sur $O_1 x$ et $O_1 y$, deux équations algébriques qui permettent ensuite de déterminer $F(6 \to 1)$; par ailleurs, la symétrie du mécanisme entraîne :

$$F(5 \to 4) = F(5 \to 3) \text{ et : } F(6 \to 2) = F(6 \to 1).$$

Il faut remarquer que les équations (1) et (2) peuvent être exploitées graphiquement : elles impliquent que les trois forces sont coplanaires et concourantes et que leur somme géométrique est nulle ; le tracé (fig. III-41) permet donc de déterminer entièrement $\vec{F}(5 \to 3)$ et $\vec{F}(6 \to 1)$

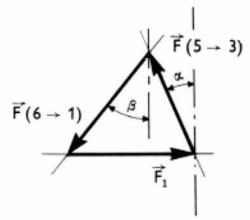


Fig. III-41

Pour trouver les efforts exercés sur (7), on isole le plateau (5) (fig. III-42) : il est soumis à l'action de contact $\vec{F}(3 \to 5) = -\vec{F}(5 \to 3)$ de la barre (3), à l'action de contact $\vec{F}(4 \to 5) = -\vec{F}(5 \to 4)$ de la barre (4) et à un ensemble de forces de contact exercées par le corps (7) et défini par une densité vectorielle $\vec{f_M}(7 \to 5)$. Cet ensemble, étant donné la symétrie du mécanisme, est équivalent à une force

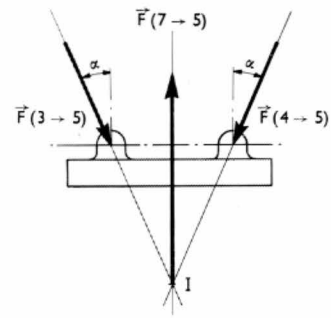


Fig. III-42

unique $\vec{F}(7 \to 5) = \int_{(\Sigma)} \vec{f}_M(7 \to 5)\, d\Sigma$ appliquée au centre de (5). Le plateau (5) étant en équilibre sous l'action des trois forces, on établit directement, grâce aux tracés de la figure III-43 :

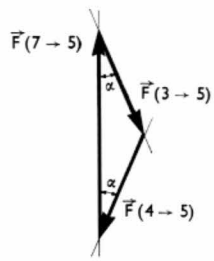


Fig. III-43

$$F(7 \to 5) = 2F(3 \to 5) \cdot \cos\alpha = \frac{2}{3} \cdot F_1 \cdot \operatorname{cotg}\alpha$$

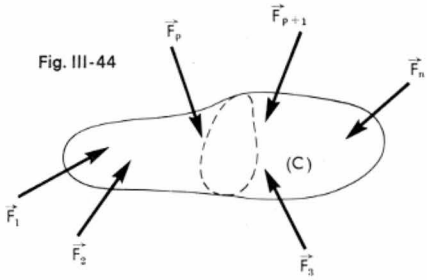
Or : $\cos\alpha = \dfrac{h_0}{l}$ d'où : $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{h_0}{\sqrt{l^2 - h_0^2}}$

et : $$F(7 \to 5) = \frac{2}{3} \frac{h_0}{\sqrt{l^2 - h_0^2}} \cdot F_1$$

La force de compression exercée sur (7) est proportionnelle à F_1, le coefficient de proportionnalité étant d'autant

plus grand que l'angle α est faible ou que h_0 est proche de l. À la limite F (7 → 5) tend vers l'infini si l est peu différent de h_0, mais ce résultat est théorique, car on a supposé (7) indéformable.

3.4. Utilisation des lois de l'équilibre en résistance des matériaux. — En résistance des matériaux, qui a pour objet l'étude du comportement des pièces mécaniques sous



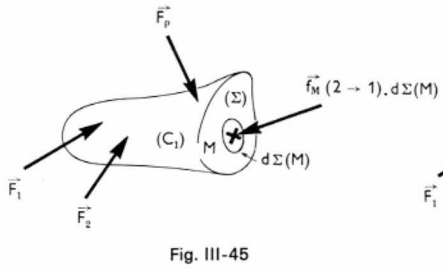


Fig. III-45

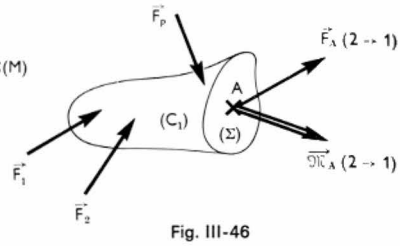


Fig. III-46

l'action des efforts qui leur sont appliqués, on suppose les pièces déformables et l'on cherche à connaître les efforts qui prennent naissance à l'intérieur des corps considérés. Lorsque le corps étudié (C) est en équilibre sous l'action d'un certain nombre d'efforts extérieurs $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \ldots \vec{F}_n$ (fig. III-44), une partie quelconque (C_1) de ce corps est elle-même en équilibre.

Si l'on *isole* cette portion (C_1) (fig. III-45), elle est soumise aux efforts extérieurs $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_p$ et aux actions exercées par son complément (C_2), actions qui peuvent être représentées par un champ vectoriel de densité vectorielle $\vec{f}_M$ (2 → 1) définie par unité d'aire entourant tout point M de la frontière commune (Σ) de (C_1) et (C_2) ou par le système réduit équivalent à cet ensemble. Ce système est défini en un point A de (Σ) (fig. III-46) par :

$$\vec{F}_A(2 \to 1) = \int_{(\Sigma)} \vec{f}_M(2 \to 1) \, . \, d\Sigma \, (M)$$

$$\vec{\mathfrak{M}}_A(2 \to 1) = \int_{(\Sigma)} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}_M(2 \to 1) \, . \, d\Sigma \, (M)$$

Les conditions d'équilibre relatives à (C_1) entraînent immédiatement :

$$\vec{F}_A(2 \to 1) = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_p)$$

$$\vec{\mathfrak{M}}_A(2 \to 1) = -[\vec{\mathfrak{M}}_A(\vec{F}_1) + \vec{\mathfrak{M}}_A(\vec{F}_2) + \ldots + \vec{\mathfrak{M}}_A(\vec{F}_p)]$$

On dit alors que le torseur $[T(2 \to 1)]$ associé aux efforts exercés par (C_2) sur (C_1) est opposé au torseur $[T_1]$ associé aux efforts extérieurs à (C) et exercés sur (C_1).

La statique permet de déterminer globalement les efforts exercés par (C_2) sur (C_1) et la résistance des matériaux permet de déterminer la densité vectorielle d'effort $\vec{f}_M$ (2 → 1) appelée encore *contrainte* au point M de (Σ).

CHAPITRE IV

DYNAMIQUE

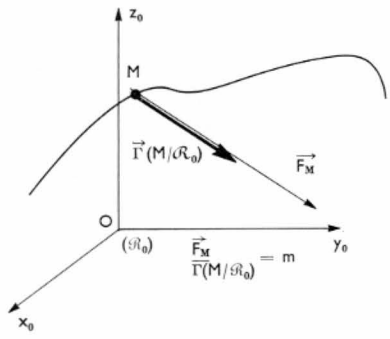
La dynamique est l'étude des relations entre les mouvements des points matériels ou des solides et les causes qui ont provoqué ces mouvements, c'est-à-dire les forces. Comparée à la statique, la dynamique est une partie beaucoup plus récente de la mécanique : il a fallu attendre le XVIIIe siècle, avec Newton, pour que soit énoncée une formulation rigoureuse des liens existant entre efforts et mouvements.

1. LOI FONDAMENTALE - THÉORÈMES GÉNÉRAUX

1.1. Le point matériel

1.1.1. Énoncé de la loi fondamentale (fig. IV-1). — D'après le principe de l'inertie énoncé par Galilée, tout point matériel *isolé* est immobile, ou est animé d'un mouvement rectiligne uniforme par rapport au repère absolu. Il n'en est plus de même si le point matériel considéré est soumis à un

Fig. IV-1



certain nombre d'actions mécaniques. Ainsi, dans le cas d'un point matériel libre M (qui ne subit aucune action de contact) si une force $\vec{F}$ est exercée à distance, il y a modification de l'état de mouvement ou de repos de M. L'accélération de M caractérise à la fois la variation d'allure du mouvement de M et la variation de la direction suivie par M (chap. 2, § 2.2.2). Force et accélération sont donc liées et les expériences réalisées ont permis de constater que force et accélération avaient même direction, même sens et qu'elles étaient proportionnelles entre elles tant que les vitesses atteintes ne dépassaient pas certaines limites. Cette loi de proportionnalité fut mise en évidence par Galilée dans le cas particulier d'une force $\vec{F}$ constante, puis par Huyghens dans le cas particulier du mouvement circulaire uniforme. C'est Newton qui énonça la généralisation de cette loi, base de la mécanique. Elle constitue le cinquième axiome de la mécanique (V. chap. 3 § 2.1, § 2.3, § 2.4 et § 2.5.2) ; elle porte le nom de *loi fondamentale de la dynamique* ou *loi de Newton* et s'énonce ainsi :

L'accélération d'un point matériel est proportionnelle à la force qui lui est appliquée. Le coefficient de proportionnalité m est une constante positive ne dépendant que du point matériel considéré ; il est appelé *masse* de ce point matériel. Cette loi peut être traduite par les relations suivantes :

$$\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0) = \frac{\vec{F}_M}{m}, \text{ ou : } \vec{F}_M = m \, . \, \vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0)$$

Il faut remarquer que cette loi ne s'applique que si le repère $(\mathcal{R}_0)$ est le repère absolu (V. chap. 3 § 1.1) ou un repère animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport au repère absolu. D'autre part, la loi de Newton n'est qu'approchée : m n'est constant qu'en première approximation et si la vitesse de M devient très élevée, de l'ordre de la vitesse de propagation de la lumière, il n'est plus possible de considérer la masse de M comme une constante. La mécanique relativiste a permis d'établir une loi plus rigoureuse dans laquelle la masse m est fonction de la vitesse de M. Pratiquement, en mécanique industrielle la loi de Newton est considérée comme exacte et est utilisée en prenant comme repère $(\mathcal{R}_0)$ un repère lié à la Terre et en

supposant m constant. L'erreur ainsi commise reste faible et les résultats obtenus sont tout à fait acceptables. Ces approximations permettent d'étudier plus simplement les mouvements des points matériels et des corps solides. Dans ce qui suit, sauf indication contraire, on assimilera tout repère terrestre au repère absolu.

1.1.2. Masse et poids du point matériel. — D'après la loi de Newton, la masse m est constante pour un point matériel donné. Mais pour deux points matériels de même volume, le coefficient de proportionnalité entre force et accélération varie avec la nature du matériau constituant le point matériel (fig. IV-2). Pour des points matériels de

Fig. IV-2

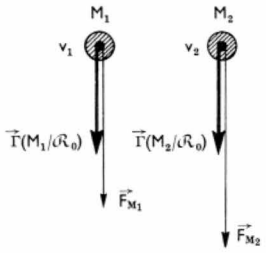
M_1 et M_2 : matériaux différents

$v_1 = v_2$

$$\frac{\overrightarrow{F_{M_1}}}{\overrightarrow{\Gamma}(M_1/\mathcal{R}_0)} = m_1$$

$$\frac{\overrightarrow{F_{M_2}}}{\overrightarrow{\Gamma}(M_2/\mathcal{R}_0)} = m_2$$

$m_1 \neq m_2$



volumes différents mais constitués par un même matériau homogène, le coefficient m varie avec les volumes des points matériels : il est proportionnel à ces volumes (fig. IV-3).

Fig. IV-3

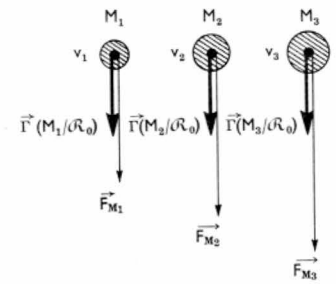
M_1, M_2, M_3 : même matériau

$v_2 = 2 . v_1$ $v_3 = 3 . v_1$

$$\frac{\overrightarrow{F_{M_1}}}{\overrightarrow{\Gamma}(M_1/\mathcal{R}_0)} = m_1$$

$$\frac{\overrightarrow{F_{M_2}}}{\overrightarrow{\Gamma}(M_2/\mathcal{R}_0)} = m_2 = 2 . m_1$$

$$\frac{\overrightarrow{F_{M_3}}}{\overrightarrow{\Gamma}(M_3/\mathcal{R}_0)} = m_3 = 3 . m_1$$



On peut donc écrire :

$$m = \rho . v$$

expression dans laquelle v représente le volume du point matériel et ρ la masse par unité de volume ou encore masse volumique du point matériel.

Pour comparer des masses entre elles, on utilise la loi de Newton : deux points matériels de même masse et soumis à la même force auront même accélération.

L'action à distance qu'exerce la Terre sur un point matériel est appelée *poids* du point matériel. Pour déterminer cette force, on abandonne un point matériel libre au voisinage de la Terre : en première approximation il n'est soumis qu'à l'action à distance qu'exerce sur lui la Terre. En appliquant la loi fondamentale, on obtient :

$$\overrightarrow{P_M} = \overrightarrow{F}(T \to M) = m . \overrightarrow{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0)$$

En première approximation, l'étude expérimentale du mouvement de M montre que ce mouvement est à trajectoire rectiligne verticale dirigée vers le bas et à accélération constante ; cela signifie que la force exercée par la Terre sur M est constante lorsque M se trouve au voisinage de celle-ci. Par ailleurs, si l'on abandonne plusieurs points matériels en chute libre au même lieu, on constate qu'ils ont tous même accélération et cela quelle que soit la nature des matériaux les constituant, donc quelle que soit leur masse. On en déduit qu'en un lieu donné l'accélération $\overrightarrow{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0)$ est indépendante du point matériel considéré ; on la note généralement $\overrightarrow{g}$ et on l'appelle *accélération de la pesanteur*. Le poids d'un point matériel est donc proportionnel à sa masse :

$$\overrightarrow{P_M} = m . \overrightarrow{g}$$

Le vecteur-accélération de la pesanteur a une valeur qui dépend du lieu considéré. Cette variation est liée à la variation de la distance séparant le point matériel considéré du centre de la Terre : ainsi, en un point situé au voisinage du pôle nord g est égal à 9,832 m/s², mais, si ce même point est placé à l'équateur, g ne dépasse pas 9,780 m/s².

La loi d'attraction newtonienne (V. chap. 3 § 2.6.2) permet d'expliquer cette différence, la Terre étant aplatie aux pôles et renflée à l'équateur. L'accélération de la pesanteur est donc fonction de la latitude et de l'altitude du lieu considéré : ainsi, pour une latitude correspondant à celle du centre de la France et pour une altitude comprise entre 0 et 500 mètres, g vaut 9,81 m/s² (V. t. 1, Préliminaires, chap. 3).

Pratiquement, dans de nombreuses applications, on donne à g la valeur 9,81 m/s², ou, si l'on ne désire pas une grande précision, la valeur 10 m/s².

1.1.3. Quantité de mouvement et d'accélération (fig. IV-4). — Étant donné un repère de référence $(\mathcal{R})$ défini par le trièdre trirectangle direct (O, xyz) et un point matériel M en mouvement par rapport à $(\mathcal{R})$, on sait définir le vecteur-vitesse $\overrightarrow{V}$ de M par rapport à $(\mathcal{R})$ et le vecteur-accélération $\overrightarrow{\Gamma}$ de M par rapport à $(\mathcal{R})$ (V. chap. 2, § 2.2).

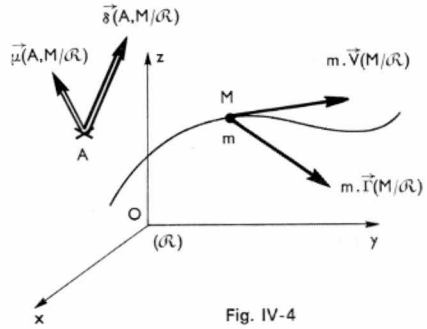


Fig. IV-4

La *quantité de mouvement* de M est définie par le produit de sa masse m par le vecteur-vitesse : $m . \overrightarrow{V}(M/\mathcal{R})$. De la même façon, la *quantité d'accélération* de M est définie par le produit de sa masse m par le vecteur-accélération : $m . \overrightarrow{\Gamma}(M/\mathcal{R})$. Ces deux expressions vectorielles sont définies à un instant donné et pour un point matériel déterminé.

Les moments de ces vecteurs quantité de mouvement et quantité d'accélération par rapport à un point A quelconque sont appelés respectivement *moment cinétique* et *moment dynamique* de M au point A dans son mouvement par rapport à $(\mathcal{R})$. On écrit :

moment cinétique : $\overrightarrow{\mu}(A, M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{AM} \wedge m . \overrightarrow{V}(M/\mathcal{R})$

moment dynamique : $\overrightarrow{\delta}(A, M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{AM} \wedge m . \overrightarrow{\Gamma}(M/\mathcal{R})$

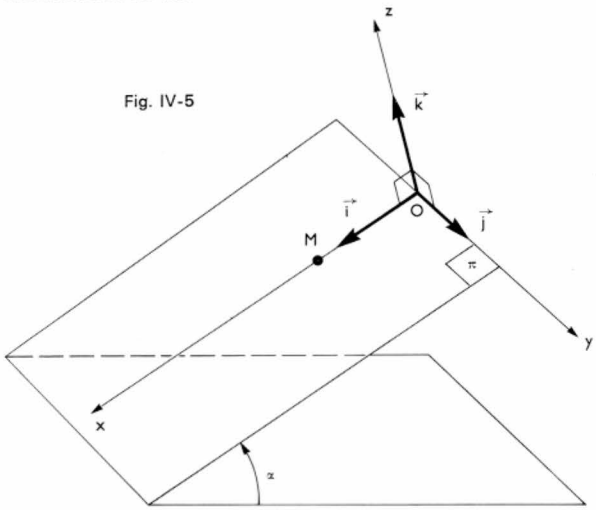
1.1.4. Utilisation de la loi fondamentale. — Lors du déplacement d'un point matériel sous l'action de forces qui lui sont appliquées, la loi de Newton permet d'établir la relation existant entre mouvement et effort : la résultante des forces exercées sur M est déterminée lorsque l'on connaît l'accélération absolue de M ; réciproquement, l'accélération absolue de M est définie lorsque l'on connaît les efforts exercés sur M. Dans de nombreux cas, le mouvement et les efforts sont partiellement connus ; à l'aide de la loi de Newton et des connaissances que l'on a sur la nature des forces exercées, il faut alors déterminer complètement tous les efforts et toutes les caractéristiques du mouvement : trajectoire, vitesse et accélération. Il faut bien noter que la loi fondamentale se traduit par une relation vectorielle : par conséquent on peut disposer de trois équations algébriques en projetant sur les trois axes d'un repère orthonormé. D'autre part, résultante des forces exercées sur M et quantité d'accélération absolue de M étant deux vecteurs équivalents, il en est de même du moment dynamique en un point A et du moment en ce même point de la résultante des efforts exercés sur M :

$$\overrightarrow{\delta}(A, M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{F_M}$$

Exemple (fig. IV-5). — Un corps assimilable a un point matériel M de poids $\overrightarrow{P}$ est abandonné sans vitesse initiale

depuis une position O, sur un plan (π) lié à la Terre et incliné d'un angle α par rapport au plan horizontal. En supposant que le contact soit obtenu sans frottement, on va étudier le mouvement de M.

Fig. IV-5



Comme dans l'étude de l'équilibre du point matériel, la première opération consiste à isoler fictivement le point matériel, en le représentant graphiquement seul, et à faire l'inventaire de toutes les forces qui lui sont appliquées (fig. IV-6). Certaines de ces forces seront entièrement définies, d'autres ne le seront que partiellement, d'autres enfin ne seront définies ni en direction, ni en module. Ainsi, sur la figure qui représente le point matériel M isolé, on a mis en place la force de contact $\vec{F}(\pi \to M)$, connue en direction car elle est perpendiculaire au plan (π) puisqu'il n'y a pas de frottement, et la force exercée à distance $\vec{P}$, action de la Terre qui est entièrement définie.

La deuxième opération consiste à définir tous les repères permettant d'étudier le mouvement et à préciser les données cinématiques de l'étude. Dans l'exemple choisi, on prend comme repère $(\mathcal{R}_0)$ un trièdre orthonormé (O, xyz) dont le plan (xOy) coïncide avec le plan incliné (π) et dont l'axe Ox coïncide avec la ligne de plus grande pente de ce plan. Quant aux données cinématiques, le point M ne quittant pas le plan (π), $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ étant les coordonnées de M dans (O, xyz) on peut écrire : $\forall t,\ z(t) = 0$, et :

$$\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0) = \frac{d^2x}{dt^2}.\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}.\vec{j}$$

Ensuite, on utilise la loi fondamentale pour déterminer les inconnues qui peuvent être des directions de force, des modules de force, des accélérations, etc. Pour cela, on projette chaque vecteur, force ou quantité d'accélération, intervenant dans l'équation vectorielle traduisant la loi fondamentale, sur trois axes orthogonaux choisis afin de simplifier les calculs. Dans l'exemple, la loi fondamentale se traduit par l'équation vectorielle suivante :

$$\vec{F}(\pi \to M) + \vec{P} = m.\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0)$$

En projetant successivement sur les axes Ox, Oy et Oz, on obtient :

$$\begin{cases} 0 + P.\sin\alpha = m\dfrac{d^2x}{dt^2} \\ 0 + 0 = m\dfrac{d^2y}{dt^2} \\ F(\pi \to M) - P\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} m.g.\sin\alpha = m\dfrac{d^2x}{dt^2} \\ 0 = m\dfrac{d^2y}{dt^2} \\ F(\pi \to M) - m.g.\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

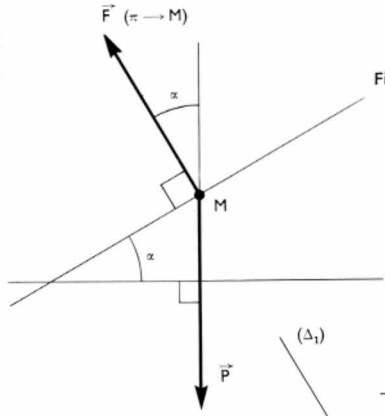
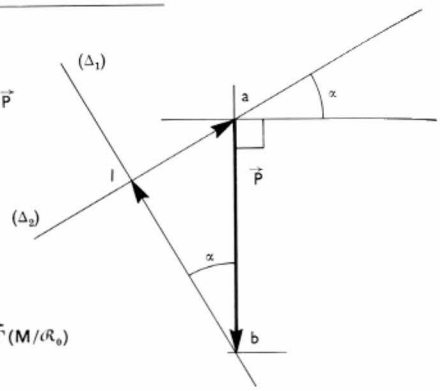


Fig. IV-6

Fig. IV-7



$\vec{bI} = \vec{F}(\pi \to M)$
$\vec{Ia} = \vec{\Phi} = -m.\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0)$

ou :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = g.\sin\alpha & (1) \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = 0 & (2) \\ F(\pi \to M) = m.g.\cos\alpha & (3) \end{cases}$$

L'intégration des équations différentielles (1) et (2) donne :

$$x(t) = \frac{1}{2}g.\sin\alpha.t^2 + At + B$$

$$y(t) = Ct + D$$

où A, B, C et D sont des constantes d'intégration dépendant des conditions initiales, c'est-à-dire de l'état de mouvement de M à l'instant pris comme origine des temps. D'après les données : $B = 0$ et $D = 0$, car $x(0) = y(0) = 0$, et :

$A = 0$ et $C = 0$, car : $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)_{t=0} = \left(\dfrac{dy}{dt}\right)_{t=0} = 0$

Par conséquent :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{2}g.\sin\alpha.t^2 \\ y(t) = 0\ \forall t \\ z(t) = 0\ \forall t \end{cases}$$

Ainsi, compte tenu des données cinématiques, à l'aide des équations (1), (2) et (3) établies à partir de l'équation vectorielle traduisant la loi fondamentale dans le cas considéré, on a déterminé les inconnues qui sont, d'une part, le module de l'action de contact $\vec{F}(\pi \to M)$: $F(\pi \to M) = m.g.\cos\alpha$, et d'autre part l'accélération de M : $\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0) = g.\sin\alpha.\vec{i}$. Donc, par rapport au plan incliné (ou par rapport à la Terre) le mouvement de M est rectiligne et uniformément accéléré, de direction Ox et d'accélération $g.\sin\alpha$.

On peut également traduire la loi fondamentale par un tracé graphique qui représente la somme géométrique des forces exercées sur M et de la quantité d'accélération changée de signe, appelée encore *force d'inertie*. D'après la loi de Newton, cette somme géométrique doit être nulle :

$$\vec{P} + \vec{F}(\pi \to M) - m.\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0) = \vec{0}$$

ou :

$$\vec{P} + \vec{F}(\pi \to M) + \vec{\Phi}_M = \vec{0}$$

avec :

$$\vec{\Phi}_M = -m.\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0)$$

La figure IV-7 a été construite en traçant d'abord le vecteur $\vec{ab} = \vec{P}$ (entièrement connu), puis par b la droite (Δ_1) parallèle à la direction connue de $\vec{F}(\pi \to M)$, et enfin

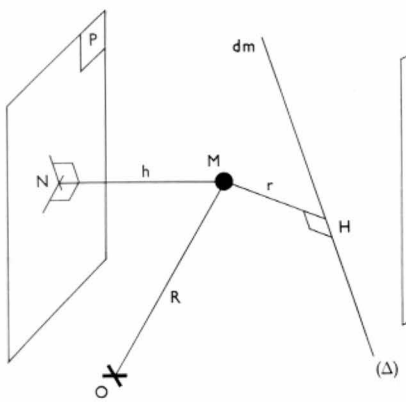
par a, la droite (Δ_2) parallèle à la direction de $\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0)$, direction qui est également connue car elle doit être parallèle à la fois au plan (xOy), dans lequel se déplace M, et au plan défini par $\vec{ab}$ et (Δ_1). L'intersection I de (Δ_1) et (Δ_2) définit le vecteur $\vec{bI} = \vec{F}(\pi \to M)$ et le vecteur $\vec{Ia} = \vec{\Phi}$: on obtient donc graphiquement la force inconnue $\vec{F}(\pi \to M)$ et la quantité d'accélération de M :

$$m.\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0) = -\vec{\Phi}$$

1.2. Dynamique du corps rigide. — Un corps rigide peut être considéré comme un ensemble de points matériels dont les distances mutuelles restent constantes au cours du temps. Les résultats établis pour le point matériel pourront donc être appliqués à chacun des points matériels constituant le solide envisagé.

1.2.1. Moment d'inertie d'un solide. — Le moment d'inertie d'un point matériel M, de masse dm, par rapport à un point O, à une droite (Δ) ou à un plan (P) est défini respectivement par $R^2.dm$, $r^2.dm$ et $h^2.dm$, R, r et h étant les distances séparant M de O, de (Δ) ou de (P) (fig. IV-8). S'il s'agit d'un solide (S) (fig. IV-9) on définit le *moment d'inertie de* (S) par rapport à O, (Δ) ou (P) par les expressions suivantes :

Fig. IV-8



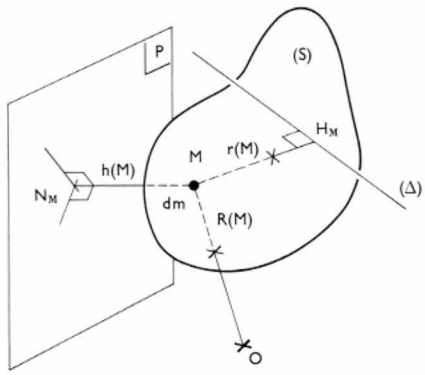


Fig. IV-9

$$I(S/O) = \int_{(S)} OM^2.dm(M) = \int_{(S)} R^2(M).dm(M)$$
$$= \int_{(S)} R^2(M).\rho(M).dv(M)$$

$$I(S/\Delta) = \int_{(S)} H_M M^2.dm(M) = \int_{(S)} r^2(M).dm(M)$$
$$= \int_{(S)} r^2(M).\rho(M).dv(M)$$

$$I(S/P) = \int_{(S)} N_M M^2.dm(M) = \int_{(S)} h^2(M).dm(M)$$
$$= \int_{(S)} h^2(M).\rho(M).dv(M)$$

Dans ces expressions $dm(M)$ représente la mesure de la masse élémentaire associée au voisinage de M et $\rho(M)$ est la masse volumique en M.

On remarque que, si (P) et (Q) sont deux plans orthogonaux se coupant suivant la droite (Δ) (fig. IV-10), le moment d'inertie de (S) par rapport à (Δ) est égal à la somme des moments d'inertie de (S) par rapport à (P) et (Q). En effet :

$$I(S/P) + I(S/Q) = \int_{(S)} NM^2.dm + \int_{(S)} N'M^2.dm$$
$$= \int_{(S)} (NM^2 + N'M^2)\,dm$$

$$I(S/P) + I(S/Q) = \int_{(S)} HM^2.dm = \int_{(S)} r^2(M).dm$$
$$= I(S/\Delta)$$

On remarque également que, si (P), (Q) et (R) sont trois plans orthogonaux se coupant en O, le moment d'inertie de (S) par rapport à O est égal à la somme des moments d'inertie par rapport aux trois plans orthogonaux passant par O :

$$I(S/O) = I(S/P) + I(S/Q) + I(S/R)$$

Le *centre d'inertie* G_S du solide (S) est défini par l'intégrale suivante :

$$\int_{(S)} \vec{G_S M}.dm(M) = \vec{0}$$

ou par : $$m.\vec{OG_S} = \int_{(S)} \vec{OM}.dm(M),$$

si l'on désigne par O un point arbitraire.

Connaissant le moment d'inertie de (S) par rapport à une droite (D) passant par G_S, il est possible de déterminer le moment d'inertie de (S) par rapport à toute droite (Δ),

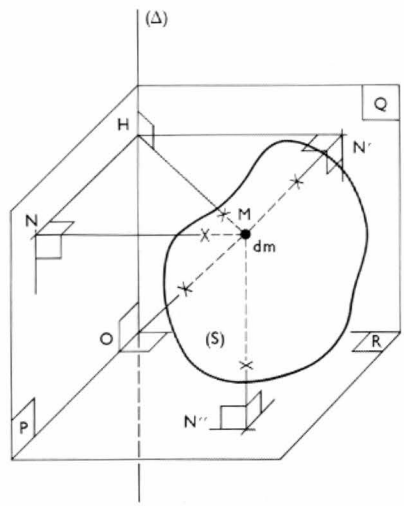


Fig. IV-10
HM = r(M)

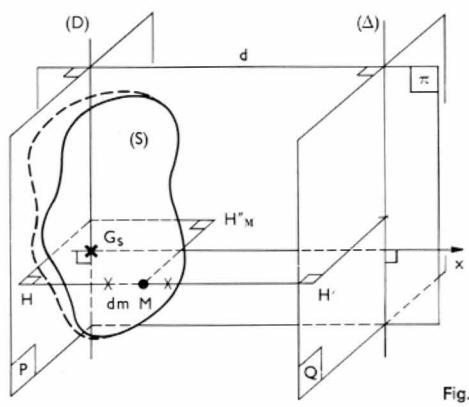


Fig. IV-11

parallèle à (D), grâce à la relation existant entre les deux moments d'inertie :

$$I(S/\Delta) = I(S/D) + m.d^2$$

Dans cette expression m représente la masse de (S) et d est la distance qui sépare (Δ) de (D). En effet, soit (π) le plan défini par (D) et (Δ), (P) le plan passant par (D) et perpendiculaire à (π) et (Q) le plan passant par (Δ) et perpendiculaire à (π) (fig. IV-11) :

$$I(S/D) = I(S/\pi) + I(S/P)$$
$$I(S/\Delta) = I(S/\pi) + I(S/Q)$$

Or : $I(S/P) = \int_{(S)} HM^2.dm$, et : $I(S/Q) = \int_{(S)} H'M^2.dm$

et : $(H'M)^2 = (\overline{H'H} + \overline{HM})^2 = \overline{H'H}^2 + \overline{HM}^2 + 2\,\overline{H'H}.\overline{HM}$

$\overline{H'H}$ et $\overline{HM}$ étant les mesures algébriques de $\overrightarrow{H'H}$ et $\overrightarrow{HM}$ sur l'axe G_Sx perpendiculaire à (P) et (Q), d'où :

$$I(S/Q) = \int_{(S)} (\overline{H'H}^2 + \overline{HM}^2)\,.\,dm + 2\,\overline{H'H} \int_{(S)} \overline{HM}\,.\,dm$$

Mais : $$\int_{(S)} \overline{HM}\,.\,dm = m\,.\,\overline{H_GG} = 0$$

car H_G appartient au plan (P) qui contient le point G_S, donc le point G. D'où :

$$I(S/Q) = m\,.H'H^2 + \int_{(S)} HM^2\,.\,dm = m\,.\,d^2 + I(S/P)$$

et : $$I(S/\Delta) = I(S/D) + m\,.\,d^2$$

Ce résultat montre que, parmi toutes les droites de même direction, c'est par rapport à celle qui passe par le centre d'inertie de (S) que le moment d'inertie de (S) est minimal.

Exemple 1. — Moment d'inertie d'une couronne circulaire (S) par rapport à son axe (Δ) ; l'épaisseur e et la largeur a sont supposées très faibles (fig. IV-12).

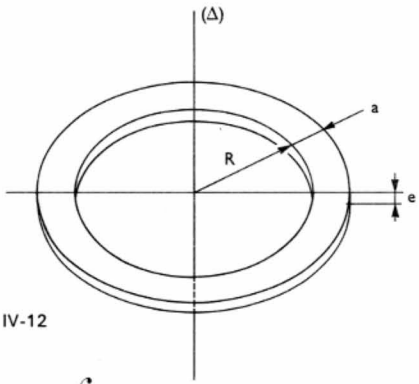


Fig. IV-12

$$I(S/\Delta) = \int_{(S)} HM^2\,.\,dm$$

$HM^2 \approx R^2 = \text{Cte}$

$dm = \rho(M)\ dv$

$dv \approx e\,.a\,.R\,.d\theta$ (car a est très inférieur à R)

d'où : $$I(S/\Delta) = e\,.a\,.R^3 . \int_0^{2\pi} \rho(M) d\theta$$

Si : $\rho(M) = \text{Cte}$, alors : $m = e\,.a\,.2\pi\,.R\,.\rho$

et : $$\boxed{I(S/\Delta) = e\,.a\,.R^3\,.2\pi\rho = m\,.R^2}$$

Exemple 2. — Moment d'inertie d'une plaque circulaire (S) par rapport à son axe (Δ), l'épaisseur e étant faible (fig. IV-13).

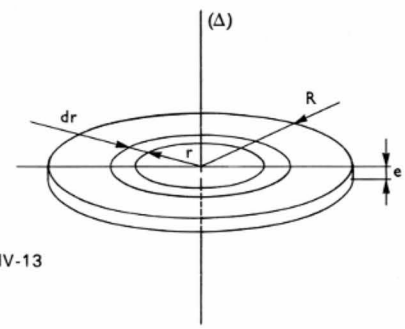


Fig. IV-13

$$I(S/\Delta) = \int_{(S)} HM^2\,.\,dm$$

Or : $HM^2 = r^2(M)$, $dm = \rho(M)\ dv$, et : $dv = e\,.r\,.d\,\theta\,.dr$

d'où : $$I(S/\Delta) = \int_0^R [e\,.r^3(M) . \int_0^{2\pi} \rho(M) d\theta]\ dr$$

expression dans laquelle :

$$[e\,.r^3(M) . \int_0^{2\pi} \rho(M) d\theta]\ dr$$

représente le moment d'inertie élémentaire dI d'une couronne d'axe (Δ), de rayon r, de largeur dr et d'épaisseur e par rapport à cet axe (Δ).

Si : $$\rho(M) = \text{Cte}$$

$$I(S/\Delta) = \int_0^R 2\pi\,.\,\rho\,.\,e\,.r^3\,.\,dr = 2\pi\,.\,\rho\,.\,e\,\frac{R^4}{4}$$

or : $$\rho\,.\,e\,.\,\pi\,.R^2 = m$$

d'où : $$\boxed{I(S/\Delta) = \frac{m\,.R^2}{2}}$$

1.2.2. Moment cinétique d'un solide. — Lorsqu'un solide (S) est en mouvement par rapport à un repère $(\mathcal{R}_0)$, à tout point M de (S) on peut associer le vecteur élémentaire $\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)\,.\,dm$, où dm est la mesure de l'élément de matière entourant M (fig. IV-14). On définit ainsi sur (S) un champ vectoriel de densité vectorielle $\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)$, définie

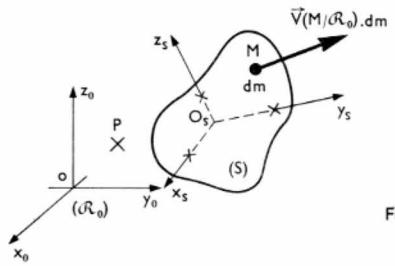


Fig. IV-14

par unité de masse entourant le point M, appelé *champ des quantités de mouvement*. Le torseur associé à cet ensemble de vecteurs, ou *torseur des quantités de mouvement*, est défini en un point P de l'espace par :

$$\vec{\mathfrak{V}}(S/\mathcal{R}_0) = \int_{(S)} \vec{V}(M/\mathcal{R}_0)\,.\,dm$$

$$\vec{\sigma}(P, S/\mathcal{R}_0) = \int_{(S)} \overrightarrow{PM} \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R}_0)\,.\,dm$$

La deuxième expression, qui représente la somme des moments des quantités de mouvement de (S), est appelée *moment cinétique de (S) au point P*. Étant donné les propriétés des torseurs, on peut établir l'expression du moment cinétique en Q quand on connaît son expression en P :

$$\vec{\sigma}(Q, S/\mathcal{R}_0) = \vec{\sigma}(P, S/\mathcal{R}_0) + \overrightarrow{QP} \wedge \vec{\mathfrak{V}}(S/\mathcal{R}_0)$$

On démontre que $\vec{\mathfrak{V}}(S/\mathcal{R}_0)$ est égal au produit de la masse m de (S) par la vitesse du centre de gravité G de (S) :

$$\vec{\mathfrak{V}}(S/\mathcal{R}_0) = m(S)\,.\,\vec{V}(G/\mathcal{R}_0)$$

Quant au moment cinétique, il dépend de la nature du mouvement de (S) par rapport à $(\mathcal{R}_0)$.

1° *(S) est animé d'un mouvement de translation par rapport à $(\mathcal{R}_0)$.* Tous les points de (S) ont même vitesse (V. chap. 2 § 3.2) et l'on peut écrire :

$$\forall M \in (S) : \vec{V}(M/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(G/\mathcal{R}_0)$$

Dans ces conditions, le moment cinétique de (S) s'exprime simplement en fonction de la vitesse de G ; en effet :

$$\vec{\sigma}\,(P, S/\mathcal{R}_0) = \int_{(S)} \overrightarrow{PM} \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R}_0)\,.\,dm$$

$$= \int_{(S)} \overrightarrow{PM} \wedge \vec{V}\ (G/\mathcal{R}_0)\,.\,dm$$

$$\vec{\sigma}(P, S/\mathcal{R}_0) = \left[\int_{(S)} \overrightarrow{PM}\,.\,dm\right] \wedge \vec{V}(G/\mathcal{R}_0)$$

Or : $$\int_{(S)} \overrightarrow{PM}\,.\,dm = m\,.\overrightarrow{PG}$$

d'où : $\boxed{\vec{\sigma}\ (P,\ S/\mathcal{R}_0) = \overrightarrow{PG} \wedge m.\vec{V}(G/\mathcal{R}_0)}$

Donc, si (S) est animé d'un mouvement de translation par rapport à $(\mathcal{R}_0)$, son moment cinétique en P est égal au moment en ce point de la quantité de mouvement du centre de gravité affecté de la masse totale du solide.

2° (S) *est animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe Oz* (fig. IV-15).

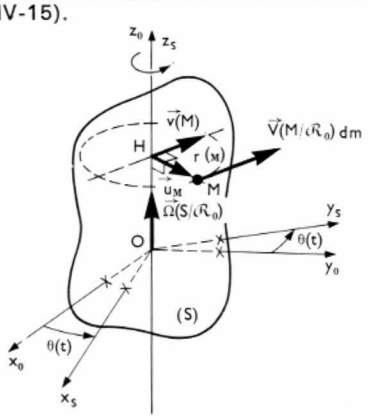


Fig. IV-15

La vitesse d'un point quelconque M de (S) est définie par :

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) = \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{OM} = r(M).\omega.\vec{v}(M)$$

et le moment cinétique en un point O de l'axe de rotation est donné par l'expression suivante :

$$\vec{\sigma}\ (O,\ S/\mathcal{R}_0) = \int_{(S)} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}(M).\,dm(M)$$

$$= \int_{(S)} [\overrightarrow{OM} \wedge r(M).\omega.\vec{v}(M)]\ dm(M)$$

Or (fig. IV-16) :

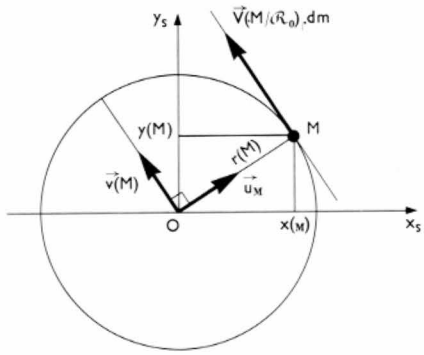


Fig. IV-16

$$\vec{v}(M) = -\frac{y(M)}{r(M)}.\vec{i_S} + \frac{x(M)}{r(M)}.\vec{j_S}$$

d'où : $\overrightarrow{OM} \wedge r(M).\omega.\vec{v}(M) = -z\,\frac{x}{r}\,r\omega.\vec{i_S} - z\,\frac{y}{r}\,r\omega.\vec{j_S} + \frac{x^2+y^2}{r}\,r\omega.\vec{k_S}$

et : $\vec{\sigma}(O,\ S/\mathcal{R}_0) = \omega\left[\vec{i_S}.\int_{(S)}(-zx.dm) + \vec{j_S}.\int_{(S)}(-zy.dm) + \vec{k_S}\int_{(S)}(x^2+y^2).dm\right]$

ou : $\vec{\sigma}(O,\ S/\mathcal{R}_0) = \omega[-I_{zx}.\vec{i_S} - I_{zy}.\vec{j_S} + I_{zz}.\vec{k_S}]$

En posant : $I_{xx} = I_{11},\ I_{xy} = I_{12},\ \ldots,$

$$\vec{i_S} = \vec{e_1},\ \vec{j_S} = \vec{e_2},\ \vec{k_S} = \vec{e_3}$$

et : $\vec{\Omega} = \omega_1.\vec{e_1} + \omega_2.\vec{e_2} + \omega_3.\vec{e_3} = \omega_i.\vec{e_i}$

on peut remarquer que le moment cinétique en O est égal à : $\vec{\sigma}(O, S/\mathcal{R}) = I_{ij}.\omega_j.\vec{e_i}$, ce que l'on note : $\bar{\bar{I}}(O,\ S)\ .\ \vec{\Omega}(S/\mathcal{R})$, i et j étant des indices muets.

Le moment cinétique en un point P quelconque est défini par :

$$\boxed{\vec{\sigma}(P,\ S/\mathcal{R}_0) = \bar{\bar{I}}(O,\ S)\ .\ \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) + \overrightarrow{PO} \wedge m.\vec{V}(G/\mathcal{R}_0)}$$

L'expression $\overrightarrow{OP} \wedge m.\vec{V}(G/\mathcal{R}_0)$ s'annule si G appartient à l'axe de la rotation.

3° (S) *est animé d'un mouvement hélicoïdal d'axe Oz.* Par rapport à $(\mathcal{R}_0)$ (fig. IV-17), la vitesse d'un point quelconque M de (S) est égale à :

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) = r(M)\omega.\vec{v}(M) + \vec{V}(O_S/\mathcal{R}_0)$$

D'où : $\vec{\sigma}\ (O_S,\ S/\mathcal{R}_0) = \int_{(S)} [\overrightarrow{O_SM} \wedge r(M)\omega.\vec{v}(M)]\,dm + \int_{(S)} \overrightarrow{O_SM} \wedge \vec{V}(O_S/\mathcal{R}_0).\,dm$

$$\boxed{\vec{\sigma}(O_S,\ S/\mathcal{R}_0) = \bar{\bar{I}}(O_S, S).\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) + m.\overrightarrow{O_SG} \wedge \vec{V}(O_S/\mathcal{R}_0)}$$

avec : $\overrightarrow{O_SG} \wedge \vec{V}(O_S/\mathcal{R}_0) = \vec{0}$, si G appartient à l'axe Oz.

4° (S) *est animé d'un mouvement plan dans* $(\mathcal{R}_0)$ (fig. IV-18). La vitesse d'un point quelconque M de (S) est donnée par l'expression suivante :

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(O_S/\mathcal{R}_0) + \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{O_SM} = \vec{V}(O_S/\mathcal{R}_0) + r(M)\omega.\vec{v}(M)$$

On obtient alors pour $\vec{\sigma}(O_S,\ S/\mathcal{R}_0)$ le même résultat que pour le mouvement hélicoïdal.

5° (S) *est animé d'un mouvement quelconque autour d'un point fixe* O_S de $(\mathcal{R}_0)$. La vitesse d'un point quelconque M de (S) est égale à (fig. IV-19) :

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) = \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{O_SM}$$

d'où : $\vec{\sigma}\ (O_S,\ S/\mathcal{R}_0) = \int_{(S)} \overrightarrow{O_SM} \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R}_0).\,dm = \int_{(S)} \overrightarrow{O_SM} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O_SM}).\,dm$

On pose : $\vec{\Omega} = \omega_1.\vec{e_1} + \omega_2.\vec{e_2} + \omega_3.\vec{e_3}$, $I_{xx} = I_{11}$, $I_{xy} = I_{12}$, ..., $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ et $\vec{e_3}$ étant les vecteurs unitaires de O_Sx_S, O_Sy_S et O_Sz_S, I_{ij} représentant les moments et produits

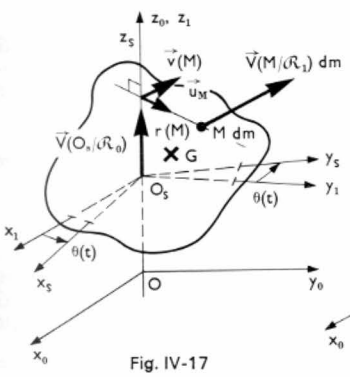
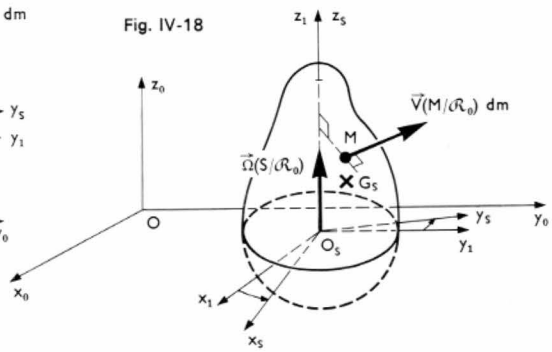


Fig. IV-17

Fig. IV-18



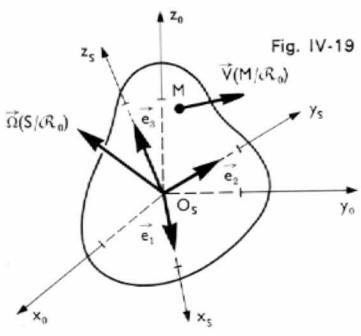


Fig. IV-19

d'inertie de (S) par rapport aux axes O_Sx_S, O_Sy_S, O_Sz_S et aux plans $(y_SO_Sz_S)$ et $(x_SO_Sz_S)$, $(x_SO_Sz_S)$ et $(y_SO_Sx_S)$, $(y_SO_Sx_S)$ et $(z_SO_Sy_S)$. Le calcul de $\int_{(S)} \overrightarrow{O_SM} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O_SM}) . dm$ entraîne :

$$\vec{\sigma}(O_S, S/\mathcal{R}_0) = (I_{11}.\omega_1 + I_{12}.\omega_2 + I_{13}.\omega_3).\vec{e_1} + (I_{21}.\omega_1 + I_{22}.\omega_2 + I_{23}.\omega_3).\vec{e_2} + (I_{31}.\omega_1 + I_{32}.\omega_2 + I_{33}.\omega_3).\vec{e_3}$$

En utilisant la notation indicielle, on peut écrire ce qui précède sous la forme :

$$\boxed{\vec{\sigma}(O_S, S/\mathcal{R}_0) = I_{ij}.\omega_j.\vec{e_i} = \bar{\bar{I}}(O_S, S).\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0)}$$

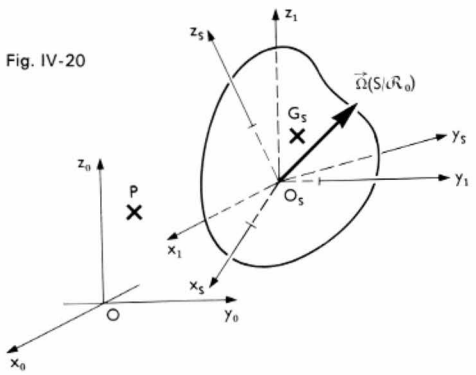
6° (S) *est animé d'un mouvement quelconque dans* $(\mathcal{R}_0)$ (fig. IV-20). La vitesse d'un point quelconque M de (S) est égale à :

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(O_S/\mathcal{R}_0) + \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{O_SM}$$

d'où : $\vec{\sigma}(O_S, S/\mathcal{R}_0) = \int_{(S)} [\overrightarrow{O_SM} \wedge \vec{V}(O_S/\mathcal{R}_0)] . dm + \int_{(S)} [\overrightarrow{O_SM} \wedge (\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{O_SM})] . dm$

$$\boxed{\vec{\sigma}(O_S, S/\mathcal{R}_0) = m.\overrightarrow{O_SG} \wedge \vec{V}(O_S/\mathcal{R}_0) + \bar{\bar{I}}(O_S, S).\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0)}$$

Fig. IV-20



Le moment cinétique de (S) lors de son mouvement par rapport à $(\mathcal{R}_0)$, en un point quelconque P de $(\mathcal{R}_0)$ s'exprime à l'aide de $\vec{\sigma}(O_S, S/\mathcal{R}_0)$:

$$\vec{\sigma}(P, S/\mathcal{R}_0) = \vec{\sigma}(O_S, S/\mathcal{R}_0) + \overrightarrow{PO_S} \wedge m\vec{V}(G/\mathcal{R}_0)$$

or : $\vec{V}(G/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(O_S/\mathcal{R}_0) + \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{O_SG}$

d'où : $\vec{\sigma}(P, S/\mathcal{R}_0) = \bar{\bar{I}}(O_S, S).\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) + m.\overrightarrow{PG} \wedge \vec{V}(O_S/\mathcal{R}_0) + m.\overrightarrow{PO_S} \wedge (\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0 \wedge \overrightarrow{O_SG})$

Si O_S est confondu avec le point G_S centre d'inertie de (S), quelle que soit la nature du mouvement, on obtient pour $\vec{\sigma}(O_S, S/\mathcal{R}_0)$:

$$\vec{\sigma}(G_S, S/\mathcal{R}_0) = \bar{\bar{I}}(G_S, S).\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0)$$

or : $\vec{\sigma}(G_S, S/\mathcal{R}_G) = \bar{\bar{I}}(G_S, S).\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_G)$

et, comme $\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_G) = \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0)$ car $(\mathcal{R}_G)$ est parallèle à $(\mathcal{R}_0)$, le moment cinétique de (S) en G_S dans son mouvement par rapport à $(\mathcal{R}_0)$ est égal au moment cinétique de (S) en G_S dans son mouvement par rapport à $(\mathcal{R}_G)$, appelé encore mouvement autour de G (fig. IV-21).

1.2.3. Moment dynamique. — (S) étant un solide en mouvement par rapport au repère $(\mathcal{R}_0)$, à tout instant on peut associer à tout point M de (S) le vecteur élémentaire $\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0) . dm$, où dm représente la mesure de la masse de matière entourant le point M. On définit ainsi sur (S) un champ vectoriel de densité vectorielle $\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0)$, définie par unité de masse entourant le point M, et appelé *champ des quantités d'accélération*. Le torseur associé à cet ensemble de vecteurs, ou torseur des quantités d'accélération, est défini en un point P de l'espace par :

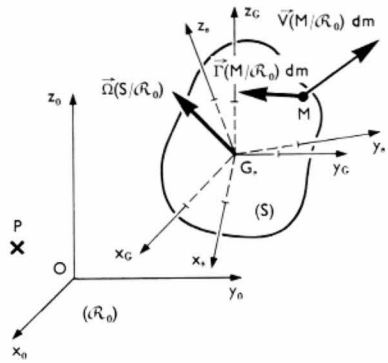


Fig. IV-21

$$\boxed{\vec{\mathfrak{A}}(S/\mathcal{R}_0) = \int_{(S)} \vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0) . dm}$$

$$\boxed{\vec{\delta}(P, S/\mathcal{R}_0) = \int_{(S)} \overrightarrow{PM} \wedge \vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0) . dm}$$

La deuxième expression, qui représente la somme des moments des quantités d'accélération de (S) dans son mouvement par rapport à $(\mathcal{R}_0)$ est appelée *moment dynamique* de (S) au point P. Étant donné les propriétés des torseurs, on peut établir l'expression du moment dynamique en un autre point Q quand on connaît l'expression en P :

$$\vec{\delta}(Q, S/\mathcal{R}_0) = \vec{\delta}(P, S/\mathcal{R}_0) + \overrightarrow{QP} \wedge \vec{\mathfrak{A}}(S/\mathcal{R}_0)$$

On démontre que $\mathfrak{A}(S/\mathcal{R}_0)$ est égal au produit de la masse m de (S) par le vecteur-accélération du centre d'inertie G_S de (S).

$$\vec{\mathfrak{A}}(S/\mathcal{R}_0) = m.\vec{\Gamma}(G_S/\mathcal{R}_0)$$

Quant au moment dynamique, il peut être déduit du moment cinétique par dérivation :

$$\overrightarrow{PM} \wedge \vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0) = \frac{d}{dt}[\overrightarrow{PM} \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R}_0)] + \vec{V}(P/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R}_0)$$

D'où :

$$\vec{\delta}(P, S/\mathcal{R}_0) = \left\{ \frac{d}{dt} \int_{(S)} [\overrightarrow{PM} \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R}_0)] . dm \right\}_{\mathcal{R}_0} + \vec{V}(P/\mathcal{R}_0) \wedge \int_{(S)} \vec{V}(M/\mathcal{R}_0) . dm$$

$$\vec{\delta}(P, S/\mathcal{R}_0) = \left\{ \frac{d}{dt} [\vec{\sigma}(P, S/\mathcal{R}_0)] \right\}_{\mathcal{R}_0} + \vec{V}(P/\mathcal{R}_0) \wedge m.\vec{V}(G/\mathcal{R}_0)$$

Le moment dynamique du solide (S) en un point P, dans son mouvement par rapport à $(\mathcal{R}_0)$, est égal à la dérivée dans $(\mathcal{R}_0)$ du moment cinétique, augmentée du produit $m.\vec{V}(P/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{V}(G/\mathcal{R}_0)$ lorsque P est mobile dans $(\mathcal{R}_0)$. Ce produit s'annule lorsque P est confondu avec G, d'où :

$$\vec{\delta}(G, S/\mathcal{R}_0) = \left\{ \frac{d}{dt} [\vec{\sigma}(G, S/\mathcal{R}_0)] \right\}_{\mathcal{R}_0}$$

On remarque que, si $(\mathcal{R}_G)$ est un repère de sommet G et d'axes parallèles aux axes de $(\mathcal{R}_0)$, le moment dynamique de (S) dans $(\mathcal{R}_0)$ s'exprime en fonction du moment dynamique de (S) dans $(\mathcal{R}_G)$:

$$\vec{\delta}(G, S/\mathcal{R}_0) = \int_{(S)} \left\{ \overrightarrow{GM} \wedge [\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_G) + \vec{\Gamma}(G/\mathcal{R}_0] \right\} . dm$$

$$\boxed{\vec{\delta}(G, S/\mathcal{R}_0) = \vec{\delta}(G, S/\mathcal{R}_G) + m.\overrightarrow{GG} \wedge \vec{\Gamma}(G/\mathcal{R}_0)}$$

Le moment dynamique en G de (S) dans son mouvement par rapport à $(\mathcal{R}_0)$ est égal au moment dynamique en G de (S) dans son mouvement par rapport à $(\mathcal{R}_G)$, appelé encore mouvement autour de G.

Le moment dynamique du solide (S) en un point P

quelconque peut se calculer à l'aide du moment dynamique en G en utilisant les propriétés des torseurs :

$$\boxed{\vec{\delta}(P, S/\mathcal{R}_0) = \vec{\delta}(G, S/\mathcal{R}_0) + \overrightarrow{PG} \wedge m.\vec{\Gamma}(G/\mathcal{R}_0)}$$

ou : $$\boxed{\vec{\delta}(P. S/\mathcal{R}_0) = \vec{\delta}(G, S/\mathcal{R}_G) + \overrightarrow{PG} \wedge m.\vec{\Gamma}(G/\mathcal{R}_0)}$$

Le moment dynamique en P du solide (S) dans son mouvement par rapport à $(\mathcal{R}_0)$ est égal à la somme du moment dynamique en G de (S) dans son mouvement autour de G et du moment dynamique en P du point G, centre d'inertie de (S), affecté de la masse totale de (S). Ce théorème porte le nom de *théorème de Kœnig* et il est également valable pour le moment cinétique.

1° (S) *est animé d'un mouvement de translation par rapport à* $(\mathcal{R}_0)$. Le moment dynamique s'obtient directement, car : $\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0) = \vec{\Gamma}(G/\mathcal{R}_0)$, $\forall M \in (S)$

D'où : $$\vec{\delta}(P, S/\mathcal{R}_0) = \int_{(S)} \overrightarrow{PM} \wedge \vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0)\, .\, dm$$
$$= \left[\int_{(S)} \overrightarrow{PM}\, .\, dm\right] \wedge \vec{\Gamma}(G/\mathcal{R}_0)$$

$$\boxed{\vec{\delta}(P, S/\mathcal{R}_0) = \overrightarrow{PG} \wedge m.\vec{\Gamma}(G/\mathcal{R}_0)}$$

Le moment dynamique en P du solide (S) en translation par rapport à $(\mathcal{R}_0)$ est égal au moment dynamique en P du point G, centre d'inertie, affecté de la masse totale de (S).

2° (S) *est animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe Oz fixe*. Le moment cinétique en un point O_S de l'axe est :

$$\vec{\sigma}(O_S, S/\mathcal{R}_0) = \omega[-I_{zx}.\vec{i_S} - I_{zy}.\vec{j_S} + I_{zz}.\vec{k_S}]$$
$$= \bar{\bar{I}}(O_S, S)\, .\, \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0)$$

Le moment dynamique en O_S est obtenu à l'aide de la seule dérivée du moment cinétique, car O_S est fixe dans $(\mathcal{R}_0)$, et on a :

$$\vec{\delta}(O_S, S/\mathcal{R}_0) = \left\{\frac{d}{dt}[\vec{\sigma}(O_S, S/\mathcal{R}_0)]\right\}_{\mathcal{R}_0} = \left\{\frac{d}{dt}(\bar{\bar{I}}.\vec{\Omega})\right\}_{\mathcal{R}_0}$$

$$\boxed{\vec{\delta}(O_S, S/\mathcal{R}_0) = \left\{\frac{d}{dt}(\bar{\bar{I}}.\vec{\Omega})\right\}_{\mathcal{R}_S} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_0) \wedge \bar{\bar{I}}.\vec{\Omega}}$$

D'où : $$\vec{\delta}(O_S, S/\mathcal{R}_0) = (I_{yz}.\omega^2 - I_{zx}.\omega')\vec{i_S}$$
$$+ (-I_{zx}.\omega^2 - I_{yz}.\omega').\vec{j_S} + I_{zz}.\omega'.\vec{k_S}$$

On peut également pour un tel mouvement particulier calculer directement $\vec{\delta}(O_S, S/\mathcal{R}_0)$:

$$\vec{\delta}(O_S, S/\mathcal{R}_0) = \int_{(S)} \overrightarrow{O_S M} \wedge \vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0)\, .\, dm$$

or : $$\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0) = -r(M).\omega^2.\vec{u}(M) + r(M).\omega'.\vec{v}(M)$$

avec : $$\omega' = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\vec{u}(M) = \frac{x(M)}{r(M)}.\vec{i_S} + \frac{y(M)}{r(M)}.\vec{j_S}$$

$$\vec{v}(M) = -\frac{y(M)}{r(M)}.\vec{i_S} + \frac{x(M)}{r(M)}.\vec{j_S}$$

d'où : $$\overrightarrow{O_S M} \wedge \vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0) = \left(\frac{yz}{r}.r.\omega^2 - \frac{zx}{r}.r.\omega'\right) i_S$$
$$+ \left(-\frac{zx}{r}.r.\omega^2 - \frac{yz}{r}.r.\omega'\right).\vec{j_S} + \frac{x^2+y^2}{r}.r.\omega'.\vec{k_S}$$

et : $$\vec{\delta}(O_S, S/\mathcal{R}_0) = (I_{yz}.\omega^2 - I_{zx}.\omega').\vec{i_S}$$
$$+ (-I_{zx}.\omega^2 - I_{yz}.\omega').\vec{j_S} + I_{zz}.\omega'.\vec{k_S}$$

3° (S) *est animé d'un mouvement plan par rapport à* $(\mathcal{R}_0)$; l'utilisation du théorème de Kœnig permet d'écrire :

$$\boxed{\vec{\delta}(O_S, S/\mathcal{R}_0) = \vec{\delta}(G, S/\mathcal{R}_G) + \overrightarrow{O_S G} \wedge m.\vec{\Gamma}(G/\mathcal{R}_0)}$$

avec : $$\vec{\delta}(G, S/\mathcal{R}_G) = (I_{yz}.\omega^2 - I_{zx}.\omega').\vec{i_S}$$
$$+ (-I_{zx}.\omega^2 - I_{yz}.\omega').\vec{j_S} + I_{zz}.\omega'.\vec{k_S}$$

où les moments et produits d'inertie sont calculés par rapport aux axes et plans issus de G et liés au solide (S), l'un des axes lié à (S) ayant la même direction que le vecteur $\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_G)$.

1.2.4. Théorèmes généraux (fig. IV-22). — L'application de la loi fondamentale à chacun des points matériels M constituant le solide (S) et le principe de l'action et de la

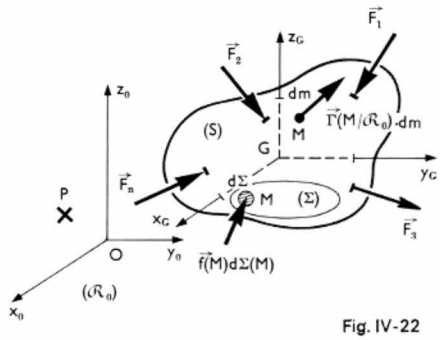


Fig. IV-22

réaction entraînent l'équivalence entre l'ensemble des efforts extérieurs exercés sur (S) et l'ensemble des quantités d'accélération absolue défini sur (S). Si l'on considère les torseurs associés à ces ensembles, il y aura équivalence entre le torseur des quantités d'accélération absolue et le torseur des efforts extérieurs exercés sur (S). Cette équivalence se traduit par les théorèmes suivants.

Théorème 1. — *Théorème de la résultante dynamique, ou théorème du mouvement du centre d'inertie G de* (S) :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \vec{F_i} + \int_{(\Sigma)} \vec{f}(M)\, .\, d\Sigma(M) = m.\vec{\Gamma}(G/\mathcal{R}_0)$$

La somme géométrique des efforts extérieurs exercés sur (S), ou la résultante générale du torseur des efforts extérieurs exercés sur (S), est égale à la résultante générale, ou somme géométrique, du torseur des quantités d'accélération absolue de (S).

Théorème 2. — *Théorème du moment dynamique :*

$$\sum_{i=1}^{i=n} (\overrightarrow{PM_i} \wedge \vec{F_i}) + \int_{(\Sigma)} \overrightarrow{PM} \wedge \vec{f}(M)\, .\, d\Sigma\ (M) = \vec{\delta}(P, S/\mathcal{R}_0)$$

Le moment en un point P quelconque du torseur des efforts extérieurs exercés sur (S) est égal au moment dynamique en P de (S) dans son mouvement par rapport au repère absolu $(\mathcal{R}_0)$.

Théorème 3. — *Théorème du mouvement autour du centre d'inertie G de* (S). Il peut se déduire du théorème 2 en choisissant le point P en G. En effet, $(\mathcal{R}_G)$ étant un repère de sommet G gardant même orientation par rapport au repère $(\mathcal{R}_0)$, ce qui revient à dire que $(\mathcal{R}_G)$ est animé d'un mouvement de translation par rapport à $(\mathcal{R}_0)$, on a :

$$\sum_{i=1}^{i=n} (\overrightarrow{GM_i} \wedge \vec{F_i}) + \int_{(\Sigma)} \overrightarrow{GM} \wedge \vec{f}(M)\, .\, d\Sigma\ (M)$$
$$= \vec{\delta}(G, S/\mathcal{R}_G) = \left\{\frac{d}{dt}[\vec{\sigma}(G, S/\mathcal{R}_G)]\right\}_{\mathcal{R}_G}$$

Le moment en G, centre d'inertie de (S), du torseur des efforts extérieurs exercés sur (S) est égal à la dérivée dans $(\mathcal{R}_G)$ du moment cinétique en G de (S) dans son mouvement autour de G et par rapport à $(\mathcal{R}_G)$.

Théorème 4. — *Théorème de la résultante cinétique.* Il se déduit du théorème 1 en remplaçant dans le second membre de l'équation vectorielle correspondante :

$$m.\vec{\Gamma}(G/\mathcal{R}_0) \text{ par } \left\{\frac{d}{dt}[m.\vec{V}(G/\mathcal{R}_0)]\right\}_{\mathcal{R}_0}$$

Théorème 5. — *Théorème du moment cinétique.* De même, il se déduit du théorème 2 en remplaçant $\vec{\delta}(P, S/\mathcal{R}_0)$ par $\left\{\frac{d}{dt}[\vec{\sigma}(P, S/\mathcal{R}_0)]\right\}_{\mathcal{R}_0}$, mais à la condition que P soit fixe dans $(\mathcal{R}_0)$, ou confondu avec G.

1.2.5. Utilisation des théorèmes généraux. — Les théorèmes généraux appliqués à l'étude des relations entre mouvement et efforts exercés sur un solide (S) se traduisent par deux équations vectorielles faisant apparaître les efforts extérieurs exercés sur (S) et les quantités d'accélération absolue des différents points M de (S). Ces relations permettent : de déterminer complètement les efforts exercés sur (S) lorsque le mouvement absolu de (S) est connu, de déterminer complètement le mouvement de (S) lorsque les efforts extérieurs exercés sur (S) sont connus, ainsi que les conditions initiales du mouvement, et de déterminer partiellement efforts et mouvement lorsque les efforts exercés sur (S) et le mouvement absolu de (S) sont partiellement connus.

Pour déterminer les inconnues, on utilise les deux équations vectorielles en les projetant sur des axes judicieusement choisis afin de simplifier les calculs et d'aboutir le plus rapidement possible. De toute manière, à partir des deux équations vectorielles, on ne pourra obtenir après projection que six équations algébriques indépendantes : on ne pourra donc déterminer que six inconnues à partir des théorèmes généraux.

D'autre part, il faut remarquer qu'en projetant l'équation vectorielle relative au théorème du moment dynamique sur un axe, on introduit le moment des efforts extérieurs par rapport à cet axe et le moment des quantités d'accélération par rapport à cet axe. Le théorème du moment dynamique peut donc être énoncé de la façon suivante : la somme des moments des efforts extérieurs exercés sur (S) par rapport à un axe quelconque (Δ) est égale à la somme des moments des quantités d'accélération absolue de (S) par rapport à cet axe ou, ce qui revient au même, à la projection sur cet axe du moment dynamique absolu en P de (S), P étant un point quelconque de l'axe (Δ). Si (Δ) est fixe dans $(\mathcal{R}_0)$, le moment dynamique par rapport à (Δ) est égal à la dérivée dans $(\mathcal{R}_0)$ du moment cinétique absolu de (S) par rapport à (Δ).

Pour déterminer les efforts exercés sur un solide, ou le mouvement d'un solide, la première opération consiste à répertorier les efforts exercés sur ce solide. Pour cela on représente le solide seul, puis, on recherche avec quel autre solide il était en contact et par quels autres solides il était attiré. On fait ainsi *l'inventaire* de toutes les forces exercées sur le solide, qu'elles soient connues ou inconnues, et qu'elles soient exercées par contact ou à distance. La deuxième opération consiste à définir les repères de références utilisés pour l'étude cinématique du mouvement : de ce choix dépendront les paramètres cinématiques permettant de repérer à tout instant la position du solide par rapport aux axes de référence. Après, seulement, on utilise les théorèmes généraux pour trouver les inconnues. Il faut remarquer que les axes, sur lesquels on projette les équations vectorielles relatives aux théorèmes généraux, peuvent être différents des axes de référence introduits pour l'étude cinématique.

Exemple. — Un véhicule (W), muni de deux roues (R_1) et (R_2) qui roulent sans glisser sur un rail horizontal (R), est propulsé par deux réacteurs dont les axes sont parallèles à $O_1\,O_2$ et dont la poussée est $P/2$ (fig. IV-23).

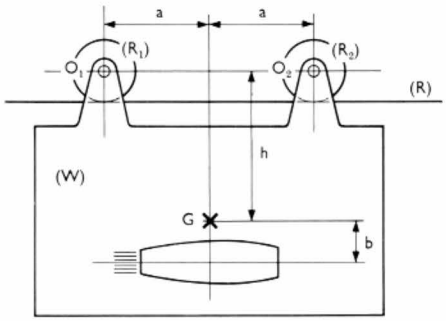


Fig. IV-23

On suppose qu'il n'y a aucun frottement au niveau de la liaison roues-véhicule et que la résistance au roulement est négligeable. Dans une première étude la masse et l'inertie des roues sont négligées.

On va déterminer l'accélération du véhicule, la masse de ce dernier, masse des réacteurs comprise, étant égale à m et on va chercher le temps qu'il mettra pour atteindre la vitesse V_1, sachant qu'à l'instant initial $V_0 = 0$.

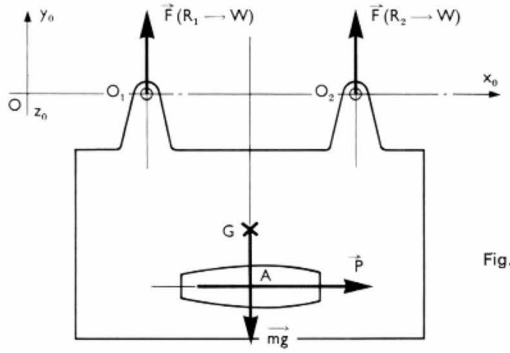


Fig. IV-24

On isole le véhicule (fig. IV-24). Il est soumis à l'action de la poussée des gaz sur les enveloppes des réacteurs ; étant donné la position symétrique des réacteurs, la résultante P de ces efforts est située dans le plan de symétrie longitudinal de (W) et elle est parallèle à $O_1\,O_2$ par construction. Les roues (R_1) et (R_2) exercent sur (W) les forces de contact $\vec{F}(R_1 \to W)$ appliquée en O_1 et $\vec{F}(R_2 \to W)$ appliquée en O_2 ; comme on a négligé la masse et l'inertie des roues, ainsi que la résistance au roulement, ces deux forces sont orthogonales à la direction du rail (R). Enfin, la pesanteur exerce son action résultante en G, centre d'inertie de (W).

Pour étudier le mouvement de (W), on prend comme axes de référence liés à la Terre les axes Ox_0, Oy_0 et Oz_0 d'un trièdre orthonormé, Ox_0 étant confondu avec $O_1\,O_2$, donc parallèle à la direction du rail (R), Oy_0 étant vertical et Oz_0 terminant le trièdre.

Le mouvement de (W) par rapport à $(\mathcal{R}_0)$ étant, en raison des différentes liaisons, un mouvement de translation rectiligne, le seul paramètre $x_G(t) = \overrightarrow{OG}.\vec{i}_0$ permet de définir la position de (W) par rapport à $(\mathcal{R}_0)$ à tout instant.

Les théorèmes généraux appliqués à (W), dont on connaît la nature du mouvement, entraînent :

$$\vec{F}(R_1 \to W) + \vec{F}(R_2 \to W) + \vec{P} + m.\vec{g} = m.\vec{\Gamma}(G/\mathcal{R}_0) \quad (1)$$

$$\overrightarrow{O_1A} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{O_1G} \wedge m.\vec{g} + \overrightarrow{O_1O_2} \wedge \vec{F}(R_2 \to W) = \overrightarrow{O_1G} \wedge m.\Gamma(G/\mathcal{R}_0) \quad (2)$$

Pour déterminer l'accélération du véhicule, on projette l'équation vectorielle (1) sur l'axe Ox_0 ; il vient :

$$P = m.\frac{d^2x_G}{dt^2} = m.\gamma(W/\mathcal{R}_0)$$

L'accélération du véhicule dans son mouvement de translation par rapport à $(\mathcal{R}_0)$ est donc : $\gamma = \dfrac{P}{m} = \text{Cte}$.

La loi du mouvement étant donnée par la fonction $x_G(t)$, on obtient :

$$x_G(t) = \frac{1}{2}\gamma t^2 + V_0 t + x_0$$

avec $V_0 = 0$ d'après les conditions initiales.

D'où :

$$V = \frac{dx_G}{dt} = \gamma.t$$

Pour atteindre la vitesse V_1 le véhicule mettra le temps :

$$t_1 = \frac{V_1}{\gamma} \quad \text{ou :} \quad t_1 = \frac{V_1.m}{P}$$

Pour calculer les forces $\vec{F}(R_1 \to W)$ et $\vec{F}(R_2 \to W)$, on projette l'équation (1) sur l'axe Oy_0 et l'équation (2) sur l'axe O_1z parallèle à Oz_0, ce qui revient d'ailleurs à calculer les moments par rapport à l'axe O_1z ; on obtient :

$$F\ (R_1 \to W) + F\ (R_2 \to W) - mg = 0$$

$$P\ (h+b) - mga + F\ (R_2 \to W)\ .\ 2a = m\gamma h = m\ \frac{P}{m}\ h$$

Après résolution de ce système linéaire on obtient :

$$F\ (R_2 \to W) = \frac{mga - Pb}{2a},\ \text{et :}\ F\ (R_1 \to W) = \frac{mga + Pb}{2a}$$

On constate que, si P devient trop important, $F\ (R_2 \to W)$ s'annule, ce qui correspond à la rupture du contact entre la roue (R_2) et le rail (R). Dans ce cas, le mouvement de (W) ne serait plus un mouvement de translation et il faut donc avoir : $P \leqslant \frac{mga}{b}$, pour que le contact soit maintenu.

On remarque d'autre part que si $b = 0$:

$$F\ (R_1 \to W) = F\ (R_2 \to W) = \frac{mg}{2},$$

et que dans ce cas particulier, quelle que soit la valeur de P, les roues (R_1) et (R_2) resteront en contact avec le rail.

1.3. Dynamique des ensembles de corps rigides. — Si l'on envisage un ensemble (E) de plusieurs solides mobiles par rapport à un repère $(\mathcal{R}_0)$ et en mouvement les uns par rapport aux autres, les lois de la dynamique peuvent s'appliquer à chacun des solides constituant cet ensemble. Pour un solide quelconque de l'ensemble les lois de la dynamique restent applicables et le torseur des efforts exercés sur lui est équivalent au torseur des quantités d'accélération absolues. Parmi les efforts exercés sur ce solide de (E), certains peuvent être intérieurs à (E), d'autres peuvent être extérieurs à (E) (V. chap. 3, § 2.7). On démontre que si l'on considère tous les solides constituant l'ensemble (E), le torseur des efforts extérieurs à (E) est équivalent au torseur des quantités d'accélération absolue de tout l'ensemble (E) : ce résultat est dû à l'application des théorèmes généraux à chacun des solides, ainsi qu'à l'utilisation du principe de l'action et de la réaction. Le torseur des quantités d'accélération absolue de l'ensemble (E), comportant n solides (S_i) de masse m_i et de centre d'inertie G_i, est défini par :

$$\vec{\mathfrak{A}}\ (E/\mathcal{R}_0) = \sum_{i=1}^{i=n} [m_i\ .\ \vec{\Gamma}(G_i/\mathcal{R}_0)] = m\ .\ \vec{\Gamma}(G/\mathcal{R}_0)$$

$$\vec{\delta}(P,\ E/\mathcal{R}_0) = \sum_{i=1}^{i=n} [\vec{\delta}(P, S_i/\mathcal{R}_0)]$$

$m\ .\ \vec{\Gamma}(G/\mathcal{R}_0)$ représentant la quantité d'accélération absolue du point G, centre d'inertie de l'ensemble des n solides, affecté de la masse totale m de l'ensemble.

1.3.1. Théorèmes généraux. — De l'équivalence du torseur des efforts extérieurs et du torseur des quantités d'accélération, on déduit, comme dans le cas du solide seul, le théorème de la résultante dynamique et celui du moment dynamique, puis les théorèmes dérivés du mouvement autour du centre d'inertie, de la résultante cinétique et du moment cinétique.

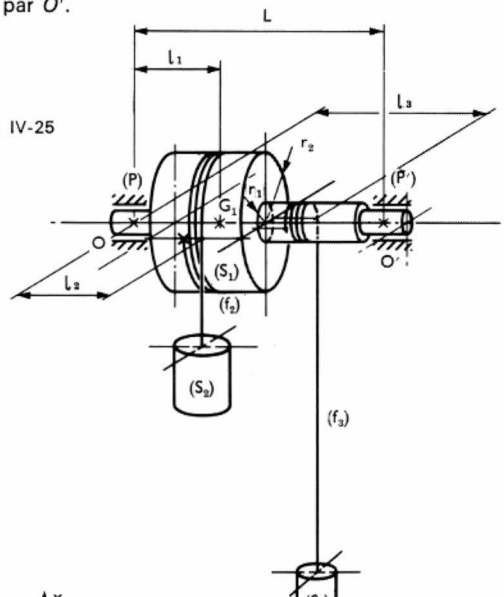
Théorème de la résultante dynamique : La somme géométrique des efforts extérieurs à (E) et exercés sur les différents solides de (E) est égale à la résultante générale du torseur des quantités d'accélération absolue de (E).

Théorème du moment dynamique : Le moment en un point P quelconque du torseur des efforts extérieurs à (E) et exercés sur les différents solides de (E) est égal à la somme géométrique des moments dynamiques absolus en P de chacun des solides constituant (E).

1.3.2. Exemples d'utilisation. — Pour étudier le mouvement et les efforts exercés sur un système matériel constitué de plusieurs solides, il est nécessaire de définir avec précision l'ensemble considéré : cet ensemble peut correspondre à la totalité du système matériel, ou à une partie seulement de ce système. L'ensemble considéré étant bien délimité, on recherche les efforts extérieurs à cet ensemble et exercés sur les solides de cet ensemble. On définit ensuite les repères de référence et les paramètres cinématiques servant à l'étude des mouvements des différents solides. Puis on applique les théorèmes généraux à cet ensemble pour déterminer les inconnues.

Exemple. — Un ensemble (E) est constitué par trois solides cylindriques (fig. IV-25). Le cylindre (S_1), à deux étages, est guidé en rotation par des paliers (P) et (P') sans frottement ; le cylindre (S_2) est relié à (S_1) par un lien souple (f_2), inextensible et sans masse, et le cylindre (S_3) est relié à (S_1) par un lien souple (f_3), inextensible et sans masse. Le lien (f_2) est accroché sur le grand diamètre de (S_1) et le lien (f_3) sur le petit diamètre. La masse m_2 de (S_2) est supérieure à la masse m_3 de (S_3) et l'ensemble (E) est abandonné sans vitesse initiale. On va étudier le mouvement de chacun des solides constituant (E), ainsi que les actions exercées par les paliers (P) et (P') sur (S_1). On suppose que ces dernières se réduisent à une force $\vec{F}\ (P \to S_1)$ passant par O et à une force $\vec{F}\ (P' \to S_1)$ passant par O'.

Fig. IV-25



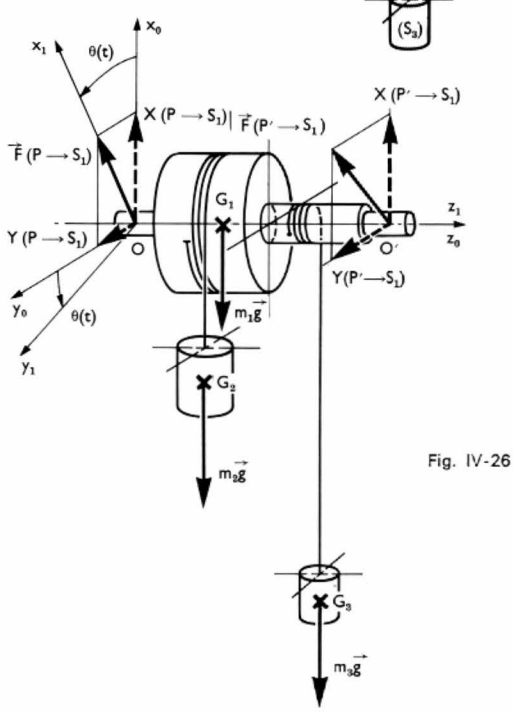


Fig. IV-26

On considère le système matériel constitué par les solides (S_1), (S_2) et (S_3) et par les liens (f_2) et (f_3) (fig. IV-26). Les forces extérieures à cet ensemble sont : les forces de pesanteur $m_1\vec{g}$, $m_2\vec{g}$ et $m_3\vec{g}$ appliquées respectivement en G_1, G_2 et G_3, centres d'inertie des solides (S_1),

(S_2) et (S_3), et les actions de contact $\vec{F}(P \to S_1)$ et $\vec{F}(P' \to S_1)$ exercées par les paliers sur (S_1).

Pour étudier les mouvements des différents solides de l'ensemble, on prend comme repère lié à la Terre un trièdre trirectangle, dont l'un des axes Oz_0 est confondu avec OO', et dont un autre axe Ox_0 est vertical. D'autre part on lie à (S_1) un trièdre trirectangle dont l'un des axes O_1z_1 est confondu avec OO'. Le mouvement de (S_1) par rapport à $(\mathcal{R}_0)$ est un mouvement de rotation autour de Oz_0 et la position de (S_1) par rapport à $(\mathcal{R}_0)$ est définie à tout instant par le paramètre $\theta(t) = (Ox_0, Ox_1)$. Le mouvement de (S_2), ou de (S_3), par rapport à $(\mathcal{R}_0)$ est un mouvement de translation, rectiligne et de direction Ox_0 à condition de respecter certaines conditions initiales. La position de (S_2), ou de (S_3), par rapport à $(\mathcal{R}_0)$ est définie à tout instant par $x_{G_2}(t)$ ou $x_{G_3}(t)$, cotes des points G_2 et G_3 par rapport au plan horizontal de référence (y_0Oz_0).

Les théorèmes généraux appliqués à l'ensemble (E), dont la composition est connue, de même que la nature des mouvements de ses constituants, entraînent :

$$\vec{F}(P \to S_1) + \vec{F}(P' \to S_1) + m_1\vec{g} + m_2\vec{g} + m_3\vec{g} = m_1.\vec{\Gamma}(G_1/\mathcal{R}_0) + m_2.\vec{\Gamma}(G_2/\mathcal{R}_0) + m_3.\vec{\Gamma}(G_3/\mathcal{R}_0) \quad (I)$$

$$\overrightarrow{OO'} \wedge \vec{F}(P \to S_1) + \overrightarrow{OO'} \wedge \vec{F}(P' \to S_1) + \overrightarrow{OG_1} \wedge m_1\vec{g} + \overrightarrow{OG_2} \wedge m_2\vec{g} + \overrightarrow{OG_3} \wedge m_3\vec{g} = \vec{\delta}(O, S_3/\mathcal{R}_0) + \vec{\delta}(O, S_2/\mathcal{R}_0) + \vec{\delta}(O, S_3/\mathcal{R}_0) \quad (II)$$

(S_1) étant un cylindre à deux étages d'axe OO', G_1 est situé sur OO' et en conséquence : $\vec{\Gamma}(G_1/\mathcal{R}_0) = \vec{0}$. Les mouvements de (S_2) et (S_3) étant donnés, les accélérations de G_2 et G_3 sont déterminées par :

$$\vec{\Gamma}(G_2/\mathcal{R}_0) = \frac{d^2x_{G_2}}{dt^2}.\vec{i_0}, \text{ et : } \vec{\Gamma}(G_3/\mathcal{R}_0) = \frac{d^2x_{G_3}}{dt^2}.\vec{i_0}$$

D'autre part, en raison des liaisons cinématiques créées entre (S_2) et (S_1) et entre (S_3) et (S_1) par les liens (f_2) et (f_3), on a les relations suivantes :

$$\frac{d^2x_{G_2}}{dt^2} = -r_2\frac{d^2\theta}{dt^2} = -r_2\theta'', \text{ et : } \frac{d^2x_{G_3}}{dt^2} = r_3\frac{d^2\theta}{dt^2} = r_3\theta''$$

L'expression des moments dynamiques en fonction des paramètres cinématiques est fonction de la nature du mouvement des solides. Ainsi le moment dynamique de (S_1), qui est animé d'un mouvement de rotation autour de l'axe OO', est donné par :

$$\vec{\delta}(O, S_1/\mathcal{R}_0) = (I_{y_1z_1}.\omega^2 - I_{x_1x_1}.\omega').\vec{i_1} + (-I_{x_1x_1}.\omega^2 - I_{y_1z_1}.\omega').\vec{j_1} + I_{z_1z_1}.\omega'.\vec{k_1}$$

Or : $x_1O_1z_1$ et $y_1O_1z_1$ sont des plans de symétrie pour (S_1) d'où : $I_{y_1z_1} = I_{x_1x_1} = 0$,

et : $$\vec{\delta}(O, S_1/\mathcal{R}_0) = I_{z_1z_1}.\omega'.\vec{k_1} = I_{z_1z_1}.\frac{d^2\theta}{dt^2}.\vec{k_1}$$

Les solides (S_2) et (S_3) étant animés d'un mouvement de translation par rapport à $(\mathcal{R}_0)$, leur moment dynamique en O est donné par :

$$\vec{\delta}(O, S_2/\mathcal{R}_0) = \overrightarrow{OG_2} \wedge m_2.\vec{\Gamma}(G_2/\mathcal{R}_0) = (l_2m_2x''_{(G_2)}).\vec{j_0} - (r_2m_2x''_{(G_2)}).\vec{k_0}$$

$$\vec{\delta}(O, S_3/\mathcal{R}_0) = \overrightarrow{OG_3} \wedge m_3.\vec{\Gamma}(G_3/\mathcal{R}_0) = (l_3m_3x''_{(G_3)}).\vec{j_0} + (r_3m_3x''_{(G_3)}).\vec{k_0}$$

Pour déterminer l'accélération angulaire de (S_1), on projette l'équation vectorielle (II) sur l'axe Oz_0 et on obtient ainsi une équation algébrique traduisant l'égalité entre la somme des moments des forces extérieures par rapport à l'axe Oz_0 et le moment dynamique de l'ensemble (E) par rapport à ce même axe, soit :

$$m_2gr_2 - m_3gr_3 = I_{z_1z_1}.\theta'' - r_2m_2x''_{(G_2)} + r_3m_3x''_{(G_3)}$$

ou : $$(m_2r_2 - m_3r_3)g = (I_{z_1z_1} + m_2r_2^2 + m_3r_3^2)\theta'' \quad (1)$$

d'où : $$\theta'' = \frac{m_2r_2 - m_3r_3}{I_{z_1z_1} + m_2r_2^2 + m_3r_3^2}g = \text{Cte}$$

Le mouvement de (S_1) par rapport à $(\mathcal{R}_0)$ est un mouvement de rotation uniformément accéléré car $m_2 > m_3$ et $r_2 > r_3$. La loi du mouvement, étant donné les conditions initiales, est donc :

$$\theta(t) = \frac{1}{2}\frac{m_2r_2 - m_3r_3}{I_{z_1z_1} + m_2r_2^2 + m_3r_3^2}g\,t^2 + \theta_0$$

On remarque que l'on obtiendrait le même mouvement en appliquant sur un solide (S'), guidé en rotation par deux paliers sans frottement et de moment d'inertie $I_{z'_1z'_1} = I_{z_1z_1} + m_2r_2^2 + m_3r_3^2$, deux forces perpendiculaires à l'axe de rotation et de module m_2g et m_3g, la première étant à la distance r_2 de l'axe et d'un côté de cet axe, la deuxième à la distance r_3 et de l'autre côté.

Pour déterminer les actions exercées par les paliers (P) et (P') sur (S_1), on projette les équations vectorielles (1) et (2) sur les axes Ox_0 et Oy_0, soit :

$$X(P \to S_1) + X(P' \to S_1) - m_1g - m_2g - m_3g = -m_2r_2\theta'' + m_3r_3\theta'' \quad (2)$$

$$Y(P \to S_1) + Y(P' \to S_1) = 0 \quad (3)$$

$$+ Y(P' \to S_1).L = 0 \quad (4)$$

$$X(P' \to S_1).L - m_1gl_1 - m_2gl_2 - m_3gl_3 = -m_2l_2r_2\theta'' + m_3l_3r_3\theta'' \quad (5)$$

De ce système d'équations, on déduit :

$$\begin{cases} X(P \to S_1) = \left(m_1 + m_2 + m_3 - \dfrac{m_1l_1 + m_2l_2 + m_3l_3}{L}\right)g + \left[m_3r_3\left(1 - \dfrac{l_3}{L}\right) - m_2r_2\left(1 - \dfrac{l_2}{L}\right)\right]\theta'' \\ Y(P \to S_1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(P' \to S_1) = \dfrac{m_1l_1 + m_2l_2 + m_3l_3}{L}g + \dfrac{m_3r_3l_3 - m_2r_2l_2}{L}\theta'' \\ Y(P' \to S_1) = 0 \end{cases}$$

On constate donc que les actions des paliers $\vec{F}(P \to S_1)$ et $\vec{F}(P' \to S_1)$ sont verticales et indépendantes du temps : ce résultat est dû à la valeur nulle des produits d'inertie $I_{y_1z_1}$ et $I_{x_1z_1}$ de (S_1). S'il en était autrement, les équations (1), (2) et (3) resteraient identiques, mais le second membre de l'équation (4) serait différent de zéro et celui de l'équation (5) serait modifié.

Enfin, si l'on immobilise l'ensemble (E) en appliquant à (S_1) un couple $[C]$ d'axe Oz_0, les actions exercées par les paliers sont obtenues à l'aide des résultats précédents pour $\theta'' = 0$, d'où :

$$F(P' \to S_1) = \sum_{i=1}^{i=3}\frac{m_il_i}{L}g$$

$$F(P \to S_1) = \left[\sum_{i=1}^{i=3}m_i - \sum_{i=1}^{i=3}\frac{m_il_i}{L}g\right]$$

1.4. Théorème de d'Alembert. — La loi fondamentale de la dynamique appliquée à un point matériel M de masse m, en mouvement par rapport à $(\mathcal{R}_0)$ sous l'action d'un

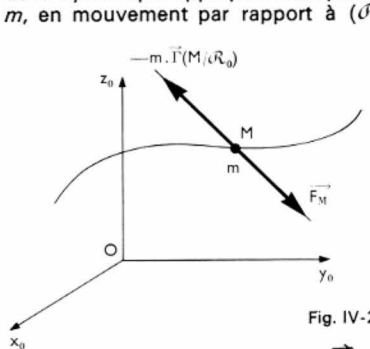


Fig. IV-27

ensemble de forces de résultante $\vec{F}_M$, se traduit par l'égalité vectorielle :

$$\vec{F}_M = m.\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0)$$

Cette équation peut également se mettre sous la forme (fig. IV-27) :

$$\vec{F}_M - m.\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0) = \vec{0}$$

où le vecteur $-m.\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0)$ peut être considéré comme une force fictive exercée sur M: cette force fictive est appelée *force d'inertie* de d'Alembert, ou force d'inertie de M.

D'où l'énoncé du théorème : *lors du mouvement du point matériel M de masse m, la résultante des actions mécaniques exercées sur M et la force d'inertie de M constituent à chaque instant un système en équilibre.*

Il faut bien noter que *ce n'est pas le point matériel* qui est en équilibre sous l'action des forces de résultante $\vec{F}_M$, effectivement exercées sur lui, et de la force d'inertie, mais le système fictif de forces constitué de $\vec{F}_M$ et de la force fictive $-m.\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0)$.

C'est à d'Alembert (1717-1783) que l'on doit cette interprétation de la loi fondamentale. Elle est intéressante, car elle permet de transformer fictivement un problème de dynamique en un problème de statique et d'utiliser toutes les méthodes de résolution abordées en statique.

Le théorème de d'Alembert peut être étendu à la dynamique du solide. Dans ce cas, il faut associer à tout point M de (S) la force d'inertie $-\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0).dm$: on définit ainsi sur (S) un champ de forces fictives de densité vectorielle $-\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0)$ définie par l'unité de masse entourant le point M. Le torseur associé à ce champ de forces, ou torseur des forces d'inertie, est déterminé en un point P de l'espace par :

$$\vec{\Phi}(S/\mathcal{R}_0) = \int_{(S)} [-\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0)].dm = -m.\vec{\Gamma}(G/\mathcal{R}_0)$$

$$\vec{\mu}(P,\ S/\mathcal{R}_0) = \int_{(S)} \{\overrightarrow{PM} \wedge [-\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0)]\}.dm$$

Le théorème de d'Alembert se traduit alors par les deux équations suivantes :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i + \int_{(\Sigma)} \vec{f}(M).d\Sigma(M) + \vec{\Phi}(S/\mathcal{R}_0) = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} [\overrightarrow{PM}_i \wedge \vec{F}_i + \int_{(\Sigma)} [\overrightarrow{PM} \wedge \vec{f}(M)]d\Sigma(M) + \vec{\mu}(P,S/\mathcal{R}_0) = \vec{0}$$

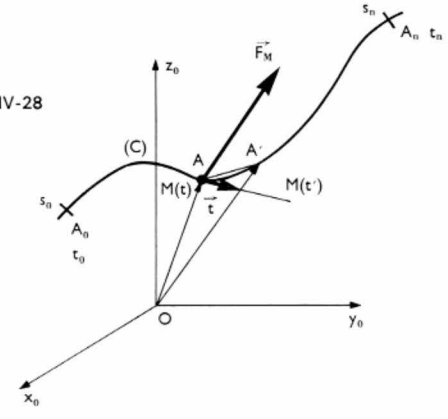
Lors du mouvement du solide (S) par rapport au repère absolu $(\mathcal{R}_0)$, la somme du torseur des efforts extérieurs effectivement exercés sur (S) et du torseur des forces d'inertie constitue un torseur nul.

2. LES THÉORÈMES DE L'ÉNERGIE

2.1. Travail et puissance

2.1.1. Travail et puissance d'une force appliquée sur un point matériel (fig. IV-28). — On envisage un point matériel M de masse m se déplaçant par rapport au repère absolu $(\mathcal{R}_0)$. Soit (C) la trajectoire de M par rapport à $(\mathcal{R}_0)$. À l'instant t, M est en A sur (C), et à l'instant $t' = t + dt$, M est en A' voisin de A. Au cours de son mouvement dans (R), M est soumis à l'action d'une force $\vec{F}_M$, variable ou non au cours du temps.

Fig. IV-28



1° *Travail.* — On définit le travail élémentaire δW de $\vec{F}_M$, lors du déplacement élémentaire AA' de M, comme le produit du déplacement de M par la projection de $\vec{F}_M$ sur ce déplacement et l'on note :

$$\delta W = [W]_t^{t+dt} = W_{AA'} = \vec{F}_M.\overrightarrow{AA'}$$

Cette expression est positive ou négative selon la position relative de $\vec{F}_M$ par rapport au vecteur-déplacement élémentaire $\overrightarrow{AA'}$.

On peut remarquer que le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ n'est autre que la variation de $\overrightarrow{OM}$ entre les instants t et $t' = t + dt$, d'où :

$$\overrightarrow{AA'} = d\overrightarrow{OM} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right).dt = \vec{V}(M/\mathcal{R}).dt$$

et : $$\delta W = \vec{F}_M.d\overrightarrow{OM} = \vec{F}_M.\vec{V}(M/\mathcal{R}).dt$$

On peut remarquer également que $\overrightarrow{AA'} = \vec{t}.ds$, en désignant par $\vec{t}$ le vecteur unitaire tangent à la trajectoire de M à l'instant t et par s l'abscisse curviligne de M sur sa trajectoire.

D'où : $$\delta W = \vec{F}_M.\vec{t}.ds = \vec{F}_M.\vec{t}.V(M/\mathcal{R}).dt$$

Si le point M part de A_0 à l'instant t_0 et arrive en A_n à l'instant t_n, la distance $\overset{\frown}{A_0A_n}$ étant finie, le travail de $\vec{F}_M$ lors de ce déplacement sera obtenu en calculant la somme des travaux élémentaires $\vec{F}_{M_i}.\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$, d'où :

$$[W_{t_0}^{t_n}] = \vec{F}_{M_0}.\overrightarrow{A_0A_1} + \vec{F}_{M_1}.\overrightarrow{A_1A_2} + \ldots + \vec{F}_{M_P}.A_pA_{p+1} + \ldots + \vec{F}_{M_{n-1}}.\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$$

En faisant tendre n vers l'infini, cette expression se transforme en une intégrale :

$$W_{A_0A_n} = \int_{\overset{\frown}{A_0A_n}} \vec{F}_M.d\overrightarrow{OM} = \int_{t_0}^{t_n} [\vec{F}_M.\vec{V}(M/\mathcal{R})]\,dt$$

$$= \int_{s_0}^{s_n} \vec{F}_M.\vec{t}(M).ds = \int_{t_0}^{t_n} [\vec{F}_M.\vec{t}(M)].V(M/\mathcal{R}).dt$$

La première de ces intégrales est une intégrale curviligne que l'on peut mettre sous la forme :

$$W_{A_0A_n} = \int_{\overset{\frown}{A_0A_n}} [X_M.dx(M) + Y_M.dy(M) + Z_M.dz(M)]$$

où X_M, Y_M et Z_M sont les composantes de $\vec{F}_M$ et $dx\ (M)$, $dy\ (M)$ et $dz\ (M)$ celles de $d\overrightarrow{OM}$.

Les autres intégrales sont des intégrales simples, le temps t, ou l'abscisse curviligne s, étant les variables d'intégration.

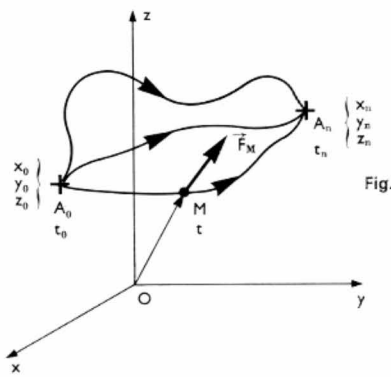


Fig. IV-29

Il se peut (fig. IV-29) que le travail de $\vec{F}_M$, lors du déplacement du point M de A_0 à A_n, soit indépendant du chemin suivi par M. Si cela est vérifié quels que soient les points A_0 et A_n choisis, on peut en déduire que le travail de $\vec{F}_M$, lors d'un déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$, est une différentielle

totale exacte :

$$\delta W = dU, \quad \text{et :} \quad W_{A_0A_n} = U(A_n) - U(A_0)$$

U est une fonction, définie à une constante près, des trois variables x, y et z, coordonnées du point M. Dans ce cas particulier $U\ (x, y, z)$ et X_M, Y_M et Z_M, composantes de $\vec{F}_M$, sont liés par les relations suivantes :

$$X_M = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_M \quad , \quad Y_M = \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_M \quad , \quad Z_M = \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_M$$

On dit alors que $\vec{F}_M$ dérive de la fonction $U(x, y, z)$, appelée *fonction de force*. On définit également la fonction $V(x, y, z)$, appelée *fonction potentielle* et telle que :

$$V(x, y, z) = -U(x, y, z)$$

D'où : $W_{A_0A_n} = U(A_n) - U(A_0) = V(A_0) - V(A_n)$

Réciproquement, si $\vec{F}_M$ dérive d'une fonction de force U, le travail élémentaire de $\vec{F}_M$ est la différentielle totale de U et le travail de $\vec{F}_M$, lors d'un déplacement $\widehat{A_0A_n}$ quelconque, est égal à la variation de la fonction U.

Exemple. — Un point matériel M se déplaçant dans $(\mathcal{R})$ n'est soumis qu'à l'action de la pesanteur $\vec{F}_M = m\,\vec{g}$ (fig. IV-30). Oz étant vertical ascendant, on va déterminer le travail de la force de pesanteur lorsque M se déplace de A_0 (cote z_0) à A_n (cote z_n).

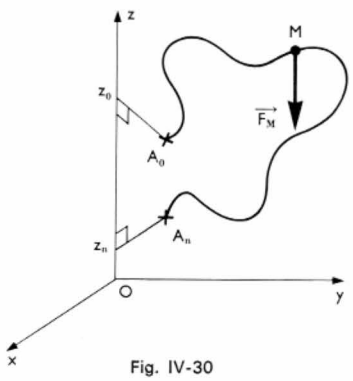


Fig. IV-30

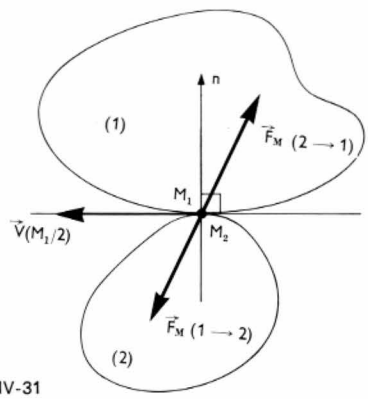


Fig. IV-31

Quelle que soit la position de M, les composantes de $\vec{F}_M$ sont $X_M = 0$, $Y_M = 0$ et $Z_M = -mg$; il existe donc une fonction de force $U(x, y, z)$ telle que $\vec{F}_M$ dérive de cette fonction.

En effet, si l'on pose : $U(x, y, z) = -m\,.\,g\,.\,z$, on a :

$$X_M = \frac{\partial U}{\partial x} = 0,\ Y_M = \frac{\partial U}{\partial y} = 0,\ Z_M = \frac{\partial U}{\partial z} = -mg$$

d'où :

$$\delta W = dU = -mg\,.\,dz$$

$$W_{A_0A_n} = U(A_n) - U(A_0) = -mgz_n + mgz_0$$

$$W_{A_0A_n} = mg(z_0 - z_n)$$

Le travail de la force de pesanteur appliquée sur M est indépendant du trajet suivi par M ; il ne dépend que de la cote du point de départ et de la cote du point d'arrivée.

On peut obtenir le même résultat en utilisant la définition du travail élémentaire et en intégrant :

$$\delta W = \vec{F}_M\,.\,d\overrightarrow{OM} = X_M\,dx(M) + Y_M\,dy(M) + Z_M\,dz(M) = -m\,g\,dz$$

$$W_{A_0A_n} = \int_{\widehat{A_0A_n}} \vec{F}_M\,.\,d\overrightarrow{OM} = \int_{\widehat{A_0A_n}} [X\,dx + Y\,dy + Z dz] = \int_{z_0}^{z_n} [-mg\,dz]$$

$$W_{A_0A_n} = -mg\,(z_n - z_0) = mg\,(z_0 - z_n)$$

2° *Puissance.* — La puissance développée par la force $\vec{F}_M$, exercée sur M à l'instant t, est définie comme étant égale à la limite du rapport du travail élémentaire de $\vec{F}_M$ à la variation de temps correspondante lorsque celle-ci tend vers zéro :

$$P(t) = \lim_{t' \to t} \frac{W_{AA'}}{t' - t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\delta W}{\Delta t}$$

Or : $W_{AA'} = \delta W = \vec{F}_M\,.\,\vec{V}(M/\mathcal{R})\,.\,dt$

d'où : $P(t) = \vec{F}(M)\,.\,\vec{V}(M/\mathcal{R})$

La puissance développée par la force $\vec{F}_M$, exercée sur M, est égale au *produit scalaire de la force et de la vitesse de M*. Cette expression est déterminée à un instant t, alors que le travail de $\vec{F}_M$ est défini au cours d'une variation de temps.

S'il existe une fonction de force $U(M)$, δW est une différentielle totale exacte : $\delta W = dU$, et :

$$P(t) = \frac{dU}{dt}$$

Remarque : Lorsque deux solides sont en contact et que le contact est ponctuel (fig. IV-31), il existe deux forces de contact égales et opposées : $\vec{F}_M(1 \to 2) = -\vec{F}_M(2 \to 1)$. La somme des puissances développées par ces deux forces est obtenue en utilisant la définition précédente :

$$P(t) = \vec{F}_M\,(1 \to 2)\,.\,\vec{V}(M_2/\mathcal{R}) + \vec{F}_M\,(2 \to 1)\,.\,\vec{V}(M_1/\mathcal{R})$$

$$P(t) = \vec{F}_M\,(2 \to 1)\,.\,[\vec{V}(M_1/\mathcal{R}) - \vec{V}(M_2/\mathcal{R})]$$

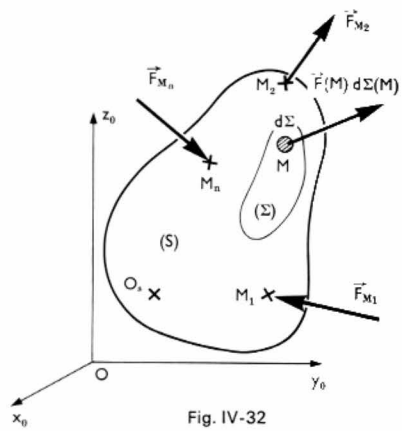


Fig. IV-32

car $\vec{F}_M\ (1 \to 2)$ est appliquée sur le point M_2 du solide (2) et $\vec{F}_M\ (2 \to 1)$ est appliquée sur le point M_1 du solide (1).

Or : $\vec{V}(M_1/\mathcal{R}) - \vec{V}(M_2/\mathcal{R}) = \vec{V}(M_1/2)$

d'où : $P(t) = \vec{F}_M\,(2 \to 1)\,.\,\vec{V}(M_1/2)$

$\vec{V}(M_1/2)$, vitesse de M_1 par rapport au solide (2), appelée *vitesse de glissement* de (1) par rapport à (2), est notée : $\vec{V}g(1/2)$. Bien que l'ensemble de force $\vec{F}_M\ (1 \to 2)$ et $\vec{F}_M\ (2 \to 1)$ soit équivalent à zéro, la puissance développée par cet ensemble est différente de zéro si les deux solides glissent l'un par rapport à l'autre et si $\vec{F}_M\ (1 \to 2)$ n'est pas perpendiculaire à la vitesse de glissement.

2.1.2. Travail et puissance d'un ensemble de forces exercées sur un solide. — On envisage un solide (S) en mouvement par rapport au repère $(\mathcal{R}_0)$ et soumis à un ensemble de forces constitué d'un ensemble discret de n forces et d'un ensemble continu défini sur une portion (Σ) de la surface de (S) (fig. IV-32). Le torseur associé à cet ensemble, ou le système réduit équivalent, est défini en O_S, point de (S) (fig. IV-33), par la force $\vec{F}$ telle que :

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_{Mi} + \int_{(\Sigma)} \vec{F}(M)\,d\Sigma(M)$$

et par le couple $[C]$ tel que :

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}}[C] = \overrightarrow{\mathfrak{M}}_{OS}$$

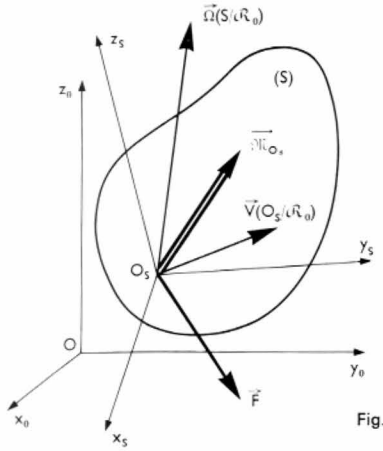


Fig. IV-33

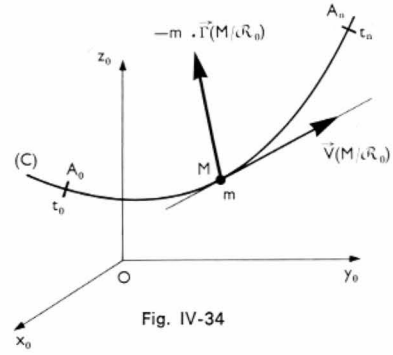


Fig. IV-34

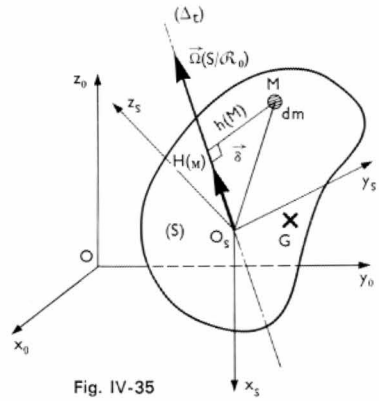


Fig. IV-35

$$= \sum_{i=1}^{i=n} [\overrightarrow{O_S M_i} \wedge \vec{F}_{Mi}] + \int_{(\Sigma)} [\overrightarrow{O_S M} \wedge \vec{F}(M)]\, d\Sigma(M)$$

Le travail élémentaire développé par cet ensemble de forces est égal à :

$$\delta W = \sum_{i=1}^{i=n} [\vec{F}_{Mi} . \vec{V}(M_i/\mathcal{R}_0) . dt] + \int_{(\Sigma)} [\vec{F}(M) . \vec{V}(M/\mathcal{R}_0) . dt] . d\Sigma(M)$$

Or, quel que soit le point M et quel que soit le mouvement de (S), la vitesse de M peut s'exprimer en fonction de la vitesse de O_S et du vecteur-vitesse angulaire instantanée de (S) par rapport à $(\mathcal{R}_0)$:

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(O_S/\mathcal{R}_0) + \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{O_S M}$$

D'où :

$$\delta W = \sum_{i=1}^{i=n} \{\vec{F}_{Mi} . \vec{V}(O_S/\mathcal{R}_0) . dt + \vec{F}_{Mi} . [\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{O_S M_i}] . dt\} + \int_{(\Sigma)} \{\vec{F}(M) . \vec{V}(O_S/\mathcal{R}_0) . dt + \vec{F}(M) . [\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{O_S M}] . dt\} d\Sigma(M)$$

ou : $\delta W = \vec{F} . \vec{V}(O_S/\mathcal{R}_0) . dt + \overrightarrow{\mathfrak{M}}[C] . \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) . dt$

Lors d'un déplacement élémentaire de (S), le travail élémentaire de l'ensemble des forces exercées sur (S) est égal à la somme du travail de la force équivalente $\vec{F}$ appliquée en O_S et du travail du couple équivalent de moment $\overrightarrow{\mathfrak{M}}[C] = \overrightarrow{\mathfrak{M}}_{Os}$.

Si le déplacement de (S) dans $(\mathcal{R}_0)$ s'effectue durant un intervalle de temps fini depuis l'instant t_0 jusqu'à l'instant t_n, le travail total des forces exercées sur (S) est égal à la somme des travaux élémentaires, somme que l'on obtient en intégrant l'expression du travail élémentaire de t_0 à t_n. D'où :

$$W_{t_0 t_n} = \int_{t_0}^{t_n} \vec{F} . \vec{V}(O_S/R_0) . dt + \int_{t_0}^{t_n} \overrightarrow{\mathfrak{M}}[C] . \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) . dt$$

Quant à la puissance développée par les forces exercées sur (S), à un instant t quelconque, elle sera égale à la somme de la puissance développée par $\vec{F}$ appliquée sur O_S et de la puissance développée par $[C]$ exercée sur (S) :

$$P(t) = \vec{F} . \vec{V}(O_S/\mathcal{R}_0) + \overrightarrow{\mathfrak{M}}[C] . \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0)$$

Dans le cas particulier où le travail des forces exercées sur (S) est indépendant des chemins suivis par les différents points de (S) pour passer d'une position à une autre, le travail élémentaire δW est une différentielle totale, d'où :

$$\delta W = dU \quad , \quad W_{t_0 t_n} = U_n - U_0 \quad , \quad P(t) = \frac{dU}{dt}$$

2.1.3. Travail et puissance virtuels. — On appelle *déplacement virtuel* d'un point matériel, ou d'un solide, un *déplacement arbitraire que l'on impose au point ou au solide, indépendamment des efforts qui lui sont appliqués.* On appelle *vitesse virtuelle* d'un point matériel la vitesse acquise par ce dernier lors d'un déplacement virtuel. Le travail et la puissance virtuels sont égaux au travail et à la puissance des efforts exercés sur (S) lors du déplacement virtuel considéré. Dans de nombreux cas, on envisage des déplacements virtuels respectant les liaisons existantes : ainsi, si le point M est lié à une surface (Σ) par contact, on envisagera un déplacement compatible avec cette liaison, c'est-à-dire un déplacement arbitraire de M mais s'effectuant sur (Σ). De façon à différencier les déplacements et vitesses réels des déplacements et vitesses virtuels, on repère souvent ces derniers à l'aide d'un astérisque :

$$d\overrightarrow{OM}^* \text{ et } \vec{V}^* \ (M/\mathcal{R}_0)$$

2.2. Énergie cinétique

2.2.1. Énergie cinétique du point matériel (fig. IV-34). — La quantité d'accélération d'un point matériel a la dimension d'une force. D'autre part, le théorème de d'Alembert montre que l'on peut considérer la quantité d'accélération affectée du signe moins comme une force exercée sur M. On est donc amené à chercher quel est le travail développé par cette force fictive exercée sur M. Par définition son travail élémentaire est égal à :

$$\delta W = - m . \vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0) . \vec{V}(M/\mathcal{R}_0) . dt$$

Or, l'accélération de M par rapport à $(\mathcal{R}_0)$ est égale à la dérivée de la vitesse de M dans $(\mathcal{R}_0)$, d'où :

$$\delta W = - m . \left\{ \frac{d\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)}{dt} \right\}_{\mathcal{R}_0} . \vec{V}(M/\mathcal{R}_0) . dt$$

Mais : $$\vec{V} . \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \vec{V}^2 \right)$$

et donc :

$$\delta W = - \frac{1}{2} m \left\{ \frac{d}{dt} [\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)]^2 \right\} . dt = d \left\{ - \frac{1}{2} m [\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)]^2 \right\} = d \left[- \frac{1}{2} m . V^2(M/\mathcal{R}_0) \right]$$

car m est indépendant de t.

Le travail élémentaire de la force d'inertie exercée sur M est donc une différentielle totale exacte, et le travail de cette force, lors d'un déplacement fini, n'est fonction que de la vitesse initiale de M et de sa vitesse finale. La fonction potentiel $\mathcal{V} = \frac{1}{2} m . V^2(M/\mathcal{R}_0)$ est appelée *énergie cinétique* de M dans son mouvement par rapport à $(\mathcal{R}_0)$ et est notée $T(M/\mathcal{R}_0)$.

2.2.2. Énergie cinétique du corps solide (fig. IV-35). — (S) étant un solide en mouvement par rapport au repère $(\mathcal{R}_0)$, à tout point M de (S) on peut associer le scalaire $\frac{1}{2} [\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)]^2 . dm$, où dm représente la mesure de la

masse de matière entourant M : cette expression représente donc l'énergie cinétique du point M de masse dm. On définit ainsi sur (S) un champ scalaire de densité $\frac{1}{2}[\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)]^2$ définie par unité de masse entourant le point M. L'énergie cinétique totale de (S) dans son mouvement par rapport à $(\mathcal{R}_0)$ est égale à :

$$\boxed{T(S/\mathcal{R}_0) = \int_{(S)} \frac{1}{2}[\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)]^2 . dm}$$

avec : $\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(O_S/\mathcal{R}_0) + \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{O_SM}$

On démontre que cette énergie cinétique est égale à :

$$T(S/\mathcal{R}_0) = \frac{1}{2} m [\vec{V}(O_S/\mathcal{R}_0)]^2 + \frac{1}{2}[\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0)]^2 . I(S/\Delta_t) + m \vec{V}(O_S) . [\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{O_SG}]$$

1° *Mouvement de translation.* — Dans ce cas : $\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) = \vec{0}$, car tous les points de (S) ont la même vitesse :

$$\boxed{T(S/\mathcal{R}_0) = \frac{1}{2} m [\vec{V}(O_S/\mathcal{R}_0)]^2 = \frac{1}{2} m [\vec{V}(G/\mathcal{R}_0)]^2}$$

L'énergie cinétique d'un solide (S), animé d'un mouvement de translation dans $(\mathcal{R}_0)$, est égale à l'énergie cinétique du point G, centre d'inertie de (S), affecté de la masse totale de (S).

2° *Mouvement de rotation.* — Dans ce cas, le point O_S est fixe dans $(\mathcal{R}_0)$ et (S) est animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe (Δ) passant par O_S. L'énergie cinétique de (S) prend alors la forme suivante :

$$\boxed{T(S/\mathcal{R}_0) = \frac{1}{2} I(S/\Delta) . \omega^2(S/\mathcal{R}_0)}$$

L'énergie cinétique d'un solide, animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe dans $(\mathcal{R}_0)$, est égale au demi-produit du moment d'inertie de (S), par rapport à l'axe de rotation, et du carré de la vitesse angulaire de (S) par rapport à $(\mathcal{R}_0)$.

3° *Mouvement autour d'un point fixe.* — O_S est alors fixe dans $(\mathcal{R}_0)$, et l'énergie cinétique de (S) est égale à :

$$T(S/\mathcal{R}_0) = \frac{1}{2}[\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0)]^2 . I(S/\Delta_t)$$

$$\boxed{T(S/\mathcal{R}_0) = \frac{1}{2} \omega^2(S/\mathcal{R}_0) . I(S/\Delta_t)}$$

4° *Mouvement quelconque.* — Si l'on choisit O_S confondu avec le centre d'inertie G du solide (fig. IV-36),

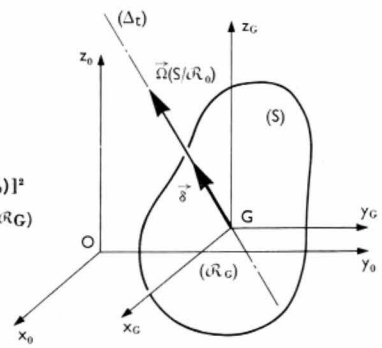


Fig. IV-36

$T(S/\mathcal{R}_0) = \frac{1}{2} m [\vec{V}(G/\mathcal{R}_0)]^2 + T(S/\mathcal{R}_G)$

quelle que soit la nature du mouvement de (S), l'énergie cinétique de (S) est donnée par l'expression suivante :

$$T(S/\mathcal{R}_0) = \frac{1}{2} m [\vec{V}(G/\mathcal{R}_0)]^2 + \frac{1}{2}[\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0)]^2 . I(S/\Delta_t)$$

ou :

$$\boxed{T(S/\mathcal{R}_0) = \frac{1}{2} m[\vec{V}(G/\mathcal{R}_0)]^2 + \frac{1}{2}\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0).[\bar{\bar{I}}_G\vec{\Omega}(S/.\mathcal{R}_0)]}$$

L'énergie cinétique d'un solide (S) est égale à l'énergie cinétique de son centre d'inertie, affecté de la masse totale de (S), augmentée de l'énergie cinétique de (S) dans son mouvement par rapport à $(\mathcal{R}_G)$, appelé encore mouvement autour du centre de gravité.

2.3. Théorèmes de la puissance et de l'énergie cinétique. — Les théorèmes généraux ont permis d'établir des relations entre les mouvements et les efforts créant ces mouvements. Les théorèmes de la puissance et de l'énergie cinétique vont permettre d'établir des relations entre les mouvements et les énergies dépensées pour créer ces mouvements.

2.3.1. Théorèmes de la puissance et de l'énergie cinétique pour le point matériel. — Soit un point matériel M de masse m soumis à plusieurs forces de résultante $\vec{F}_M$. D'après la loi fondamentale de la dynamique, effort et mouvement sont liés par la relation suivante :

$$\vec{F}_M = m . \vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0), \text{ ou : } \vec{F}_M - m . \vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0) = \vec{0}$$

Cette égalité reste inchangée si l'on multiplie scalairement chacun des membres par un vecteur arbitraire, $\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)$, par exemple :

$$\vec{F}_M . \vec{V}(M/\mathcal{R}_0) = m . \vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0) . \vec{V}(M/\mathcal{R}_0)$$

Donc :

$$\boxed{P(t) = \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2} m [\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)]^2\right\} = \frac{dT(M/\mathcal{R}_0)}{dt}}$$

D'où le **théorème de la puissance** : *La puissance développée par toutes les forces exercées sur le point matériel M, à l'instant t, est égale à la dérivée de l'énergie cinétique à cet instant.*

Dans le cas où l'on multiplie scalairement par $\vec{V}(M/\mathcal{R}_0) . dt$, on obtient :

$$\vec{F}_M . \vec{V}(M/\mathcal{R}_0) . dt = m . \vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0) . \vec{V}(M/\mathcal{R}_0) . dt$$

soit :

$$\delta W = d\left[\frac{1}{2} m V^2(M/\mathcal{R}_0)\right] = dT(M/\mathcal{R}_0)$$

Le travail élémentaire de toutes les forces exercées sur le point matériel M au cours de la variation de temps dt est égal à la différentielle de l'énergie cinétique correspondant à cette variation de temps.

En intégrant les deux membres de l'équation précédente entre les limites t_0 et t_n, correspondant aux positions A_0 et A_n de M, on obtient :

$$\int_{t_0}^{t_n} [\vec{F}_M . \vec{V}(M/\mathcal{R}_0)] . dt = \frac{1}{2} m . V^2(M/\mathcal{R}_0, t_n) - \frac{1}{2} m . V^2(M/\mathcal{R}_0, t_0)$$

soit : $\boxed{W_{t_0 t_n} = T(M/\mathcal{R}_0, t_n) - T(M/\mathcal{R}_0, t_0)}$

D'où le **théorème de l'énergie cinétique** : *Le travail de la résultante des forces exercées sur le point matériel M, lorsque celui-ci se déplace de A_0 à A_n entre les instants t_0 et t_n, est égal à la variation de l'énergie cinétique du point M entre ces deux instants.*

Si les *forces dérivent d'une fonction de force U,* il existe une fonction potentielle $\mathcal{V} = -U$ et l'on a :

$$dT(M/\mathcal{R}_0) = \delta W = dW = -d\mathcal{V}$$

D'où : $dT + d\mathcal{V} = 0$

et : $\boxed{T + \mathcal{V} = \text{Cte}}$

Lorsque toutes les forces exercées sur M dérivent d'une fonction de force, l'énergie mécanique totale de M, somme de son énergie potentielle $\mathcal{V}$ et de son énergie cinétique T, est une constante.

2.3.2. Théorèmes de la puissance et de l'énergie cinétique pour un solide. — Le solide indéformable étant considéré comme un ensemble de points matériels immobiles les uns par rapport aux autres, l'application du théorème de la puissance, ou du théorème de l'énergie cinétique, à chacun de ces points, compte tenu du principe de l'action et de la réaction et de l'indéformabilité du solide, permet d'établir le théorème de la puissance, ou le théorème de l'énergie cinétique, pour le solide.

Théorème de la puissance : La somme des puissances développées par les forces extérieures exercées sur (S), à l'instant t, est égale à la dérivée de l'énergie cinétique de (S) à cet instant.

Soit : $$\boxed{P(t) = \frac{dT(S/\mathcal{R}_0)}{dt}}$$

Théorème de l'énergie cinétique : La somme des travaux des forces extérieures exercées sur (S), entre les instants t_0 et t_n quelconques, est égale à la variation de l'énergie cinétique de (S) entre ces deux instants.

Soit : $$\boxed{W_{t_0 t_n} = T(S/\mathcal{R}_0, t_n) - T(S/\mathcal{R}_0, t_0)}$$

Si les *forces exercées sur* (S) *dérivent d'une fonction de force,* la somme des travaux élémentaires de ces forces est une différentielle totale exacte et il existe une fonction potentielle $\mathcal{V}$ égale à $-U$ telle que :

$$dT(S/\mathcal{R}_0) = \delta W = dU = -d\mathcal{V}$$

d'où : $$dT + d\mathcal{V} = 0$$

et : $$\boxed{T + \mathcal{V} = \text{Cte}}$$

Lorsque toutes les forces extérieures exercées sur (S) dérivent d'une fonction de force, la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique de (S) est une constante qui représente l'énergie mécanique totale de (S).

Il faut noter que les théorèmes qui viennent d'être énoncés ne s'appliquent qu'à un corps solide (S) indéformable.

2.3.3. Théorèmes de la puissance et de l'énergie cinétique pour un ensemble de plusieurs solides. — Quand on envisage un ensemble (E) de n corps solides (S_1), (S_2), ... et (S_n), parmi les efforts exercés sur ces solides, on distingue les efforts intérieurs à l'ensemble et les efforts extérieurs.

En vertu du principe de l'action et de la réaction, le système des efforts intérieurs est équivalent à zéro. En revanche, la puissance (ou le travail) développée par ces forces n'est pas nulle. Le cas de deux corps (S_1) et (S_2) en contact ponctuel, étudié au 2° du paragraphe 2.1.1, montre que la somme des puissances, développées par toutes les forces intérieures à l'ensemble (E), est constituée de termes de la forme : $\vec{F}_M\,(S_{j+1} \to S_j) \cdot \vec{V}_g\,(S_j/S_{j+1})$. L'un de ces termes est nul si $V_g = 0$, donc quand il n'y a pas glissement entre les deux corps considérés, ou si $\vec{F}_M$ est perpendiculaire à $\vec{V}_g$, donc quand il n'y a pas de frottement au contact des corps considérés.

En appliquant le théorème de la puissance à chacun des solides (S_1), (S_2), ... et (S_n) de l'ensemble (E), on obtient n équations dont la somme entraîne le théorème suivant :

Théorème de la puissance : Étant donné un ensemble (E) de n solides, la somme des puissances développées par les forces extérieures et par les forces intérieures à cet ensemble, à l'instant t, est égale à la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique de l'ensemble (E) à cet instant.

Soit : $$\boxed{\sum_{j=1}^{j=n} P_j^{\text{ext}} + \sum_{j=1}^{j=n} P_j^{\text{int}} = \frac{dT(E/\mathcal{R}_0)}{dt}}$$

De même, la somme des n équations, obtenues en appliquant le théorème de l'énergie cinétique à chacun des solides de (E), entraîne le théorème suivant :

Théorème de l'énergie cinétique: Étant donné un ensemble (E) de n solides, la somme des travaux des forces extérieures et des forces intérieures à cet ensemble, entre deux instants t_0 et t_n quelconques, est égale à la variation de l'énergie cinétique de l'ensemble (E) entre ces deux instants :

$$\boxed{\sum_{j=1}^{j=n} W_j^{\text{ext}}(t_0, t_n) + \sum_{j=1}^{j=n} W_j^{\text{int}}(t_0, t_n) = T(E/\mathcal{R}_0, t_n) - T(E/\mathcal{R}_0, t_0)}$$

P_j^{ext} et W_j^{ext} correspondent aux puissances et travaux développés par les forces exercées sur le solide (Sj) et extérieures à l'ensemble (E) ; de même, P_j^{int} et W_j^{int} correspondent aux puissances et travaux développés par les forces intérieures à (E).

THERMODYNAMIQUE

CHAPITRE PREMIER

TEMPÉRATURE - THERMOMÉTRIE

1. TEMPÉRATURE D'UN CORPS

La *notion de température* est liée à la sensation de *chaud* et de *froid* due au sens du toucher et l'on dit que la température d'un corps chaud est *supérieure* à celle d'un corps froid. Mais ce sens ne permet pas de classer les températures des corps (par ordre croissant, par ex.) ; en effet, il manque de *fidélité* (une même eau tiède paraît froide ou chaude suivant que la main a été préalablement plongée dans une eau plus chaude ou plus froide) et de *sensibilité* (le contact de la main avec de l'eau bouillante ou du fer porté au rouge provoque une sensation de brûlure).

C'est pour éliminer cet aspect subjectif que des *thermomètres* ont été utilisés pour déterminer les températures.

2. THERMOMÉTRIE

2.1. Thermomètre. — Un thermomètre est un corps dont nous pouvons connaître la température par la *mesure d'une grandeur x* liée à ce corps (pression, longueur, volume, résistance électrique, etc.) et grâce au *choix arbitraire d'une relation* entre la température t et la mesure x. Cette relation est appelée *échelle thermométrique*.

2.2. Les échelles thermométriques. — Une *échelle thermométrique est linéaire* si elle est de la forme $t = Ax + B$; A et B sont des constantes qui sont déterminées en attribuant arbitrairement des valeurs numériques à deux températures, appelées *points fixes*, que l'expérience a révélé constantes (par exemple : température de fusion de la glace et température d'ébullition de l'eau sous la pression atmosphérique normale).

Une échelle thermométrique linéaire est *centésimale* si les températures affectées aux deux points fixes sont 0 et 100.

Le nombre t dépendant d'une grandeur déterminée x d'un corps particulier, deux échelles centésimales, définies pour deux thermomètres différents, sont différentes en général.

L'échelle Celsius est une *échelle linéaire centésimale*, la grandeur mesurée est la variation de pression à volume constant d'une masse déterminée de gaz parfait ; p_0, p et p_{100} étant les pressions à 0, t et 100, la relation entre la température et la pression est la suivante :

$$\frac{t}{100} = \frac{p - p_0}{p_{100} - p_0} \iff p = p_0 (1 + \beta t)$$

β s'appelle le *coefficient thermométrique de l'échelle Celsius*.

La température est exprimée en degrés Celsius (symbole : °C) ; c'est seulement une grandeur repérable.

L'échelle Fahrenheit, utilisée dans certains pays anglo-saxons, est une *échelle linéaire* mais *non centésimale :* les nombres 32 et 212 sont affectés aux points fixes correspondant à la fusion de la glace et à l'ébullition de l'eau sous la pression atmosphérique normale. La température est exprimée en *degrés Fahrenheit* (symbole : °F) ; c'est également une grandeur repérable. Si nous appelons C et F les nombres affectés à une même température dans les échelles Celsius et Fahrenheit, nous avons la relation :

$$\frac{F - 32}{212 - 32} = \frac{C}{100} \iff \frac{F - 32}{9} = \frac{C}{5}$$

Cette relation permet de dresser le tableau de correspondance suivant :

degrés Celsius	degrés Fahrenheit	degrés Celsius	degrés Fahrenheit
— 40	— 40	+ 30	+ 86
— 30	— 22	+ 40	+ 104
— 20	— 4	+ 50	+ 122
— 10	+ 14	+ 60	+ 140
0	+ 32	+ 70	+ 158
+ 10	+ 50	+ 80	+ 176
+ 20	+ 68	+ 90	+ 194

L'échelle de température absolue *T* est une échelle qui se déduit de l'échelle Celsius t par la relation suivante :

$$T = t + 273{,}15$$

L'échelle de température thermodynamique a été définie par la dixième conférence des Poids et Mesures (1954) à partir des principes de la thermodynamique (V. chap. 5 § 2.3). L'unité de température thermodynamique est le kelvin (symbole : K).

Pratiquement cette échelle s'identifie avec l'échelle de température absolue T. Elle présente deux avantages sur l'échelle Celsius : la température ainsi définie est une *grandeur mesurable* car nous pouvons définir le rapport de deux températures thermodynamiques et l'échelle est complètement déterminée si nous affectons un nombre à un *seul point fixe*. Il a été convenu de prendre $T = 273{,}16$ K pour le point triple de l'eau (équilibre de l'eau sous les trois états : solide, liquide et vapeur).

2.3. Thermomètres, thermocouples, pyromètres

2.3.1. Le thermomètre normal à hydrogène. — (fig. I-1). Le thermomètre normal à hydrogène comprend une enceinte remplie d'hydrogène à la température à me-

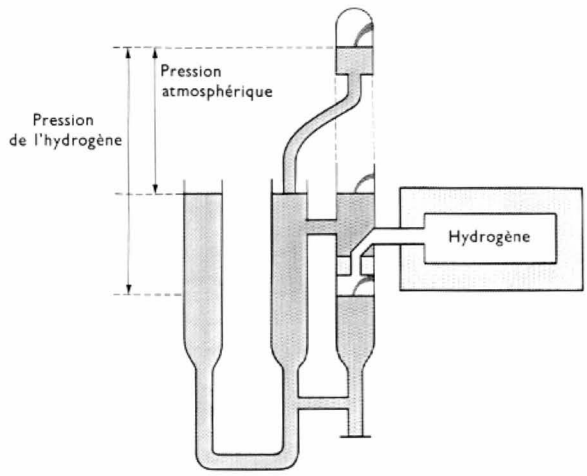


Fig. I-1 — Thermomètre normal à hydrogène

surer et des manomètres à mercure permettant de déterminer la pression atmosphérique et la pression de l'hydrogène. Pression et température étant liées, ces mesures permettent de déterminer la température d'un corps ; elle peut être exprimée en degrés Celsius ou en kelvins. Diverses corrections doivent être apportées au résultat :

— à cause de la variation de volume de l'enveloppe du gaz,

— parce que l'hydrogène n'est pas un gaz parfait.

Les mesures sont longues, l'appareil n'est utilisé que pour les basses températures ou pour déterminer avec précision la température des points fixes, sous la pression atmosphérique normale.

Point fixe	Température en degrés Celsius
Ébullition de l'oxygène	— 182,97
Solidification de l'eau	0
Ébullition de l'eau	100
Ébullition du soufre	444,6
Solidification de l'antimoine	630,5
Solidification de l'argent	960,8
Solidification de l'or	1 063,0

Au-dessus de — 182,97 °C, pour représenter le plus exactement possible l'échelle thermodynamique, d'autres thermomètres sont employés comme le thermomètre à résistance de platine, le couple thermoélectrique platine — platine rhodié et le pyromètre optique monochromatique.

2.3.2. Les thermomètres à résistance. (V. t. 2, Mesures et appareils de mesure, chap. 20). — La résistance électrique d'un fil métallique augmente avec la température (V. t. 1, Électricité, chap. 2). Entre — 182,97 °C et 0 °C, la relation entre la résistance R d'un fil de platine et la température Celsius t n'est pas linéaire :

$$R = R_0 \, [1 + at + bt^2 + ct^3 \, (t - 100)]$$

La température t se déduit de la mesure de la résistance R. Entre 0 °C et 630 °C, la relation entre R et t se réduit à l'expression suivante :

$$R = R_0 \, (1 + at + bt^2)$$

Les constantes R_0, a, b, c, sont déterminées au moyen de points fixes appartenant au domaine de validité. Elles sont déduites des valeurs de la résistance pour les températures des points fixes choisis. Il est possible d'atteindre une précision de 10^{-3} °C entre 0 °C et 100 °C.

2.3.3. Les thermocouples. — Un circuit fermé constitué par deux métaux soudés (fig. I-2) est le siège d'une

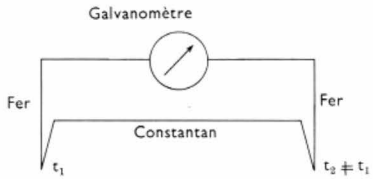


Fig. I-2

force électromotrice e lorsque les deux soudures sont à des températures différentes. Pour un thermocouple platine-platine rhodié, entre 630 °C et 1 063 °C, la relation entre e et t peut s'écrire sous la forme suivante :

$$e = a + bt + ct^2$$

Les constantes a, b, c, sont déterminées en mesurant les valeurs de la force électromotrice lorsqu'une soudure est portée successivement aux températures d'un certain nombre de points fixes tandis que l'autre est maintenue à 0 °C. Un thermocouple permet de mesurer des écarts de température de 10 microdegrés Celsius.

L'industrie utilise des couples thermoélectriques (V. t. 2, Mesures et appareils de mesure, chap. 20), même en dehors du domaine précédent, mais la précision est alors moins bonne qu'avec un pyromètre optique.

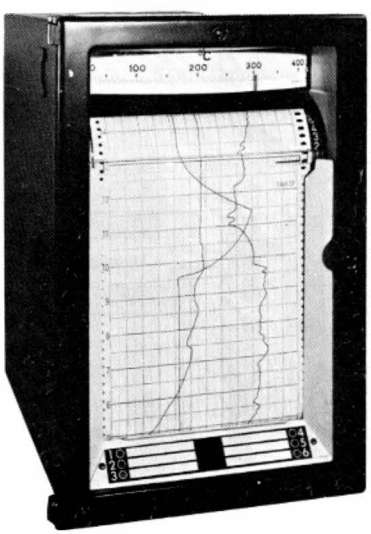
Le tableau suivant regroupe quelques-uns de ces couples thermoélectriques.

Couple	Température maximale d'emploi
Cuivre — Constantan	400 °C
Fer — Constantan	700 °C
Chromel — Alumel	1 000 °C
Platine — Platine rhodié	1 400 °C

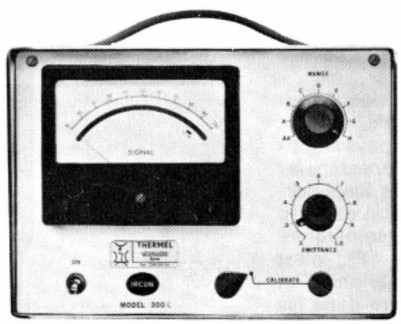
2.3.4. Les pyromètres optiques monochromatiques. — Les corps chauffés à haute température émettent des ondes électromagnétiques, principalement des radiations infrarouges. Le quotient de l'énergie rayonnée et de la surface émettrice est appelé *émittance ;* Stefan a montré que l'émittance d'un corps qui a la propriété d'absorber la totalité de l'énergie rayonnée qu'il reçoit (corps noir) est proportionnelle à T^4 si sa température thermodynamique est T. Un corps recouvert de suie, l'intérieur d'une cavité munie d'un petit orifice, un four, sont des corps noirs. Il est possible de déterminer leur température en mettant en œuvre la propriété précédente.

Deux pyromètres sont particulièrement employés :

— *le pyromètre monochromatique à disparition de filament :* un système optique donne une image de la source (corps dont la température est à mesurer) en un point où se

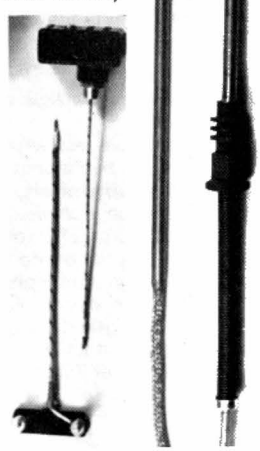


Appareil enregistreur de température (*Chauvin-Arnoux*)



(*Thermel*)

Thermocouples (*Chauvin-Arnoux*)



Pyromètre optique avec coffret de mesure (modèle portatif)

trouve le filament d'une lampe. La température de ce dernier est réglée en agissant sur l'intensité du courant qui le parcourt. Pour une valeur convenable de ce courant, le filament semble disparaître car il se confond avec l'image de la source. L'ampèremètre placé en série avec la lampe est directement gradué en températures ;

— *le pyromètre Féry :* il comprend un couple thermoélectrique dont la soudure chaude est chauffée au moyen du rayonnement émis par le corps noir. Un galvanomètre relié à ce couple donne directement la température du corps noir. La précision est voisine de 1 %.

2.3.5. Le thermomètre à mercure. — Une échelle linéaire centésimale de température a été définie en prenant comme grandeur physique le volume apparent du mercure dans son enveloppe. Le thermomètre à mercure n'a pas été choisi pour représenter l'échelle thermodynamique car ces deux échelles ne sont pas rigoureusement identiques, deux échelles définies pour deux thermomètres différents étant en général distinctes. Il est néanmoins utilisé de — 39 °C à 360 °C.

Le mercure a été choisi bien que son coefficient de dilatation soit plus faible que celui d'autres liquides parce qu'il est liquide dans un grand domaine de températures, et parce que sa pression de vapeur saturante et sa capacité calorifique sont faibles. Diverses corrections sont nécessaires comme la correction de zéro (la graduation 0 étant mal placée par suite d'un résidu de dilatation) et la correction de colonne émergente (dans le cas où tout le mercure n'est pas à la température à mesurer).

CHAPITRE II
CALORIMÉTRIE

1. NOTION DE QUANTITÉ DE CHALEUR

Un système, mécaniquement isolé, dont la température varie ou qui change d'état physique, échange avec le milieu extérieur une certaine *quantité de chaleur*. On a longtemps cru que la chaleur était un élément ; les transformations mutuelles de chaleur en énergie mécanique, électrique, chimique, rayonnante ont montré que c'était une des formes de l'énergie.

Une quantité de chaleur est une grandeur mesurable. L'unité légale est le *joule* (symbole : J). Une autre unité est également employée : la *calorie* (symbole : cal) ; c'est la quantité de chaleur nécessaire pour élever la température d'une masse d'eau de 1 g de 14,5 °C à 15,5 °C sous la pression atmosphérique normale (101 325 Pa) ; 1 cal correspond à 4,1855 J. Des multiples de cette unité sont utilisés : la *kilocalorie* (symbole : kcal) qui vaut 10^3 calories et la *thermie* (symbole : th) qui vaut 10^6 calories.

2. PROPAGATION DE LA CHALEUR

Les échanges de chaleur entre deux corps peuvent avoir lieu suivant trois modes : *conduction*, *convection* et *rayonnement*.

Il y a *conduction* lorsque la chaleur se transmet par un milieu matériel solide, tel qu'une barre de métal. La chaleur échangée pendant une durée déterminée t est proportionnelle à la section de la barre, à la durée t et au gradient de température.

Il y a *convection* lorsque la chaleur se transmet dans un fluide : les parties les plus chaudes du fluide ont la masse volumique la plus faible et tendent à s'élever en donnant naissance à des *courants de convection* qui ont pour effet d'égaliser les températures.

Il y a *rayonnement* lorsqu'un corps chaud émet des ondes électromagnétiques : cette propagation ne nécessite aucun milieu matériel.

3. CHALEUR MASSIQUE

Un corps de masse m absorbe une quantité de chaleur Q pour que sa température passe de la valeur t_1 à la valeur t_2. La *chaleur massique* c (ou *capacité thermique massique*) moyenne du corps entre t_1 et t_2 est définie par la relation suivante :

$$c = \frac{Q}{m(t_2 - t_1)} \Longleftrightarrow Q = m\,c\,(t_2 - t_1)$$

Elle est numériquement égale à la quantité de chaleur absorbée par l'unité de masse du corps lorsque sa température s'élève de 1 °C. L'unité est le *joule par kilogramme* et par *kelvin* (symbole : J/kg.K). En première approximation, c ne dépend ni de t_1 ni de t_2 ; le produit (mc) s'appelle la *capacité thermique* du corps. Son unité est le *joule par kelvin* (J/K).

Le tableau suivant donne quelques exemples de chaleurs massiques entre 0 °C et 100 °C (en joules par kilogramme et par kelvin).

Pour les gaz, il y a lieu de distinguer la chaleur massique à pression constante c_p lorsque la transformation a lieu à pression constante et la chaleur massique à volume constant c_v lorsque la transformation a lieu à volume constant.

Corps	c	Corps	c
Acide sulfurique	1 380	Glycérine	2 430
Alcool	2 430	Granit	840
Aluminium	900	Magnésium	1 050
Argent	240	Marbre	880
Benzène	1 840	Mercure	138
Brique	920	Nickel	452
Carbone (graphite)	670	Or	134
Chloroforme	960	Pétrole	2 090
Cuivre	380	Platine	134
Essence de térébenthine	1 760	Plâtre	840
Étain	230	Plomb	130
Éther	2 260	Silicium	750
Fer et acier	465	Soufre	744
Glace	2 090	Verre	840
		Zinc	400

Le produit de la chaleur massique c_p ou c_v d'un corps et de sa masse molaire est appelé *chaleur molaire* à pression constante ou à volume constant ; elle s'exprime en *joules par mole-kelvin*.

En première approximation la valeur de leur rapport $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ ne dépend que de l'atomicité du gaz comme nous pouvons le constater sur le tableau suivant :

Atomicité	Gaz	c_p	c_v	γ
1	Hélium	20,8	12,5	1,67
1	Vapeur de mercure	20,8	12,5	1,67
2	Hydrogène	28,8	20,4	1,41
2	Oxygène	29,4	21	1,40
2	Azote	29,1	20,7	1,40
2	Oxyde de carbone	29,2	20,8	1,40
2	Chlore	33,9	27,2	1,32
3	Bioxyde de carbone	37,1	28,5	1,30
5	Méthane	35,7	27,2	1,31
6	Ethylène	43,6	34,3	1,25

Chaleurs molaires des gaz à 25 °C sous pression normale ; c_p et c_v sont exprimées en joules par mole-kelvin.

Remarque : **Loi de Dulong et Petit.** Dans le cas d'un solide le produit de la chaleur massique et de la masse d'une mole d'atomes de ce corps est constant et égal à 27 J/mol. K. Elle n'est que grossièrement vérifiée : c'est une loi limite.

CHAPITRE III

DILATATION DES SOLIDES, DES LIQUIDES ET DES GAZ

Les dimensions d'un solide varient avec la température.

1. DILATATION LINÉAIRE D'UN SOLIDE

La longueur l d'une barre dépend de la température t : l'expérience montre qu'en première approximation, elle est donnée en fonction de la longueur l_0 à 0 °C par la relation suivante :

$$l = l_0 \ (1 + \lambda t)$$

La température t est exprimée en degrés Celsius ; λ, appelé *coefficient de dilatation linéaire* du solide, est exprimé en *kelvins à la puissance moins un* (symbole : K^{-1}) ou en *degrés Celsius à la puissance moins un* (symbole : $°C^{-1}$) ; $1\ K^{-1} = 1\ °C^{-1}$.

La dilatation linéaire d'un solide s'accompagne parfois d'anomalies : elles sont dues à des transformations allotropiques (exemple : le fer pur vers 900 °C. V. t. 3, Métaux et alliages).

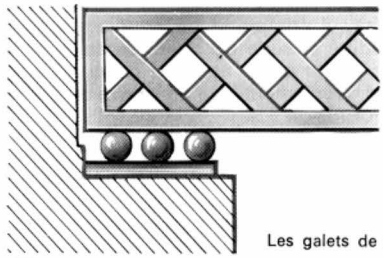


Fig. III-2

Les galets de roulements permettent la dilatation

cient de dilatation linéaire tels que l'*invar* (alliage fer-nickel à 36 % de nickel) ou le *pyrex*. Le premier est employé dans des pendules dont la période ne doit pratiquement pas dépendre de la température et le second entre dans la constitution de certains récipients devant être chauffés. Lors de la construction des ponts, des immeubles, des voies de chemin de fer, il y a lieu de prévoir des *joints de dilatation* pour que la dilatation puisse se produire sans inconvénient (fig. III-1 à III-4).

Solides	λ en kelvins à la puissance moins 1	Solides	λ en kelvins à la puissance moins 1
Acier doux	10^{-5}	Invar	$0{,}1.10^{-5}$
Acier trempé	$1{,}2.10^{-5}$	Laiton	$1{,}8.10^{-5}$
Aluminium	$2{,}2.10^{-5}$	Or	$1{,}5.10^{-5}$
Argent	$1{,}9.10^{-5}$	Platine	$0{,}9.10^{-5}$
Bronze	2.10^{-5} à 3.10^{-5}	Plomb	$2{,}8.10^{-5}$
Cuivre	$1{,}7.10^{-5}$	Pyrex	$0{,}32.10^{-5}$
Étain	$2{,}2.10^{-5}$	Silice	$0{,}57.10^{-5}$
Fer	$1{,}2.10^{-5}$	Verre	$0{,}7.10^{-5}$ à $0{,}9.10^{-5}$
Fonte	$1{,}1.10^{-5}$	Zinc	$3{,}1.10^{-5}$

Coefficients de dilatation linéaire de certains solides.

2. DILATATION SUPERFICIELLE ET DILATATION VOLUMIQUE (OU CUBIQUE) D'UN SOLIDE

L'aire S d'une surface et le volume V d'un solide à la température t sont donnés en fonction de leurs valeurs respectives à 0 °C par des relations semblables à la précédente.

$$S = S_0 \ (1 + \sigma\, t) \text{ et } V = V_0 \ (1 + kt)$$

σ est le *coefficient de dilatation superficielle* et k est le *coefficient de dilatation volumique* ; σ et k s'expriment avec la même unité que λ, c'est-à-dire en kelvins à la puissance moins un. En première approximation σ et k valent respectivement le double et le triple de λ : $\sigma \approx 2\lambda$; $k \approx 3\lambda$.

Solide	k en kelvins à la puissance moins 1
Cuivre	$5{,}1.10^{-5}$
Étain	$6{,}5.10^{-5}$
Fer	$3{,}7.10^{-5}$
Plomb	$8{,}5.10^{-5}$
Silice	$5{,}8.10^{-5}$
Verre	$2{,}4.10^{-5}$
Zinc	$9{,}3.10^{-5}$

Coefficients de dilatation volumique de certains solides

Lorsqu'il est nécessaire de réduire les effets de la dilatation il y a lieu d'employer des matériaux de faible coeffi-

Fig. III-1

Raccord souple de tuyauteries pour fluide chaud

Fig. III-3

Joint de dilatation oblique (*S.N.C.F.*)

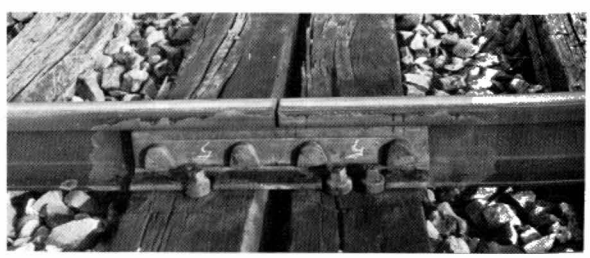


Fig. III-4

Joint de dilatation classique (*S.N.C.F.*)

Remarque: La masse volumique ρ d'un corps, quotient de sa masse m et de son volume V, dépend évidemment de la température t puisque V est fonction de celle-ci :

$$V = V_0\ (1 + kt)$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{V_0\ (1 + kt)}$$

Si nous appelons ρ_0 la masse volumique du corps à 0 °C $\left(\rho_0 = \frac{m}{V_0}\right)$ nous déduisons :

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + kt} \approx \rho_0\ (1 - kt)$$

3. DILATATION DES LIQUIDES

La relation entre les volumes V et V_0 s'applique à un liquide : k est alors appelé *coefficient de dilatation absolue du liquide.*

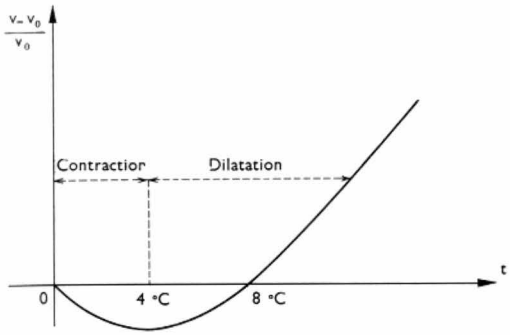


Fig. III-5 — Anomalie de la dilatation de l'eau

L'eau présente une anomalie de dilatation (fig. III-5) : sa masse volumique passe par un maximum à la température de 4 °C (fig. III-6).

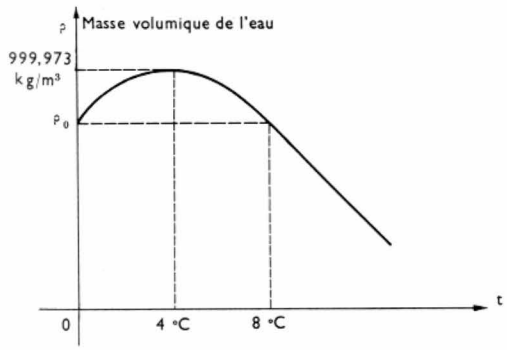


Fig. III-6 — Variation de la masse volumique de l'eau en fonction de la température

Remarque : Dilatation apparente d'un liquide. En général, un liquide est contenu dans une enceinte qui se dilate elle aussi ; nous ne pouvons observer que la dilatation apparente du liquide dans son enveloppe solide. Considérons une enveloppe graduée à 0 °C. Appelons V_0 le *volume du liquide lu* à 0 °C et V celui à t degrés Celsius. À cette température t, le volume du liquide est : $V_0(1 + k't)$, et le volume du solide est : $V\ (1 + kt)$, k' et k représentant respectivement les coefficients de dilatation volumique du liquide et du matériau constituant l'enveloppe. Ces deux volumes sont évidemment égaux :

$$V_0\ (1 + k't) = V\ (1 + kt)$$

Posons : $V = V_0\ (1 + \delta t)$

δ est le *coefficient de dilatation apparente* du liquide dans son enveloppe. Sa valeur se déduit de celle de k et de k'.

$$V_0\ (1 + k't) = V_0\ (1 + \delta t)\ (1 + kt) \approx V_0\ [1 + (\delta + k)\ t]$$

D'où : $k' = \delta + k \iff \delta = k' - k$

Le coefficient de dilatation absolue est pratiquement égal à la somme du coefficient de dilatation apparente du liquide et du coefficient de dilatation volumique de l'enveloppe.

4. COMPRESSIBILITÉ ET DILATATION DES GAZ

L'état d'une masse m de gaz est entièrement défini lorsque sa pression p, son volume V et sa température T sont connus. L'expérience montre que les gaz réels suivent approximativement les lois suivantes :

— **Loi de Boyle-Mariotte :** À température T constante, le produit des nombres qui mesurent la pression p et le volume V d'une masse m déterminée de gaz est constant.

$$\boxed{pV = \text{Cte}} \quad (m \text{ et } T \text{ étant constants})$$

— **Loi de Gay-Lussac :** (Nous désignons par V_0 et V les volumes occupés par une masse déterminée de gaz à 0 °C et t degrés Celsius sous une même pression p).

Le *coefficient moyen de dilatation à pression constante* $\alpha_0^t = \frac{V - V_0}{V_0 t}$ est indépendant de la nature du gaz, de la pression p, de la température t, du volume initial V_0 et est égal à : $\frac{1}{273{,}15}$.

— **Loi de Charles :** (p_0 et p représentent les pressions d'une masse déterminée de gaz à 0 °C et t degrés Celsius occupant le même volume V) le *coefficient moyen d'augmentation de pression à volume constant* $\beta_0^t = \frac{p - p_0}{p_0 t}$ est indépendant de la nature du gaz, du volume V, de la température t, de la pression initiale p_0 et est égal à : $\frac{1}{273{,}15}$.

Ces lois sont d'autant mieux vérifiées que la pression du gaz est faible : ce sont des lois limites.

Par convention, tout gaz qui suit rigoureusement ces lois est appelé *gaz parfait.*

Ces trois lois peuvent se déduire d'une relation unique appelée *équation caractéristique des gaz parfaits :*

$$\boxed{p\,V = n\,R\,T} \iff \boxed{\frac{p\,V}{T} = \text{Cte}}$$

n représente le nombre de moles de gaz contenues dans le volume V et R est une constante appelée *constante des gaz parfaits* ($R = 8{,}314$ J/mol.K).

Remarque : Mélange de gaz parfaits. Les propriétés du gaz parfait ne dépendant pas de la nature du gaz, l'équation précédente se généralise immédiatement au cas d'un mélange de k gaz. Si nous appelons n_i le nombre de moles du gaz auquel nous attribuons le numéro i, nous pouvons écrire :

$$p\ V = \sum_{i=1}^{i=k} n_i\ RT$$

Posons : $p_i = n_i \frac{RT}{V}$; p_i est appelé *pression partielle du gaz* de numéro i du mélange. Donc :

$$p = \sum_{i=1}^{i=k} p_i$$

Nous déduisons immédiatement de la relation précédente que *la pression d'un mélange de gaz parfaits est égale à la somme des pressions partielles* **(Loi de Dalton)**.

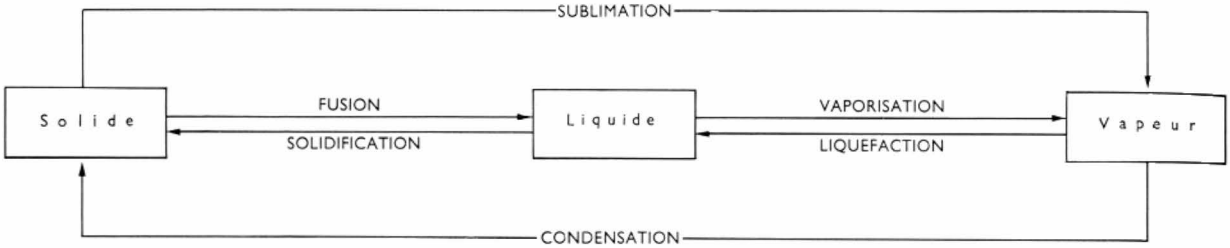
Considérons k gaz et appelons p_i, V_i, T_i, n_i, les caractéristiques du gaz de numéro i. Quel que soit le mélange et quelle que soit la transformation, le nombre de moles total est invariant ; nous pouvons écrire la relation suivante :

$$\sum_{i=1}^{i=k} n_i = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^{i=k} \frac{p_i\ V_i}{T_i} = \text{Cte}$$

CHAPITRE IV
CHANGEMENT D'ÉTAT PHYSIQUE

1. ÉTATS PHYSIQUES D'UN CORPS PUR

Un corps peut exister sous plusieurs états solides (variétés allotropiques), à l'état liquide et à l'état gazeux. Pendant le passage d'un état à un autre, il y a équilibre entre les deux phases considérées. Le tableau suivant rappelle quels sont les divers changements d'états possibles pour un corps pur.



Changements d'état d'un corps pur

2. FUSION ET SOLIDIFICATION

2.1. Cas des corps purs. — Sous une pression déterminée, la *fusion et la solidification* d'un corps pur ont lieu à une température bien déterminée, appelée *température de fusion*. Elle est constante pendant toute la transformation.

Corps	Température de fusion en degrés Celsius	Corps	Température de fusion en degrés Celsius
Alcool	— 130	Glace	0
Aluminium	660	Iode	114
Antimoine	630	Magnésium	650
Argent	960	Manganèse	1 260
Baryum	704	Mercure	— 39
Benzène	6	Nickel	1 455
Bismuth	271	Or	1 063
Brome	— 7	Phosphore	44
Cadmium	321	Platine	1 773
Calcium	810	Plomb	327
Chrome	1 800	Potassium	63
Cobalt	1 490	Sodium	98
Cuivre	1 083	Soufre	113
Étain	232	Zinc	420
Fer	1 535		

Températures de fusion de quelques solides sous la pression atmosphérique normale.

À chaque valeur de la pression correspond une valeur de la température de fusion. Ces deux grandeurs ne sont donc pas indépendantes, comme le montre la courbe d'équation $p = f(T)$ appelée *courbe de fusion* (fig. IV-1). Son allure dépend de la variation du volume qui accompagne la fusion : s'il y a augmentation de volume à la fusion (cas général), le coefficient directeur de la courbe de fusion est positif ; s'il y a diminution de volume à la fusion (eau, gallium, bismuth) il est négatif (fig. IV-2).

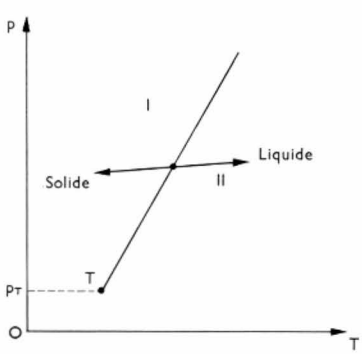


Fig. IV-1

Courbe de fusion : cas général

Cette courbe appelle trois remarques :

— le coefficient directeur de la courbe (appelée aussi *pente*) est important : 100 bars par degré Celsius (10 MN/m².K) ;

— la courbe de fusion est limitée à un point T ; en effet, l'expérience montre que, quelle que soit la température, il est impossible d'obtenir du liquide si la pression est inférieure à une valeur p_T ;

— la courbe sépare le plan en deux régions I et II ; l'état du corps pur à une température T sous une pression p peut être représenté par le point M de coordonnées p et T ; si M appartient à la courbe de fusion, deux phases sont en présence : une partie du corps est à l'état liquide et une autre à l'état solide ; si M appartient à la région I, le corps est entièrement à l'état solide ; si M appartient à la région II, il est à l'état liquide.

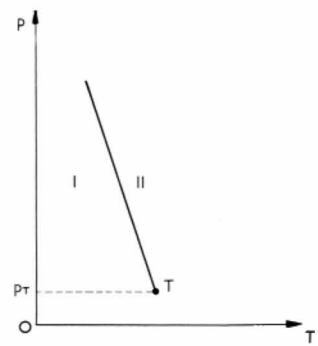


Fig. IV-2

Courbe de fusion de l'eau

Dans certaines conditions, il est possible que, le point M étant dans la région I, le corps soit cependant à l'état liquide : il y a *surfusion* (état métastable). Pour faire cesser la surfusion, il suffit d'introduire un petit cristal dans le liquide ou de frapper légèrement le récipient. Ainsi lorsque des gouttes d'eau de pluie sont à une température inférieure à 0 °C, le choc de la goutte contre le sol suffit pour faire cesser la surfusion et l'eau se transforme immédiatement en glace (verglas). Le verre peut être considéré comme un liquide surfondu dont la viscosité est devenue extrêmement grande.

Le phénomène de changement d'état s'accompagne toujours d'un phénomène calorifique : la quantité de chaleur absorbée (fusion) ou cédée (solidification) par une masse m de corps pour changer d'état à la température T constante, est proportionnelle à m

$$Q = m\,L_f$$

L_f est appelé *chaleur latente de fusion*. Sa valeur est donnée en fonction de la température de fusion T, des volumes massiques du liquide et du solide v_L et v_S, du coefficient

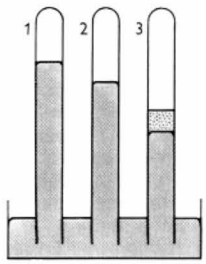


Fig. IV-3

Vaporisation dans le vide

directeur de la courbe de fusion $\left(\frac{dp}{dT}\right)_f$, par la *formule de Clapeyron :*

$$L_f = T(v_L - v_S)\left(\frac{dp}{dT}\right)_f$$

Corps	L_f
Aluminium	393
Ammoniac	450
Aniline	88
Benzène	127
Cuivre	209
Fer	295
Glace	334
Glycérine	179
Iode	490
Mercure	11,7
Naphtalène	150
Phosphore blanc	19,7
Plomb	23
Zinc	109

Chaleurs latentes de fusion en kilojoules par kilogramme à la température de fusion.

2.2. Cas des mélanges. — Une solution d'un corps *B* (soluté) dans un corps *A* (*solvant*) commence à se solidifier à une température T'_f inférieure à la température T_f de fusion du solvant pur et la *température décroît pendant la solidification*. La différence $(T_f - T'_f)$ appelée *abaissement cryométrique* est liée à la molalité *m* de la solution (quotient du nombre de moles de soluté et de la masse du solvant) par la relation suivante :

$$(T_f - T'_f) = \lambda m \quad (\textit{loi de Raoult})$$

λ ne dépend que de la nature du solvant. La loi de Raoult est une *loi limite* s'appliquant à des solutions très diluées.

Cette propriété est utilisée pour éviter le gel de certains liquides de refroidissement (et la destruction des circuits qu'ils empruntent). Ainsi, c'est un mélange eau-alcool qui est placé dans les radiateurs d'automobiles durant la période hivernale.

La température de fusion d'un *alliage* est toujours inférieure à celle de chacun des métaux qui entrent dans sa composition. Ainsi, un alliage composé de 4 parties de bismuth, 1 partie d'étain et 1 partie de plomb fond à 94 °C alors que ces métaux fondent respectivement à 271 °C, 232 °C et 327 °C ; les alliages de ce type sont utilisés pour faire des soudures.

3. VAPORISATION

Le passage de l'état liquide à l'état gazeux peut s'effectuer dans diverses conditions et nous sommes amenés à distinguer quatre cas différents :

— le liquide est introduit dans un récipient fermé et vide : c'est la vaporisation dans le vide,

— le liquide est introduit dans un récipient fermé contenant déjà des gaz : il y a *vaporisation en atmosphère gazeuse*,

— le liquide est placé dans un récipient ouvert à l'air libre : il y a *évaporation*,

— le liquide est placé dans un récipient ouvert à l'air libre et il est chauffé : il y a *ébullition*.

3.1. Vaporisation dans le vide (fig. IV-3). — Dans un *tube de Torricelli* règne le vide à la partie supérieure laissée libre par le mercure. Introduisons peu à peu un liquide : au début de l'expérience la vaporisation est *instantanée ;* le liquide se vaporise entièrement et la pression du gaz augmente (dans le tube le niveau du mercure baisse) : nous obtenons de la *vapeur sèche*. Lorsque la quantité de liquide introduite devient trop grande, il n'y a plus vaporisation : il y a *équilibre* entre le liquide et la vapeur (appelée *vapeur saturante*) ; la pression du gaz reste constante quelle que soit la quantité de liquide introduite (*pression maximale de vapeur d'eau :* p_m).

Température en degrés Celsius	p_m en millibars	Température en degrés Celsius	p_m en millibars
— 10	2,8	10	12,2
— 8	3,28	12	14
— 6	3,86	14	15,9
— 4	4,53	16	18,1
— 2	5,27	18	20,5
0	6,10	20	23,2
2	7,10	22	26,2
4	8,10	24	29,6
6	9,35	26	33,4
8	10,7	28	37,5

L'expérience montre que la vapeur sèche se comporte approximativement comme un gaz parfait, tandis que la pression de vapeur saturante ne dépend que de la température (fig. IV-4).

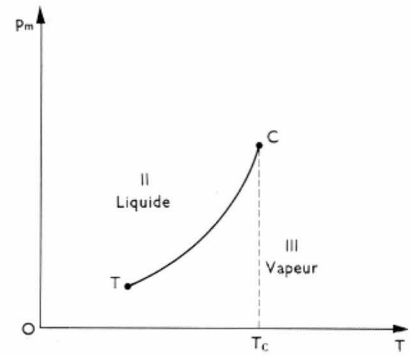


Fig. IV-4

Courbe de vaporisation

Quelle que soit la pression, il est impossible d'obtenir du liquide si la température est supérieure à une valeur T_C : la courbe de vaporisation est donc limitée par les points *T* (V. ci-dessus, § 2.1) et *C*.

La courbe de vaporisation sépare le plan en 2 régions correspondant respectivement à l'état liquide et à l'état gazeux.

La *chaleur latente de vaporisation* L_v est numériquement égale à la quantité de chaleur nécessaire pour vaporiser l'unité de masse d'un liquide à sa température de vaporisation *T*.

$$Q = mL_v$$

L_v peut être calculée à partir de la *formule de Clapeyron :*

$$L_v = T(v_V - v_L)\left(\frac{dp}{dT}\right)_v$$

v_V et v_L étant les volumes massiques de la vapeur et du liquide : $\left(\frac{dp}{dT}\right)_v$ le coefficient directeur de la courbe de vaporisation.

Corps	L_v
Alcool éthylique	990
Bioxyde de carbone	236
Benzène	446
Éther	393
Sulfure de carbone	377

Chaleurs latentes de vaporisation en kilojoules par kilogramme à 0 °C.

3.2. Vaporisation dans un gaz. — L'expérience montre qu'elle est lente et limitée ; à la même température *la pression partielle maximale de la vapeur* a la même valeur que la pression maximale de vapeur dans le vide.

3.3. Évaporation. — C'est une vaporisation qui a lieu uniquement à la surface du liquide. La masse d'eau évaporée pendant une durée t est proportionnelle à t, à l'aire S de la surface libre, à la différence $(p_m - p)$ de la pression maximale p_m de la vapeur d'eau à la température considérée et de la pression partielle p de la vapeur d'eau dans l'atmosphère et est inversement proportionnelle à la pression atmosphérique p_0 :

$$m = ktS\,\frac{p_m - p}{p_0}$$

La masse m est d'autant plus grande que la pression maximale de vapeur d'eau p_m est plus importante, c'est-à-dire que la température est élevée.

La transformation du liquide en vapeur exige une certaine quantité de chaleur ; en l'absence de source de chaleur, elle est cédée par le liquide lui-même qui se refroidit. C'est le principe de fonctionnement des appareils à glace de Carré ; ce principe permet également de conserver de l'eau fraîche dans les cruches en terre : une partie de l'eau traverse la paroi poreuse et s'évapore en empruntant la chaleur nécessaire à la cruche et à son contenu (V. t. 2, Applications électrodomestiques).

3.4. Ébullition. — C'est une vaporisation qui a lieu en surface et au sein du liquide : sur la paroi chauffée se forment de petites bulles de vapeur d'eau et d'air (il était dissous dans le liquide), elles grossissent, s'élèvent et éclatent à la surface du liquide.

Sous une pression déterminée, l'ébullition d'un corps pur a toujours lieu à la même température appelée *température d'ébullition;* elle est constante pendant toute la transformation.

Corps	Température en degrés Celsius
Alcool	78
Ammoniac	— 33
Benzène	80
Bioxyde de carbone	— 78
Eau	100
Éther	35
Glycérine	290
Hydrogène	— 253
Mercure	357
Oxygène	— 182
Sulfure de carbone	46
Soufre	445
Zinc	907

Températures d'ébullition de certains corps sous la pression atmosphérique normale.

Rappelons que la pression atmosphérique normale vaut 1,013250 bar ; elle est représentée par la différence de pression entre le bas et le haut d'une colonne de mercure de 760 mm de hauteur.

Température en degrés Celsius	p
— 20	0,0012
0	0,006
20	0,0234
40	0,0733
60	0,198
80	0,473
100	1,013
120	2
140	3,64
160	6,2
180	10,1

Températures d'ébullition de l'eau sous diverses pressions exprimées en bars (1 bar = 10^5 N/m²).

La pression p de l'atmosphère en contact avec le liquide est égale à la pression maximale de vapeur à la température d'ébullition.

En faisant bouillir plusieurs fois une même eau, l'air dissous est éliminé ; il est alors possible de chauffer cette eau à une température supérieure à 100 °C, sous la pression normale, sans qu'elle se mette à bouillir. Pour faire cesser ce retard à l'ébullition, il faut ajouter quelques grains de pierre ponce (par exemple) afin d'introduire l'air nécessaire à l'ébullition.

Remarque : En répandant de l'eau en petite quantité sur une plaque métallique chauffée au rouge, l'eau forme des gouttelettes qui roulent à la surface du métal au lieu de se vaporiser. Ce phénomène est appelé *caléfaction :* une partie de l'eau passe à l'état de vapeur et la goutte est isolée thermiquement de la plaque. Certaines explosions de chaudières seraient dues à ce phénomène : par absence de contact avec l'eau une partie de la paroi est chauffée au rouge.

4. SUBLIMATION ET CONDENSATION

Ces changements d'état obéissent à des lois analogues à celles des changements d'état étudiés précédemment : la courbe de sublimation (fig. IV-5) représente les variations de la pression en fonction de la température.

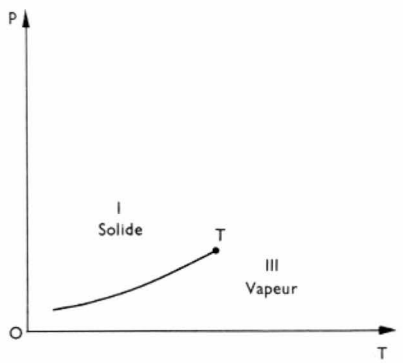


Fig. IV-5

Courbe de sublimation

Elle est limitée par le point T et elle sépare le plan en deux régions correspondant l'une à l'état solide et l'autre à l'état gazeux. *La chaleur latente de sublimation* L_s d'un corps est numériquement égale à la chaleur nécessaire pour sublimer une masse de 1 kg. Elle peut être déterminée à partir de la *formule de Clapeyron :*

$$L_s = T(v_L - v_S)\left(\frac{dp}{dT}\right)_s$$

5. DIAGRAMME D'UN CORPS PUR

C'est la figure obtenue en reportant sur un même graphique les courbes de fusion, de vaporisation et de sublimation (fig. IV-6).

Le point T commun aux trois courbes est appelé *le point triple* (il représente l'état du corps pur à la température T_T sous la pression p_T). Une partie du corps se trouve alors à l'état solide, une autre à l'état liquide et une troisième à

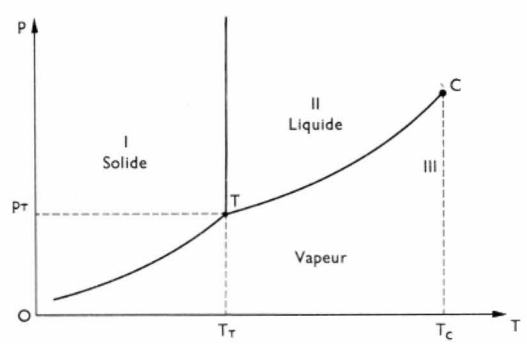


Fig. IV-6 — Diagramme d'un corps pur

l'état gazeux : les phases solide, liquide et vapeur sont alors en équilibre.

Corps	Température du point triple en degrés Celsius	Pressions en bars
Bioxyde de carbone	— 56,7	5,35
Eau	0,01	0,0061

Points triples.

La condition pour qu'un corps pur se sublime lorsqu'il est chauffé sous la pression atmosphérique est donc que celle-ci soit inférieure à la pression correspondant au point triple : c'est le cas du bioxyde de carbone.

Le diagramme d'équilibre est plus compliqué lorsqu'il existe plusieurs variétés allotropiques du corps pur à l'état solide (eau, soufre) ou liquide (hélium).

6. ISOTHERMES DES GAZ LIQUÉFIABLES

En portant le volume massique du fluide étudié en abscisse et la pression en ordonnée, la température étant constante, nous obtenons une courbe appelée *isotherme* (fig. IV-7). En effectuant le même travail pour diverses valeurs de la température, c'est un réseau d'isothermes qui peut être tracé.

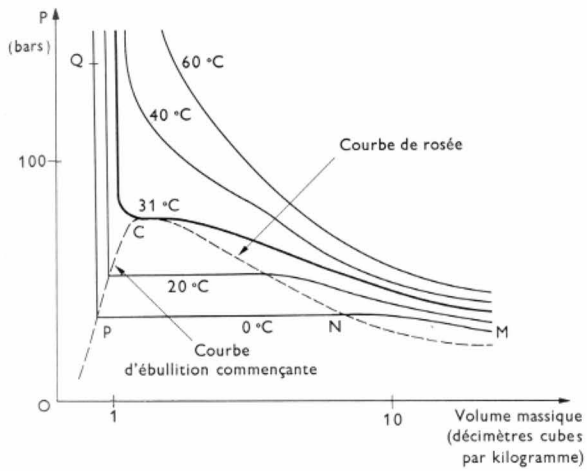


Fig. IV-7 — Isothermes du bioxyde de carbone

6.1. Réseau d'isothermes du bioxyde de carbone. — À 0 °C, lorsque le volume massique diminue, la pression augmente, le point représentant l'état du gaz décrit l'arc *MN*. Le point *N* correspond au moment où apparaît une goutte de liquide : il y a alors équilibre entre le liquide et la vapeur. Si le volume continue à diminuer, la pression reste constante et la vapeur se liquéfie (il y a un passage de l'état gazeux à l'état liquide dit de *manière discontinue* parce que deux phases de masses volumiques très différentes coexistent) : le point figuratif décrit le palier *NP*. En *P*, la dernière bulle de gaz se liquéfie. En continuant à diminuer le volume, la pression augmente très rapidement (la droite *PQ* est presque verticale).

— Pour toute température inférieure à 31 °C, l'allure est la même : le lieu des points *N* où se forme la première goutte s'appelle la *courbe de rosée;* le lieu des points *P* s'appelle la *courbe d'ébullition commençante;* l'ensemble forme la *courbe de saturation*.

— À 31 °C, la largeur du palier *NP* est réduite à zéro. Cela correspond à la température critique T_C. La courbe présente un point d'inflexion *C* à tangente horizontale (*point critique*).

— Au-dessus de 31 °C, quelle que soit la diminution de volume imposée, la pression augmente mais il n'y a jamais liquéfaction. L'isotherme présente parfois un point d'inflexion à tangente oblique.

Corps	Température en degrés Celsius	Pression en bars (1 bar = $10^5 N/m^2$)	Volume massique en décimètres cubes par kilogramme
Hélium	— 268	2,29	14,5
Hydrogène	— 239,9	13	32,2
Oxygène	— 118,8	50,5	2,32
Bioxyde de carbone .	31	74	2,18
Bioxyde de soufre . . .	157,2	76,4	1,92
Eau	374,2	221	3,22

Coordonnées des points critiques de quelques corps.

6.2. Divers états physiques d'un fluide. — La courbe de saturation et l'isotherme critique partagent le plan (p, v) en quatre régions (fig. IV-8) :

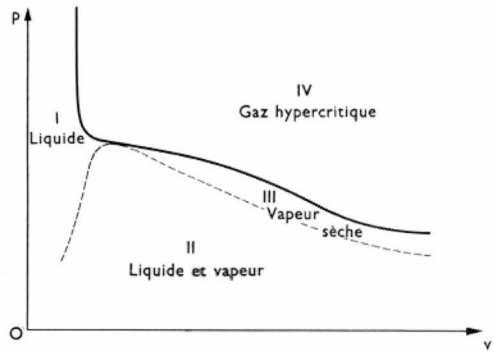


Fig. IV-8 — Courbe de saturation et isotherme critique

— Si le point représentant l'état du corps est dans la région I, le corps est à l'*état liquide*.

— Si ce point se trouve dans la région II, il est à la fois à l'état liquide et à l'état gazeux : *la vapeur est donc saturante*.

— S'il est dans la région III. il est à l'état de *vapeur sèche*.

— S'il est dans la région IV, il est dans le même état physique que dans la région III mais il n'est pas susceptible de se liquéfier par compression isotherme : il est à l'état de *gaz hypercritique*.

6.3. Passage continu de l'état gazeux à l'état liquide. — Reprenons la vapeur à l'état M_1 (fig. IV-9), à 0 °C et chauffons à volume constant jusqu'à 60 °C (M_2), puis faisons une compression isotherme jusqu'à Q_2. Enfin,

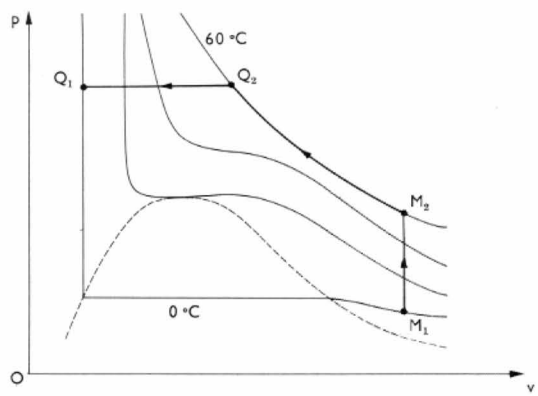


Fig. IV-9

refroidissons le gaz jusqu'à Q_1 de manière isobare : l'aspect du fluide n'est pas modifié : nous sommes passés de l'état gazeux à l'état liquide *de manière continue* car à aucun moment il n'y a eu coexistence de deux phases : la masse volumique du gaz a augmenté jusqu'à atteindre celle du liquide.

Nous pouvons donc considérer que la courbe de saturation sépare le plan en deux parties : la région I - III - IV correspond au fluide homogène et la région II figure le fluide sous deux phases.

6.4. Procédés de liquéfaction. — Pour liquéfier un gaz, il faut que sa température T soit inférieure à sa température critique T_C et que la pression exercée sur le gaz soit supérieure à la pression maximale de vapeur à cette température.

Si la température critique est supérieure à la température ordinaire, il suffit de comprimer le gaz pour le liquéfier (exemples : bioxyde de carbone sous 60 bars — ammoniac sous 9 bars — bioxyde de soufre sous 4 bars).

Si la température critique est inférieure à la température ordinaire, il faut refroidir le gaz par détente.

CHAPITRE V

PRINCIPES DE LA THERMODYNAMIQUE

1. PREMIER PRINCIPE DE LA THERMODYNAMIQUE

1.1. Échanges entre un système et le milieu extérieur. — La *thermodynamique* est la partie de la physique où sont étudiés les rapports entre les phénomènes mécaniques et les phénomènes thermiques et plus précisément les échanges d'énergie entre un système et le milieu extérieur.

La convention maintenant universellement adoptée est de compter *positivement toute énergie reçue par un système* (chaleur, travail, etc.) et *négativement toute énergie cédée par ce système.*

Lorsque le volume d'un fluide sous la pression p passe de la valeur v à $(v + dv)$, le fluide reçoit une énergie égale au travail élémentaire dW effectué. La valeur de ce travail est obtenue au moyen de la relation suivante :

$$dW = -pdv$$

Ce travail est *positif* s'il s'agit d'une compression, c'est-à-dire si nous fournissons de l'énergie au système. En effet, v diminue, dv est négatif et comme p est positif, dW est également positif. Ce travail est *négatif* lors d'une détente du fluide : v augmente, dv est positif ainsi que p et donc dW est négatif.

Si le volume du fluide passe de la valeur v_1 à v_2, il reçoit un travail qui peut être obtenu en intégrant la relation précédente :

$$W = \int_{v_1}^{v_2} -pdv$$

Dans le diagramme (p, v) qui traduit les variations de la pression p d'une masse déterminée d'un fluide en fonction de son volume v, le travail effectué par un fluide qui passe de l'état 1 (p_1, v_1) à l'état 2 (p_2, v_2) est proportionnel à l'aire hachurée (fig. V-1).

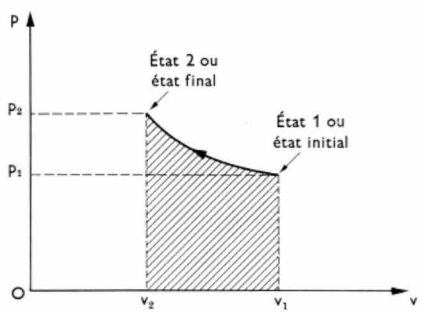


Fig. V-1

Lorsqu'un système évolue, il subit une *transformation :* il passe d'un *état initial* à un *état final.*

La transformation est :

— **irréversible** s'il est impossible de passer de l'état final à l'état initial par les mêmes états intermédiaires que ceux obtenus lors de la transformation inverse ;

— **quasi statique** si tous les états intermédiaires sont des états d'équilibre : une telle transformation n'est pas réalisable car elle serait infiniment lente ;

— **réversible** si elle s'effectue avec des accélérations infinitésimales : à chaque instant, le sens de l'évolution peut être inversé ;

— **isotherme** si la température du système reste constante ;

— **adiabatique** si le système n'échange pas de chaleur avec le milieu extérieur.

Si l'état final est identique à l'état initial, la transformation est un **cycle.**

1.2. Énoncé du premier principe (Joule, 1842). — *Lorsqu'un système évolue d'un état initial à un état final, la somme algébrique des énergies mécanique et calorifique échangées par le système ne dépend que de l'état initial et de l'état final mais non des états intermédiaires.*

Si nous appelons W l'énergie mécanique et Q l'énergie calorifique qui sont échangées au cours de la transformation, ce principe se traduit par la relation :

$$\boxed{W + Q = \text{Cte}}$$

Le *principe de l'équivalence* (abusivement appelé principe) en est une conséquence : En effet, le cas où la constante est nulle $(W + Q = 0)$ correspond à une transformation particulière où ne sont échangés ni travail ni chaleur.

$$W + Q = 0 \iff W = -Q$$

Quand un système décrit un cycle, cela signifie que s'il reçoit du travail, il cède de la chaleur et que s'il reçoit de la chaleur, il cède du travail ; en valeur absolue, énergie mécanique et énergie calorifique sont égales : il y a *équivalence.*

1.3. Énergie interne et enthalpie. — La quantité $(W + Q)$ peut être considérée comme une variation d'une fonction U appelée *énergie interne* du système.

$$W + Q = \Delta U$$

Cette fonction U est définie à une constante près puisque seules ses variations sont connues (un cas analogue a été rencontré en électricité lorsque nous avons défini la fonction potentiel. V. t. 1, Électricité, chap. 12). Son unité est le *joule.*

Si la transformation a lieu à volume constant, $dv = 0$ puisque $v_2 = v_1$ et :

$$W = \int_{v_1}^{v_1} -pdv = 0$$

Par suite : $$Q = \Delta U$$

À volume constant, la quantité de chaleur échangée est une variation d'énergie interne ; par conséquent, elle ne dépend que de l'état initial et de l'état final.

Un système peut être caractérisé par son *enthalpie* H donnée par la relation suivante :

$$H = U + pv$$

p et v étant la pression et le volume du système.

Cette fonction H est définie à une constante près. Son unité est le *joule.*

Dans une transformation à pression constante, la variation d'enthalpie ΔH ne dépend que de l'état initial et de l'état final.

$$W = \int_{v_1}^{v_2} -pdv = -p(v_2 - v_1)$$

$$\Delta H = \Delta U + \Delta(pv) = W + Q + p(v_2 - v_1) = Q$$

À pression constante, la quantité de chaleur échangée est une variation d'enthalpie ; elle ne dépend que de l'état initial et de l'état final.

Il est possible de montrer que l'énergie interne et l'enthalpie d'une masse m de gaz parfait ne dépendent que de sa température. Si celle-ci passe de T à $(T + dT)$, l'énergie interne et l'enthalpie subissent des variations dU et dH :

$$dU = m\, c_v\, dT \qquad dH = m\, c_p\, dT$$

Les chaleurs massiques c_v et c_p d'un gaz parfait de masse molaire M sont alors liées par la relation de Mayer :

$$M(c_p - c_v) = R$$

R étant la constante des gaz parfaits ($R = 8{,}34$ J/mol. K)

Dans le cas d'une *transformation adiabatique*, les paramètres du gaz sont liés par la relation suivante :

$$\boxed{p\, v^{\gamma} = \text{Cte}}$$

qui s'ajoute à la relation générale $p\, v = n\, R\, T$.

Le premier principe de la thermodynamique est cependant insuffisant : même s'il y a équivalence entre énergie mécanique et énergie calorifique, il n'est pas identique de frapper sur une pointe avec un marteau ou de la chauffer avec un chalumeau !

2. SECOND PRINCIPE DE LA THERMODYNAMIQUE

Ce principe fut énoncé par Carnot en 1824 puis précisé par Clausius en 1853.

2.1. Transformations monothermes. — Une *source de chaleur* est un corps susceptible d'échanger de la chaleur en restant à une température constante (par exemple, un système formé par l'équilibre eau-glace). Un système évolue suivant une *transformation monotherme* s'il n'échange de chaleur qu'avec une seule source. Remarquons qu'une transformation monotherme réversible ne peut être qu'isotherme.

Second principe : *Lorsqu'un système décrit un cycle en n'échangeant de la chaleur qu'avec une seule source, il ne peut que recevoir du travail et céder de la chaleur.*

Cela signifie qu'il est impossible de fabriquer un moteur thermique (qui doit fournir du travail) en n'utilisant qu'une seule source de chaleur. Par exemple, il est impossible de faire fonctionner un paquebot en puisant de l'eau de mer à 16 °C, en recueillant (par congélation de cette eau) l'énergie thermique devant être transformée ensuite en énergie mécanique, et en rejetant les blocs de glace.

2.2. Cycles à deux sources. — Un moteur thermique nécessite deux sources de chaleur : le second principe permet de démontrer que l'agent thermique emprunte une quantité de chaleur Q_1 ($Q_1 > 0$) à la source chaude à la température T_1, et en rend une partie Q_2 ($Q_2 < 0$) à la source froide, à la température T_2 ($T_2 < T_1$) ; il transforme l'autre partie en travail W ($W < 0$). D'après le premier principe d'équivalence : $W + Q_1 + Q_2 = 0$

Le *rendement* d'un moteur thermique est le rapport

$$\eta = \frac{|W|}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1}$$

Dans un moteur, si l'agent thermique décrit un *cycle de Carnot*, formé par deux isothermes réversibles AB et CD et deux adiabatiques réversibles DA et BC (fig. V-2), le rendement de ce moteur réversible ne dépend que des températures t_1 et t_2 des sources. Le rendement de tout moteur irréversible est inférieur à celui d'un moteur réversible utilisant les mêmes sources (*théorème de Carnot*).

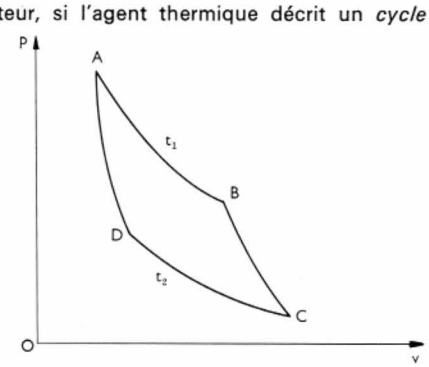


Fig. V-2
Cycle de Carnot

2.3. Température thermodynamique. — Cela revient à écrire que $\frac{Q_2}{Q_1}$ n'est fonction que de t_1 et de t_2 :

$$\frac{|Q_2|}{Q_1} = \frac{f(t_2)}{f(t_1)}$$

La quantité $f(t)$ s'appelle par définition la *température thermodynamique* de la source et elle est représentée par T.

$$\frac{|Q_2|}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

Le rapport de deux températures thermodynamiques étant ainsi défini, cette *grandeur est mesurable*. Par convention la température thermodynamique du point triple de l'eau est égale à $T = 273{,}16$ °C.

Le rendement d'un moteur thermique réversible s'écrit alors :

$$\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (\textit{formule de Carnot})$$

La température des sources froides couramment employées est peu variable (air, condenseur) ; pour améliorer le rendement il faut donc augmenter T_1, température de la source chaude. Bien qu'il y ait équivalence entre une certaine quantité de chaleur à 100 °C et la même à 500 °C, du point de vue du rendement, la seconde est plus intéressante : si $T_2 = 300$ K, les rendements sont respectivement 0,20 et 0,61.

2.4. Autres machines thermiques à deux sources. — D'autres machines utilisent le cycle de Carnot, mais en sens inverse : la machine reçoit du travail ($W > 0$) et emprunte une quantité de chaleur Q_2 à la source froide ($Q_2 > 0$) ; elle cède une quantité de chaleur Q_1 ($Q_1 < 0$) à la source chaude.

Pour une *machine frigorifique*, le but est de retirer une quantité de chaleur Q_2 à la source froide (fig. V-3) :

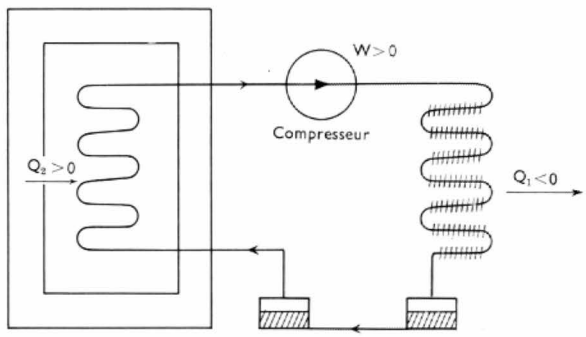


Fig. V-3 — Principe de la machine frigorifique

l'agent thermique gazeux (souvent appelé fréon 12) est envoyé par un compresseur dans un serpentin entouré d'ailettes où il se liquéfie en cédant une chaleur Q_1 à l'air ambiant. Le liquide passe ensuite dans un second serpentin, à l'intérieur du réfrigérateur, où il se vaporise, sous pression réduite en recevant une chaleur Q_2 de la source froide ; il est alors aspiré par le compresseur et le cycle recommence (V. t. 2, Applications électrodomestiques).

On appelle *coefficient de performance* le rapport

$$\rho = \frac{Q_2}{W} = \frac{Q_2}{|Q_1| - Q_2} = \frac{T_2}{T_1 - T_2} .$$

Une *thermopompe* permet de fournir une chaleur Q_1 à la source chaude. Certains groupes d'immeubles sont chauffés en empruntant de la chaleur à une rivière à 7 °C et en la cédant à une source chaude à 60 °C. Le prix de revient est inférieur à celui du chauffage électrique.

3. ENTROPIE

3.1. Définition de l'entropie. — Considérons un système qui échange des quantités de chaleur avec de nombreuses sources; si une source, à la température T, cède une quantité de chaleur dQ, il est possible de montrer mathématiquement que :

1° si le système décrit un cycle réversible :

$$\int \frac{dQ}{T} = 0$$

(l'intégrale étant prise le long du cycle)

2° si le système décrit un cycle irréversible :

$$\int \frac{dQ}{T} < 0$$

3° si le système passe d'un état initial (1) à un état final (2) de manière *réversible* $\int_1^2 \frac{dQ}{T}$ ne dépend que de l'état initial et de l'état final; cette quantité peut alors être considérée comme la variation d'une fonction S telle que :

$$\boxed{\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}}$$

La fonction S est *l'entropie* du système : elle n'est définie qu'à une constante près puisque nous ne connaissons que sa variation (comme pour l'énergie interne U).
Son unité est le *joule par degré* (symbole : J/K) ;

4° si le système passe du même état initial au même état final que dans le cas précédent mais de manière irréversible : $\int_1^2 \frac{dQ}{T} < \Delta S$

(ΔS correspondant à la valeur précédemment définie).

Remarquons que le calcul d'une variation d'entropie n'a de sens que pour une transformation réversible.

Pour une *transformation adiabatique : $dQ = 0$* et par conséquent $dS = 0$; l'*entropie S est constante*. La transformation est **isentropique** ($dS = 0$).

L'entropie d'un système isolé ne peut qu'augmenter (s'il évolue de manière irréversible) ou rester constante (s'il évolue de manière réversible).

L'entropie d'une masse m de gaz parfait, de chaleur massique à volume constant c_v, de pression p, de volume v est donnée par la relation suivante :

$$S = m\, c_v \ln (p\, v^\gamma) + \text{Cte}$$

(ln signifiant logarithme népérien).

3.2. Diagramme entropique. — Il est obtenu en portant en abscisse la valeur de l'entropie S et en ordonnée la valeur de la température T (fig. V-4). Les isothermes sont des parallèles à OS et les adiabatiques réversibles des parallèles à OT ; l'origine sur l'axe OS est arbitraire puisque S n'est définie qu'à une constante près. La quantité de chaleur dQ échangée entre les états A et B est égale à : $dQ = T_A dS$; elle est proportionnelle à l'aire hachurée (à condition que la température T_A soit exprimée en kelvins).

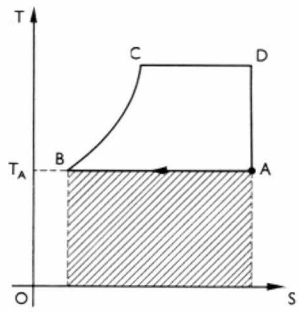


Fig. V-4
Diagramme entropique

3.3. Le diagramme de Mollier. — Il est obtenu en portant en abscisse l'entropie S et en ordonnée l'enthalpie H du système. Dans le cas de l'eau, l'origine des axes correspond à l'entropie et à l'enthalpie de l'eau au point triple (fig. V-5).

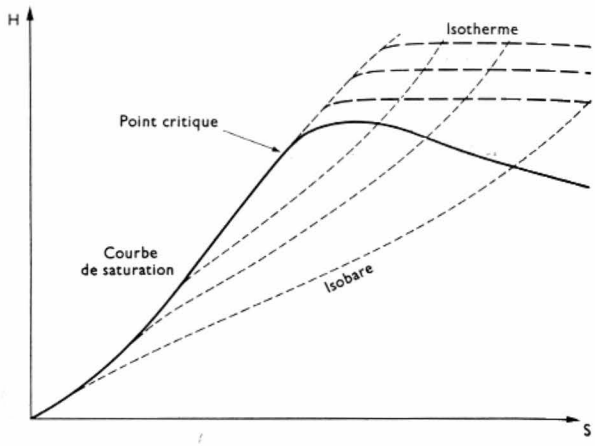


Fig. V-5 — Diagramme de Mollier relatif à l'eau

Ce diagramme est beaucoup plus pratique que le diagramme entropique car les variations d'enthalpie sont alors proportionnelles à des longueurs alors qu'elles étaient proportionnelles à des surfaces dans le diagramme précédent.

4. ÉNERGIE LIBRE ET ENTHALPIE LIBRE

Considérons une *transformation monotherme non fermée réversible*. Appelons W et Q les énergies mécaniques et thermiques échangées au cours du passage de l'état initial à l'état final. Les variations d'énergie interne et d'entropie correspondantes sont désignées par ΔU et ΔS. Les résultats précédents nous permettent d'écrire :

$$\Delta U = W + Q$$

et : $$\int_1^2 \frac{dQ}{T} = \frac{Q}{T} = \Delta S$$

(T = constante puisque la transformation est monotherme réversible c'est-à-dire isotherme).

Donc :

$$W = -Q + \Delta U = -T\,\Delta S + \Delta U = \Delta (U - TS) = \Delta F$$

ΔF représente la variation d'une fonction $F = (U - TS)$ appelée *énergie libre* définie à une constante près. Elle s'exprime en *joules*. La variation d'énergie libre représente le travail reçu par le système ; elle ne dépend que de l'état initial et de l'état final.

Dans le cas où la transformation est *isobare*, nous pouvons connaître le travail W' reçu par le système, à l'exclusion du travail des forces pressantes (celui-ci est égal à $-p\Delta v$).

$$\Delta U = W + Q = -p\,\Delta v + W' + T\Delta S$$
$$W' = \Delta U + p\,\Delta v - T\,\Delta S$$
$$W' = \Delta\,(U + pv - TS) = \Delta\,(H - TS) = \Delta G$$

ΔG représente la variation d'une fonction $G = (H - TS)$ appelée *enthalpie libre*, définie à une constante près. Elle s'exprime également en *joules*. La variation d'enthalpie libre représente le travail reçu par le système à l'exclusion de celui des forces pressantes ; elle ne dépend que de l'état initial et de l'état final.

Si les transformations précédentes sont irréversibles, les égalités précédentes sont remplacées par les relations suivantes : $W > \Delta F$ et $W' > \Delta G$.

Ces transformations sont très importantes car les transformations qui se font avec échange de chaleur avec le milieu ambiant peuvent être considérées comme monothermes et isobares (à la pression atmosphérique). Il est donc possible de prévoir si une réaction peut se produire spontanément. ΔG étant la variation d'enthalpie libre correspondant à une transformation monotherme isobare :

— si $\Delta G > 0$, elle ne peut se produire que si le système reçoit de l'énergie : elle n'est donc pas spontanée ;

— si $\Delta G < 0$, la réaction est spontanée et fournit de l'énergie (sans préjuger de la vitesse de la réaction) ;

— si $\Delta G = 0$, le système est en équilibre.

PHYSIQUE NUCLÉAIRE

CHAPITRE PREMIER

L'ATOME

1. INTRODUCTION

Toute matière est faite d'atomes : Démocrite affirmait cela il y a déjà 2 400 ans, mais c'est au XVIIIe siècle que l'étude des réactions chimiques entre les corps simples imposa cette notion. Les savants imaginèrent alors la structure des atomes et bâtirent des modèles dont nous évoquerons l'évolution, depuis le modèle classique appelé *atome planétaire* (§ 2.3) jusqu'à celui tiré de l'étude récente de la structure du noyau (§ 2.4). Cependant, les recherches en physique nucléaire sont loin d'être terminées à l'heure actuelle : l'atome apparaît finalement comme un petit univers dont le noyau est fort complexe. Ce noyau est la source de nombreux phénomènes très importants et son étude constitue la physique nucléaire.

2. LES THÉORIES ATOMIQUES

2.1. Mélanges - Combinaisons - Éléments. — Dans la nature les corps sont rarement à l'état pur; nous les trouvons sous la forme de **mélanges** ou de **combinaisons,** deux catégories de corps très différentes.

2.1.1. Mélange. — Un mélange présente une composition qui peut être modifiée à volonté (une eau peut être plus ou moins salée) et *ses propriétés dépendent étroitement de celles de ses constituants.* Ces derniers peuvent être séparés par des moyens physiques simples : décantation, centrifugation, filtration, évaporation, distillation, etc. (procédés d'analyse immédiate). Un mélange est *hétérogène* si nous distinguons les substances qui le constituent (ex.: l'eau boueuse); il est *homogène* dans le cas contraire (ex.: l'eau salée). Par ailleurs, un mélange n'a pas de constantes physiques; par exemple, sa température d'ébullition varie au cours de l'ébullition.

2.1.2. Combinaison. — Dans une combinaison, la *proportion des constituants est invariable* et il n'y a pas de relation entre les propriétés de la combinaison et celles des constituants. Ceux-ci ne peuvent être séparés par les procédés de l'analyse immédiate. Par exemple, l'eau distillée est une combinaison formée d'un volume d'oxygène et de deux volumes d'hydrogène. Une combinaison est *caractérisée par des constantes physiques* (masse volumique, température d'ébullition, etc.) : c'est un *corps pur.* Sa composition est établie par l'analyse et vérifiée par la synthèse.

2.1.3. Élément. — Une combinaison est souvent un *corps pur composé;* elle peut être décomposée en *corps purs simples,* c'est-à-dire formés d'une seule sorte d'élément (un corps pur simple ne peut être dissocié en d'autres corps purs). L'oxygène est un exemple d'élément; il peut être extrait de l'eau, de l'alcool éthylique, du gaz oxygène. Actuellement, environ une centaine d'éléments sont connus; ils sont répartis en quatre catégories : métaux, métalloïdes, transuraniens, gaz rares. Chacun d'eux est représenté par un symbole (V. ci-après tabl. 1).

2.2. La molécule et l'atome en chimie. — La *molécule* est la plus petite partie d'un corps pur qui puisse exister à l'état libre tout en conservant les propriétés de ce corps pur. À l'état gazeux les molécules sont dispersées dans le volume occupé par le gaz; un solide et un liquide n'ont pas toujours une structure moléculaire. *L'atome est la plus petite partie d'un élément qui puisse participer à la formation d'une molécule,* ou plus généralement d'un corps pur. Particule très petite, elle est cependant bien définie puisque la masse et les dimensions des atomes de chaque élément ont été déterminées avec précision.

Afin d'éviter l'emploi de nombres trop petits, les chimistes ont l'habitude de considérer non pas un atome mais un ensemble de $N = 6{,}02.10^{23}$ atomes, appelé *mole d'atomes; N* est le nombre d'Avogadro. Pour exprimer la masse d'une mole d'atomes appelée **masse atomique,** il a d'abord été convenu de prendre comme référence la masse d'une mole d'atomes de carbone (*masse atomique* du carbone); la valeur de cette masse est 12 grammes. Dans ces conditions, la masse atomique de l'hydrogène est 1 g, celle de l'oxygène 16 g et l'uranium, élément très lourd, a une masse atomique égale à 238 g; en général, l'unité n'est pas indiquée puisqu'il s'agit d'une échelle comparative. Par la suite, la précision des mesures étant plus grande, il a été nécessaire d'affecter des valeurs légèrement différentes à ces masses atomiques (V. tabl. 1).

L'hypothèse de ces grains de matière, atome ou molécule, termes ultimes du fractionnement chimique, suffisait pour expliquer les phénomènes physiques et chimiques. Cependant, dès la fin du XIXe siècle, des expériences importantes permirent de mieux connaître les atomes et d'envisager des modèles donnant une idée de leur structure. À la même époque était aussi découvert le phénomène de *transmutation :* certains atomes pouvaient se transformer en atomes différents et même parfois disparaître, en émettant des particules chargées, lancées à très grande vitesse, ou en restituant de l'énergie sous forme de rayonnement. Ces atomes n'étaient plus alors des grains de matière immuable, ils pouvaient naître et disparaître : c'était la découverte capitale de la *radioactivité* (V. chap. 2).

Tableau 1 **— LISTE DES ÉLÉMENTS NATURELS ET ARTIFICIELS**

Nom de l'élément	Symbole	Masse atomique	Numéro atomique (nombre d'électrons de l'atome ou nombre de protons du noyau)	Nombre de neutrons du noyau	Nombre total d'isotopes connus
Actinium	Ac	(227)	89	138	11 ou 12
Aluminium	Al	26,981 5	13	14	7
Américium	Am	(243)	95	148	13
Antimoine	Sb	121,75	51	70	21
Argent	Ag	107,870	47	60	16
Argon	Ar	39,948	18	18	11
Arsenic	As	74,921 6	33	42	14
Astate ou alabame	At	(210)	85	125	22
Azote	N	14,006 7	7	7	8
Baryum	Ba	137,34	56	82	26
Berkélium	Bk	(245)	97	148	11
Béryllium ou glucinium	Be	9,012 2	4	5	5
Bismuth	Bi	208,980	83	126	25
Bore	B	10,811	5	5	7
Brome	Br	79,909	35	44	17
Cadmium	Cd	112,40	48	66	23
Calcium	Ca	40,08	20	20	17
Californium	Cf	(251)	98	153	11
Carbone	C	12,011 15	6	6	8
Cérium	Ce	140,12	58	82	18
Césium	Cs	132,905	55	78	22
Chlore	Cl	35,453	17	18	11
Chrome	Cr	51,996	24	28	13
Cobalt	Co	58,933 2	27	32	11
Cuivre	Cu	63,54	29	34	13
Curium	Cm	(247)	96	151	12
Dysprosium	Dy	162,50	66	98	21
Einsteinium	Es	(254)	99	155	9
Erbium	Er	167,26	68	98	19
Étain	Sn	118,69	50	68	33
Europium	Eu	151,96	63	90	18
Fer	Fe	55,847	26	30	14
Fermium	Fm	(253)	100	153	9
Fluor	F	18,998 4	9	10	6
Francium	Fr	(223)	87	136	9
Gadolinium	Gd	157,25	64	94	21
Gallium	Ga	69,72	31	38	9
Germanium	Ge	72,59	32	40	18
Hafnium	Hf	178,49	72	108	17
Hahnium	Ha	261,45	105	155	—
Hélium	He	4,002 6	2	2	6
Holmium	Ho	164,930	67	98	10
Hydrogène	H	1,007 97	1	0	5
Indium	In	114,82	49	66	16
Iode	I	126,904 4	53	74	22
Iridium	Ir	192,2	77	116	16
Kourchatovium	Ku	(260)	104		
Krypton	Kr	83,80	36	48	27
Lanthane	La	138,91	57	82	16
Lawrencium	Lr	—	103	154	—
Lithium	Li	6,939	3	3	7
Lutétium	Lu	174,97	71	104	12
Magnésium	Mg	24,312	12	12	9
Manganèse	Mn	54,938 0	25	30	9
Mendélévium	Md	(256)	101	155	7
Mercure	Hg	200,59	80	122	26
Molybdène	Mo	95,94	42	56	21

Tableau 1 **— LISTE DES ÉLÉMENTS NATURELS ET ARTIFICIELS (suite)**

Nom de l'élément	Symbole	Masse atomique	Numéro atomique (nombre d'électrons de l'atome ou nombre de protons du noyau)	Nombre de neutrons du noyau	Nombre total d'isotopes connus
Néodyme	Nd	144,24	60	82	21
Néon	Ne	20,183	10	10	10
Neptunium	Np	(237)	93	144	14 ou 15
Nickel	Ni	58,71	28	30	16
Niobium	Nb	92,906	41	52	12
Nobélium	No	(253)	102	151	1
Or	Au	196,967	79	118	18
Osmium	Os	190,2	76	116	20
Oxygène	O	15,999 4	8	8	9
Palladium	Pd	106,4	46	60	22
Phosphore	P	30,973 8	15	16	8
Platine	Pt	195,09	78	116	19
Plomb	Pb	207,19	82	126	25
Plutonium	Pu	(242)	94	148	15 ou 16
Polonium	Po	(210)	84	126	29
Potassium	K	39,102	19	20	11
Praséodyme	Pr	140,907	59	82	12
Prométhéum ou illinium	Pm	(147)	61	84	9
Protactinium	Pa	(231)	91	140	14
Radium	Ra	(226)	88	137	17
Radon	Rn	(222)	86	136	19
Rhénium	Re	186,2	75	112	13
Rhodium	Rh	102,905	45	58	14
Rubidium	Rb	85,47	37	48	19
Ruthénium	Ru	101,07	44	57	23
Samarium	Sm	150,35	62	90	21
Scandium	Sc	44,956	21	24	12
Sélénium	Se	78,96	34	46	20
Silicium	Si	28,086	14	14	10
Sodium	Na	22,989 8	11	12	7
Soufre	S	32,064	16	16	11
Strontium	Sr	87,62	38	50	20
Tantale	Ta	180,948	73	107	13
Technétium ou mazurium	Tc	(99)	43	56	13
Tellure	Te	127,60	52	78	27
Terbium	Tb	158,924	65	94	10
Thallium	Tl	204,37	81	124	22
Thorium	Th	232,038	90	142	19
Thulium	Tm	168,934	69	91	10
Titane	Ti	47,90	22	24	14
Tungstène	W	183,85	74	110	18
Uranium	U	238,03	92	146	17
Vanadium	V	50,942	23	28	12
Xénon	Xe	131,30	54	78	32
Ytterbium	Yb	173,04	70	102	23
Yttrium	Y	88,905	39	50	16
Zinc	Zn	65,37	30	34	18
Zirconium	Zr	91,22	40	50	17

(*) Les nombres entre parenthèses sont relatifs au nombre de masse de l'isotope le plus stable

La référence de masse est l'isotope ${}^{6}_{12}\mathrm{C}$ du carbone. ${}^{6}_{12}\mathrm{C} = 12{,}000\ 00$

Ces résultats ont été établis en 1961

2.3. L'atome planétaire. — Crookes ouvrit la voie à la découverte de *l'électron*. Faisant passer une décharge électrique dans un tube à gaz raréfié, il mit en évidence une émission ayant pour origine l'électrode négative (cathode) ; une paroi de verre placée en face de l'électrode devenait fluorescente sous l'action de ce rayonnement (fig. I-1). L'examen de ces *rayons cathodiques* montra qu'ils pouvaient être déviés par le champ magnétique d'un aimant et qu'ils étaient constitués de minuscules projectiles *électrisés négativement* qui furent appelés **électrons.**

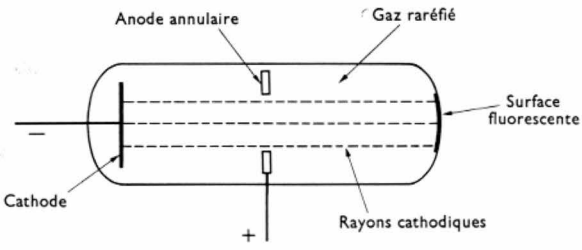


Fig. I-1 — Expérience de Crookes

Grâce à de nombreuses expériences (en particulier celles de Thomson et Millikan), la masse m et la charge e de ces particules élémentaires électrisées, sont connues avec précision :

$$m = 0{,}91.10^{-30} \text{ kg}$$
$$e = -0{,}16.10^{-18} \text{ C}$$

Puis en étudiant le bombardement d'une mince lame de métal par des *hélions* ou particules α (noyau d'hélium, comportant deux protons et deux neutrons comme nous le verrons plus loin), Rutherford fut conduit à imaginer les atomes comme étant formés d'un *noyau central* électrisé positivement, dense (presque toute la masse de l'atome s'y trouve concentrée) et *d'électrons gravitant* autour du noyau comme des planètes autour du Soleil (fig. I-2). Par exemple, l'atome de carbone peut être représenté schématiquement par une sphère ayant un rayon 10 000 fois plus grand que celui du noyau central (supposé également sphérique). Autour du noyau gravitent 6 électrons qui occupent deux zones différentes ou *couches électroniques* (V. ci-dessous § 2.4.2).

L'atome est électriquement neutre : les charges portées par les électrons compensent exactement la charge positive du noyau. L'étude des différents éléments chimiques montre que le plus léger, l'hydrogène (de masse atomique 1), n'a qu'un électron périphérique, et l'un des plus lourds, l'uranium (de masse atomique 238), en comporte 92.

Dans certains cas, un ou plusieurs électrons peuvent être arrachés à un atome : il devient alors un *ion positif*. Il est également possible qu'un (ou plusieurs) électron soit capturé par un atome ; celui-ci devient alors un *ion négatif*.

L'atome planétaire est une représentation très simplifiée qui a dû être complétée. La spectrographie a permis de constater que les électrons en mouvement dans l'atome obéissent à une certaine organisation. Rappelons que la spectrographie permet l'étude des spectres lumineux obtenus en décomposant des lumières complexes à l'aide d'un prisme (à travers un prisme les radiations de longueurs d'onde différentes sont déviées différemment. V. t. 1, Optique, chap. 2).

2.4. Organisation des électrons dans l'atome

2.4.1. Atome de Bohr et de Sommerfeld. — Cette image de l'atome est reprise par Bohr qui imagine le premier modèle quantique en associant les idées de Rutherford et celles de Planck sur les échanges d'énergie entre la matière et la lumière. Ceux-ci se font par **quantum d'énergie,** c'est-à-dire par quantité d'énergie égale à hf, si f est la fréquence du rayonnement considéré et si h représente une constante universelle, appelée *constante de Planck* : $h = 6{,}625 \times 10^{-34}$ J.s. Un quantum d'énergie correspond à l'énergie d'une particule élémentaire, appelée *photon* (V. t. 1. Optique, chap. 4).

En 1913, Bohr énonce trois postulats :

— *Les électrons se meuvent sur des orbites circulaires* autour du noyau central de l'atome.

— *Seules certaines orbites discrètes sont permises* et les électrons ne rayonnent pas d'énergie lorsqu'ils sont sur ces orbites. Cette conception est contraire à la théorie classique des particules chargées en mouvement.

— *L'électron peut passer d'une trajectoire stable d'énergie U_m à une autre d'énergie U_p.* Si $U_m > U_p$, il y a en même temps émission d'un photon de fréquence f :

$$f = \frac{U_m - U_p}{h}$$

Si $U_m < U_p$, il y a absorption d'un photon de fréquence f :

$$f = \frac{U_p - U_m}{h}$$

Pour déterminer les orbites, il faut appliquer une condition générale dite de *quantification* et écrire que l'*intégrale d'action* $\int_0^T mv^2\,dt$ est égale à nh, v étant la vitesse de l'électron et T représentant le temps mis par l'électron pour décrire l'orbite ; n est un nombre entier, c'est le **nombre quantique principal.** L'énergie relative à chaque orbite est trouvée proportionnelle à : $-\frac{1}{n^2}$.

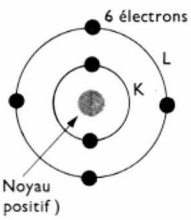


Fig. I-2

Pour expliquer le spectre lumineux d'éléments autres que l'hydrogène, Sommerfeld a dû supposer que les trajectoires étaient *elliptiques* et il a introduit deux autres nombres quantiques : le **nombre quantique secondaire** l (nombre entier pouvant prendre les valeurs 0,1,2... comprises entre 0 et $n - 1$) qui caractérise l'excentricité de l'ellipse et le **nombre quantique magnétique** m (nombre entier pouvant prendre toutes les valeurs comprises entre $-l$ et $+l$) qui caractérise l'orientation du plan de la trajectoire dans l'espace.

De plus, pour tenir compte de l'existence, dans certains spectres, de groupes de deux raies très serrées (les doublets) Goudsmit et Uhlenbeck supposent que l'électron tourne sur lui-même, dans un sens ou dans l'autre. L'application de la règle de quantification au moment cinétique par rapport à l'axe de rotation conduit à donner à celui-ci la valeur : $s\,\frac{h}{2\pi}$, s étant le **nombre quantique de spin** qui peut prendre les deux seules valeurs $+\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$; s est positif si la rotation de l'électron sur lui-même et sur sa trajectoire sont de même sens (fig. I-3). Ces quatre nombres quantiques : n, l, m et s, suffisent pour caractériser entièrement un électron sur une orbite électronique et deux électrons ne peuvent être caractérisés par les quatre mêmes nombres (*principe d'exclusion de Pauli*).

Fig. I-3 — Nombre quantique de spin d'un électron

Cependant, la représentation précédente, bien que commode, n'est qu'une conception approximative : l'étude mathématique du mouvement des électrons dont l'énergie est connue montre qu'il est impossible de situer exactement un électron dans l'atome. Aussi détermine-t-on les **orbitales atomiques,** régions de l'espace entourant le noyau et limitées par des surfaces à l'intérieur desquelles il y a 95 chances sur 100 pour qu'il y ait un électron déterminé. La notion d'orbite bien définie disparaît donc, cela

en accord avec le *principe d'incertitude d'Heisenberg*, qui énonce qu'il est impossible de déterminer simultanément la position et la quantité de mouvement d'un électron.

2.4.2. Niveaux d'énergie d'un atome isolé et dans son état fondamental. — Dans un atome isolé dans l'espace (donc électriquement neutre), chaque électron possède une *énergie potentielle électrique* due à la force électrostatique d'attraction exercée par le noyau : cette énergie augmente ou diminue selon que l'électron s'éloigne ou s'approche du noyau. Par ailleurs, l'électron gravite autour du noyau et possède une *énergie cinétique* plus ou moins grande selon sa vitesse. Lorsque l'électron est dans son état fondamental (état le plus stable), son énergie *totale* (somme des énergies potentielle et cinétique) est minimale et proportionnelle à $\frac{-1}{n^2}$ (V. ci-dessus). Elle permet de le caractériser. Nous dirons qu'il possède une énergie $W_e \sim -\frac{1}{n^2}$ afin de tenir compte du fait que, si l'électron est déplacé dans le vide du point occupé dans l'atome jusqu'à l'infini, il faut lui fournir l'énergie $+ W_e$ (autrement dit W_e est l'énergie qu'il faut fournir à l'électron pour l'extraire de l'atome). Choisir cette convention, revient à mesurer l'énergie d'un électron en prenant pour référence *l'énergie d'un électron placé à l'infini* appelé **niveau du vide.**

Ainsi nous sommes amenés à considérer que les électrons sont répartis dans l'atome entre des niveaux d'énergie parfaitement *déterminés dont les valeurs discrètes* U_1, U_2, U_3,... *correspondent chacune à une valeur entière du nombre quantique principal n.* Les électrons caractérisés par le même nombre n forment une *couche électronique.* Ces couches sont nommées, dans l'ordre en partant du noyau : K ($n = 1$), L ($n = 2$), M ($n = 3$), . . . ; les énergies qui leur correspondent sont désignées par W_K, W_L, W_M, . . . Chaque niveau (ou chaque couche) comporte au maximum $2\,n^2$ électrons.

Le niveau correspondant au nombre quantique principal n se subdivise en n sous-niveaux ; à chacun d'eux est affecté un nombre quantique secondaire l (l prend toutes les valeurs entières comprises entre 0 et $n - 1$ comme indiqué précédemment). Le nombre maximal d'électrons pour un sous-niveau caractérisé par le nombre l est : $2\,(2\,l + 1)$. En effet $(2\,l + 1)$ représente le nombre d'orientations possibles du moment cinétique orbital, c'est-à-dire les valeurs qui peuvent être attribuées au nombre quantique m, et le facteur 2 permet de tenir compte des deux valeurs possibles du nombre quantique s $\left(-\frac{1}{2} \text{ et } +\frac{1}{2}\right)$.

Les différents sous-niveaux correspondant aux valeurs suivantes de l : 0,1,2,3 sont désignés par les symboles : s

***Tableau 2* — RÉPARTITION DES ÉLECTRONS DANS LES ATOMES À L'ÉTAT FONDAMENTAL**

Numéro atomique (nombre d'électrons)	Niveau	*K*	*L*	*M*	*N*	*O*	*P*	*Q*
	n	1	2	3	4	5	6	7
	Sous-niveau	1*s*	2*s* 2*p*	3*s* 3*p* 3*d*	4*s* 4*p* 4*d* 4*f*	5*s* 5*p* 5*d* 5*f*	6*s* 6*p* 6*d*	7*s*
0	neutron							
1	H	1						
2	He	2						
3	Li	2	1					
4	Be (ou Gl)	2	2					
5	B	2	2 1					
6	C	2	2 2					
7	N	2	2 3					
8	O	2	2 4					
9	F	2	2 5					
10	Ne	2	2 6					
11	Na	2	2 6	1				
12	Mg	2	2 6	2				
13	Al	2	2 6	2 1				
14	Si	2	2 6	2 2				
15	P	2	2 6	2 3				
16	S	2	2 6	2 4				
17	Cl	2	2 6	2 5				
18	Ar	2	2 6	2 6				
19	K	2	2 6	2 6	1			
20	Ca	2	2 6	2 6	2			
21	Sc	2	2 6	2 6 1	2			
22	Ti	2	2 6	2 6 2	2			
23	V	2	2 6	2 6 3	2			
24	Cr	2	2 6	2 6 5	1			
25	Mn	2	2 6	2 6 5	2			
26	Fe	2	2 6	2 6 6	2			
27	Co	2	2 6	2 6 7	2			
28	Ni	2	2 6	2 6 8	2			
29	Cu	2	2 6	2 6 10	1			
30	Zn	2	2 6	2 6 10	2			
31	Ga	2	2 6	2 6 10	2 1			
32	Ge	2	2 6	2 6 10	2 2			
33	As	2	2 6	2 6 10	2 3			
34	Se	2	2 6	2 6 10	2 4			
35	Br	2	2 6	2 6 10	2 5			
36	Kr	2	2 6	2 6 10	2 6			
37	Rb	2	2 6	2 6 10	2 6	1		
38	Sr	2	2 6	2 6 10	2 6	2		

***Tableau 2* (suite)**

Numéro atomique (nombre d'électrons)	Niveau	*K*	*L*	*M*	*N*	*O*	*P*	*Q*
	n	1	2	3	4	5	6	7
	Sous-niveau	1*s*	2*s* 2*p*	3*s* 3*p* 3*d*	4*s* 4*p* 4*d* 4*f*	5*s* 5*p* 5*d* 5*f*	6*s* 6*p* 6*d*	7*s*
39	Y	2	2 6	2 6 10	2 6 1	2		
40	Zr	2	2 6	2 6 10	2 6 2	2		
41	Nb	2	2 6	2 6 10	2 6 4	1		
42	Mo	2	2 6	2 6 10	2 6 5	1		
43	Tc	2	2 6	2 6 10	2 6 6	1		
44	Ru	2	2 6	2 6 10	2 6 7	1		
45	Rh	2	2 6	2 6 10	2 6 8	1		
46	Pd	2	2 6	2 6 10	2 6 10			
47	Ag	2	2 6	2 6 10	2 6 10	1		
48	Cd	2	2 6	2 6 10	2 6 10	2		
49	In	2	2 6	2 6 10	2 6 10	2 1		
50	Sn	2	2 6	2 6 10	2 6 10	2 2		
51	Sb	2	2 6	2 6 10	2 6 10	2 3		
52	Te	2	2 6	2 6 10	2 6 10	2 4		
53	I	2	2 6	2 6 10	2 6 10	2 5		
54	Xe	2	2 6	2 6 10	2 6 10	2 6		
55	Cs	2	2 6	2 6 10	2 6 10	2 6	1	
56	Ba	2	2 6	2 6 10	2 6 10	2 6	2	
57	La	2	2 6	2 6 10	2 6 10	2 6 1	2	
58	Ce	2	2 6	2 6 10	2 6 10 1	2 6 1	2	
59	Pr	2	2 6	2 6 10	2 6 10 2	2 6 1	2	
60	Nd	2	2 6	2 6 10	2 6 10 3	2 6 1	2	
61	Pm	2	2 6	2 6 10	2 6 10 4	2 6 1	2	
62	Sm	2	2 6	2 6 10	2 6 10 5	2 6 1	2	
63	Eu	2	2 6	2 6 10	2 6 10 6	2 6 1	2	
64	Gd	2	2 6	2 6 10	2 6 10 7	2 6 1	2	
65	Tb	2	2 6	2 6 10	2 6 10 8	2 6 1	2	
66	Dy	2	2 6	2 6 10	2 6 10 9	2 6 1	2	
67	Ho	2	2 6	2 6 10	2 6 10 10	2 6 1	2	
68	Er	2	2 6	2 6 10	2 6 10 11	2 6 1	2	
69	Tm	2	2 6	2 6 10	2 6 10 12	2 6 1	2	
70	Yb	2	2 6	2 6 10	2 6 10 13	2 6 1	2	
71	Lu	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 1	2	
72	Hf	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 2	2	
73	Ta	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 3	2	
74	W	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 4	2	
75	Re	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 5	2	
76	Os	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 6	2	
77	Ir	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 9		
78	Pt	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 9	1	
79	Au	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10	1	
80	Hg	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10	2	
81	Tl	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10	2 1	
82	Pb	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10	2 2	
83	Bi	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10	2 3	
84	Po	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10	2 4	
85	At	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10	2 5	
86	Rn	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10	2 6	
87	Fr	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10	2 6	1
88	Ra	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10	2 6	2
89	Ac	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10	2 6 1	2
90	Th	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10	2 6 2	2
91	Pa	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 2	2 6 1	2
92	U	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 3	2 6 1	2
93	Np	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 4	2 6 1	2
94	Pu	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 6	2 6	2
95	Am	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 7	2 6	2
96	Cm	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 7	2 6 1	2
97	Bk	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 8	2 6 1	2
98	Cf	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 9	2 6 1	2
99	Es	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 10	2 6 1	2
100	Fm	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 11	2 6 1	2
101	Md	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 12	2 6 1	2
102	No	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 13	2 6 1	2
103	Lr	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 14	2 6 1	2
104	Ku	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 15	2 6 1	2

(à ne pas confondre avec *s*, quatrième nombre quantique), *p*, *d*, *f*. Un chiffre placé devant la lettre rappelle le numéro de la couche principale à laquelle la sous-couche appartient.

Exemples :

— **Niveau *K*** : $n = 1$. Il y a une seule valeur possible pour l : $l = n - 1 = 0$ (et il en est de même pour m). Au maximum deux électrons peuvent se trouver à ce niveau ($2n^2 = 2$) ; ils sont caractérisés par les nombres quantiques suivants :

Première possibilité : $n = 1,\ l = 0,\ m = 0,\ s = +\frac{1}{2}$.

Deuxième possibilité : $n = 1,\ l = 0,\ m = 0,\ s = -\frac{1}{2}$.

Le niveau *K* se confond avec le *sous-niveau 1 s*.

— **Niveau *L*** : $n = 2$. Dans ce cas l peut être égal soit à 0, soit à 1 : il y a deux sous-niveaux possibles.

1° $l = 0$: c'est le *sous-niveau 2s*. Comme pour le niveau *K* nous retrouvons deux états possibles pour les électrons :

Première possibilité : $n = 1,\ l = 0,\ m = 0,\ s = +\frac{1}{2}$.

Deuxième possibilité : $n = 1,\ l = 0,\ m = 0,\ s = -\frac{1}{2}$.

2° $l = 1$ (valeur correspondant à $(n-1)$, maximum du nombre quantique secondaire). C'est le *sous-niveau 2p*. Le nombre quantique magnétique m ne peut prendre que les trois valeurs suivantes : $m = -1$, $m = 0$ et $m = 1$.

Il y a six états possibles définis par les nombres quantiques suivants : $n = 2,\ l = 1,\ m = +1,\ s = \pm\frac{1}{2}$

$n = 2,\ l = 1,\ m = 0,\ s = \pm\frac{1}{2}$

$n = 2,\ l = 1,\ m = -1,\ s = \pm\frac{1}{2}$

Pour le niveau *L* nous avons donc bien huit états possibles pour les huit électrons ($2n^2 = 2 \times 2^2 = 8$) qui peuvent s'y trouver.

— **Niveau *M*** : $n = 3$. La valeur maximale de l est $(n-1) = 2$. Le nombre quantique secondaire l peut donc prendre trois valeurs différentes : 0,1 et 2.

1° $l = 0$: c'est le *sous-niveau 3 s*. Il y a encore deux états possibles comme pour les sous-niveaux 1*s* et 2*s* des couches *K* et *L*.

2° $l = 1$: c'est le *sous-niveau* 3*p*. Le nombre quantique m peut prendre les valeurs suivantes : — 1,0, + 1 et nous retrouvons six états possibles comme pour le sous-niveau 2*p*.

3° $l = 2$: c'est le *sous-niveau* 3*d*. Le nombre quantique magnétique m peut prendre cinq valeurs différentes : — 2, — 1, 0, + 1, + 2 et nous pouvons ainsi définir dix états possibles.

Pour chaque corps nous pouvons opérer comme il vient d'être fait. Cependant, pour un atome déterminé, parmi tous les niveaux et tous les états possibles seuls un certain nombre d'entre eux sont occupés par des électrons : les nombres quantiques servent donc à définir tous les états possibles et l'étude des corps permet de disposer les électrons entre les divers niveaux. Le tableau 2 fournit la répartition pour les atomes des divers éléments lorsque ces atomes sont à l'état fondamental.

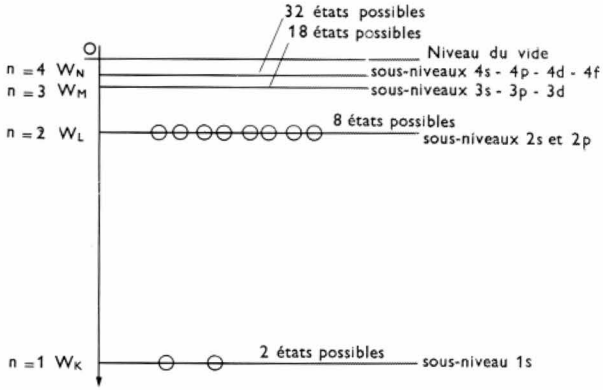


Fig. I-4 — Niveaux d'énergie d'un atome isolé

Seul le niveau externe (correspondant à la plus petite énergie nécessaire pour expulser un électron de l'atome) est intéressant pour expliquer les propriétés électriques des corps. En effet les champs mis en jeu pour la conduction électrique ne permettent pas d'obtenir des énergies suffisantes pour extraire les électrons des couches profondes. Ce sont également les électrons de la couche périphérique qui interviennent dans les liaisons chimiques entre atomes. Des représentations symboliques des niveaux d'énergie d'un atome sont données sur les figures I-4 et I-5. Dans le premier cas, les niveaux sont figurés par

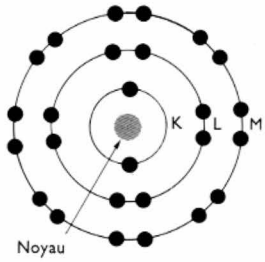


Fig. I-5

Autre représentation des niveaux d'énergie

des traits horizontaux correspondant à des ordonnées proportionnelles aux énergies W_K, W_L, W_M... Dans le second cas, les niveaux sont concrétisés par des cercles concentriques mais il ne faut pas les assimiler à des orbites électroniques comme dans la représentation de Bohr.

Les résultats du tableau 2 ont été utilisés pour représenter quelques atomes (fig. I-6).

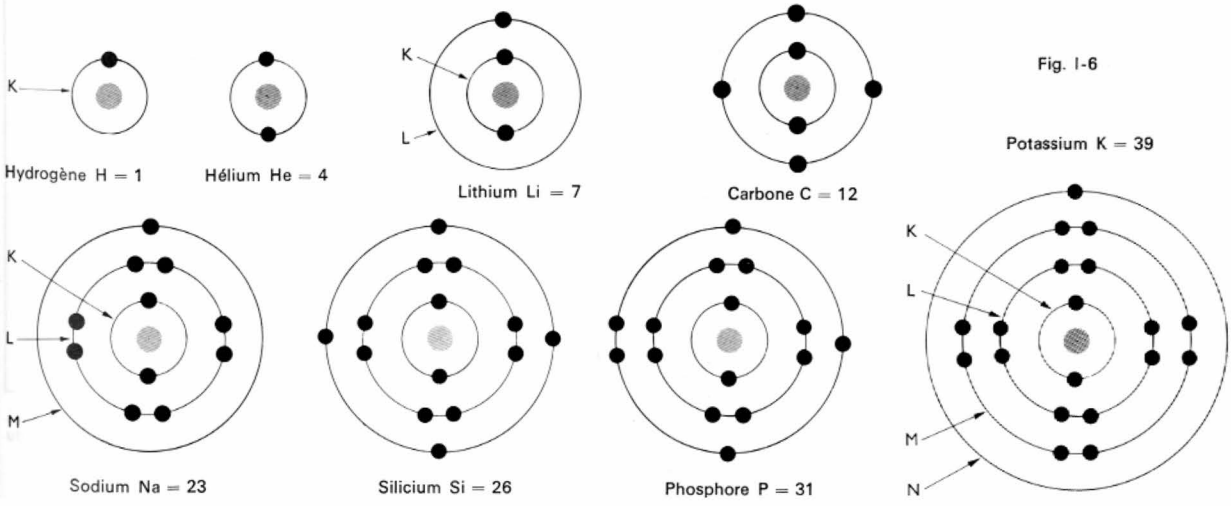


Fig. I-6

2.4.3. État excité. — Sous une influence extérieure (choc, lumière, chaleur, rayonnement) un atome peut absorber une certaine énergie. Il s'établit un nouvel état d'équilibre caractérisé par la présence d'un ou plusieurs électrons sur des orbites d'énergie supérieure à celle des orbites qu'ils occupent à l'état normal : l'atome est dans un état excité. Mais cet état est instable : l'atome excité revient spontanément à son état fondamental en restituant, sous forme de rayonnement électromagnétique, l'énergie emmagasinée. Prenons l'exemple de l'hydrogène, le cas le plus simple : l'état fondamental correspond à une valeur 1 du nombre quantique principal. Les valeurs de n supérieures à 1 (par exemple, $n = m$) correspondront à des états excités. L'atome reviendra spontanément à l'état fondamental et l'électron passera d'un niveau d'énergie U_m à un niveau d'énergie U_p (fig. I-7) avec émission d'un rayonnement électromagnétique de fréquence : $f = \dfrac{U_m - U_p}{h}$ ou de longueur d'onde : $\lambda = \dfrac{h\,c_0}{U_m - U_p}$ (h est la constante de Planck, c_0 la vitesse de la lumière dans le vide). Suivant

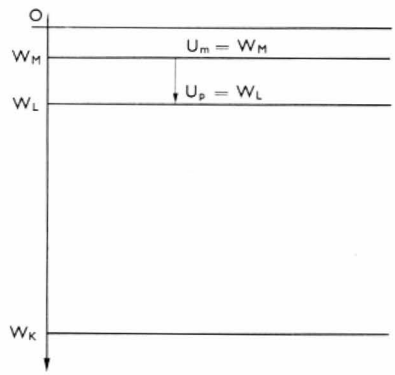


Fig. I-7

Retour à l'état fondamental avec émission d'un rayonnement

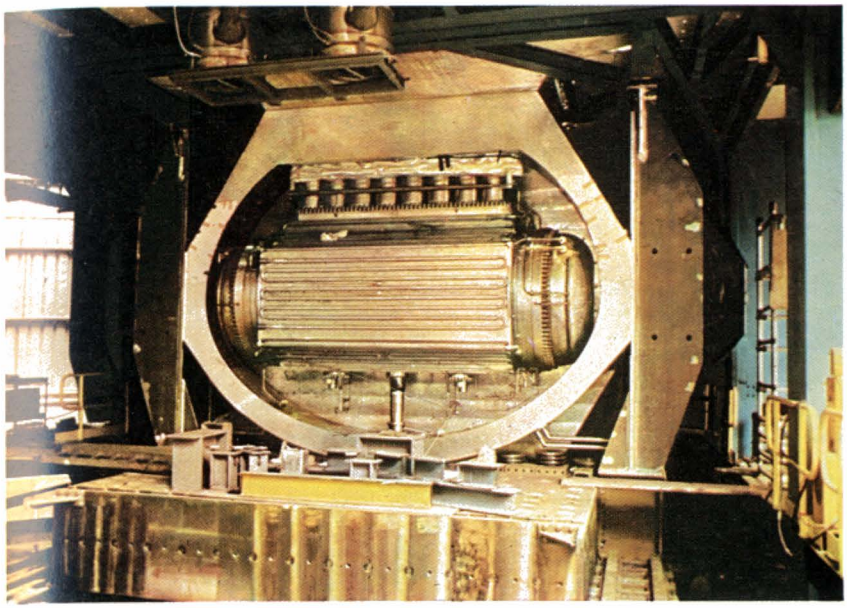
l'énergie d'excitation $\Delta W = U_m - U_p$, le rayonnement électromagnétique concernera le spectre infrarouge, le spectre visible, le domaine de l'ultraviolet ou celui des rayons X. Le nombre des états est cependant limité comme

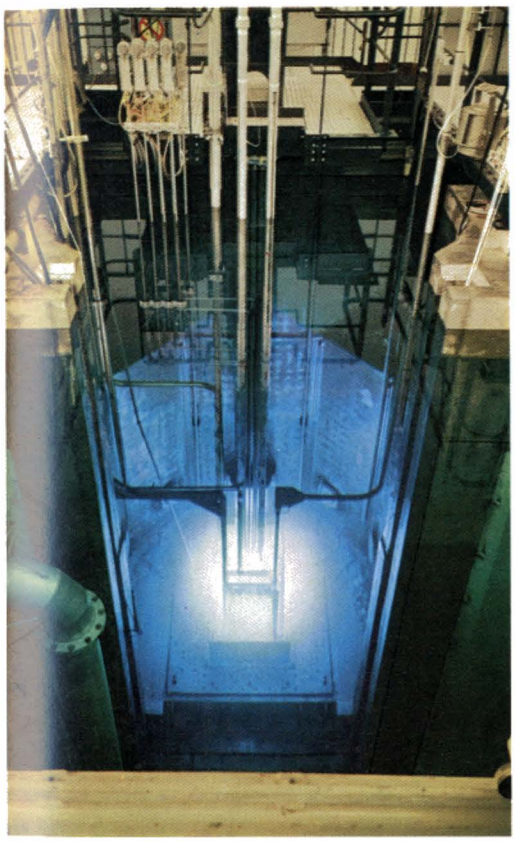
TABLEAU PÉRIODIQUE DES ÉLÉMENTS

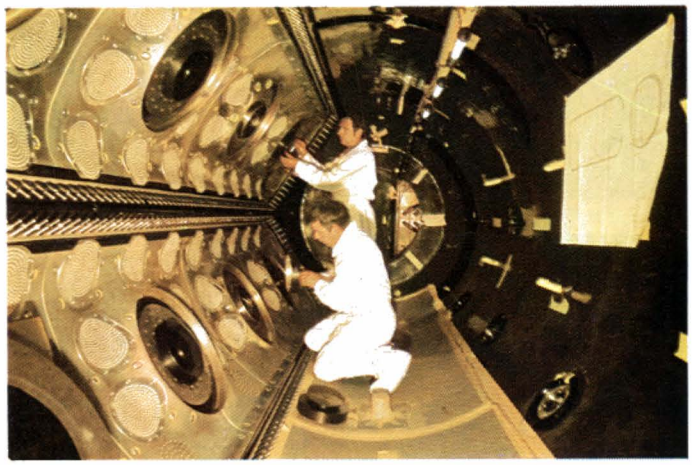
Groupe / Période	I a	I b	II a	II b	III a	III b	IV a	IV b	V a	V b	VI a	VI b	VII a	VII b	VIII			O
1	**1H** 1,007 97																	**2He** 4,0026
2	**3Li** 6,939		**4Be** 9,0122		**5B** 10,11		**6C** 12,01115		**7N** 14,0067		**8O** 15,9994		**9F** 18,9984					**10Ne** 20,183
3	**11Na** 22,9898		**12Mg** 24,312		**13Al** 26,9815		**14Si** 28,086		**15P** 30,9738		**16S** 32,064		**17Cl** 35,453					**18Ar** 39,948
4	**19K** 39,102		**20Ca** 40,08		**21Sc** 44,956		**22Ti** 47,80		**23V** 50,942		**24Cr** 51,996		**25Mn** 54,9381		**26Fe** 55,847	**27Co** 58,9332	**28 Ni** 58,71	
	29Cu 63,54		**30Zn** 65,37		**31Ga** 69,72		**32Ge** 72,59		**33As** 74,9216		**34Se** 78,96		**35Br** 79,909					**36Kr** 83,80
5	**37Rb** 85,47		**38Sr** 87,62		**39Y** 88,905		**40Zr** 91,22		**41Nb** 92,906		**42Mo** 95,94		**43Tc** (99)		**44Ru** 101,07	**45Rh** 102,905	**46Pd** 106,4	
	47Ag 107,870		**48Cd** 112,40		**49In** 114,82		**50Sn** 118,9		**51Sb** 121,75		**52Te** 127,60		**53I** 126,9044					**54Xe** 131,30
6	**55Cs** 132,905		**56Ba** 137,34		**57 à 71** Lanthanides		**72Hf** 178,49		**73Ta** 180,948		**74W** 183,85		**75Re** 186,2		**76Os** 190,2	**77Ir** 192,2	**78Pt** 195,09	
	79Au 196,967		**80Hg** 200,59		**81Tl** 204,37		**82Pb** 207,19		**83Bi** 208,980		**84Po** (210)		**85At** (210)					**86Rn** (222)
7	**87Fr** (223)		**88Ra** (226)		**89Ac** (227)		**90Th** 232,038		**91Pa** (231)		**92 à 104** Uranides							
Lanthanides ou Terres Rares					**57La** 138,91		**58Ce** 140,12		**59Pr** 140,907		**60Nd** 144,24		**61Pm** (147)		**62Sm** 150,35	**63Eu** 151,96	**64Gd** 157,25	**65Tb** 158,924
66Dy 162,50	**67Ho** 164,930		**68Er** 167,26		**69Tm** 168,934		**70Yb** 173,04		**71Lu** 174,97									
Uranides			**92U** 238,03		**93Np** (237)		**94Pu** (242)		**95Am** (243)		**96Cm** (247)		**97Bk** (245)		**98Cf** (251)	**99Es** (254)	**100Fm** (253)	**101Md** (256)
102No 253	**103Lr**		**104 Ku** 260		**105 Ha**													

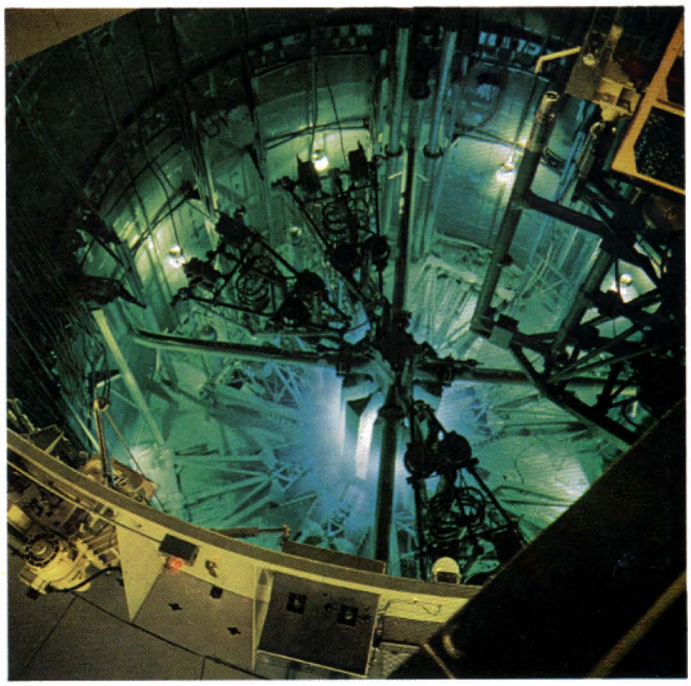
Au-dessous du symbole de chaque élément est indiquée la masse atomique relative moyenne du mélange des isotopes naturels de celui-ci. Les masses entre parenthèses représentent celles de l'isotope le plus stable de l'élément radioactif considéré. La référence de masse est celle de l'isotope 12 du carbone, en vigueur depuis 1961 : $^{12}_{6}\mathrm{C} = 12{,}000\,00$. Le nombre placé devant le symbole du corps représente son numéro atomique Z

Physique nucléaire





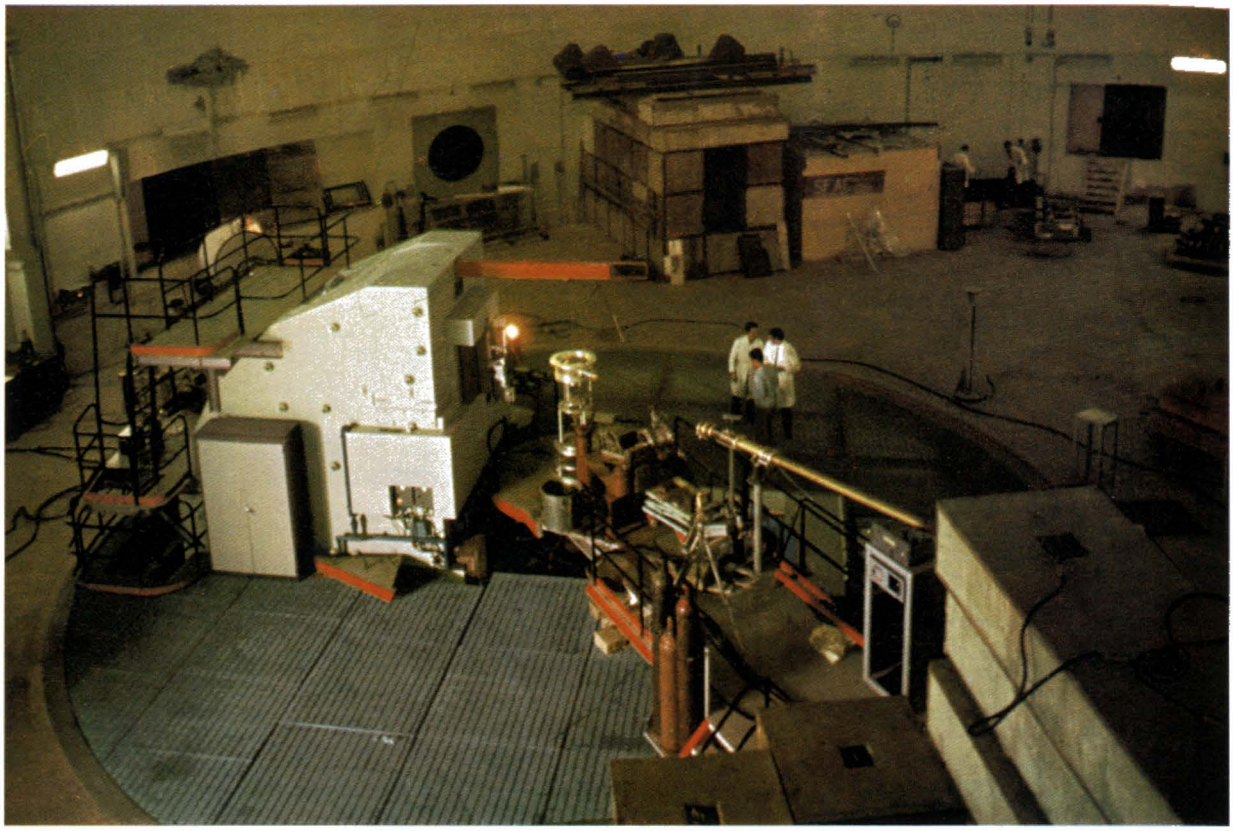


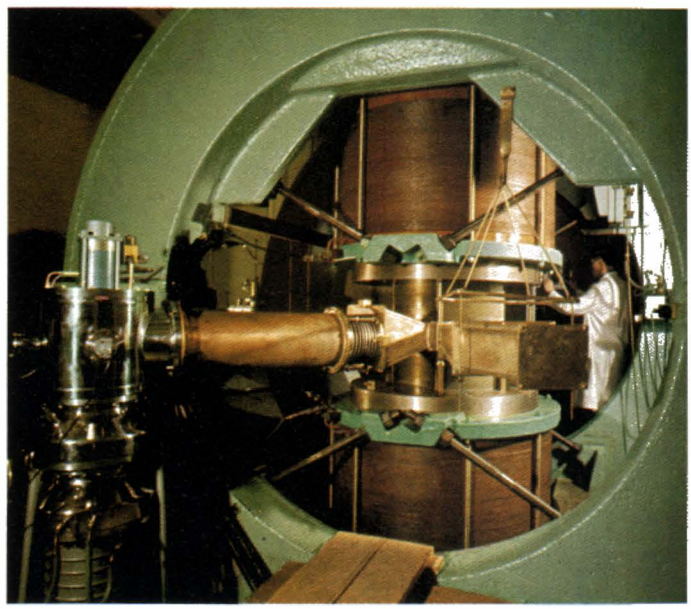


Chambres à bulles
En haut, **Mirabelle,** chambre à bulles à hydrogène liquide (longueur : 4 m ; volume d'hydrogène liquide : 7 m³), équipe le synchrotron à protons de 70 GeV de Serpoukhov ; elle est utilisée pour l'étude des particules de très haute énergie. *Au milieu, à droite,* **Gargamelle ;** intérieur du corps de la chambre à bulles « à liquides lourds ».

Piles piscines
Ci-dessus, **Triton** (Fontenay-aux-Roses) ; *à droite,* **Pégase** (Cadarache).

Photos : P. Jahan - C.E.A., C.E.R.N.





En haut, **accélérateur linéaire de Saclay.**
Les particules provenant de l'accélérateur arrivent par un conduit entouré de béton protecteur (à droite sur la photo) et passent ensuite dans un spectromètre de masse (au centre sur la photo).

Ci-dessus, **spectromètre** à secteur magnétique pour particules alpha.

A gauche, **télémanipulateur.**

Photos : J.-D. Lajoux, P. Jahan - C.E.A.

le nombre de niveaux que peuvent occuper les électrons de l'atome (c'est pour cette raison que les radiations émises ont des fréquences f bien déterminées, fonction de la quantité d'énergie ΔW perdue par l'électron). De cette façon se trouve expliquée l'émission lumineuse dont l'application la plus récente est le *laser*. Cette source lumineuse émet une radiation de longueur d'onde parfaitement définie car tous les atomes émetteurs ont été excités au préalable de la même manière et effectuent simultanément la même transition (c'est-à-dire perdent la même quantité d'énergie $|\Delta W| = hf = \frac{h\,c}{\lambda}$).

Remarque : Le cas de l'atome non isolé sera étudié lorsque nous expliquerons les semiconducteurs (V. t. 1, Électronique, chap. 1)

3. TABLEAU PÉRIODIQUE DES ÉLÉMENTS

Le tableau périodique des éléments (appelé aussi tableau de Mendeleeff) repose sur trois bases fondamentales :

1° **La structure des atomes :** les électrons sont disposés sur des couches ou des niveaux d'énergie en rapport avec des nombres quantiques ;

2° **Le principe d'exclusion de Pauli :** deux électrons d'un même atome ne peuvent avoir le même ensemble de nombres quantiques n, l, m, s. Par exemple, l'atome d'hélium possède deux électrons qui ont les mêmes trois premiers nombres quantiques ($n = 1$, $l = 0$, $m = 0$). En vertu du principe de Pauli, ces deux électrons sont caractérisés par des nombres quantiques de spin opposés : $s = \frac{1}{2}$ et $s = -\frac{1}{2}$. Ils sont dits appariés.

3° **Les interactions mutuelles des électrons :** elles conduisent à des exceptions à la règle générale qui veut que les électrons occupent par priorité les places disponibles sur les niveaux d'énergie minimale.

Le tableau périodique est organisé en périodes et en groupes (V. page précédente). Les périodes 1, 2, ..., 7 correspondent à la valeur maximale prise par le nombre quantique principal. En général, les numéros des groupes de I à VII, représentent le nombre d'électrons placés sur la dernière couche (déterminée par la valeur de n) ou la dernière sous-couche (valeur de n et de l). Ainsi le carbone a 2 électrons sur la couche K ($n = 1$) et 4 électrons sur la couche L (total 6). Les électrons périphériques (dernière couche ou sous-couche) déterminent les propriétés chimiques d'un élément. Donc, à l'intérieur d'un même groupe, les analogies chimiques sont certaines (série des halogènes, des alcalino-terreux, etc.).

Les éléments du dernier groupe comprennent les gaz rares (He, Ne, Ar, Kr, Xe, Rn) dont les dernières couches électroniques sont formées de 2 ou 8 électrons périphériques. Ces corps sont très stables et les atomes de structures voisines (alcalins et halogènes) ont tendance à se transformer en donnant de telles structures stables lorsqu'ils subissent une action extérieure. À cause des interactions mutuelles entre les électrons, à partir de $Z = 21$, les électrons n'occupent pas toujours les places disponibles sur les niveaux d'énergie minimale. Ils peuvent trouver des positions stables sur des niveaux d'énergie plus élevés, laissant des places disponibles dans les couches d'énergie inférieure. Ainsi la couche 4s, par exemple, (première transition du scandium Sc au nickel Ni) est saturée à 2 électrons pendant que se remplit la couche 3d, lorsque Z passe de 21 à 28. Il en est de même pour les terres rares (couche 6s) et les actinides (couche 7s).

4. LE NOYAU

4.1. Les nucléons. — L'histoire du noyau est, en fait, celle de la radioactivité. Rutherford avait montré que l'atome était presque « vide » en mettant en évidence le cortège des électrons (particules très légères) gravitant sur des orbites placées très loin autour du noyau central positif et très dense. Cherchant à souligner le rôle du noyau dans cette structure « lacunaire » de l'atome, Rutherford (en 1919) bombarde des atomes d'azote avec des particules α (*hélions*) spontanément émis par certaines substances (le radium, par exemple) : il met en évidence de nouvelles particules chargées positivement, les *protons*, noyaux d'hydrogène extraits des noyaux d'azote (fig. I-8).

Ces protons rendaient fluorescent un écran se trouvant à plus de 30 cm d'une source radioactive qui émettait des particules α. La fluorescence ne pouvait être provoquée par ces dernières, car leur parcours moyen ne dépasse guère quatre centimètres.

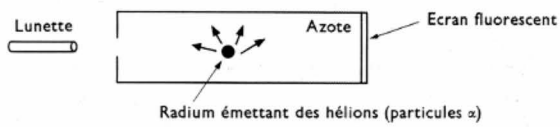


Fig. I-8 — Expérience de Rutherford

Le proton est une particule chargée positivement et sa charge est opposée à celle de l'électron : $e = +\,0{,}16 \cdot 10^{-18}$ C ; sa masse m_p est égale à 1 840 fois la masse de l'électron ($m_p \approx 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg). N protons (N : nombre d'Avogadro) ont une masse pratiquement égale à 1 g comme une mole d'atomes d'hydrogène ; cela signifie que le noyau de cet élément ne comporte qu'un proton (puisque, rappelons-le, la masse d'un atome est égale à la masse de son noyau).

Cependant, le proton n'est pas la seule particule pouvant se trouver dans un noyau. En 1920, Rutherford suggère l'existence d'une autre particule de *masse voisine de celle du proton mais de charge nulle*, le **neutron** ($m_n \approx 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg) ; protons et neutrons sont aussi appelés **nucléons.** Par exemple, l'atome d'hélium comporte 2 électrons et 2 protons pour que l'ensemble soit neutre. Or, sa masse atomique n'est pas égale à 2 mais à 4 ; cela s'explique par la présence dans le noyau de 2 protons et de 2 neutrons (c'est-à-dire de 4 nucléons).

4.2. Mise en évidence expérimentale du neutron. — Le neutron n'était d'abord qu'un élément hypothétique qui permettait de rendre compte des masses atomiques sans que l'équilibre entre les charges électriques soit modifié ; en outre, il expliquait très bien le processus des réactions de la chimie nucléaire. Mais en 1930, deux physiciens allemands, Bothe et Becker, constatèrent qu'une feuille de glucinium (appelé aussi béryllium) bombardée par le polonium, émetteur de particules α, renvoyait un rayonnement très pénétrant. Irène et Frédéric Joliot-Curie se rendirent compte que ce rayonnement, lorsqu'il traversait de la paraffine, en expulsait les protons (fig. I-9). En 1932, Chadwick confirme que ce rayonnement non électrisé est bien formé de *neutrons*, dont il précise la masse en mesurant avec précision le recul que produit le choc d'un neutron contre un noyau d'hydrogène ou d'azote.

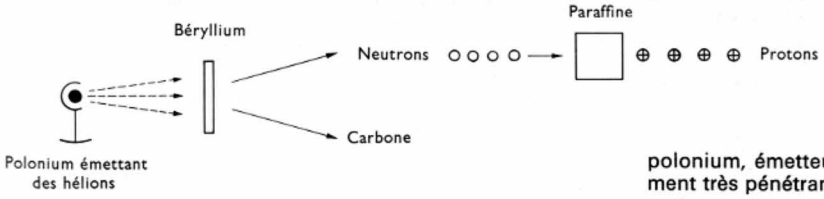


Fig. I-9

Expérience de Bothe et Becker complétée par Irène et Frédéric Joliot-Curie et Chadwick, prouvant l'existence des neutrons

4.3. Les nucléides

4.3.1 Définition. — Chaque élément existant dans la nature est caractérisé par la « disposition » des électrons

dans l'atome et par la constitution du noyau de cet atome. Les atomes d'un élément donné renferment tous le même nombre d'électrons, donc de protons, nombre compris entre 1 et 100 environ. Cependant, pour un même élément, nous pouvons trouver plusieurs sortes d'atomes suivant le nombre de neutrons de leur noyau : il existe au total 325 sortes d'atomes dans la nature, dont 274 sont stables et 51 instables. Chacune d'elles est appelée un *nucléide* (ou *nuclide* bien que ce soit le terme anglo-saxon). Grâce aux réactions nucléaires, de nouveaux atomes ont pu être créés : nous connaissons ainsi 1 500 nucléides artificiels, mais ils sont tous instables (sinon ils se trouveraient dans la nature).

4.3.2. Représentation symbolique. — À chaque nucléide sont attribués deux nombres : d'une part, le **numéro atomique *Z*** qui indique *le nombre d'électrons dans l'atome, donc de protons dans le noyau* ; d'autre part, le **nombre de masse *A*** qui précise *le nombre de nucléons présents dans le noyau de l'atome* : $A = Z + N$, si N est le nombre de neutrons. Pour rappeler ces deux caractéristiques, le nucléide X est représenté par le symbole ${}^{A}_{Z}X$.

Exemples :

hydrogène : ${}^{1}_{1}H$ ⟶ 1 électron et 1 nucléon qui est forcément 1 proton,

hélium : ${}^{4}_{2}He$ ⟶ 2 électrons, 2 protons et 2 neutrons,

oxygène : ${}^{16}_{8}O$ ⟶ 8 électrons, 8 protons et 8 neutrons,

sodium : ${}^{23}_{11}Na$ ⟶ 11 électrons, 11 protons et 12 neutrons.

Les noyaux des atomes légers ont pratiquement autant de protons que de neutrons (V. ci-dessus tabl. 1). Par contre, les noyaux des atomes plus lourds ont un excès de neutrons, excès qui croît avec la masse, sans toutefois dépasser une certaine limite (neutrons une fois et demie plus nombreux que les protons) sinon l'atome est instable

4.4. Les isotopes

4.4.1. Mise en évidence du deutérium. — En étudiant certaines anomalies des propriétés de l'eau, Urey, en 1932, put séparer l'hydrogène « ordinaire » et un autre « hydrogène » ; l'atome correspondant comportait bien sûr un électron mais dans le noyau un proton était associé à un neutron. Il fut appelé hydrogène lourd ou *deutérium* et son noyau a été désigné sous le nom de *deuton* (quelquefois *deutéron*).

Combiné avec l'oxygène, ce deutérium donne **l'eau lourde** de formule D_2O. Cette eau bout à 101,5 °C sous la pression atmosphérique normale (1 bar) et se congèle en glace fondante à 3,8 °C mais ses propriétés chimiques sont rigoureusement les mêmes que celles de l'eau (H_2O). Le deutérium a le même numéro atomique que l'hydrogène ordinaire (même nombre d'électrons) mais sa masse atomique est différente : c'est un **isotope** de l'hydrogène.

4.4.2. Composition isotopique des éléments naturels. — Après la découverte de l'hydrogène lourd, les savants constatèrent que beaucoup d'éléments avaient des isotopes (V. tabl. 1, dernière colonne). Les isotopes d'un même élément sont présents dans la nature dans les mêmes proportions, quelle que soit l'origine de l'échantillon considéré. Par exemple, il existe neuf nucléides oxygène (donc neuf isotopes) dont les plus courants sont : ${}^{16}_{8}O$, ${}^{17}_{8}O$, ${}^{18}_{8}O$.

De même il existe huit nucléides carbone : ${}^{12}_{6}C$, ${}^{13}_{6}C$, ${}^{14}_{6}C$, ...

Des isotopes n'ont pas la même masse puisque leurs noyaux ne comportent pas le même nombre de neutrons mais ils ont les mêmes propriétés chimiques. C'est l'isotope ${}^{12}_{6}C$ qui est pris comme référence pour définir les masses atomiques : ${}^{12}_{6}C = 12{,}000\,00$ (1961). La masse atomique du carbone donnée dans le tableau 1 correspond au carbone naturel, c'est-à-dire à un mélange déterminé d'isotopes.

L'uranium, corps naturel le plus lourd, a 17 isotopes tous radioactifs d'ailleurs $\left({}^{234}_{92}U,\ {}^{235}_{92}U,\ {}^{238}_{92}U, \ldots\right)$ dont le plus abondant est ${}^{238}_{92}U$ (99,2 %) alors que ${}^{235}_{92}U$, recherché pour les réactions de fission nucléaire, n'y apparaît que dans la faible proportion de 0,7 %.

Pour séparer les isotopes d'un même élément, il n'est pas possible de recourir aux propriétés chimiques puisqu'elles sont identiques ; il faut utiliser les propriétés physiques et en particulier mettre en œuvre des méthodes fondées sur les différences de masse.

4.5. Cohésion du noyau

4.5.1. Définition de l'u.m.a. — L'étude des réactions chimiques montre que les masses des éléments qui entrent en combinaison sont dans un rapport constant. Cette loi a permis d'attribuer une masse atomique à chaque élément en prenant comme référence celle du carbone, comme nous l'avons signalé ci-dessus.

L'unité de masse atomique (symbole u.m.a.) est la fraction un douzième de la masse d'un atome neutre, non excité, de carbone 12 (${}^{12}_{6}C$)

$$1 \text{ u.m.a.} = 1{,}66043 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

Des mesures extrêmement précises ont conduit à considérer que la masse du noyau d'hydrogène (proton) est 1,008 14 u.m.a., et celle du neutron 1,008 98 u.m.a.

4.5.2. Masse et énergie de liaison. — D'après ces valeurs la masse du noyau d'hélium (ou *hélion*), formé de 2 protons et de 2 neutrons, devrait être égale à 4,034 24 u.m.a. Or, le résultat des mesures directes étant 4,003 86 u.m.a., tout se passe donc comme si, en s'associant, les nucléons avaient subi une perte apparente de masse de 0,030 38 u.m.a., soit $5{,}044 \cdot 10^{-29}$ kg.

En effectuant le même calcul et des mesures directes sur les autres corps, le même fait est constaté. C'est Einstein le premier qui, vers 1905, donna l'explication de ce phénomène en affirmant que la masse et la matière ne sont qu'une forme particulière de l'énergie. Une diminution de masse d'un système de corps doit obligatoirement entraîner une apparition d'énergie, l'**énergie de cohésion.** La relation qui traduit cette analogie est : $W = mc_0^2$. L'énergie W est exprimée en joules, la perte de masse m en kilogrammes, la vitesse de la lumière c_0 en mètres par seconde : $c_0 = (299\,792\,500 \pm 300)$ m/s. Cette expression montre que pour détruire tous les noyaux d'une mole d'atomes d'hélium (soit 4 g) il faut une énergie égale à :

$$W_t \approx 6{,}02 \cdot 10^{23} \times 5{,}044 \cdot 10^{-29} \times 9 \cdot 10^{16} = 2{,}75 \cdot 10^{12} \text{ J}$$

l'équivalent de l'énergie fournie par la combustion d'environ 78 tonnes de charbon. L'énergie de cohésion s'exprime d'ailleurs souvent avec une autre unité, le méga-électronvolt (1 MeV = $0{,}16 \cdot 10^{-12}$ J ; 1 u.m.a. correspond à 931,480 MeV).

4.5.3. Stabilité d'un noyau. — Pour avoir une idée de la stabilité du noyau d'un élément, on évalue la perte de masse de l'élément rapportée à un nucléon ; cela fournit l'énergie de liaison par particule de l'élément considéré.

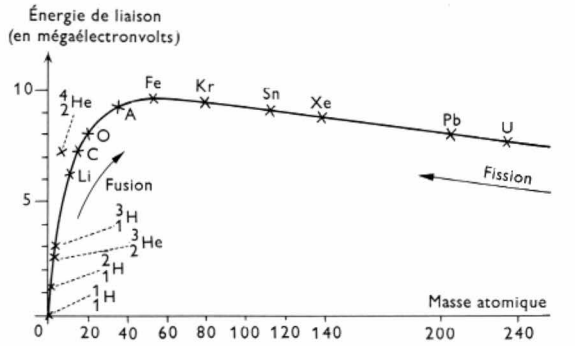


Fig. I-10 — Courbe représentant l'énergie de liaison en fonction de la masse atomique

Les éléments qui ont une masse atomique comprise entre 20 et 200 présentent le maximum de stabilité (fig. I-10). Donc pour obtenir de l'énergie, il faut réaliser des réactions nucléaires à partir d'éléments peu stables pour aboutir à des éléments plus stables; cela peut s'effectuer suivant deux procédés: soit par *fission* d'éléments lourds de masse atomique supérieure à 200 (V. chap. 3, § 4), soit par *fusion* d'éléments légers de masse atomique inférieure à 20 (V. chap. 3, § 6). Une énergie nucléaire considérable peut alors être libérée.

4.6. Forces nucléaires. — Dans le noyau, protons et neutrons sont liés entre eux par des forces extrêmement intenses. En fait, il s'agit de forces entre nucléons agissant à très courte distance et dues à des échanges de particules de masse beaucoup plus faible, les *mésons*, échanges prévus dès 1935 par Yukawa. Deux types principaux de mésons sont distingués: les **pions,** ou **mésons** π, relativement légers et les **kaons,** ou **mésons** K, plus lourds. Ces mésons seraient des particules associées au champ nucléaire, comme les photons sont des particules associées au champ électromagnétique.

Mais à l'heure actuelle, un nombre abondant de mésons ou d'autres particules a été identifié remettant sans cesse en question le problème de la structure de la matière.

4.7. Principales particules élémentaires. — Outre l'électron, le proton et le neutron, les physiciens ont découvert une trentaine d'autres particules, c'est-à-dire une trentaine de formes sous lesquelles l'énergie peut se présenter. La durée de vie de certaines de ces particules est parfois très courte, souvent inférieure au milliardième de seconde. Elles sont classées généralement deux par deux, chaque particule étant associée à une antiparticule dont les caractéristiques ne présentent que peu de différence par rapport à celles de la particule: par exemple, leurs charges électriques sont opposées, ou leurs sens de rotation sont contraires. Elles sont étudiées au cours de réactions nucléaires complexes, dites de *hautes énergies*, intervenant dans les accélérateurs de particules (V. chap. 3, § 3) ou dans le rayonnement cosmique (V. chap. 5), mais elles n'existent pas à l'état naturel. Ainsi sont connus: l'**antiproton,** l'**antineutron,** divers types de mésons, d'**hypérons** (particules lourdes très instables), etc. Nous verrons plus loin l'importance du **positon** (ou positron) et du **neutrino** (V. chap. 2).

Depuis les études sur la radioactivité, le noyau n'apparaît donc plus comme un tout indivisible: il contient des particules matérielles qui peuvent être libérées brusquement, provoquant la transformation d'un atome d'une espèce en un atome d'une autre espèce. Cela met en jeu des énergies très importantes dont l'étude est liée finalement à celle de l'organisation des nucléons dans le volume nucléaire.

4.8. Modèles modernes décrivant le noyau. — En première approximation, nous pouvons considérer que les noyaux d'atomes ont une symétrie sphérique sous l'influence des forces de liaison entre nucléons, beaucoup plus importantes que les forces de répulsion entre protons. Bohr avait proposé de considérer les nucléons comme les molécules d'un liquide rassemblées pour former une *goutte* grâce à des *interactions fortes;* mais cela n'explique pas l'existence de niveaux d'énergie, alors qu'il a été possible de mettre en évidence une quantification des nucléons. Actuellement, le modèle retenu est appelé *modèle unifié des couches nucléaires:* les nucléons se répartissent sur des couches correspondant à des nombres « magiques » de protons et de neutrons. Ces couches figurent des niveaux d'énergie liés à l'excitation élevée des nucléons: cela déforme le noyau dont seul le cœur est sphérique.

Dans ce modèle unifié, le noyau est caractérisé par des propriétés: masse, charge, rayon, *moment angulaire total, moment électrique* et *moment magnétique* (car les nucléons ont un mouvement de rotation dans le noyau et les charges électriques dans la masse nucléaire ne sont pas uniformément réparties). Le moment angulaire total est dû au fait que le noyau tourne sur lui-même comme une toupie; il est la somme de tous les moments totaux des nucléons, le moment total d'un nucléon étant la somme de son *moment orbital* et de son *spin* (moment dû à la rotation du nucléon sur lui-même).

4.9. Les quasi-particules. — L'analyse de ces divers modèles, tous imparfaits, montre que la principale difficulté tient dans la recherche d'une théorie concernant les interactions nucléon-nucléon: il a été montré que les nucléons situés à la surface du noyau, dits *nucléons de valence,* ne peuvent interagir avec ceux qui sont situés plus à l'intérieur. De plus, tous les nucléons forment des paires de moment total nul.

Cela amène à décomposer l'interaction *réelle* des nucléons entre eux en un *champ effectif moyen* (valeur moyenne des interactions de chaque nucléon avec tous les autres) et une *interaction résiduelle* (due à la part des interactions des nucléons de valence dont il n'a pas été tenu compte pour définir le champ moyen). Cette description commence à être confirmée par une étude quantitative liée à des expériences très récentes; le problème de sa traduction mathématique oblige à considérer le mouvement de *quasi-particules.* Une quasi-particule serait liée à l'énergie de l'ensemble nucléon-interaction individuelle.

CHAPITRE II

LA RADIOACTIVITÉ

1. GÉNÉRALITÉS

1.1. Découverte. — En 1896, le physicien français Henri Becquerel recherchait la relation entre la fluorescence et les rayons X, radiations pénétrantes découvertes quelques mois plus tôt par l'Allemand Röntgen. Alors qu'il faisait des expériences avec un grand nombre de produits chimiques (divers produits chimiques sont fluorescents ou brillants quand ils sont exposés aux rayons X ou à d'autres radiations), Becquerel découvrit tout à fait par hasard ceci: sans être exposé à aucune sorte de radiations, un échantillon contenant de l'*uranium* pouvait voiler une plaque photographique complètement enveloppée dans un épais papier noir. Tout en émettant un rayonnement spontané, les atomes d'uranium avaient donc subi une mutation puisque toute énergie provient d'une disparition de masse et inversement (V. chap. 1, § 4). En 1898, Pierre et Marie Curie constatèrent que ce rayonnement était encore plus important avec le *polonium* et surtout avec le *radium.* Ce phénomène d'émission reçut le nom de radioactivité.

Un corps radioactif émet sans arrêt des radiations possédant une certaine énergie et susceptibles d'impressionner un écran fluorescent ou une plaque photographique; il peut provoquer l'ionisation d'un gaz ou un dégagement de chaleur.

1.2. Caractères généraux de la radioactivité

1.2.1. Phénomène nucléaire. — C'est une propriété fondamentale de certains *noyaux,* dits *radioactifs,* qui se désintègrent spontanément: cette modification curieuse de structure vient du fait que ces noyaux sont *instables,* mal proportionnés quant à leur composition en protons et en neutrons, ce qui crée un déséquilibre énergétique. En effet, ils renferment beaucoup plus de neutrons que de protons (au moins une fois et demie). Un corps radioactif subit des transformations qui modifient peu à peu ses propriétés chimiques, mais il a été constaté que, quelle que soit la combinaison chimique dans laquelle se trouve le corps, *la nature et l'intensité du rayonnement émis ainsi que la vitesse de transformation ne sont pas modifiées:* aucun agent physique ne peut les changer. Cette émission est une caractéristique essentielle du corps radioactif; elle se manifeste toujours de la même façon. Ainsi, en examinant

l'émission du radium, il est possible de vérifier que le rayonnement est toujours accompagné du dégagement continu d'un gaz appelé *radon* (ce gaz, lui-même radioactif, disparaît par moitié en quatre jours).

1.2.2. Émission de trois sortes de rayonnement. L'examen du rayonnement qui émanait du radium montra ainsi que, sous l'influence d'un champ magnétique, il apparaissait (fig. II-1) trois faisceaux de natures différentes, dont deux étaient déviés dans des directions opposées. Cela suggéra l'idée que ces deux faisceaux étaient formés de particules portant des charges de signe contraire, tandis que le faisceau non dévié était un simple rayonnement électromagnétique.

1° On reconnut que le rayonnement non dévié était particulièrement pénétrant. Il pouvait traverser jusqu'à 1 cm de plomb ; sa nature était semblable à celle des ondes lumineuses mais sa longueur d'onde était environ dix millions de fois plus petite ; il reçut le nom de *rayonnement gamma* (γ).

2° Le rayonnement un peu moins pénétrant et le plus dévié par un champ magnétique fut reconnu comme étant un faisceau d'électrons atteignant presque la vitesse de la lumière ; il fut appelé *rayonnement bêta moins* (β^-).

3° Enfin le rayonnement le moins pénétrant fut appelé *rayonnement alpha* (α). Comme il était dévié en sens opposé du précédent, il fallut le supposer composé de particules positives, que Rutherford reconnut par la suite comme étant de noyaux d'hélium ou hélions.

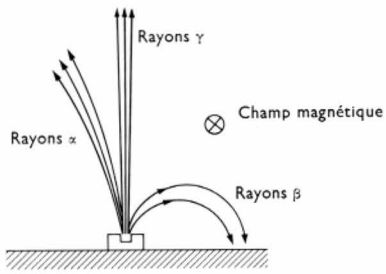


Fig. II-1
Séparation des radiations du radium par un champ magnétique perpendiculaire au plan de la figure

1.2.3. Transmutations naturelles et artificielles. — Comme nous venons de le voir avec le radium, la transmutation d'un corps simple en un autre se manifeste de façon continue ; pour le radium les transformations successives fournissent du *plomb*.

C'est en partant de cette observation sur les transmutations *naturelles* que Rutherford, en 1919, essaya de scinder des noyaux. Il avait remarqué que les noyaux des corps radioactifs explosaient et, de ce fait, semblaient moins « solides » que les autres. Il pensa qu'en bombardant des noyaux avec des corpuscules possédant une énergie suffisante, il serait peut-être possible de détruire quelques-uns de ces noyaux, c'est-à-dire d'obtenir une transmutation *artificielle*. Dans l'expérience qu'il réalisa en bombardant les noyaux d'atomes d'azote par des hélions (V. fig. I-8), il obtint en effet une libération de protons et la formation d'oxygène : il avait ainsi réalisé pour la première fois la transmutation d'un élément simple en un autre élément simple, l'oxygène. Cette réaction qui concerne les noyaux (réaction nucléaire) est symbolisée par l'équation suivante :

$$^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{14}_{7}\mathrm{N} \longrightarrow {}^{17}_{8}\mathrm{O} + {}^{1}_{1}\mathrm{H}\ \text{(proton)}$$

C'est l'isotope $^{17}_{8}\mathrm{O}$ de l'oxygène qui est obtenu ici et non le nucléide le plus courant $^{16}_{8}\mathrm{O}$.

1.3. Découverte des nucléides artificiels. — Après la découverte de l'existence de radioéléments naturels, les savants ont cherché à obtenir d'autres noyaux radioactifs. En 1934, Irène et Frédéric Joliot-Curie créèrent un nucléide inconnu sur terre. En bombardant une feuille d'aluminium avec les hélions du polonium, expérience analogue à celle de Rutherford, ils constatèrent la transmutation de l'aluminium en phosphore avec émission de neutrons comme prévu. En revanche après l'arrêt du bombardement par une plaque de plomb (qui stoppe la production de neutrons), ils s'aperçurent que l'aluminium émettait des positons (V. ci-après § 2.2.1), ce qui était tout à fait inattendu.

Il apparut que l'aluminium se transformait en phosphore radioactif, ou radiophosphore (inexistant dans la nature car il ne peut se manifester que pendant trois minutes), dont les noyaux en explosant produisaient des positons qui s'échappaient en laissant un résidu de silicium (fig. II-2).

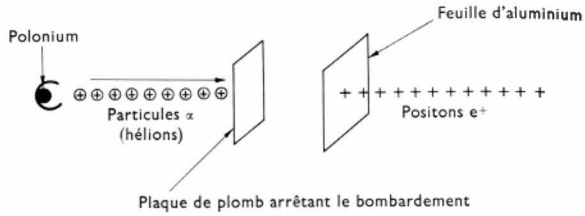


Fig. II-2 — Expérience de Irène et Frédéric Joliot-Curie créant un radionucléide artificiel à partir de l'uranium

Cela résulte de deux réactions nucléaires successives :

hélion + aluminium ⟶ phosphore radioactif + neutron

$$^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{27}_{13}\mathrm{Al} \longrightarrow {}^{30}_{15}\mathrm{P}^{*} + {}^{1}_{0}\mathrm{n}\ \text{(neutron)}$$

(un astérisque placé à droite d'un symbole chimique indique que l'élément correspondant est radioactif)

phosphore radioactif ⟶ silicium + positon

$$^{30}_{15}\mathrm{P}^{*} \longrightarrow {}^{30}_{14}\mathrm{Si} + e^{+}\ \text{(positon)}$$

Cette première obtention de radionucléide artificiel sera suivie de beaucoup d'autres : à l'heure actuelle plus de 1 500 nucléides sont connus alors que la nature en compte seulement 325.

2. PROCESSUS DE DÉSINTÉGRATION ET RAYONNEMENT

La désintégration des noyaux est accompagnée d'une émission de corpuscules : hélions (rayon α), positons (rayons β^+), électrons (rayons β^-) ou (et) d'un rayonnement γ (photons).

2.1. Désintégration avec émission de rayons α

2.1.1. Nature du rayonnement. — Rutherford a pu vérifier expérimentalement que, quel que soit le corps radioactif qui les émet, les rayons α sont constitués de particules identiques ; la mesure de la masse et de la charge a montré qu'il s'agissait de noyaux d'hélium. Ces hélions, formés de 2 protons et 2 neutrons qui sont groupés dans les noyaux instables et trop lourds, sont éjectés brutalement à grande vitesse.

Exemple : $^{210}_{84}\mathrm{Po} \rightarrow {}^{206}_{82}\mathrm{Pb} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$ (hélion)

Pour que l'hélion, particule chargée, sorte du noyau, il faut que son énergie soit suffisamment grande, supérieure à l'énergie de liaison dans le noyau et à l'énergie nécessaire pour sortir de ce noyau. À cette dernière énergie correspond

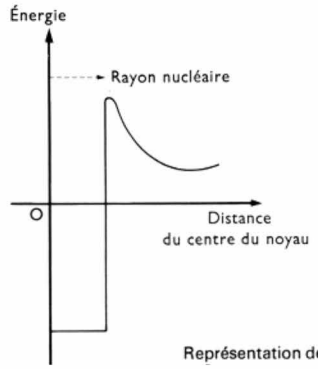


Fig. II-3
Représentation de la barrière de potentiel d'un noyau

ce qui est appelé une *barrière de potentiel* (fig. II-3). Il existe en effet une zone au bord du noyau où les forces répulsives (forces électrostatiques) se changent brusquement en forces attractives (comme l'interaction nucléaire) ; quand une particule chargée positivement s'approche du noyau positif, l'énergie nécessaire pour franchir cette zone est représentée par la hauteur de la barrière de potentiel.

2.1.2. Vitesse et énergie des particules α. — La vitesse d'une particule α dépend de l'élément radioactif dont elle est issue. Cette vitesse est comprise entre 14 000 et 25 000 km/s. Si la vitesse des particules est connue, nous pouvons déduire leur énergie qui est proche de 10^{-12} joules. La différence de potentiel qui permettrait de communiquer à un électron la même énergie est égale à $U = 8 \times 10^6$ V (elle est donnée par la formule $W = eU$; V. t. 1, Électronique, chap. 24). Cela permet de dire que les particules α possèdent une énergie voisine de 8 millions d'électronvolts.

2.1.3. Détection des hélions. — La visualisation dans une chambre de Wilson (V. ci-après) a été utilisée tout d'abord : des trajectoires rectilignes très denses, rayonnant dans toutes les directions, matérialisent le parcours des corpuscules α autour d'une source de petites dimensions.

Le phénomène de phosphorescence a également été mis en œuvre. Crookes avait remarqué la vive phosphorescence du sulfure de zinc heurté par des rayons α ; en examinant la surface luminescente à la loupe, il est possible de distinguer un ensemble de points brillants qui *scintillent* et leur répartition donne à l'écran un aspect étoilé. L'apparition de chaque « étoile » correspond au choc d'une particule α sur la surface et en réduisant la quantité de substance émettrice, l'arrivée d'une seule particule peut être observée. Au lieu d'être reçues sur un écran, les particules peuvent être envoyées dans une chambre d'ionisation (V. ci-après § 3.1). Des renseignements précieux concernant le rayonnement sont déduits de la mesure du courant dû au passage des particules et des relevés fournis par des compteurs de particules. Les mesures d'énergie des différents rayonnements ont montré que les particules α transportent 90 % du rayonnement total, mais elles sont *très vite arrêtées* en traversant la matière : quelques centimètres d'air, ou une feuille de papier, suffisent à les arrêter ; leur durée de vie, comme la longueur de leur parcours, dépendent de leurs effets ionisants.

2.2. Désintégration avec émission de rayons β

2.2.1. Nature du rayonnement

1° *Désintégration* β^-. — Un noyau, sans être trop lourd, peut comporter trop de neutrons par rapport au nombre de protons. Dans ce cas, *un des neutrons du noyau se transforme en un proton* et cette transformation s'accompagne de la naissance d'un électron ou particule β^-, appelé aussi *électron négatif*. Celui-ci est éjecté à grande vitesse et le corps est dit radioactif de type β^-.

Exemple : $^{32}_{15}P^* \longrightarrow {}^{32}_{16}S + \beta^-$ (ou e^-)

Cette réaction succède très fréquemment aux réactions nucléaires provoquées en introduisant un neutron supplémentaire dans les noyaux stables.

2° *Désintégration* β^+. — *Le positon (ou positron)*. — C'est la transformation inverse de la précédente : elle se produit dans un noyau instable qui a trop de protons par rapport au nombre de neutrons. *Un proton du noyau devient alors neutron, en éjectant un positon.*

Exemple : $^{22}_{11}Na^* \longrightarrow {}^{22}_{10}Ne + \beta^+$ (ou e^+)

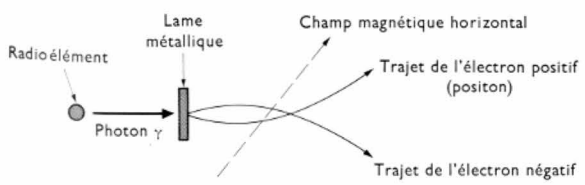


Fig. II-4 — Expérience d'Anderson réalisant la matérialisation d'un photon

Le positon ou électron positif (antiparticule de l'électron négatif) a été découvert par Anderson en 1932 (fig. II-4) : un photon γ bombardant une lame métallique, se « matérialise » en donnant naissance à un électron et un positon, particules de même masse mais de charges contraires. Le positon a une durée de vie très faible et disparaît en rencontrant un électron négatif : les deux charges s'annihilent alors que les deux masses se transforment en énergie de rayonnement γ.

Un autre phénomène peut encore se produire, appelé *capture électronique :* un proton se transforme en neutron par capture d'un électron de la couche *K* proche du noyau.

2.2.2. Vitesse et énergie des particules β. — **Le neutrino.** — L'énergie de désintégration d'une particule β est en général plus faible que celle de la particule α, mais comme les électrons sont beaucoup plus légers que les hélions, ils sont éjectés avec une vitesse beaucoup plus grande : elle est comprise entre 120 000 et 250 000 km/s.

La répartition des vitesses est continue ; un faisceau dévié et enregistré sur plaque photographique fournit un spectre continu dit « spectre β naturel », caractéristique de l'élément radioactif. Cependant sur le fond continu de ce spectre se détache un « spectre de raies β » dont les énergies sont caractéristiques de l'élément émetteur ; elles sont comprises entre 37 keV et 10 MeV.

Les particularités du spectre β nécessitaient une interprétation. En effet, les émissions de rayonnement correspondent à des transitions d'énergie bien définies entre des états d'excitation du noyau émetteur. La continuité de l'énergie des rayons β constituait une anomalie.

Pauli imagina alors l'existence du neutrino, particule non chargée, de très petite masse, émise par le noyau en même temps qu'une particule β et partageant avec cette dernière, au hasard, l'énergie rendue disponible par la désintégration. *Pour respecter le principe de la conservation des charges et celui de la conservation de l'énergie, la radioactivité* β *est représentée de la façon suivante :*

émission β^- : neutron $\longrightarrow$ proton $+ e^- +$ neutrino

émission β^+ : proton $\longrightarrow$ neutron $+ e^+ +$ antineutrino

2.2.3. Action des rayons β **sur la matière.** — Ces particules chargées, très légères et rapides, sont plus pénétrantes que les particules α mais elles perdent progressivement leur énergie au cours de « chocs » avec des atomes. À la pression atmosphérique chaque particule β rapide produit 12 600 ions environ. À l'aide de la chambre à détente de Wilson, les trajectoires des rayons β ont été photographiées ; ces trajectoires sont d'autant plus droites que la vitesse des particules β est plus élevée. Comme pour les particules α, un comptage des particules β peut être effectué avec un tube de Geiger-Müller.

2.3. Désintégration avec émission de rayons γ

2.3.1. Nature du rayonnement. — Tout noyau, stable ou instable, dans certaines conditions peut apparaître à l'état excité, c'est-à-dire comme possédant un excès d'énergie : cela notamment peut se produire dans le nouveau noyau obtenu juste au moment d'une désintégration. Après l'éjection d'une particule α, β^- ou β^+, *le noyau excité perd son excès d'énergie* en émettant aussitôt un rayon γ, petit « grain » d'énergie électromagnétique, sans masse, comme un photon de lumière visible ou de rayonnement X. L'émission de rayons γ suit donc généralement une désintégration α ou β.

2.3.2. Absorption des rayons γ. — Le mécanisme par lequel l'énergie du rayonnement est cédée à la matière est entièrement différent de ce que nous venons de voir. Ce rayonnement n'est plus un faisceau de corpuscules chargés, mais au contraire est formé de photons, non déviés par les champs électriques ou magnétiques et non ralentis ou freinés par la matière. Le photon γ incident peut produire trois effets sur la matière : *effet photoélectrique* (éjection d'un électron orbital de l'atome. V. t. 1, Électronique, chap. 20) ; *effet Compton* (choc élastique contre un électron et diffusion de l'électron dans une direction quelconque. V. t. 1, Optique, chap. 4) ; *effet de matérialisation* (création d'une paire électron-positon). Des photographies prises à la chambre de Wilson mettent en évidence

de nombreuses trajectoires dues aux électrons secondaires arrachés aux molécules gazeuses par le passage des rayons γ.

Les photons ne dissipent donc pas l'énergie qu'ils transportent, et ce n'est qu'à la suite de leur disparition que cette énergie est transférée au milieu. C'est pourquoi les rayons γ sont très pénétrants: ils peuvent traverser jusqu'à vingt centimètres de plomb; cela permet de les séparer facilement des autres rayonnements.

3. DÉTECTION DES PARTICULES

Toute particule chargée en mouvement rapide dans un gaz y produit une perturbation qui est utilisée pour détecter la particule. Nous classerons les détecteurs en deux grandes catégories:

— ceux qui font appel aux phénomènes d'ionisation;

— ceux qui indiquent les résultats de l'excitation.

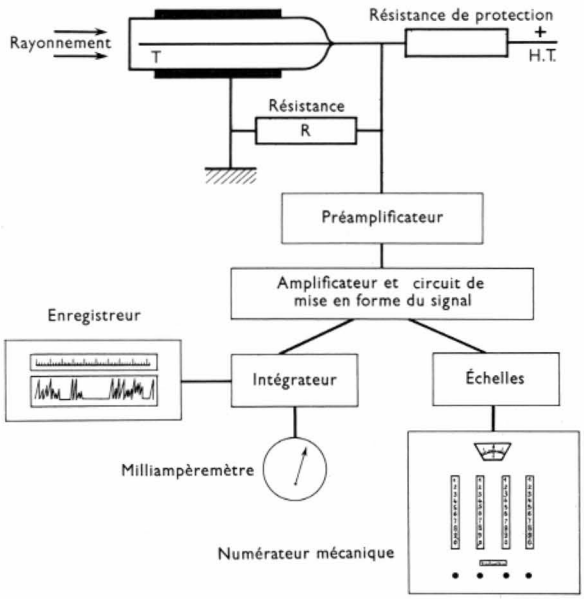


Fig. II-5 — La source radioactive émet des particules qui ionisent le gaz contenu dans le tube T. Si la d.d.p. est suffisante, il y a avalanche d'électrons. Une résistance R permet d'obtenir une impulsion de tension à partir de l'impulsion de courant. Ensuite cette impulsion est amplifiée et transmise à des dispositifs de comptage ou d'enregistrement

3.1. Chambre d'ionisation. — C'est une enceinte remplie de gaz (air sec, gaz rare ou mélange gazeux) servant d'isolant et munie de deux électrodes. Elles sont soumises à une d.d.p. continue et elles délimitent un champ électrique. Si une source radioactive émet un rayonnement dans cet espace, il se produit une ionisation du gaz et l'action du champ électrique entraîne un courant. Lorsque le nombre d'électrons créés est suffisant, ce courant peut être mesuré au moyen d'un appareil très sensible placé dans le circuit électrique.

En fait, ce dispositif est surtout utilisé pour mesurer l'énergie des rayons α, en collectant les impulsions électriques engendrées au niveau de l'électrode par la décharge d'une série d'ions correspondant à un seul rayon α.

3.2. Compteur proportionnel. — C'est une chambre d'ionisation qui *amplifie* elle-même le nombre des charges libérées par une particule ionisante. Si la tension appliquée au tube est suffisante, l'électron qui a été expulsé de l'atome gazeux peut provoquer l'ionisation d'autres atomes gazeux dans l'ampoule, et ainsi de suite (ionisation par chocs) avant d'atteindre l'électrode collectrice. Ainsi, pour chaque particule émise dans le tube, il se produit une petite *avalanche* d'électrons sur le fil central (V. t. 1, Électronique, chap. 4).

3.3. Compteur Geiger-Müller. — Pour obtenir un facteur de multiplication plus important, la d.d.p. appliquée entre les électrodes est augmentée sans toutefois dépasser une certaine valeur au-delà de laquelle il n'y a plus proportionnalité entre les ions primaires et les ions recueillis.

En effet, si cette tension est grande, les atomes ionisés à partir des électrons primaires dus à l'effet du rayonnement sont excités et ils retournent à leur état fondamental en émettant des photons qui peuvent arracher des électrons à la cathode par effet photoélectrique (V. t. 1, Électronique, chap. 20).

Il existe une grande variété de tubes Geiger-Müller, spécialisés suivant la nature des corpuscules à étudier. Tous sont des chambres d'ionisation très simplifiées, remplies de gaz spéciaux; l'électrode collectrice est réduite à une tige et l'autre électrode est l'enveloppe du tube (fig. II-5). Associés à des appareils de comptage électronique, ces appareils permettent donc de détecter des rayonnements très pénétrants.

Fig. II-6 — Tube Geiger-Müller immersible utilisé pour détecter les rayonnements β et γ

3.4. Chambre à détente de Wilson. — Ce dispositif (fig. II-7) est constitué par un cylindre fermé d'un côté par une glace et de l'autre par un piston. La chambre contient

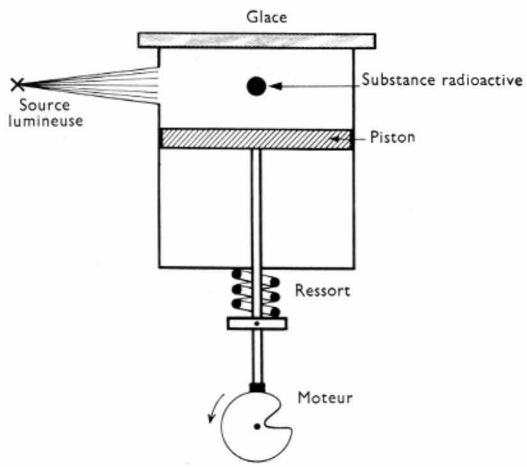


Fig. II-7 — Chambre à détente de Wilson

de l'air saturé de vapeur d'eau; si le piston est déplacé vers le bas pour abaisser la pression, il y a condensation au contact des ions qui jouent le rôle d'impuretés. Donc si une particule traverse la chambre, les gouttelettes d'eau se condensent suivant sa trajectoire, et un appareil photographique peut être déclenché automatiquement au moment de la détente (fig. II-8 et II-9).

3.5. Compteurs à scintillation. — Quelques corps émettent des radiations lumineuses lorsqu'ils sont traversés par certaines particules : ils sont appelés *scintillateurs*. Les photons émis par le scintillateur sont détectés au moyen d'un photomultiplicateur (V. t. 1, Électronique, chap. 20). À chaque particule incidente correspond une *impulsion* de tension : les montages actuels permettent de détecter plusieurs millions de particules par seconde (fig. II-10).

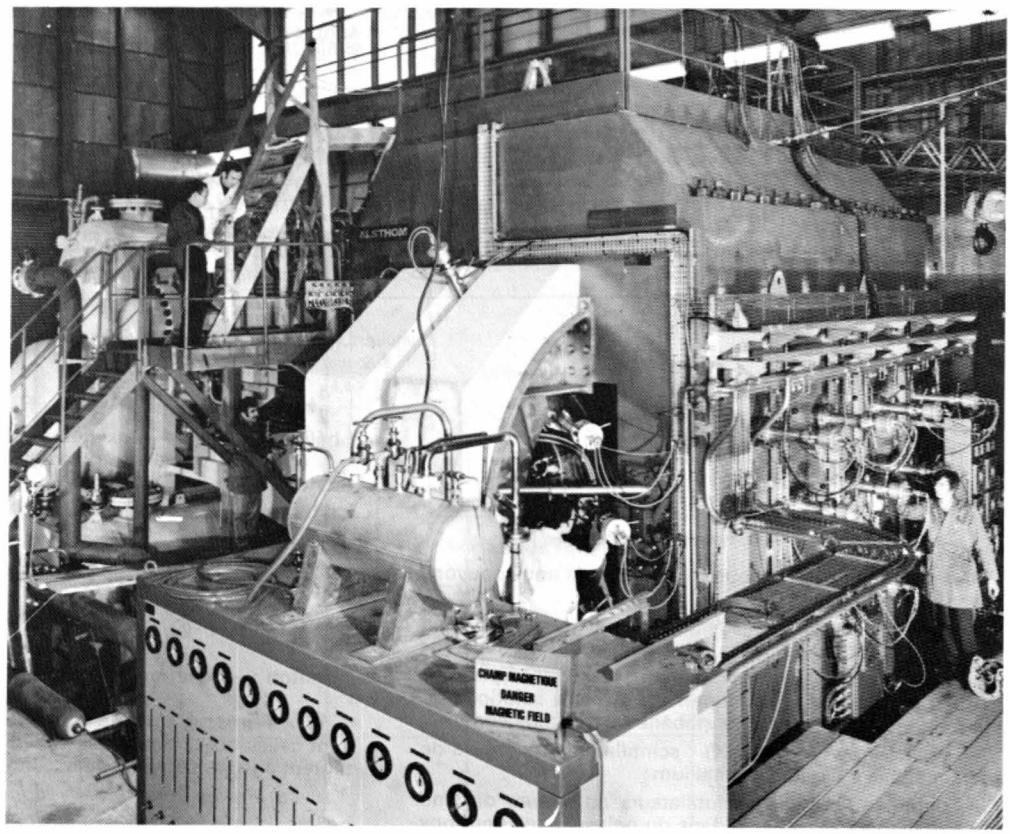


Fig. II-8 — Chambre à bulles à liquides lourds « Gargamelle » installée au C.E.R.N. Le volume photographique de 10 m³ est contenu dans un cylindre de 1,88 m de diamètre et 4,8 m de long, caché ici par des bobines d'excitation (blanches) au centre de la photographie. L'électroaimant (80 t de cuivre et 900 t de fer) permet d'obtenir une induction de 1,95 T. A droite, une partie du dispositif optique groupant :
— 21 lampes-éclair de 500 J chacune,
— 8 caméras à film de 70 mm.
La chambre remplie de fréon a fonctionné pour la première fois le 9 décembre 1970
(*C.E.R.N.*)

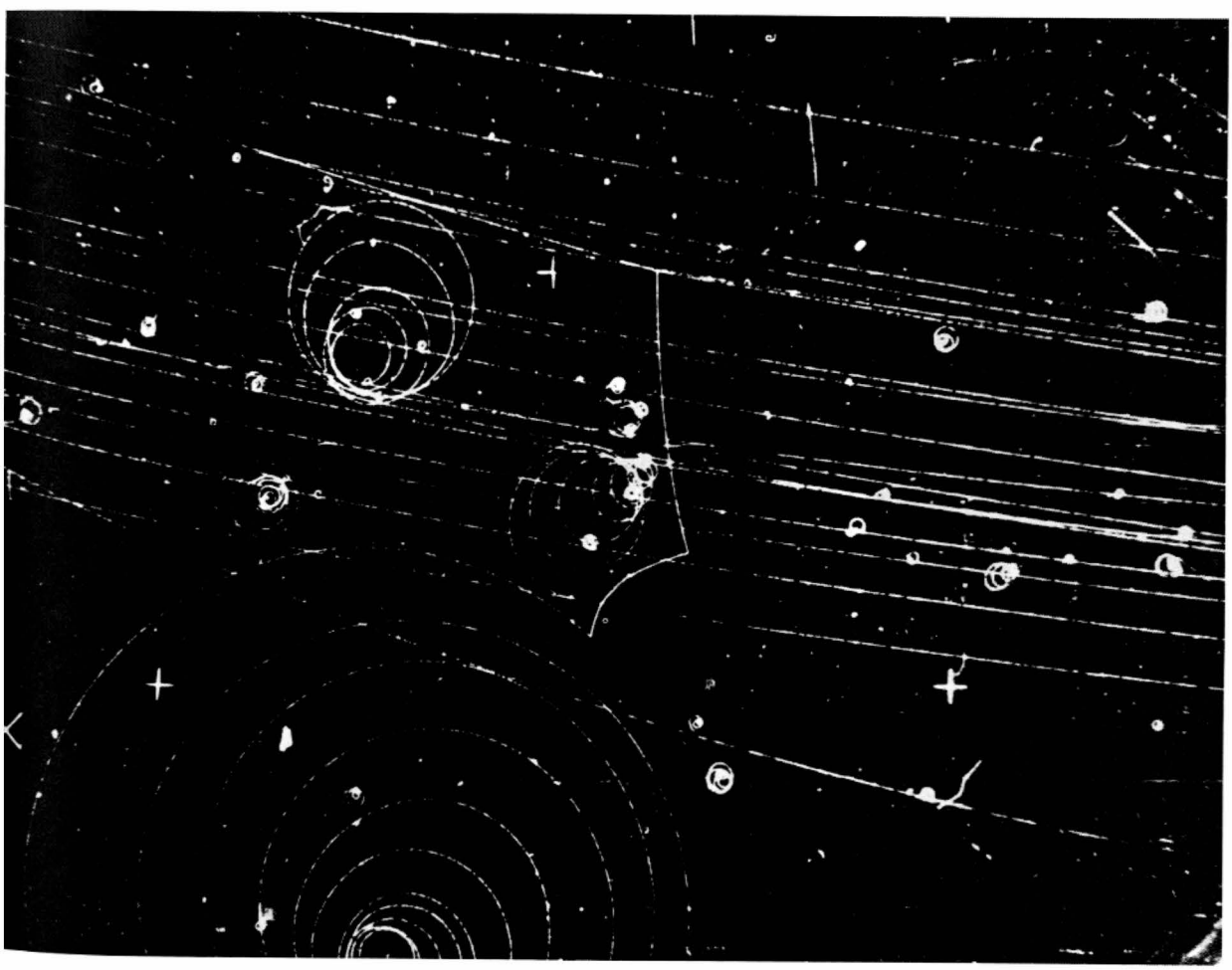


Fig. II-9 — Traces de trajectoires de particules visualisées au moyen d'une chambre à bulles
(*C.E.A.*)

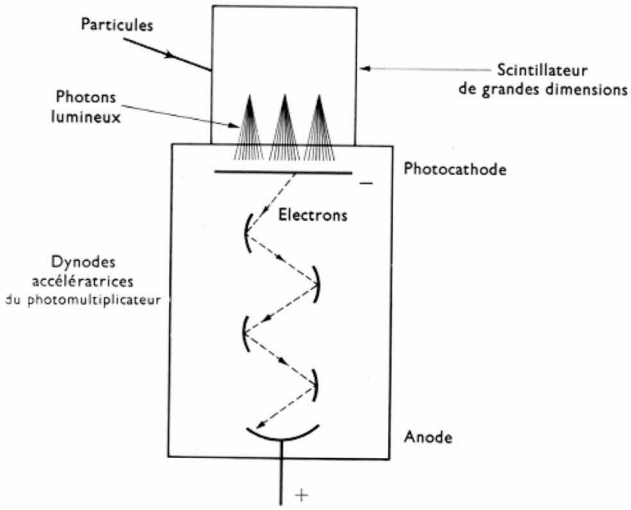


Fig. II-10 — Compteur à scintillation

Parmi les scintillateurs couramment utilisés nous pouvons citer :

— pour les *rayons* α : scintillateurs au sulfure de zinc activé à l'argent ou à l'iodure de césium activé au thallium ;

— pour les *rayons* β : scintillateurs plastiques (polystyrène ou polyvinyltoluène) contenant diverses solutions ou utilisant des monocristaux de stilbène ou d'anthracène ;

— pour les *rayons* γ (et X) : scintillateurs à l'iodure de sodium activé à l'iodure de thallium ;

— pour les *neutrons :* scintillateurs au sulfure de zinc activé à l'argent et dispersé dans du polystyrène (neutrons rapides), ou dans un verre à base d'anhydride borique enrichi en bore (neutrons lents).

4. CLASSIFICATION DES TRANSMUTATIONS

Les transformations provoquées ayant pris une importance croissante par rapport aux désintégrations naturelles, il a été nécessaire de les classer : cela se fait, soit d'après la nature du projectile utilisé (électron, proton, neutron, hélion, deuton, photon), soit d'après la stabilité du noyau créé.

4.1. Transmutations de première espèce. — Ce sont celles dans lesquelles le *noyau produit est stable.* Plusieurs exemples peuvent être cités :

a) *action d'un électron :*

$$\beta^- + {}^{9}_{4}\mathrm{Be} \longrightarrow {}^{8}_{4}\mathrm{Be} + {}^{1}_{0}n + \beta^-$$

électron + béryllium ⟶ béryllium + neutron + électron

b) *action d'un proton :*

$${}^{1}_{1}\mathrm{H} + {}^{19}_{9}\mathrm{F} \longrightarrow {}^{16}_{8}\mathrm{O} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$$

proton + fluor ⟶ oxygène + hélion (α)

c) *action d'un neutron :*

$${}^{1}_{0}n + {}^{14}_{7}\mathrm{N} \longrightarrow {}^{11}_{5}\mathrm{B} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$$

neutron + azote ⟶ bore + hélion (α)

d) *action d'un hélion :*

$${}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{14}_{7}\mathrm{N} \longrightarrow {}^{17}_{8}\mathrm{O} + {}^{1}_{1}\mathrm{H}$$

hélion α + azote ⟶ oxygène + proton

(c'est la première transmutation artificielle de Rutherford)

e) *action d'un deuton :*

$${}^{2}_{1}\mathrm{H} + {}^{12}_{6}\mathrm{C} \longrightarrow {}^{13}_{6}\mathrm{C} + {}^{1}_{1}\mathrm{H}$$

deuton + carbone ⟶ carbone + proton

f) *action d'un photon :*

$$\gamma + {}^{2}_{1}\mathrm{H} \longrightarrow {}^{1}_{0}n + {}^{1}_{1}\mathrm{H}$$

photon γ + deuton ⟶ neutron + proton

4.2. Transmutations de deuxième espèce. — Ce sont celles qui donnent des *noyaux instables* qui se désintègrent ensuite spontanément. Citons deux exemples :

a) *Production d'un noyau instable de silicium :*

hélion + magnésium ⟶ *Silicium radioactif* + neutron

⟶ Aluminium + positon

$${}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{24}_{12}\mathrm{Mg} \longrightarrow {}^{27}_{14}\mathrm{Si}^{*} + {}^{1}_{0}n$$

$$\longrightarrow {}^{27}_{13}\mathrm{Al} + e^{+}$$

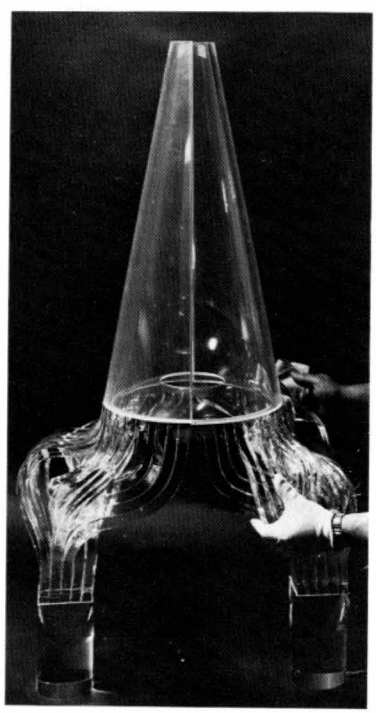
b) *Production d'un noyau instable de sodium :*

deuton + sodium ⟶ *sodium radioactif* + proton

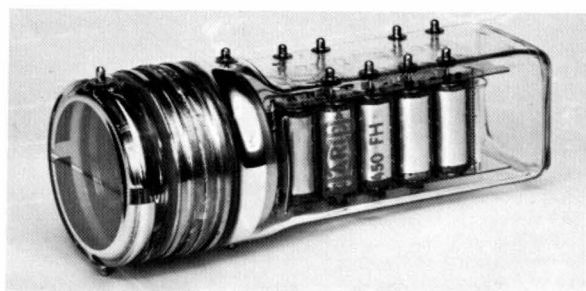
⟶ magnésium + neutron + électron + photon

$${}^{2}_{1}\mathrm{H} + {}^{23}_{11}\mathrm{Na} \longrightarrow {}^{24}_{11}\mathrm{Na}^{*} + {}^{1}_{1}\mathrm{H}$$

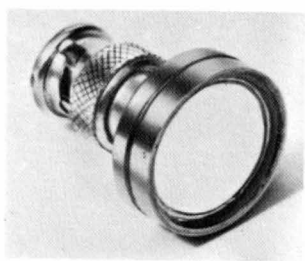
$$\longrightarrow {}^{24}_{12}\mathrm{Mg} + {}^{1}_{0}n + \beta^- + \gamma$$

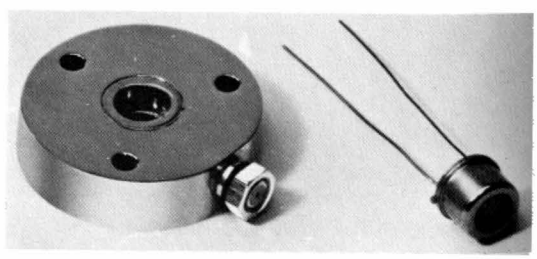


Montage d'un compteur à scintillation (*C.E.R.N.*)



Photomultiplicateur (*R.T.C.*)





Semiconducteurs utilisés comme détecteurs de radiations (semicteurs) (*R.T.C.*)

5. DESTIN DES CORPS RADIOACTIFS

5.1. Émanations et dépôts actifs. — Pierre et Marie Curie, Rutherford et Debierne avaient observé que les corps placés au voisinage des corps radioactifs (radium, thorium, actinium) devenaient eux-mêmes actifs et émettaient les rayonnements α, β, γ. L'étude de ce phénomène a montré que tout se passait comme si un gaz s'échappait du corps radioactif (ce gaz fut appelé *émanation*) et qu'une substance inconnue se déposait à la surface du corps.

Parmi les émanations citons : le *radon*, le *thoron*, l'*actinon*. Les émanations sont très actives, mais comme les gaz rares de l'air, elles ne produisent pas de réactions chimiques avec les autres corps. Cependant leur présence est indispensable pour observer la *radioactivité induite* sur un corps car, si elles ne peuvent atteindre les surfaces irradiées, celles-ci ne sont pas modifiées. Les chercheurs supposent aussi qu'un corps radioactif solide, provenant de l'émanation, se dépose sur les surfaces avoisinantes,

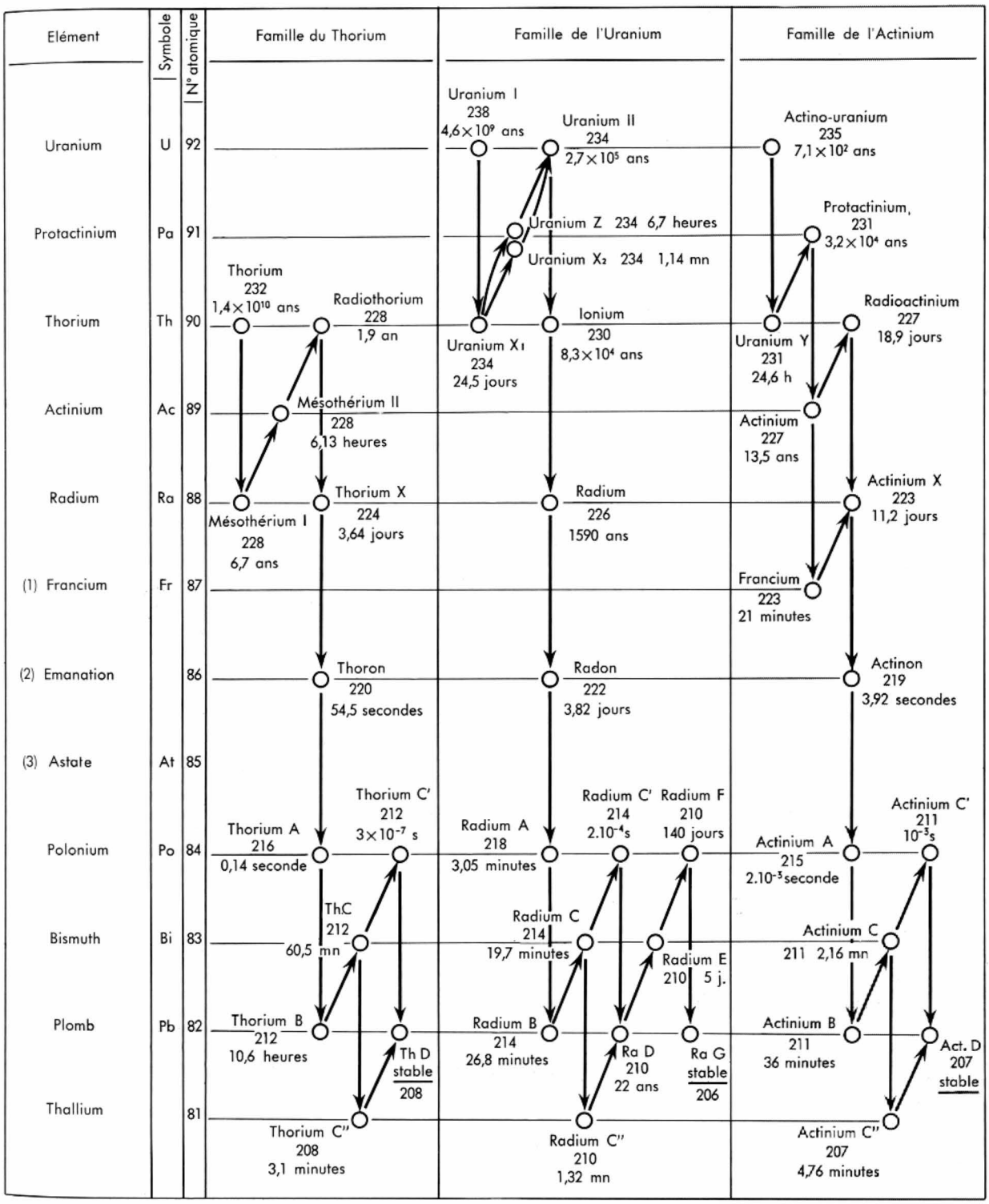


Fig. II-11

(1) Le francium est quelquefois appelé actinium K ou encore virginium. — (2) Le radon est aussi appelé thoron ou actinon suivant la famille.
(3) L'astate est aussi appelé alabame

car, par frottement ou dilution, cet enduit solide peut facilement être enlevé, et son activité est alors transférée à la surface frottante ou diluante.

5.2. Transformations radioactives. — Les émissions radioactives s'accompagnent de la destruction d'un certain nombre d'atomes de la matière émissive et de la production d'un corps dérivé, lequel se transforme à son tour, et cela jusqu'à l'obtention d'un corps solide stable non radioactif. La destruction de chaque substance intermédiaire s'effectue suivant une *loi exponentielle*, ce qui revient à dire que le pourcentage d'atomes qui se transforment par unité de temps est constant. Ce nombre désigné par λ, appelé *constante radioactive de l'élément*, caractérise chaque élément radioactif et indique sa vitesse de destruction.

Si nous désignons par N_0 le nombre d'atomes d'un élément radioactif à l'instant $t = 0$, le nombre N d'atomes à l'instant t est donné par la relation suivante :

$$N = N_0 \, \mathbf{e}^{-\lambda t}$$

La *période* T d'un élément radioactif est le temps nécessaire pour que le nombre d'atomes diminue de moitié. D'après cette définition lorsque $t = T$, $\frac{N}{N_0} = \frac{1}{2}$ et nous avons l'égalité suivante : $\lambda T = \ln 2 = 0{,}693$. Les valeurs des constantes λ et T sont indépendantes des conditions expérimentales : en opérant à des pressions et à des températures très différentes ou en présence de champs extérieurs, aucune variation n'a été constatée. La figure II-11 fournit quelques valeurs des périodes des radioéléments ; elles sont comprises entre une microseconde et plusieurs milliards d'années pour l'uranium.

5.3. Activité d'un radioélément. — C'est la vitesse de transformation de l'élément ; elle est égale au nombre de désintégrations enregistrées en un temps infiniment petit. Elle est numériquement égale à la valeur absolue de la dérivée $\frac{dN}{dt}$ de la fonction $N(t)$ définie précédemment. À un instant t elle est proportionnelle au nombre d'atomes $N\left(\left|\frac{dN}{dt}\right| = \lambda N\right)$. C'est une grandeur plus facile à mesurer directement que la période. Une unité a été choisie : par convention c'est le *curie* (symbole Ci) activité d'une quantité de radioélément pour laquelle le nombre de désintégrations par seconde est $3{,}7 \cdot 10^{10}$. Ce nombre est choisi en se référant à l'activité d'une masse de 1 g de radium, activité qui est sensiblement 1 curie.

6. LES FAMILLES RADIOACTIVES

La découverte des émanations et des dépôts radioactifs a montré qu'il existait des liens de parenté entre divers corps radioactifs. Les recherches poursuivies sur les désintégrations successives ont permis de grouper les substances radioactives en quatre familles (d'après leur origine). Trois corps de départ se trouvent dans la nature : *uranium, thorium, actinium ;* le quatrième est un corps de synthèse atomique, le *neptunium*. Le passage d'un élément à un autre s'effectue avec émission de particules α ou β provenant du noyau, selon la loi de Soddy : « Une transformation radioactive avec émission de rayons α abaisse de deux unités le numéro atomique de l'élément qui la subit et le fait reculer de deux cases dans le tableau périodique de Mendeleeff (V. chap. 1 § 3), tandis qu'une émission β augmente le numéro atomique d'une unité et fait avancer l'élément qui la subit d'une case au tableau. » Le tableau de la figure II-11 représente la filiation pour les trois familles naturelles ; pour chaque radioélément sont indiquées la valeur de la masse atomique et la période. Les radioéléments se placent sur des lignes horizontales correspondant à certains corps simples : c'est ainsi que le thorium A, le thorium C′, le radium A, le radium C′, le radium F, l'actinium A et l'actinium C′ sont tous des *isotopes* du polonium ; ils ont tous 84 charges élémentaires et ont les mêmes propriétés chimiques. Les désintégrations successives de ces divers éléments aboutissent toutes au plomb.

7. APPLICATION DE LA RADIOACTIVITÉ

Ces domaines sont liés aux caractéristiques essentielles des radionucléides :

7.1. Datation. — L'activité des radionucléides décroît exponentiellement de façon bien définie, aussi est-il possible de *dater* avec précision l'âge d'un minerai, c'est-à-dire le temps depuis lequel ce corps se désintègre. Pour cela, il faut mesurer la quantité de plomb accumulée dans un minerai d'uranium (dont la période de désintégration est $T = 4510.10^6$ ans) ou encore la quantité résiduelle de corps radioactifs tels que le *carbone 14* ($T = 5600$ ans), le *potassium 40* ($T = 1300.10^6$ ans), le *thorium 232* ($T = 1{,}4.10^{10}$ ans).

7.1.1. Datation par le carbone 14. — Cette méthode a été inventée par le physicien américain Libby. Dans la haute atmosphère les neutrons provenant de *rayons cosmiques* se combinent à l'azote selon la réaction suivante :

$$^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \longrightarrow {}^{14}_{6}\mathrm{C}^{*} + {}^{1}_{1}\mathrm{H}$$

Ce carbone 14 combiné à l'oxygène de l'air forme du gaz *carbonique radioactif* qui est absorbé par les plantes au cours de la *photosynthèse*. Des végétaux étant utilisés comme nourriture par les êtres vivants, du carbone 14 est retenu par leur organisme : il s'y trouve dans une proportion carbone 14/carbone 12 (non radioactif) constante. Au contraire, après la mort, le carbone 14 n'est plus renouvelé, et dans les matières conservées par la fossilisation sa proportion diminue du fait de la désintégration lente des particules radioactives.

La mesure de cette proportion dans un échantillon, est effectuée à l'aide d'un détecteur Geiger-Müller qui fournit le nombre de désintégrations par minute et par gramme de carbone. Ce comptage est une opération délicate. Tout d'abord, si 1 g de carbone frais contient 63 milliards d'atomes de carbone une fraction importante (14,1 %) se désintègre en 80 ans (avec 12,5 désintégrations par minute et par gramme) et après 22 000 années, il ne se produit plus qu'une seule désintégration par minute en moyenne. Ensuite, les particules radioactives à compter ont un pouvoir pénétrant si faible qu'elles peuvent être arrêtées par les parois du compteur : il faut placer l'échantillon dans le détecteur lui-même, aménagé spécialement à cet effet. Enfin, il faut se protéger des rayons cosmiques qui produisent dans les détecteurs un « bruit de fond » nuisible aux mesures et pour cela il faut, par exemple, enterrer les laboratoires.

Deux autres causes d'erreurs peuvent fausser complètement les mesures : un apport extérieur de carbone 14 dans l'échantillon équivaut à lui faire subir un rajeunissement, et un apport de carbone 12 inerte correspond à un vieillissement. Or il a été décelé des fluctuations dans l'activité solaire, donc dans le bombardement cosmique, et plus récemment, des modifications ont eu pour origine certains effets des industries modernes. Ainsi, depuis un siècle, l'exploitation intensive des combustibles fossiles (houille, hydrocarbures liquides et gazeux) a entraîné une augmentation de la proportion de carbone 12 dans les végétaux. En sens inverse, le développement depuis 20 ans des expériences nucléaires (bombe H en particulier) dégage des neutrons ayant des effets analogues à ceux des rayons cosmiques : cela augmente la teneur moyenne en gaz carbonique radioactif à la surface de la Terre.

Cependant, en effectuant les corrections nécessaires, les chercheurs ont obtenu des résultats qui permettent de considérer comme exactes les durées inférieures à 40 000 ans, et même à 55 000 ans dans certaines conditions particulières.

7.1.2. Datation par le potassium 40. — La période de désintégration du potassium 40 en argon 40 est considérablement plus longue que celle du carbone 14 ; l'utilisation de la même méthode permet d'évaluer les âges compris entre 80 millions d'années et 300 000 ans. Les processus d'analyse sont donc comparables à ceux utilisés pour le carbone 14, mais les mesures sont encore plus délicates. Les quantités d'éléments disponibles sont d'abord très faibles, et, de plus, l'argon étant gazeux, au cours

des âges, il a pu s'échapper de la roche qui le contenait, ou celle-ci a pu être contaminée par l'argon de l'atmosphère.

7.1.3. Datation par le thorium 232. — Cette méthode établit une liaison entre les deux précédentes, car l'analyse des traces de thorium 232 permet de dater un corps entre 50 000 et 250 000 ans. C'est ainsi qu'en 1965, deux Américains, Stearns et Thurber, datèrent les anciennes lignes de rivages de l'Atlantique et de la Méditerranée, en analysant les coquilles de mollusques fossiles de plages marines du Pléistocène moyen supérieur.

7.2. Utilisation des rayonnements. — Les rayonnements émis pénètrent dans la matière et la transforment. En particulier avec les rayons γ, cette pénétration est utilisée pour réaliser des radiographies de corps épais appelées *gammaradiographies* et pour effectuer des mesures d'épaisseur. Certaines cellules malades plus sensibles que les cellules normales sont détruites par un rayonnement et cela est utilisé pour le traitement de certains cancers, par exemple (*gammathérapie*). (V. t. 2. Applications de l'électronique à la médecine).

La structure moléculaire de certains corps peut être transformée par irradiation et cela est mis en œuvre pour le traitement des matières plastiques ou pour provoquer des mutations artificielles chez des végétaux. Ainsi la *radiochimie*, ou chimie sous rayonnement est réalisée au moyen de radioéléments émetteurs γ (cobalt 60 ou césium 137) ou d'accélérateurs d'électrons. Il s'agit d'irradier des substances organiques avec des radiations dont l'énergie est suffisante pour provoquer la rupture de liaisons intermoléculaires sans toutefois détruire les noyaux : des *radicaux libres* peuvent être créés et être à l'origine de réactions chimiques importantes, soit en déclenchant des réactions en chaîne (halogénations, polymérisations), soit en modifiant les propriétés d'un haut polymère. L'intérêt de l'irradiation réside dans la souplesse du procédé, la facilité de contrôle du processus et la rapidité de la réaction. Citons quelques exemples :

— *Irradiation du polyéthylène :* pour améliorer sa résistance aux hautes températures (gainages électriques) ainsi que son comportement élastique, ou pour provoquer un véritable greffage radiochimique sur divers matériaux (emballages alimentaires).

— *Traitement des peintures, vernis, résines :* un polymère convenable est dissous dans un monomère (ce qui les « greffe » l'un sur l'autre) et le mélange est séché par irradiation. Cela fournit des laques dures sur divers revêtements utilisés dans le bâtiment ou en menuiserie.

— *Traitement des fibres textiles* pour améliorer la lavabilité, leur aptitude à être teinte, etc., sans détériorer les caractéristiques de la fibre.

— *Fabrication de matériaux imprégnés*, tels le bois imprégné irradié (B.I.I.), « alliage » de bois et de plastique dur, résistant à l'abrasion, ou le béton imprégné, plus résistant, plus élastique, moins corrosif (applications sous-marines). Ce champ d'application est très vaste et sans cesse agrandi.

7.3. Détection très sensible. — Les échantillons radioactifs peuvent facilement être détectés même à l'état de traces ou s'ils sont combinés avec d'autres corps ou avec leurs isotopes stables. Ils permettent de suivre le mouvement de corps dont l'observation visuelle n'est pas possible, de mesurer le débit d'un liquide dans une conduite, de connaître l'assimilation de telle ou telle substance dans la croissance d'un corps végétal ou de localiser tel élément dans le corps humain (V. t. 1, Aménagements hydroélectriques).

Cependant les effets des rayonnements nucléaires sur la matière et sur les tissus vivants peuvent avoir des influences néfastes : nous reviendrons sur les risques de certaines irradiations et sur les problèmes de protection à la fin du chapitre IV.

CHAPITRE III

ÉNERGIE NUCLÉAIRE DE FISSION ET DE FUSION

1. PROJECTILES DE BOMBARDEMENT

Dans les expériences de Rutherford ou dans celles de Joliot-Curie, les projectiles étaient des hélions et ils servaient en général à « bombarder » des noyaux légers, de numéro atomique inférieur à 20 : la charge électrique positive des noyaux plus lourds était trop forte et la plupart des particules α étaient repoussées. Le rendement était très faible.

Lorsque le *neutron* fut découvert il sembla possible de frapper n'importe quel noyau puisqu'il n'y avait pas de répulsion électrique. Vers 1930, beaucoup de chercheurs, et notamment Fermi, exposèrent de nombreux nucléides à des faisceaux de neutrons : les noyaux bombardés absorbaient généralement les neutrons puis émettaient des rayons α, β ou γ et se transformaient en isotopes différents ; ce fut le point de départ de la radiochimie.

Mais en 1932, les Anglais Cockroft et Walton eurent l'idée de soumettre les particules chargées à un champ accélérateur de 100 000 à 600 000 V/m. Cela permit d'atteindre des vitesses considérablement plus grandes, et le rendement des expériences augmenta. Depuis, un grand nombre de systèmes accélérateurs de particules ont été mis au point, en particulier, les accélérateurs de neutrons qui n'ont pas à vaincre les répulsions électriques.

2. RÔLE PRIVILÉGIÉ DES NEUTRONS

2.1. Sources de neutrons. — Comme nous l'avons vu, les neutrons sont des particules de masse voisine de celle du proton, beaucoup plus lourdes que l'électron, mais sans charge électrique : elles peuvent être éjectées lors de certaines réactions nucléaires et elles ne peuvent être obtenues autrement. Un mélange de polonium 210, radioactif α, et de béryllium, constitue une source commode de neutrons (V. chap. 1, § 4.2). Le polonium fournit les hélions nécessaires à la réaction symbolisée par l'équation suivante : $^{4}_{2}He + {}^{9}_{4}Be \longrightarrow {}^{12}_{6}C + {}^{1}_{0}n$.

C'est une réaction du même type que celle qui a permis la découverte de la radioactivité artificielle (chap. 2, § 1.3). Nous verrons plus loin que les neutrons sont obtenus essentiellement en mettant en œuvre le phénomène de fission.

2.2. Effets d'un neutron rencontrant un noyau

2.2.1. Le choc élastique. — Dans ce cas, le neutron rebondit sur le noyau et il n'y a pas de réaction nucléaire, mais le neutron se trouve dévié et ralenti. Cela est utilisé dans les réacteurs nucléaires.

2.2.2. La capture. — Il s'agit cette fois d'une véritable réaction nucléaire : le noyau absorbe le neutron, se trouve dans un état excité et émet soit un proton, soit une particule α (chap. 2, § 2.1), soit beaucoup plus souvent un photon γ. Dans ce dernier cas, le corps obtenu est un isotope du noyau rencontré ; c'est le cas notamment pour l'uranium 238 : $^{238}_{92}U + {}^{1}_{0}n \longrightarrow {}^{239}_{92}U^{*} + \gamma$

La capture dépend de la vitesse du neutron : elle est d'autant plus probable que le neutron est plus lent.

Dans certains cas, l'absorption d'un neutron par un noyau est suivie d'une émission β^- ; cela produit un atome dont la charge positive a été augmentée d'une unité et qui, par conséquent, appartient à la case suivante du tableau périodique des éléments. Ainsi Fermi, Nier, MacMillan et

d'autres bombardèrent de l'uranium par des neutrons et obtinrent les éléments « transuraniens » (plus lourds que l'uranium). Voici quelques-uns de ces éléments :

Neptunium	$^{237}_{93}Np$	Einsteinium	$^{254}_{99}Es$
Plutonium	$^{244}_{94}Pu$	Fermium	$^{255}_{100}Fm$
Américium	$^{243}_{95}Am$	Mendélévium	$^{256}_{101}Md$
Curium	$^{245}_{96}Cm$	Nobélium	$^{254}_{102}No$
Berkélium	$^{249}_{97}Bk$	Lawrencium	$^{257}_{103}Lr$
Californium	$^{249}_{98}Cf$	Kourchatovium	260

2.2.3. La fission. — C'est une réaction très importante mais beaucoup plus rare, que nous étudierons en détail (v. ci-après § 4) ; elle n'est facile qu'avec un seul nucléide naturel, l'uranium 235 : le noyau composé se casse en deux morceaux radioactifs ou non avec éjection de quelques neutrons (plusieurs cas peuvent se présenter).

3. LES ACCÉLÉRATEURS DE PARTICULES

Pour provoquer les transmutations, il faut bombarder les noyaux avec des « projectiles » (particules élémentaires) de grande énergie cinétique ; les chances de rencontre étant très faibles, il convient de lancer un nombre élevé de particules. Les noyaux ayant une charge électrique positive, il semble indiqué d'utiliser comme projectiles des électrons. Mais ceux-ci ont une masse très faible et, à vitesse égale, leur énergie cinétique est plus petite que celle des protons ou des hélions. C'est pourquoi il faut utiliser soit des électrons animés de vitesse très élevée, soit des protons, des hélions ou des deutons suffisamment accélérés pour vaincre la force de répulsion électrostatique. Ces particules acquièrent l'énergie cinétique désirée dans des accélérateurs de particules ; les plus anciens sont du type électrostatique, d'autres combinent une préaccélération statique suivie d'une accélération électromagnétique. Nous allons décrire quelques types d'accélérateurs pouvant communiquer aux particules accélérées des énergies allant de 10^5 à 10^9 eV.

3.1. L'accélérateur de Van de Graaf. — Cet accélérateur est formé d'un tube à décharge comportant à une extrémité une source de particules (protons, deutons ou neutrons) et à l'autre extrémité une cible sur laquelle va s'effectuer la transmutation. L'ensemble est soumis à une d.d.p. élevée grâce à un générateur de Van de Graaf ou un générateur à impulsions.

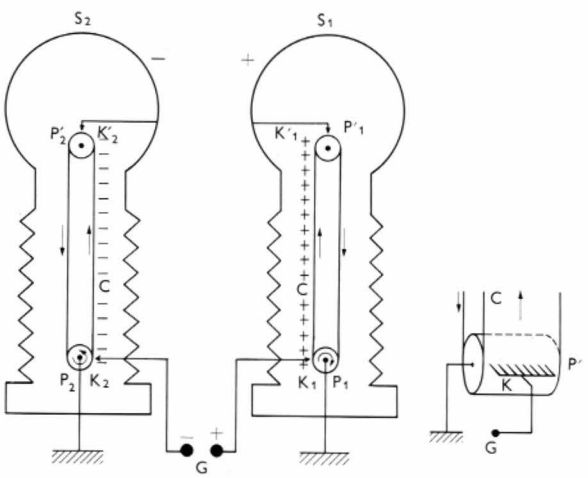


Fig. III-1 — Générateurs de Van de Graaf

Rappelons que dans un générateur de Van de Graaf (V. t. 1, Électricité, chap. 20 § 2) une sphère métallique, isolée du reste de l'appareil, est chargée progressivement par influence jusqu'à ce que son potentiel atteigne une valeur déterminée (qui peut être plusieurs millions de volts). Pour bien le comprendre, considérons la moitié droite de la figure III-1 puisqu'elle constitue à elle seule un générateur de Van de Graaf. La courroie C est entraînée par la poulie P_1 qui est accouplée à un moteur. Le peigne K_1 porté à un potentiel positif transmet des charges positives à cette courroie qui est en matière caoutchoutée isolante. Dans la sphère S_1, il se produit un phénomène d'influence du fait de la présence de charges positives sur C, et il apparaît des *charges négatives sur la surface interne de S_1 et des charges positives sur la surface externe*. Le peigne K'_1, solidaire de S_1, porte des charges négatives et, comme il est formé de pointes, il se produit simultanément la disparition des charges négatives de la surface interne de S_1 et celle des charges positives réparties sur la portion de courroie passant sous K'_1. Ce phénomène d'influence se produisant de manière continue, la charge portée par la surface externe de S_1 croît progressivement ainsi que le potentiel de cette sphère. Celui-ci peut atteindre 2 millions de volts. Pour obtenir des d.d.p. plus élevées, on peut associer deux générateurs identiques, l'un étant porté à un potentiel positif V_1 et l'autre à un potentiel négatif $-V_2$ (il suffit de relier le peigne inférieur K_2 au pôle négatif de G) ; la d.d.p. entre les deux sphères est alors égale à :

$$U = V_1 - (-V_2) = V_1 + V_2$$

Ainsi, si $V_1 = V_2 = 2$ *MV*, $U = 4$ *MV*. Le générateur G relié aux peignes K_1 et K_2 délivre une tension continue comprise souvent entre 10 kV et 20 kV. Les sphères utilisées au *laboratoire de Synthèse atomique d'Ivry* (Val-de-Marne) sont en cuivre : elles ont chacune 3 m de diamètre et leur hauteur est de 14 m. À l'*Institut de Technologie du Massachusetts*, Van de Graaf obtint des tensions de 5 millions de volts avec des sphères de 4,5 m de diamètre. Ce

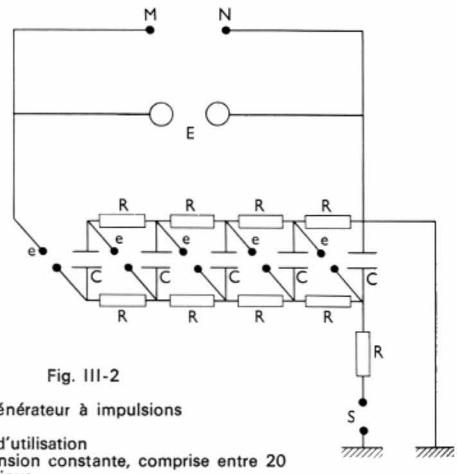


Fig. III-2

Générateur à impulsions
E : Éclateur
M, N : Bornes d'utilisation
S : Source à tension constante, comprise entre 20 et 150 kV continus

sont ces sphères qui sont placées aux deux extrémités du tube à décharge.

Le générateur de Van de Graaf peut être remplacé par un générateur d'impulsions électriques (fig. III-2). Celui-ci peut être formé par un assemblage de condensateurs C qui sont chargés lentement, en parallèle, à travers des résistances R. Une fois chargés, ils se déchargent à travers des éclateurs e et ils se trouvent alors disposés en série ; les tensions aux bornes de chacun d'eux s'additionnent et, pendant environ 1 microseconde, une tension très élevée (pouvant atteindre 10 millions de volts) est obtenue entre les points M et N qui sont reliés aux extrémités du tube à décharge employé dans l'accélérateur de particules.

3.2. Le cyclotron. — Dans cet accélérateur, les particules décrivent une spirale en partant du centre et en allant vers la paroi latérale ; ces particules peuvent être des protons obtenus en bombardant des atomes d'hydrogène à l'aide d'électrons.

Le cyclotron est constitué de deux enceintes voisines, les *dees* (fig. III-3) ; elles sont reliées à un générateur de haute fréquence fournissant une tension de 50 000 volts environ et de fréquence voisine de 1 mégahertz. Dans chaque cavité les protons décrivent des demi-cercles ; le rayon de ces trajectoires augmente à chaque passage d'une cavité à l'autre. En effet, lorsque des particules chargées (proton ou électron) pénètrent dans un champ magnétique constant $\vec{B}$, animées d'une vitesse constante $\vec{v_0}$ perpendiculaire à la direction de $\vec{B}$, elles décrivent des cercles de rayon proportionnel à v_0 (V. t. 1, Électronique, chap. 2).

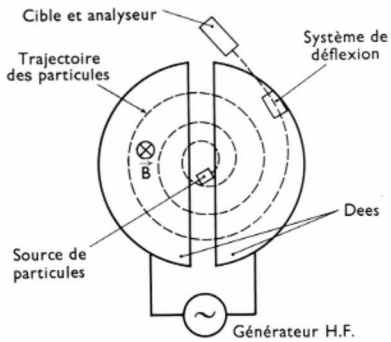


Fig. III-3
Principe du cyclotron

Après avoir décrit un demi-cercle, les particules traversent l'espace compris entre les deux cavités et elles se trouvent alors soumises à un champ électrique puisque les cavités sont portées à des potentiels différents. Les particules sont accélérées (le champ électrique a la direction qui convient) : elles pénètrent dans la cavité suivante animée d'une vitesse plus grande et décrivent un demi-cercle mais de rayon plus grand que le précédent. Elles traversent alors de nouveau l'espace intercavité et sont encore accélérées car la d.d.p. appliquée aux cavités étant alternative et de fréquence convenable, le champ électrique a alors changé de sens. Ainsi ces protons tournent et, étant accélérés, à chaque demi-tour ils se rapprochent de la paroi latérale ; ainsi ils atteignent progressivement la fenêtre de sortie. En face de celle-ci se trouve l'élément à irradier. Les cyclotrons de ce type permettent d'obtenir des énergies d'environ 7,5 MeV pour les protons, 15 MeV pour les deutons, 30 MeV pour les particules α. Pour atteindre des énergies plus élevées, le cyclotron ne convient pas. D'un point de vue théorique il est nécessaire de tenir compte de l'accroissement de la masse, dû à l'augmentation de la vitesse. En effet, aux grandes vitesses la masse d'une particule ne doit plus être considérée comme constante ; sa valeur est alors donnée par la relation : $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c_0^2}}}$ (en désignant la vitesse de la particule par v et celle de la lumière par $c_0 = 3.10^8$ m/s). Cela conduit à utiliser un oscillateur de fréquence fixe, mais modulé en fréquence. C'est ce qui est réalisé pour le *synchrocyclotron* qui permet d'atteindre des énergies de 400 MeV pour les protons, de 200 MeV pour les deutérons et de 400 MeV pour les particules α.

Dans ce modèle d'accélérateur, la fréquence de la tension d'accélération est ajustée sur la fréquence de révolution des particules, car celle-ci décroît au fur et à mesure que la masse des particules augmente. Cette réduction progressive de la fréquence ne permet pas d'accélérer un flux continu de particules mais seulement des groupes de particules, selon des cycles qui peuvent être reproduits 300 fois par seconde.

Fig. III-4 — Synchrotron à protons du C.E.R.N. Ensemble de l'inflecteur. Le faisceau sortant de l'accélérateur linéaire, au fond à droite, rejoint la chambre à vide du synchrotron dans le déflecteur électrostatique situé au tout premier plan *(C.E.R.N.)*

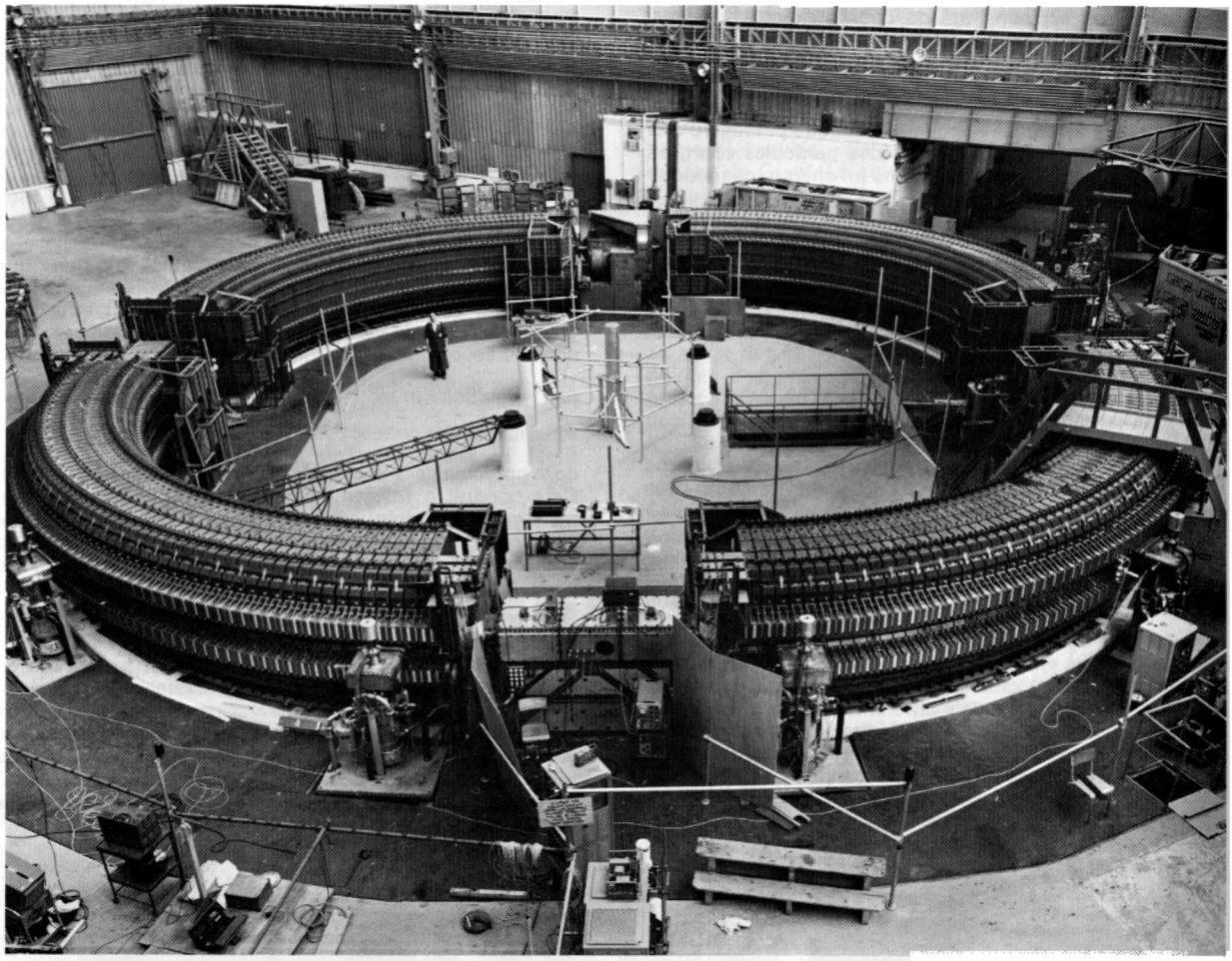


Fig. III-5 — Synchrotron à protons « Saturne » du Centre d'études nucléaires de Saclay avant mise en place de la protection de béton
(*Jean-Pierre Sudre*)

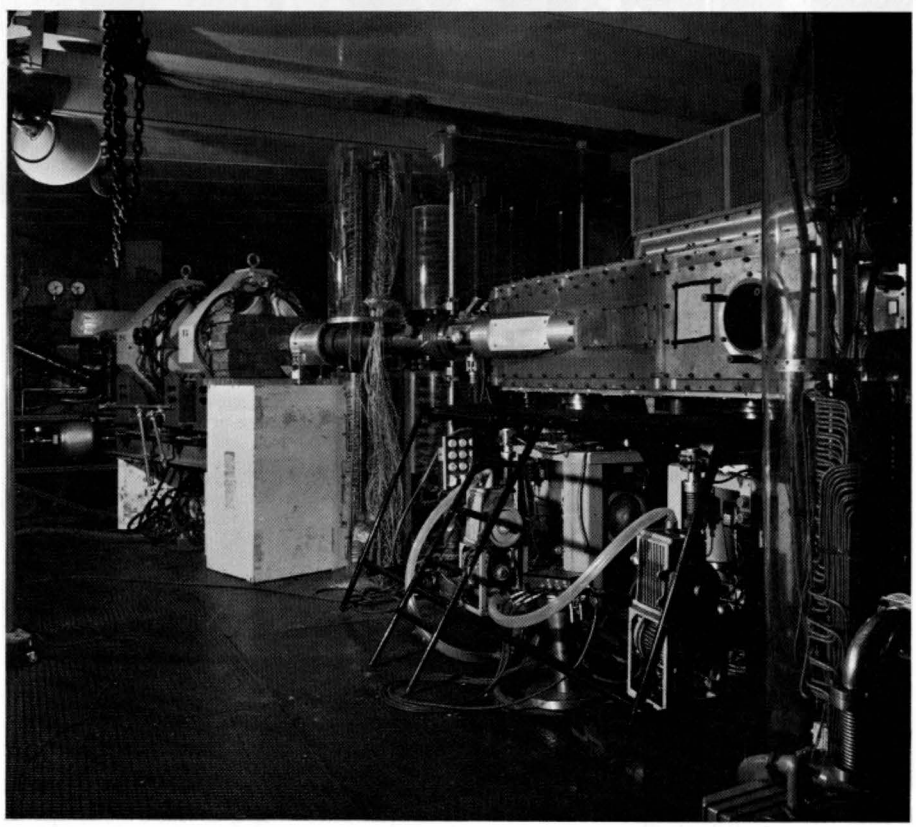
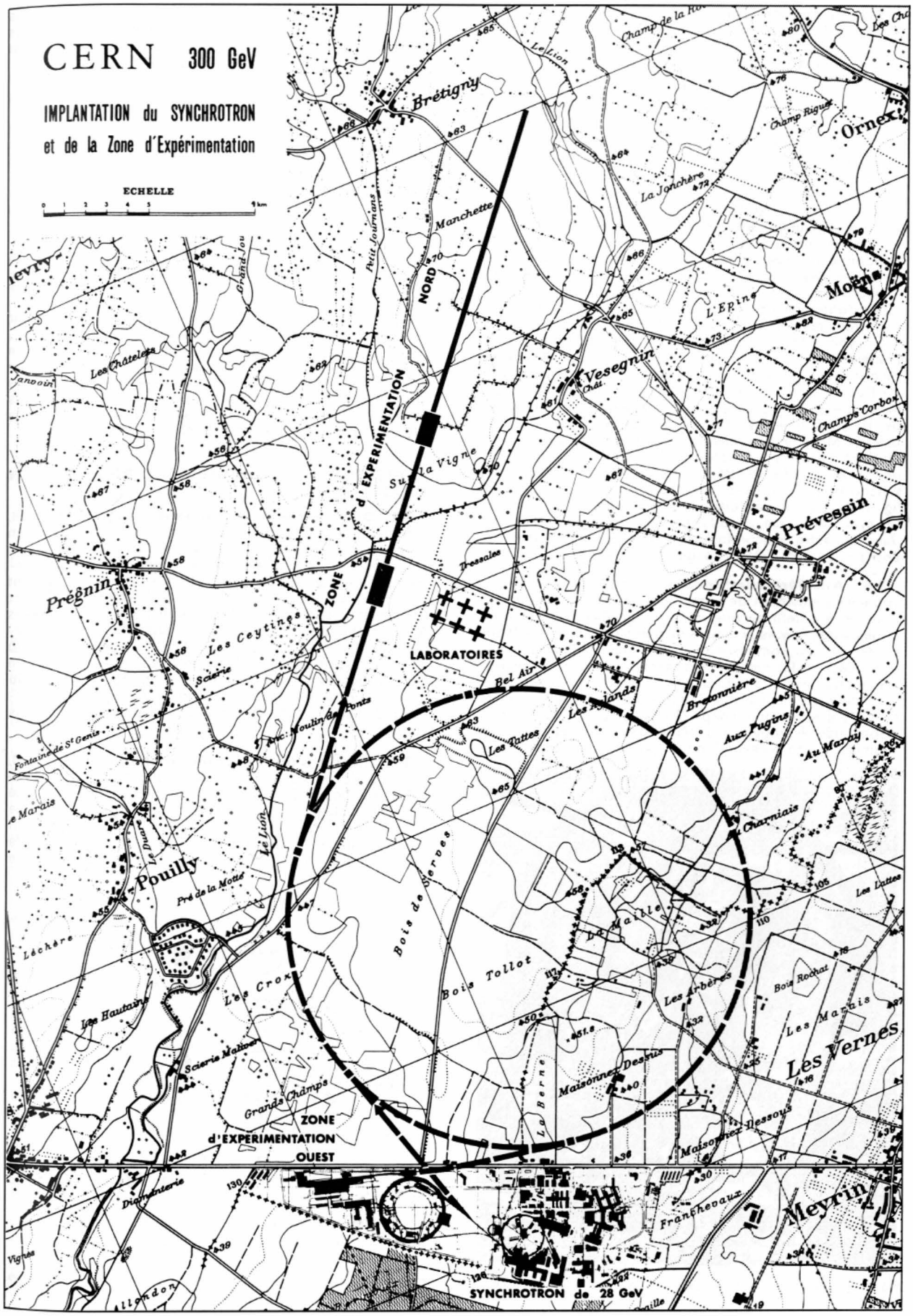


Fig. III-6 — Saturne : Sortie du faisceau de particules secondaires à partir d'une cible
(*Pierre Jahan*)


CERN 300 GeV
IMPLANTATION du SYNCHROTRON
et de la Zone d'Expérimentation
ECHELLE
0 1 2 3 4 5 1 km
Brétigny
Ornex
Moëns
Vesegnin
Prévessin
Prégnin
Pouilly
Meyrin
Les Vernes
Manchette
La Jonchère
L'Epine
Champs Corbon
Sur la Vigne
Tressales
Les Ceytines
Scierie
Bel Air
Les Tattes
Bretonnière
Aux Pugins
Au Marais
Charniais
Bois de Serves
Bois Tollot
La Maille
Les Arbères
Bois Rochat
Les Marais
Maisonnex Dessus
Maisonnex Dessous
Franchevaux
Les Hautains
Les Croix
Grands Champs
Pré de la Motte
Léchère
Le Marais
Fontaine de St Genis
Les Châtelets
Janvoin
Le Lion
Petit Journans
Grand Jou
Champ de la Ro
Champ Riguet
Les Cha
Le Duare
Diamanterie
Vignes
Allondon
ZONE d'EXPERIMENTATION NORD
ZONE d'EXPERIMENTATION OUEST
LABORATOIRES
SYNCHROTRON de 28 GeV

3.3. Le synchrotron. — Cet appareil permet d'obtenir des accélérations très importantes : le champ magnétique croît par palier et les particules décrivent une orbite de rayon presque constant. Les trajectoires sont donc des cercles et non plus des spirales comme dans le cyclotron, ainsi la partie centrale de l'aimant peut être éliminée. Le synchrotron se présente sous la forme d'un tore où règne le vide, placé entre les pôles d'un électroaimant annulaire ; un groupe de particules est injecté, tangentiellement à la ligne moyenne du tore, et un champ électromagnétique de haute fréquence les accélère à chaque tour lorsqu'elles franchissent la région où règne le champ. Lorsque les particules ont atteint l'énergie maximale, elles sont déviées et elles sont utilisées pour bombarder une cible.

Le synchrotron à protons de Brookhaven (N.Y.) a été dénommé *cosmotron* et celui de Berkeley (Californie), *bévatron*. Ces deux appareils sont essentiellement destinés à l'étude des phénomènes qui se produisent avec des particules de grande énergie (3 à 6 GeV) et leurs dimensions sont très imposantes (1 GeV = 10^9 eV).

Le synchrotron Saturne de Saclay permet d'atteindre des énergies de 3 GeV (fig. III-5 et III-6), grâce à un champ magnétique de 1,4 tesla. En U.R.S.S., le *synchrophasotron* de Dubna, de 70 m de diamètre et 5 m de hauteur, d'une masse de 35 000 t, permet de communiquer des énergies de 10 GeV, et le synchrotron à protons de Serpoukhov, près de Moscou, des énergies de 70 GeV. Au *Brookhaven National Laboratory* à Upton (N.Y.) et au *Centre Européen de la Recherche Nucléaire* (C.E.R.N.) à Genève, des synchrotrons fournissent des particules de 30 GeV (V. fig. III-4). Un autre accélérateur, prévu pour 1974, utiliserait un synchrotron de 25 GeV pour l'injection de particules dans un autre synchrotron à protons pour atteindre des énergies de 300 GeV (V. page précédente).

3.4. Accélérateurs linéaires (fig. III-9 et 10). — Ces appareils permettent de communiquer des énergies beaucoup mieux définies que dans les accélérateurs magnétiques, à des faisceaux denses de particules lancées en ligne droite. Ils sont composés d'un tube très long dans lequel se succèdent des cavités résonnantes : un champ électromagnétique est entretenu dans ces cavités au moyen d'un oscillateur déclenchant des impulsions en hyperfréquence (V. t. 1, Électronique, chap. 21). Ainsi, le champ électromagnétique se propage à la même vitesse que les particules soumises à une accélération constante dans le tube. Cette synchronisation impose l'utilisation de cavités ayant une longueur croissante : la distance traversée par les particules entre les intervalles d'accélération augmente ainsi au fur et à mesure que la vitesse des particules croît.

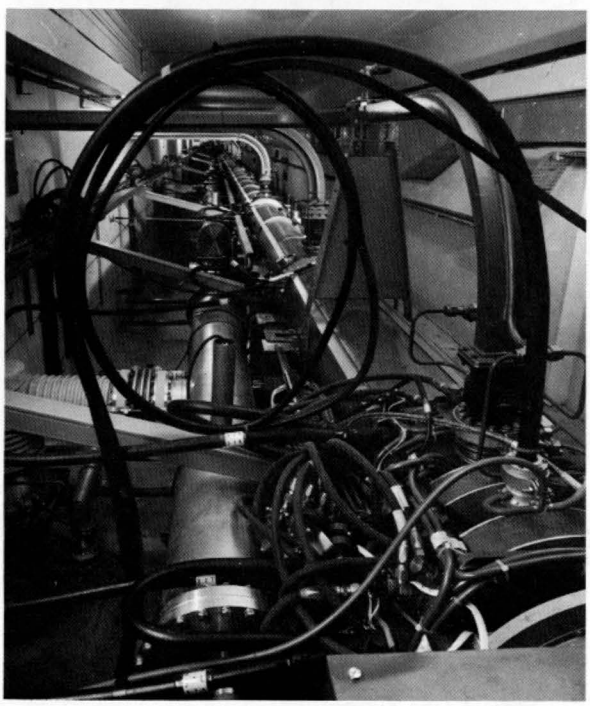


Fig. III-7 — Accélérateur linéaire de Saclay ; à droite, la tête de l'accélérateur (*Pierre Jahan*)

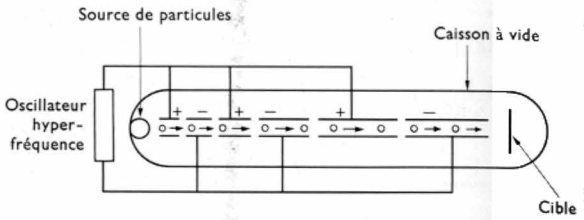


Fig. III-8 — Schéma d'un accélérateur linéaire. Pendant chaque demi-cycle, les cavités adjacentes sont portées à des potentiels électriques de signe contraire pour maintenir rectilignes les trajectoires des particules

Les accélérateurs linéaires sont utilisés aussi bien pour la recherche que comme étages de pré-accélération et d'injection pour les grands synchrotrons. Un accélérateur de Saclay mesure 180 m de long et permet d'obtenir une énergie de 600 MeV, mais il a été possible de prévoir des énergies de 20 GeV (20 milliards d'électronvolts) dans un accélérateur de 3 km de long construit à l'université de Stanford (États-Unis d'Amérique).

4. FISSION DE L'URANIUM ET RÉACTION EN CHAÎNE

4.1. Découverte du phénomène. — De 1935 à 1938, l'étude des divers nucléides créés en bombardant l'uranium avec des neutrons est entreprise ; elle est difficile car les chercheurs croient obtenir des isotopes de plusieurs éléments transuraniens ($Z > 92$) dont les propriétés ne sont pas connues. Successivement, les Allemands Hahn et Strassmann, les Français Joliot-Curie et Savitch, les Danois Metiner et Frisch, vérifient que les produits du bombardement étudié ne sont que des produits de rupture du noyau d'uranium. L'importance de cette découverte est capitale car ces savants constatent que cette rupture, ou *fission*, du noyau d'uranium s'accompagne d'un très grand dégagement d'énergie et de la libération de plusieurs neutrons libres.

4.2. Intérêt d'une réaction en chaîne. — En 1940, Joliot-Curie, Halban et Kowarski expliquèrent que chaque neutron « secondaire » (c'est-à-dire obtenu à la suite d'une réaction nucléaire), s'il était ralenti de manière appropriée par un *modérateur*, pouvait occasionner la division d'un nouveau noyau et libérer plus d'énergie et davantage de neutrons (fig. III-9). Le modérateur est nécessaire parce

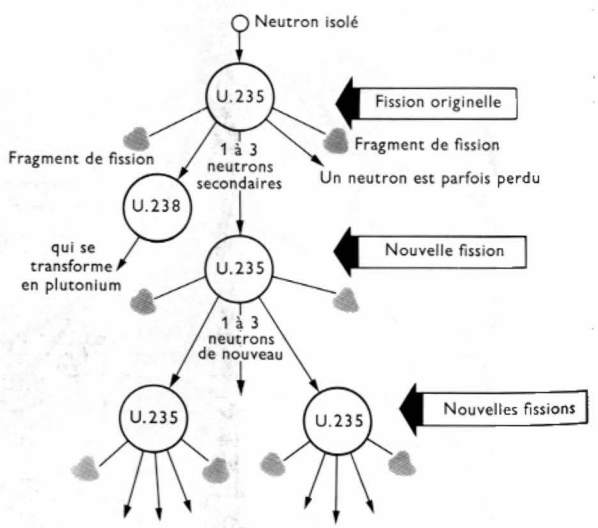


Fig. III-9 — Réaction en chaîne résultant de la fission d'atomes d'uranium 235

que les neutrons rapides et nouvellement libérés sont trop aisément absorbés par les noyaux d'uranium 238 qui se rompent rarement.

C'est ce qui est mis en œuvre dans les piles ou réacteurs nucléaires dans lesquels le modérateur est *l'eau lourde* ou le graphite, par exemple (V. ci-après).

Pour que la réaction en chaîne puisse se produire, il faut rassembler assez d'uranium pour que les neutrons libérés rencontrent des noyaux d'uranium 235 avant de s'échapper de la pile : la quantité de matière fissile requise est appelée « masse critique » ; elle fut déterminée par Francis Perrin qui étudia le libre parcours d'un neutron dans une masse d'oxyde d'uranium.

4.3. Premières réalisations dues à l'énergie nucléaire. — Fermi construisit la première pile nucléaire qui entra spontanément en fonctionnement le 2 décembre 1942 ; cette pile fournit une puissance de 0,5 W le premier jour et 200 W le dixième jour. L'expérience acquise permit de réaliser une seconde pile pour la production du plutonium. Cette pile fonctionna en novembre 1943 en donnant 1800 W.

Par ailleurs, la séparation isotopique de l'uranium 235 et la production de plutonium 239 furent entreprises : d'énormes réacteurs permirent d'obtenir ces deux nucléides fissiles en quantités importantes. En outre, un laboratoire spécial fut construit à *Los Alamos*, dans le désert du Nouveau-Mexique, pour y étudier tout spécialement la « bombe atomique » dont un premier modèle fut expérimenté en secret le 16 juillet 1945 tandis que deux autres furent utilisés les 6 et 9 août 1945 pour détruire Hiroshima et Nagasaki, provoquant des centaines de milliers de morts.

5. LE RÉACTEUR NUCLÉAIRE

5.1. Principe

5.1.1. Rôle de l'uranium 235. — L'uranium naturel est un mélange d'isotopes : le plus abondant est l'uranium 238, puis vient l'uranium 235 qui est 140 fois moins répandu, et ensuite l'uranium 234, connu à l'état de traces. Au cours de la fission du noyau d'uranium 235 par un neutron d'énergie convenable, il y a production de noyaux d'éléments qui tendent vers un état plus stable, émission de corpuscules élémentaires (photons, électrons et neutrons) et production d'une grande énergie sous une forme essentiellement thermique. Un atome d'uranium 235 peut fournir une énergie d'environ 200 MeV, ce qui représente une énergie de 20 000 kWh pour un gramme d'uranium, soit l'équivalent de la combustion de plus de deux tonnes et demie de charbon.

L'uranium 235 se rencontre dans la nature, et des neutrons libres, provenant de l'action des rayons cosmiques ou de la radioactivité naturelle, peuvent déclencher des phénomènes de fissions naturelles ; cependant les impuretés naturelles absorbent facilement les neutrons et toute réaction en chaîne est vite arrêtée. En réalité, pour éviter cet arrêt de la réaction, il faut que la concentration en uranium 235 dans le combustible nucléaire soit suffisamment grande ; l'accroissement de concentration du minerai naturel est réalisé dans des usines de *séparation isotopique*. L'*uranium enrichi* est obtenu à partir des sels d'uranium naturels ou de l'oxyde d'uranium UO_2. Dès que la concentration en noyaux fissiles est supérieure à 10 % il peut se produire des réactions en chaîne.

Le procédé le plus employé pour purifier de l'uranium naturel et l'enrichir en uranium 235 est le procédé de *diffusion gazeuse*. L'uranium 238 est combiné à l'uranium 235 dans un sel, l'hexafluorure d'uranium ; ce sel est à l'état gazeux et il est comprimé contre une paroi poreuse percée de millions de trous extrêmement petits (5.10^{-8} m) : l'uranium 235 plus léger rebondit plus souvent sur la paroi, et il a plus de chance de la traverser.

5.1.2. Action des neutrons sur l'uranium. — Les effets sont différents suivant la vitesse ou, ce qui revient au même, suivant l'énergie de ces neutrons. Avec les neutrons *lents*, il y a fission de l'uranium 235 et l'uranium 238 est inaltéré ; avec des neutrons *rapides*, il y a fission des deux uraniums mais avec une faible probabilité ; enfin avec les neutrons de vitesse intermédiaire, il peut se produire une transmutation de l'uranium 238 en un nouvel élément, le neptunium $\left(^{239}_{93}\mathrm{Np}\right)$ qui, étant radioactif, se transforme en plutonium $\left(^{239}_{94}\mathrm{Pu}\right)$ susceptible de subir une fission avec des neutrons lents ou rapides.

5.1.3. Le coefficient de multiplication *k*. — Lorsque la réaction en chaîne est déclenchée, les neutrons secondaires peuvent provoquer de *nouvelles fissions* ou être *capturés* par les noyaux non fissiles ou sortir du réacteur. Autrement dit, la réaction amorcée peut s'emballer, s'entretenir ou décroître.

Il est possible de connaître très exactement les probabilités de fission et de déterminer le coefficient de multiplication k de l'ensemble : c'est le facteur par lequel se trouve multiplié le nombre de fissions d'une génération à la suivante. Si $k = 1$, le réacteur est *critique;* si $k < 1$, il est *sous-critique;* si $k > 1$, il est *sur-critique*. Un dispositif de réglage du facteur de multiplication est inséré dans le réacteur.

5.2. Description du réacteur (fig. III-10). — C'est un dispositif contenant un nucléide fissile et conçu de manière à entretenir et à contrôler une réaction en chaîne.

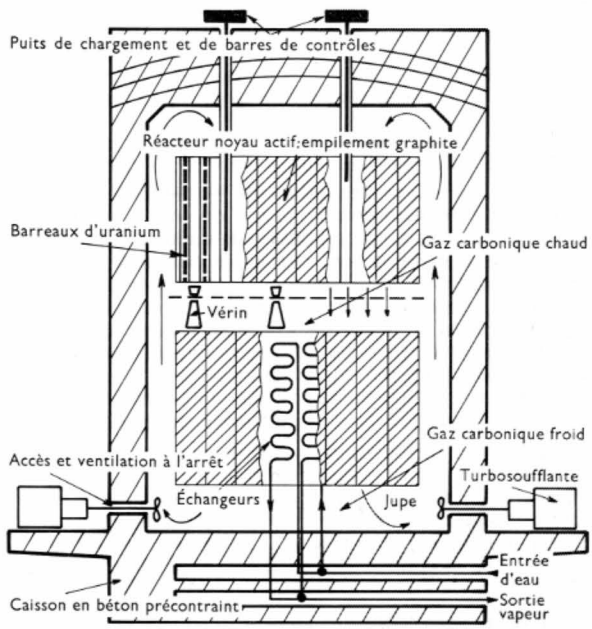


Fig. III-10 — Schéma d'un réacteur nucléaire

Le combustible nucléaire est soumis au bombardement des neutrons souvent très ralentis, soit parce que des neutrons thermiques sont désirés, soit pour permettre un déroulement correct et contrôlé des réactions (fig. III-13). Rappelons que les neutrons thermiques, ou lents, sont des neutrons dont la vitesse est la plus faible possible ; c'est celle qui correspond à l'agitation thermique liée à la température de l'uranium.

5.2.1. Les modérateurs de vitesse. — Ce sont des corps placés entre les barreaux d'uranium pour absorber l'énergie trop élevée des neutrons de fission. Les noyaux des atomes de ces corps doivent avoir une masse légèrement supérieure à celle des neutrons afin que ceux-ci perdent leur énergie tout en conservant cependant une vitesse suffisante. En outre, ils doivent être dépourvus d'impuretés pour ne pas absorber les neutrons : l'eau, l'eau lourde, le graphite ou l'oxyde de béryllium sont couramment employés. Pratiquement, l'uranium ou son oxyde, ou le combustible en général, sont le plus souvent en forme de *barres* ou de plaques enfermées dans des *gaines étanches* en magnésium ou en alliage magnésium-zirconium qui

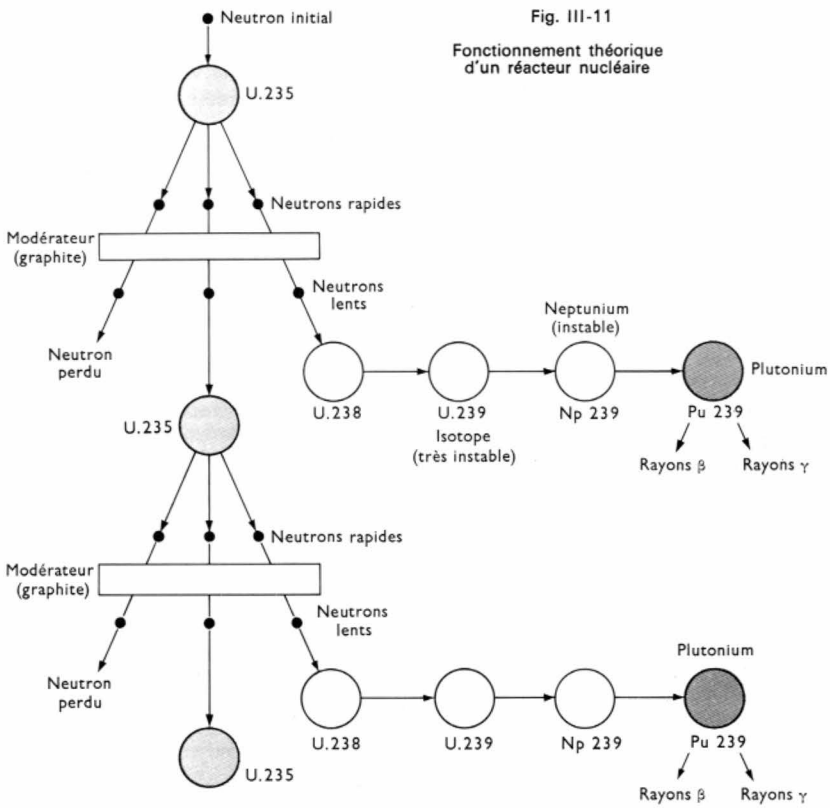


Fig. III-11

Fonctionnement théorique d'un réacteur nucléaire

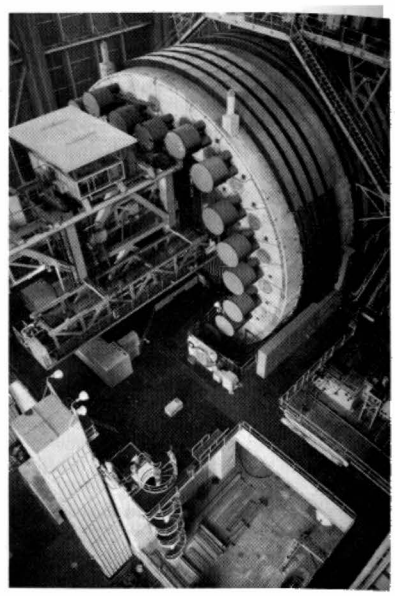


Fig. III-12 — Réacteur à uranium naturel-graphite G_2 à Marcoule. (*Pierre Jahan—C.E.A.*)

protègent l'uranium des effets de l'oxydation extérieure sans arrêter les neutrons. En outre, comme parmi les éléments de fission (qui prennent naissance dans la masse du combustible) certains sont gazeux et radioactifs, la gaine évite que ces produits ne se répandent dans le réacteur (en particulier dans le fluide réfrigérant). Ces gaines sont plongées dans un bac contenant de l'eau lourde ou du graphite ou entourées d'un autre modérateur; un système de *refroidissement* par gaz ou liquide (gaz carbonique par exemple) est mis en œuvre pour refroidir la pile; la chaleur produite est utilisée dans des échangeurs de chaleur.

5.2.2. Les réflecteurs. — Sur la quantité de neutrons produits par fission, un certain nombre s'échappent vers l'extérieur et ne sont plus d'aucune utilité; aussi des surfaces « réfléchissantes » (ou *réflecteurs de neutrons*) en graphite ou en uranium sont-elles placées autour de la pile afin de réduire la perte et d'accroître le facteur de multiplication k.

5.2.3. Le contrôle. — Le réglage du facteur de multiplication k s'effectue en introduisant dans le réacteur un corps avide de neutrons; en général, ce sont des *barres* de cadmium ou d'acier au bore dont l'enfoncement est réglé à l'aide de servomécanismes: ce sont les *barres de contrôle*.

5.3. Fonctionnement. — Le démarrage d'une pile s'effectue sans qu'il y ait forcément une source de neutrons; il suffit en effet qu'un neutron extérieur provoque la première fission ou qu'il y ait une fission spontanée, pour que le système entre en fonctionnement.

Toute l'énergie libérée au cours des fissions étant transformée en chaleur, la puissance utilisable dépend du système de refroidissement, ce dernier conditionnant le nombre de noyaux détruits par seconde.

En cas d'accident grave mettant le système ralentisseur hors d'état de fonctionner, la réaction ne devient jamais explosive : il y a évaporation de l'eau lourde et les neutrons reprenant de la vitesse, le nombre de fissions possibles diminue très vite; il en est de même avec le graphite qui est détruit par la chaleur.

Après un certain temps de fonctionnement, il apparaît des impuretés dans l'uranium 235, mais comme l'uranium 238 se transforme en plutonium aisément fissile, la pile peut être *autorégénératrice*. Cela impose que la production de matière fissile compense la consommation : le réacteur doit libérer assez de neutrons rapides pour que la réaction en chaîne continue et que l'uranium 238 soit transformé. (V. t. 1, Centrales nucléaires, chap. 7.)

En cours de fonctionnement, les piles émettent des produits radioactifs qui peuvent être dangereux, surtout dans le cas où ils sont gazeux. Le rôle des réflecteurs a été vu ci-dessus; de plus, toute la pile est noyée dans un bloc de béton étanche d'au moins un mètre d'épaisseur. Toutes les manœuvres se font par télécommandes, avec de nombreux détecteurs de contrôle placés dans le béton et à l'extérieur, indiquant constamment l'importance du rayonnement.

5.4. Divers réacteurs. — Différents types d'appareils peuvent être distingués en fonction des matériaux qui les composent et de leur utilisation.

5.4.1. Réacteurs à uranium naturel. — Ce type de réacteur utilise l'uranium naturel tel qu'on le trouve sans en séparer l'uranium 235. L'uranium naturel contient environ 0,7 % d'uranium 235, qui peut toujours subir une fission quelle que soit l'énergie des neutrons interceptés. L'autre partie, de l'uranium 238, bombardée par des neutrons, ne subit pas de fission mais il se produit successivement les réactions suivantes :

$$^{238}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \longrightarrow {}^{239}_{92}\mathrm{U}^{*}$$

$$^{239}_{92}\mathrm{U}^{*} \longrightarrow {}^{239}_{93}\mathrm{Np}^{*} + e^{-}$$

$$^{239}_{93}\mathrm{Np}^{*} \longrightarrow {}^{239}_{94}\mathrm{Pu} + e^{-}.$$

Ces réactions sont utilisées dans les usines de Marcoule et de La Hague pour fabriquer le plutonium 239 en quantités suffisantes. Divers cas sont alors à considérer :

1° *Le réacteur convertisseur.* — Le plutonium constitue le deuxième élément de la masse initiale de combustible et il peut subir une fission qui libère de 2 à 3 neutrons. Le bilan neutronique d'un tel réacteur montre que pour un

atome détruit, il y a au mieux 0,8 atome de plutonium produit ; ce type de réacteur plutonigène est appelé *réacteur convertisseur*.

Dans les piles de ce type, dont la plus ancienne est celle de Hanford (1944), la chaleur produite n'était pas utilisée ; elles ont permis d'effectuer de nombreuses recherches.

Ainsi en était-il de ZOÉ (puissance Zéro-Oxyde d'uranium pour combustible), premier réacteur français ayant divergé en décembre 1948.

Pour passer de ces piles expérimentales à un réacteur convertisseur producteur d'énergie industrielle, c'est-à-dire à un réacteur de puissance, il faut que la température du liquide réfrigérant puisse atteindre des valeurs suffisamment grandes (au moins 300 °C) ; les matériaux de construction de la pile doivent être modifiés en tenant compte de ces conditions de fonctionnement. Ainsi, en 1953 ZOÉ fut dotée d'un système de refroidissement et devint EL_1 (eau lourde) ; d'une puissance de 150 kW, elle fut utilisée dans des expériences de bombardement neutronique. De telles piles sont d'ailleurs dites « à double fonction » car elles produisent de l'énergie thermique, d'une part, et du plutonium, d'autre part, mais leur puissance est limitée.

2° *Le réacteur de puissance à neutrons lents.* — Dans ce réacteur dit à *simple fonction*, le plutonium n'est pas récupéré et seulement une faible partie des possibilités potentielles de l'uranium est utilisée. Nous distinguerons deux cas :

a) *Le réacteur à uranium naturel-graphite* dont le fluide de refroidissement peut être de l'azote comprimé (pile de Saclay), du gaz carbonique (G_2, G_3 à Marcoule, 200 MW ; Chinon 1, 2 et 3, de 70 à 480 MW ; à Saint-Laurent-des-Eaux, 1 500 MW) ou de l'hélium. Pour que le rendement d'un tel réacteur soit optimal, il faut utiliser une masse d'uranium au moins égale à 200 tonnes pour environ 1 500 tonnes de graphite. Le gainage est obligatoirement effectué avec du magnésium qui absorbe peu les neutrons. Compte tenu des résistances mécaniques des matériaux, il faut limiter la température : le magnésium qui est en contact avec le fluide de refroidissement ne supporte pas une température supérieure à 400 °C. Les gaz sortant au maximum à cette température ne peuvent alimenter une turbine à gaz (à cette température le rendement serait trop faible. V. t. 1 Centrales nucléaires, chap. 3), et ils servent seulement à chauffer de l'eau vers 350 °C. Les rendements sont faibles : un chargement de 200 tonnes d'uranium ne permet d'obtenir qu'une puissance électrique de 50 MW pour une puissance calorifique de 200 MW ;

b) *Le réacteur à uranium naturel-eau lourde*, pouvant admettre tous les procédés de refroidissement, en particulier l'eau ordinaire, ou surtout le gaz carbonique (EL_2 à Saclay, 3 MW ; EL_4 à Brennilis, 70 MW). Cependant le volume de ces réacteurs est très important et l'eau lourde est fort coûteuse.

5.4.2. Réacteurs à uranium enrichi. — Ces réacteurs utilisent soit l'uranium naturel enrichi en uranium 235, soit un mélange d'uranium et de plutonium. L'uranium est souvent employé sous forme d'oxyde d'uranium UO_2 qui est très stable. Le bilan neutronique est alors nettement supérieur à celui obtenu avec l'uranium naturel. Les qualités des matériaux employés ont moins d'importance : ainsi le gainage des barres de matériau radioactif est en acier ou en zirconium. Ces matériaux absorbent beaucoup plus de neutrons que le magnésium mais, en contrepartie, ils permettent de meilleurs échanges thermiques : dans tous les cas, ainsi ils rendent possible l'abandon d'un gaz comme réfrigérant et son remplacement par de l'eau ou même par des liquides organiques. En outre, le choix du modérateur est moins limité : il peut être l'eau naturelle, l'eau lourde, le béryllium ou le graphite.

L'intérêt de tels réacteurs réside d'abord dans leur volume qui peut être relativement réduit, puis dans les températures qui peuvent y être atteintes. Ils permettent de porter un fluide de refroidissement (le plus souvent l'eau naturelle) à des températures très élevées, et ainsi d'augmenter puissances et rendements. Lorsque l'eau est utilisée à la fois comme modérateur et comme réfrigérant, il est nécessaire de maintenir le réacteur et le circuit de refroidissement sous de fortes pressions : l'eau peut alors atteindre des températures élevées sans bouillir, et cela améliore les échanges thermiques. Un grand nombre de piles « piscines » furent construites en vue de recherches variées (en France : *Triton*, *Minerve*, *Alizé*, *Mélusine*, *Siloé*). Ce sont des réacteurs expérimentaux : les barreaux de combustible (uranium enrichi) sont immergés dans un bassin d'eau qui sert à la fois de modérateur, de réfrigérant et d'écran protecteur, à la place du béton.

Le réacteur à uranium enrichi est particulièrement intéressant dans les engins mobiles, navires ou sous-marins (sous-marin Nautilus, brise-glace Lénine, paquebot Savannah), satellites ou véhicules spatiaux.

5.4.3. Réacteur à combustion, dit « surgénérateur ». — À l'inverse des réacteurs à neutrons lents que nous avons évoqués jusqu'ici, les réacteurs à *neutrons rapides* ont comme particularité d'utiliser les neutrons directement émis par la fission ; ces réacteurs n'utilisent donc pas de modérateur. Le liquide caloporteur est en général du *sodium fondu*. Le combustible est encore de la matière fissile très pure (uranium 235) mais la pile renferme aussi de l'uranium 238 ; soumis au bombardement des neutrons, il fournit du plutonium fissile. Il peut alors se former plus d'atomes fissiles qu'il n'en est perdu, ce qui justifie l'appellation de *pile couveuse* ou *surgénérateur*.

Le premier réacteur de ce type, *Clémentine*, a été mis en service à Los Alamos en 1946. Les Américains construisirent ensuite plusieurs réacteurs expérimentaux, bientôt suivis par les Britanniques et les Russes. En France, *Rapsodie* fonctionne de façon très satisfaisante depuis janvier 1967.

L'intérêt des surgénérateurs est l'augmentation progressive des disponibilités en plutonium ; il peut alors être utilisé, soit comme matière fissile pour les nouvelles piles couveuses, soit comme combustible très enrichi. Ces réacteurs apparaissent dès maintenant comme les sources d'énergie nucléaire de l'avenir.

5.5. Application des réacteurs. — Ce sont avant tout d'importants *générateurs de neutrons* destinés aux recherches de physique expérimentale. Ils servent, d'autre part, à fabriquer des *radionucléides artificiels*, qui peuvent économiquement remplacer le radium ; un choix judicieux permet de réaliser des radionucléides ayant la durée de vie désirée pour une application biologique, chimique ou métallurgique déterminée : il s'agit d'utiliser soit le pouvoir destructeur (stérilisation industrielle d'aliments, traitement du cancer), soit la possibilité d'opérer des mutations (création de nouvelles espèces végétales), soit la faculté de pouvoir repérer et doser facilement des corps rendus radioactifs (dosage chimique ou métallurgique par radioactivation).

Les réacteurs à uranium naturel sont plutonigènes : le *plutonium* est extrait du combustible à la sortie du réacteur par une séparation chimique très complexe, car tous les produits de fission, dangereusement radioactifs, sont présents.

Les grandes centrales nucléaires destinées à la *production de l'électricité* récupèrent la chaleur dégagée dans les réacteurs (V. t. 1, Centrales nucléaires).

Il faut également rappeler qu'un réacteur peut être un *propulseur* idéal, fonctionnant comme source de puissance de longue durée, sans nécessiter de réapprovisionnement en uranium et sans consommer d'oxygène comme les combustions classiques.

6. L'ÉNERGIE THERMONUCLÉAIRE DE FUSION

Les réactions thermonucléaires concernent des noyaux très légers (tirés des éléments dont la masse atomique est inférieure à 20) qui s'agglomèrent ou *fusionnent* à des températures extrêmement grandes, avec un dégagement d'énergie du même ordre de grandeur que celles obtenues au cours d'une fission.

Ce phénomène se produit spontanément dans le soleil à la température de 20 millions de kelvins ; à cette température des noyaux d'hydrogène lourd, comme les deutons $D = {}^{2}_{1}H$ (noyaux de deutérium) ou les tritons $T = {}^{3}_{1}H$

(noyaux de tritium instable), peuvent subir des réactions de fusion provoquée et donner des noyaux d'hélium avec des énergies considérables dues aux pertes de masse (V. chap. 1, § 4.5). Citons quelques exemples de réactions :

$$D + D \longrightarrow {}^{3}_{2}He + {}^{1}_{0}n + 3{,}3\ MeV$$

$$D + T \longrightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{1}_{0}n + 17\ MeV$$

$$D + D \longrightarrow T + {}^{1}_{1}H + 4\ MeV$$

Ces énergies sont suffisantes pour être thermiquement utilisables et l'intérêt de ces réactions réside dans le fait qu'il existe d'énormes réserves d'isotopes de l'hydrogène dans l'eau des océans. Les recherches se poursuivent en vue de maîtriser et de contrôler les conditions de cette fusion.

6.1. Les recherches sur la fusion contrôlée. — Il s'agit de trouver le meilleur moyen d'obtenir et de conserver en laboratoire des gaz ionisés (*plasmas*) à très haute température et d'effectuer les études théoriques nécessaires à ces recherches (en électromagnétisme, en mécanique statistique, en mécanique des fluides), en particulier sur les *instabilités* qui peuvent s'opposer au confinement d'un plasma dans un champ magnétique.

6.2. Création et conservation du plasma. — Pour obtenir des réactions de fusion entre des noyaux (tels que des deutons D et des tritons T), il faut tout d'abord vaincre les forces de répulsion électrostatique et rapprocher ces noyaux afin qu'ils soient soumis à des interactions nucléaires importantes ; ensuite il faut éviter de provoquer des « chocs élastiques » sans fusion. C'est pour ces raisons qu'il est indispensable d'opérer sur des noyaux en densité élevée et possédant des énergies de plusieurs dizaines de kiloélectronvolts : le seul moyen envisageable est l'utilisation de températures élevées qui dépassent plusieurs millions de kelvins. Dans ces conditions, les atomes des gaz générateurs de noyaux légers sont ionisés : le mélange des noyaux et des électrons libres est appelé *plasma*.

Du fait de sa constitution électrique, cet état de la matière n'est pas stable et l'obtention de réactions de fusion contrôlée impose de « confiner » le plasma. Il faut le conserver, à une température suffisante et pendant des temps assez longs, notamment jusqu'à l'amorçage des réactions. La température très élevée interdit évidemment l'utilisation d'enceintes solides ordinaires pour contenir le plasma : le seul contact du plasma les vaporiserait. Différents procédés de confinement ont été étudiés : le confinement par *gravitation* (c'est ce qui se passe dans les étoiles), le confinement *électrostatique*, le confinement *basse fréquence* et le confinement *magnétique*, le plus intéressant à l'heure actuelle. En effet, les constituants du plasma sont électriquement chargés et peuvent être soumis à des forces dans un champ magnétique puissant : un champ approprié permet de confiner le plasma loin des parois. De plus, un accroissement brusque de l'intensité du champ permet de comprimer le plasma, de l'échauffer et de favoriser la fusion.

Le problème le plus délicat est dû à l'extrême instabilité de ce plasma : jusqu'ici il a été impossible de le maintenir à la température convenable plus de quelques microsecondes ; cela a été réalisé dans l'appareil D.E.C.A. (Dispositif d'étude de compression adiabatique), selon la technique du « miroir pulsé ». Pendant un temps très court, il a été possible d'établir dans une « bouteille magnétique » un champ non uniforme ; les particules sont forcées de se heurter sur le « miroir magnétique » formé par le resserrement des lignes de force, là où le champ est le plus intense ; elles repartent alors en sens inverse.

6.3. Principe d'un réacteur à fusion thermonucléaire. — Le combustible peut être, par exemple, un mélange deutérium-tritium-lithium qui fournit le plasma. Après les réactions de fusion, il faut extraire les neutrons formés et l'hélium, et il faut réutiliser le tritium issu de la réaction. Les proportions des constituants doivent avoir des valeurs convenables afin que le fonctionnement soit stable. Le bilan énergétique doit être tel que l'énergie apportée pour le chauffage du plasma et celle libérée ensuite par la fusion permettent de compenser les pertes diverses (fuites de particules, fuites de neutrons, énergie cinétique des particules formées) afin que la température reste constante.

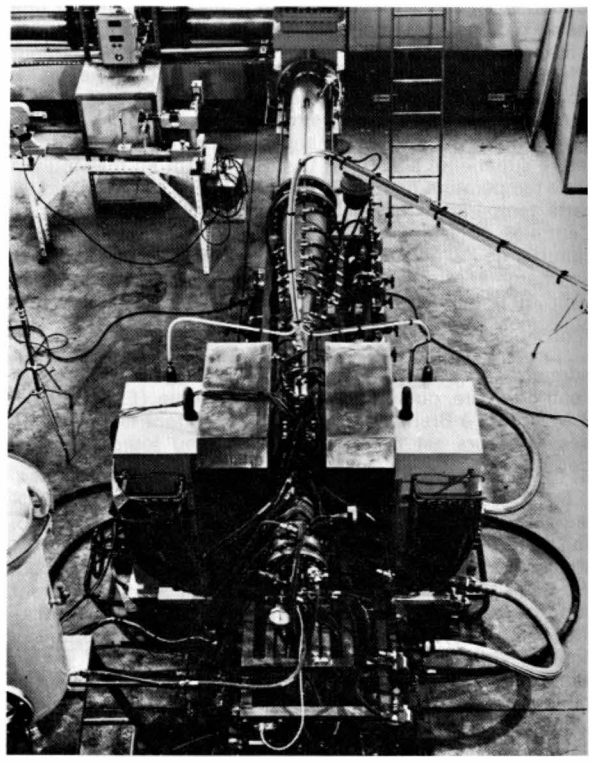
Deux régimes de fonctionnement sont à distinguer : le *régime continu* et le *régime pulsé*.

— Dans le régime continu, le combustible est progressivement introduit sous forme d'atomes neutres « froids », en même temps que le plasma « brûlé » est extrait.

— Dans le régime pulsé, quatre phases sont nécessaires : chauffage du plasma, injection de particules tout en maintenant le chauffage, entretien de la réaction amorcée en enlevant de l'énergie pour maintenir la température constante, arrêt de la réaction tandis que l'énergie cinétique du plasma est utilisée pour le réchauffer.

6.4. Avenir de l'énergie thermonucléaire. — Actuellement, la seule application des réactions de fusion non contrôlées se trouve dans la bombe atomique à hydrogène (bombe H). La réalisation de réacteurs utilisant la fusion contrôlée ne pouvant être encore envisagée, les perspectives d'applications industrielles de ce phénomène sont incertaines.

Les convertisseurs magnétohydrodynamiques (M.H.D.) pourraient représenter une application intéressante : ils permettraient de convertir l'énergie cinétique des ions du plasma soit directement sous forme d'énergie électrique, soit sous forme d'énergie mécanique : c'est pourquoi les convertisseurs M.H.D. sont généralement appelés génératrices directes, et nous allons décrire le principe de leur fonctionnement (fig. III-13 et III-14).



(É.D.F.)

Fig. III-13 — Vue d'ensemble d'un banc d'essais M.H.D. : au premier plan le brûleur, ensuite l'électroaimant et la tuyère M.H.D. dans son entrefer

Le plasma équivaut à un conducteur mobile : il est formé d'hélium porté à très haute température et il contient des atomes de métal alcalin (potassium) facilement ionisé. En passant dans un champ magnétique les particules chargées sont soumises à des forces (V. t. 1, Électronique, chap. 2) et elles sont captées par des électrodes. Les charges de signes contraires étant soumises à des forces opposées, une électrode se charge positivement et l'autre négativement. Elles forment les pôles de la génératrice M.H.D. La

génératrice M.H.D. reçoit de l'énergie d'un gaz chaud en expansion ; celui-ci se refroidit et sa pression est plus faible à l'extrémité du conduit qu'à l'entrée (ce qui est représenté par l'élargissement progressif de ce conduit sur la figure III-14). En effet, le volume du gaz croît tandis que la pression diminue en même temps que la température. Ce plasma peut être considéré comme un gaz incandescent, mais son comportement particulier le fait appeler « quatrième état de la matière » ; comme il doit être comprimé, chauffé puis envoyé dans le conduit, le problème le plus délicat consiste à mettre au point des matériaux et des appareils supportant des températures très élevées.

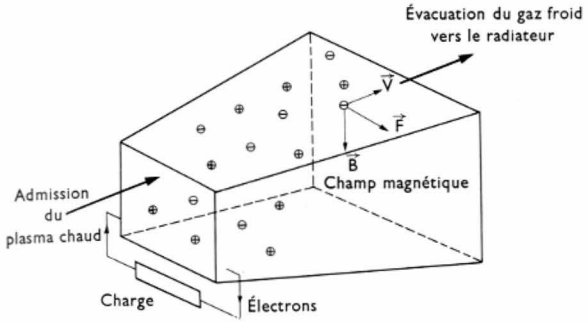


Fig. III-14 — Conduit M.H.D. : les électrons se trouvant dans le plasma chaud se déplacent sous l'effet de la force $\vec{F}$ dans le champ magnétique $\vec{B}$. Ils sont recueillis à la partie droite du tube et amenés à la charge

7. APPLICATIONS MILITAIRES DES TECHNIQUES NUCLÉAIRES

L'énergie nucléaire a également des applications militaires : dans les bombes, du fait de la grande vitesse des réactions nucléaires, une énergie très importante est libérée en un temps très court ; à masse égale, une bombe est plusieurs millions de fois plus puissante qu'un explosif aussi violent que le T.N.T. (trinitrotoluène).

7.1. La bombe atomique ou bombe A

7.1.1. Principe. — C'est en 1945, à Los Alamos, dans le Nouveau-Mexique, que les Américains mirent au point la *bombe à fission :* c'est une sorte de petit réacteur à très fort coefficient de multiplication, où une réaction en chaîne très rapide est provoquée dans une masse de combustible fissile supérieure à la masse critique. L'explosion qui se produit libère une énorme quantité de chaleur, accompagnée d'ondes de choc et de retombées radioactives dangereuses.

La réaction en chaîne se produit très rapidement car :

1° les pertes de neutrons à l'extérieur de la masse en fission sont évitées ; le combustible est très pur et exempt de matières absorbant les neutrons : il s'agit d'uranium 235 ou de plutonium 239 ;

2° la cohésion du cœur de la bombe est maintenue assez longtemps car la bombe est entourée d'un *réflecteur* (si les noyaux se dispersent sous l'action de la chaleur, la réaction en chaîne s'arrête).

7.1.2. Mise à feu. — L'explosion est provoquée en rapprochant très rapidement deux volumes de matériau fissile, chacun d'eux étant inférieur au volume critique (celui qu'occuperait la masse critique permettant le déclenchement de la réaction en chaîne). L'enveloppe métallique, très résistante, contient notamment les deux parts de plutonium 239 ou d'uranium 235, écartées l'une de l'autre, et elles sont lancées brutalement l'une contre l'autre. Cette opération est réalisée en provoquant une explosion au moyen d'un explosif ordinaire. Ainsi lorsque le volume critique est atteint l'explosion nucléaire se produit (fig. III-15).

Le combustible peut aussi être dispersé dans un volume relativement grand ; des charges d'explosif classique, convenablement réparties, explosent simultanément pour provoquer la compression brutale de l'explosif nucléaire. Cette technique est généralement utilisée avec le plutonium.

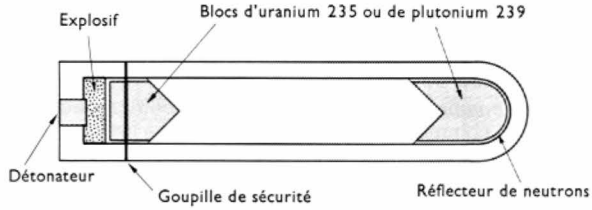


Fig. III-15 — Schéma de principe de la bombe atomique

7.1.3. Effets des bombes atomiques. — Lors d'une explosion, la température au centre de la bombe dépasse plusieurs millions de kelvins. Il se produit une onde thermique et en même temps une onde de choc à l'origine d'un souffle violent provoquant des destructions à plusieurs kilomètres du point d'impact. Ainsi pour une bombe au plutonium 239, de puissance analogue à celle lancée sur Nagasaki (équivalente à 20 000 tonnes de T.N.T., ce qui correspond à la fission d'environ 1 kilogramme d'uranium 235, c'est-à-dire à la conversion directe en énergie de seulement 1 gramme de matière), l'effet du souffle peut être ressenti à plus de 5 km de l'endroit de l'explosion. Les effets particuliers de la bombe sont ceux dus aux rayonnements : à Nagasaki, l'action mortelle des rayons γ s'est fait sentir jusqu'à 1 200 mètres du centre de l'explosion, et des émissions radioactives secondaires émanent encore de tous les radionucléides formés à l'instant de l'explosion.

Le nombre de victimes a été évalué à 80 000 à Hiroshima (bombe à l'uranium 235 lancée le 6 août 1945) et à 40 000 à Nagasaki (bombe lancée le 9 août 1945).

7.2. La bombe à hydrogène ou bombe H

7.2.1. Principe. — Nous avons vu qu'il est possible d'obtenir une libération d'énergie en provoquant la fusion de noyaux légers qui s'assemblent et forment des noyaux plus lourds avec éjection de protons, de neutrons ou de rayons γ. Pour obtenir le maximum d'énergie, il faut recourir aux noyaux les plus faiblement chargés, c'est-à-dire aux noyaux d'*hydrogène ;* cependant pour que ceux-ci fusionnent, il faut qu'ils soient animés d'une très grande vitesse, ce qui impose d'effectuer l'opération à une température extrêmement élevée.

L'étude des réactions nucléaires a montré que la fusion peut se produire avec les noyaux des isotopes de l'hydrogène, tels le triton ${}_1^3\mathrm{H}$ ou T, le deuton ${}_1^2\mathrm{H}$ ou D ; l'énergie libérée est plus grande que dans le cas des réactions de fission. Alors que la fission d'un noyau d'uranium 235, d'une masse de 235 u.m.a., libère 200 MeV, la fusion d'un noyau de tritium et d'un noyau de deutérium, dont la masse totale est 5 u.m.a., libère 17,6 MeV, ce qui donne par unité de masse :

$$\frac{200}{235} = 0{,}85 \text{ MeV/u.m.a. dans le premier cas,}$$

$$\frac{17{,}6}{5} = 3{,}52 \text{ MeV/u.m.a. dans le second cas.}$$

Par unité de masse atomique, l'énergie de fusion est donc environ quatre fois plus grande que l'énergie de fission. C'est la libération de l'énergie de fusion qui est utilisée dans les bombes à hydrogène ou bombes *thermonucléaires.*

7.2.2. Mise à feu de la bombe H. — La température nécessaire à la fusion thermonucléaire est brutalement obtenue par l'explosion d'une bombe de fission, placée à l'intérieur du mélange de tritium et de deutérium liquéfiés. La puissance d'une bombe H ne dépend plus alors que de la quantité d'isotopes d'hydrogène utilisée ; cette puissance n'est pas limitée puisqu'une fois la réaction de fusion amorcée, les divers noyaux continuent à fusionner, même s'il y a tendance à la dispersion. L'explosion de la première bombe H eut lieu le 31 octobre 1952 à Eniwetok dans le

Pacifique : sa puissance était équivalente à celle de l'explosion de 5 mégatonnes de T.N.T. À Bikini, le 27 février 1954, explosait une bombe de 15 mégatonnes, et cet essai fut suivi régulièrement de beaucoup d'autres, dans le but d'obtenir des bombes de plus en plus puissantes tout en diminuant leur encombrement.

7.2.3. Les bombes dopées

— *La bombe A dopée.* — Ce type de bombe peut être considéré comme un stade intermédiaire entre les bombes A et H ; un dopage à l'aide de neutrons permet une relative « miniaturisation » de la bombe (elle peut être utilisée dans des missiles). Cette bombe comprend de la matière fissile (U 235), un mélange deutérium-tritium D-T et un réflecteur riche en uranium 238 : l'explosion et la fission d'une partie de l'uranium 235 entraîne une forte élévation de température, ce qui provoque la fusion du mélange D-T accompagné d'une abondante production de neutrons. Ces neutrons et ceux issus de la fission sont réfléchis par le réflecteur et augmentent le rendement de la fission, tandis que la fission des noyaux d'uranium 238 du réflecteur libère un complément d'énergie ;

— *La bombe 3 F* (fission-fusion-fission). — Elle est amorcée avec une bombe A classique ; il se produit ensuite une réaction de fusion de deutérure de lithium $^{6}_{3}$DLi, et les neutrons très rapides qui sont émis provoquent la fission d'une enveloppe d'uranium 238. Cette bombe libère une grande quantité de produits radioactifs (elle est dite « sale » pour cette raison).

7.3. Possibilités d'application non militaire des bombes. — L'importante énergie disponible lors des explosions nucléaires pourrait être utilisée pour effectuer divers travaux de génie civil, comme, par exemple, construire des ports artificiels, faire sauter des couches de minerais pour exploiter des gisements très profonds, creuser des cratères ou des cavernes pour développer des installations souterraines où serait stockée de l'énergie thermique. Cependant, il faut résoudre le problème des retombées radioactives pour que ces utilisations pacifiques de l'énergie nucléaire soient sans risques pour l'humanité. Nous verrons au chapitre suivant, après l'étude du rayonnement X, quels sont les effets biologiques de tous les rayons qui peuvent atteindre les êtres vivants et quels sont les dangers des irradiations.

La bombe H amorcée par un autre moyen que la bombe à fission permettrait d'approcher la solution souhaitée : l'explosion n'est accompagnée d'aucun éparpillement de produits radioactifs. Cependant, le flux de neutrons réagit avec l'azote de l'air ou les objets au sol, et ces utilisations pacifiques n'ont pu être développées.

CHAPITRE IV

LES RAYONS X

1. GÉNÉRALITÉS

En 1895, Röntgen s'aperçut que les faisceaux d'électrons paraissaient déterminer des actions inattendues autour de l'ampoule utilisée pour les produire : un écran en platinocyanure de baryum s'illuminait même lorsque l'ampoule était enfermée dans une boîte en carton. Ce rayonnement invisible qui traversait des corps opaques à la lumière fut appelé rayonnement X. Dès 1896, Jean Perrin montra que les rayons X prennent toujours naissance sur les obstacles solides que viennent frapper des électrons rapides. Certaines propriétés comme la *propagation en ligne droite* ou la manifestation d'une *luminescence* incitaient à assimiler les rayons X à des rayons cathodiques secondaires. Cette hypothèse fut abandonnée lorsque des expériences permirent de constater que ces rayons ne transportaient pas de charge électrique et n'étaient déviés ni par les champs électriques, ni par les champs magnétiques.

Pour prouver qu'il s'agissait d'un *rayonnement électromagnétique* comme une radiation lumineuse, il était nécessaire de réaliser les expériences classiques de l'optique (réflexion, réfraction, interférences) en utilisant ce rayonnement. C'est le physicien allemand von Laue qui réussit en 1912 à observer des phénomènes de *diffraction* (V. t. 1, Optique, chap. 4) : ses travaux permirent de connaître la nature exacte des rayons X. Ils furent alors considérés comme des radiations électromagnétiques particulières de très courte longueur d'onde ; les photons de ce rayonnement correspondent à des énergies plus grandes que celles des photons de rayonnements lumineux. Leur vitesse de propagation est évidemment celle de la lumière ($c_0 = 3.10^8$ m/s).

2. PRODUCTION DES RAYONS X

Chaque fois qu'un faisceau d'électrons rapides est arrêté par un obstacle solide, il y a émission de rayons X. Les tubes spéciaux utilisés pour produire les rayons X peuvent être classés en deux catégories :

— *les tubes à gaz,* ou tubes de Crookes (fig. IV-1) ; ces tubes, dits *à cathode froide,* ne sont pratiquement plus utilisés aujourd'hui ;

— *les tubes à vide poussé,* ou tubes de Coolidge (fig. IV-2). Ces tubes, dits *à cathode chaude,* sont plus coûteux mais d'un meilleur rendement.

Les tubes sont soit en verre, soit en métal. Ils contiennent une cathode, source d'électrons, munie d'un dispositif permettant de former un faisceau concentré de rayons cathodiques ; une surface métallique appelée *anticathode* fournit des rayons X lorsqu'elle est bombardée par le faisceau électronique.

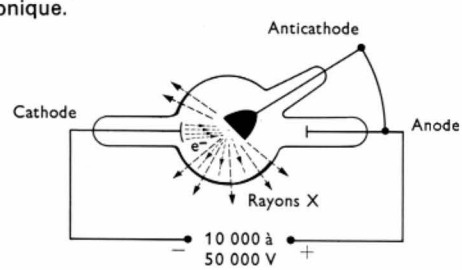


Fig. IV-1 — Tube de Crookes (tube à rayons X, type à gaz)

2.1. Les tubes à gaz. — La pression du gaz y est très faible, voisine du millième de millimètre de mercure (soit 10^{-3} millibar) et il existe toujours quelques ions dans ce gaz. Leur rôle est très important car ils permettent d'obtenir les électrons nécessaires à la production de rayons X.

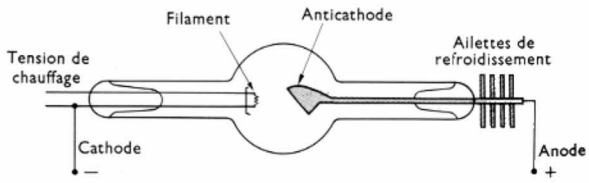


Fig. IV-2 — Tube de Coolidge (tube à rayons X, type à vide, comportant une cathode incandescente et une anticathode en tungstène reliée à l'anode)

Si la d.d.p. anode-cathode est assez grande, les vitesses des particules chargées sont grandes : lors des chocs avec les molécules neutres, de nouveaux ions sont produits, en particulier des ions positifs qui bombardent la cathode et sont à l'origine de l'émission d'électrons. Ces électrons, accélérés par le champ électrique (obtenu en appliquant une d.d.p. élevée entre l'anode et la cathode) vont frapper violemment l'anticathode qui émet des rayons X. L'anticathode s'échauffe fortement car l'énergie cinétique

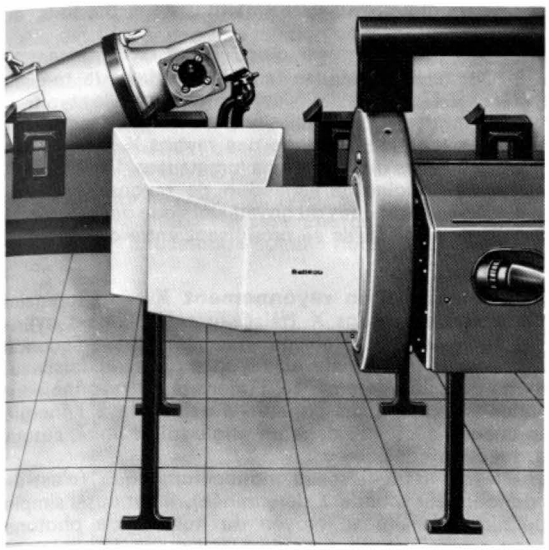


Fig. IV-3 — Ensemble de radioscopie à haute définition avec tube à rayons X de 150 kV (*C.G.R.*)

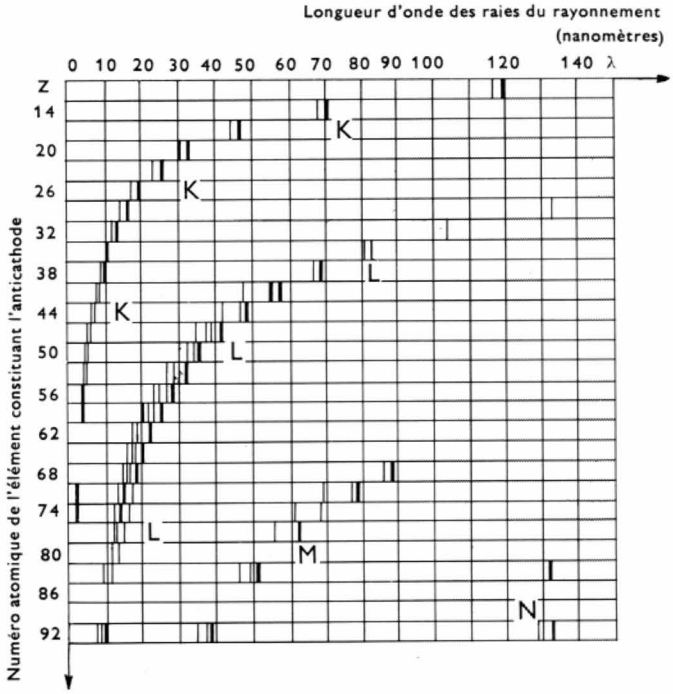


Fig. IV-4 — Spectre des différents éléments (d'après M. Siegbahn *Röntgenstrahlen Spektroskopie*)

de nombreux électrons est transformée en énergie calorifique à son niveau ; pour cette raison, c'est une électrode massive et faite en métal peu fusible (tungstène, par exemple).

À l'usage, les parois du tube absorbent les gaz contenus dans l'ampoule ; la pression dans le tube décroît et l'intensité du rayonnement diminue : un régulateur de pression est nécessaire. L'émission dans ces tubes n'est pas homogène et comprend des rayons ayant des pouvoirs de pénétration assez variés.

Remarque : Les parois de l'ampoule présentent une fluorescence verte due à des électrons secondaires renvoyés dans toutes les directions par le métal, à la suite des chocs des électrons primaires.

2.2. Les tubes à vide. — La pression y est négligeable, proche de 10^{-8} m de mercure (soit 10^{-5} millibar). Les électrons sont fournis par une cathode thermoémissive (V. t. 1, Électronique, chap. 3) ; ils sont accélérés grâce à un champ électrique obtenu comme précédemment en appliquant une tension très élevée entre cathode et anode (qui est aussi l'anticathode). Ici encore, l'énergie cinétique de la plupart des électrons étant transformée en chaleur, l'anticathode doit pouvoir supporter une élévation de température importante : cette anticathode est constituée par une pastille de tungstène fixée dans un bloc de cuivre et elle est refroidie soit par circulation d'eau, soit par ventilation naturelle ou forcée (dans ce cas, la chaleur est évacuée vers un radiateur à ailettes extérieur au tube).

Dans ces tubes, où le vide se maintient indéfiniment, l'intensité du rayonnement X peut être accrue en augmentant la tension de chauffage du filament, et le pouvoir de pénétration des rayons peut être réglé en faisant varier la tension anodique (la pénétration est d'autant plus importante que la longueur d'onde est plus faible, donc que la tension anodique est plus grande). Ces deux réglages sont ici totalement indépendants, contrairement aux tubes à gaz, où l'augmentation de la tension anodique modifie à la fois l'intensité du rayonnement et la pénétration.

3. ÉMISSION DES RAYONS X

3.1. Premier mode d'émission. — Lorsqu'un électron heurte l'anticathode, il y a un brusque freinage de l'électron et émission d'une radiation électromagnétique. L'énergie d'un électron incident, égale à eU (si nous désignons par U la d.d.p. accélératrice appliquée entre l'anode et la cathode, et par e la charge de l'électron) est transférée à un photon en totalité (cas idéal) ou en partie (cas le plus fréquent). L'énergie du photon étant égale à hf si nous désignons par h la constante de Planck, et par f la fréquence de la radiation émise (V. chap. 1, § 2.4), nous pouvons écrire : $hf \leqslant eU$.

Comme la vitesse de propagation des photons est celle de la lumière ($c_0 = 3.10^8$ m/s), la longueur d'onde du rayonnement X est égale à :

$$\lambda = \frac{c_0}{f} \geqslant \frac{hc_0}{eU} = \frac{1239{,}4.10^{-9}}{U}$$

(si nous exprimons λ en mètres et U en volts).

Le rayonnement X obtenu s'étend depuis une longueur d'onde minimale $\lambda_0 = \dfrac{hc_0}{eU}$ jusqu'à l'infini.

3.2. Deuxième mode d'émission. — Un autre phénomène se superpose au précédent : des électrons du faisceau provoquent l'ionisation de certains atomes de l'anticathode, et, notamment, des électrons de couches proches du noyau sont expulsés. Ils sont remplacés par des électrons de couches plus éloignées du noyau : ceux-ci perdent de l'énergie au cours de ce « saut », et il y a émission de photons. Pour bien comprendre ce processus d'émission, considérons qu'un électron d'un atome passe du niveau L au niveau K, il perd une énergie égale à $(W_L - W_K)$, égale à l'énergie hf' du photon émis :

$$hf' = W_L - W_K$$

La longueur d'onde λ' de ce rayonnement est égale à :

$$\lambda' = \frac{hc_0}{W_L - W_K}$$

Le raisonnement précédent s'applique à d'autres niveaux d'énergie que les niveaux K et L. Cependant, dans tous les cas, nous voyons qu'il y a émission de rayonnements de longueurs d'onde bien déterminées, c'est-à-dire de raies caractéristiques du corps constituant l'anticathode (fig. IV-4). L'émission d'une raie caractéristique n'est possible que s'il y a ionisation d'une couche électronique ($K, L, M, \ldots$), ce qui ne peut se produire que si les électrons du faisceau incident ont une énergie eU au moins égale à celle correspondant au niveau d'énergie de l'électron qui sera expulsé ($W_K, W_L, W_M, \ldots$). Si celui-ci se trouve sur la couche K, la condition à satisfaire est donc la suivante : $eU \geqslant |W_K|$.

Ainsi, la tension U doit être supérieure à environ 6 000 V pour le chrome, à 9 000 V pour le cuivre, à 69 500 V pour le tungstène.

Les énergies des photons ne pouvant prendre que des valeurs discontinues (comme les différences entre les niveaux d'énergie des atomes), les raies observées sont groupées par petites séries appelées raies K, raies L, etc. (fig. IV-4), les symboles K, L, ... correspondant au niveau sur lequel l'électron revient. Un indice suit cette lettre afin d'indiquer le niveau dont il provient : pour les raies K cet indice est α pour le niveau L, β pour le niveau M (fig. IV-5).

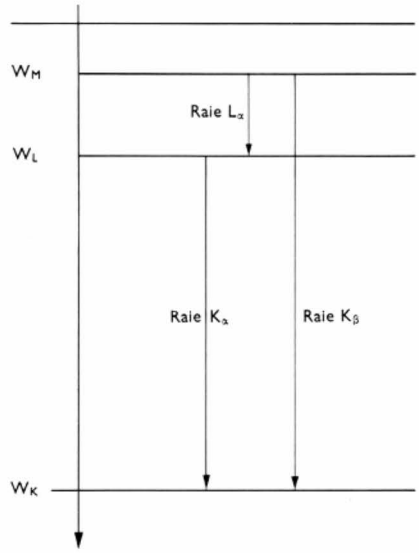


Fig. IV-5

Remarque : En réalité, la part d'énergie apportée par l'électron et qui est transférée aux photons du rayonnement X est très faible (moins de 1 %). Pour la plupart des électrons, l'énergie cinétique est transformée en chaleur. Cela impose l'emploi d'anticathode en métaux réfractaires : tungstène, molybdène ou très bons conducteurs de la chaleur comme le cuivre. C'est également pour cette raison que l'anticathode est refroidie durant le fonctionnement du tube.

4. CARACTÉRISTIQUES D'UN RAYONNEMENT X

4.1. Longueurs d'onde. — Les longueurs d'onde des rayons X sont comprises entre 10^{-12} m (10^{-3} nanomètres) et $100 . 10^{-9}$ m (100 nm) c'est-à-dire entre celles des rayons gamma et celles des rayons ultraviolets (fig. IV-6). Dans l'ensemble des longueurs d'onde, le domaine occupé par les rayons X est considérable par rapport à celui qu'occupent les ondes lumineuses ; celles-ci ont des longueurs d'onde comprises entre 390 et 770 nm, soit approximativement une octave, tandis que les ultraviolets en occupent 5 ($13{,}6\ \text{nm} < \lambda < 390\ \text{nm}$) et les rayons X environ 17 ($0{,}001\ \text{nm} < \lambda < 100\ \text{nm}$). Cet intervalle indique en réalité les valeurs extrêmes ; il se divise en deux domaines : celui des *rayons intermédiaires* ($0{,}2\ \text{nm} < \lambda < 100\ \text{nm}$) et celui des rayons X ($0{,}001\ \text{nm} < \lambda < 0{,}2\ \text{nm}$), appelés rayons durs ($\lambda$ faible) ou rayons mous (λ grand). Les rayons intermédiaires sont actuellement sans application pratique car ils sont très facilement absorbés et ils ne peuvent être étudiés que dans le vide ; ce sont les rayons mous ($0{,}01\ \text{nm} < \lambda < 0{,}2\ \text{nm}$) qui sont produits au moyen des tubes usuels.

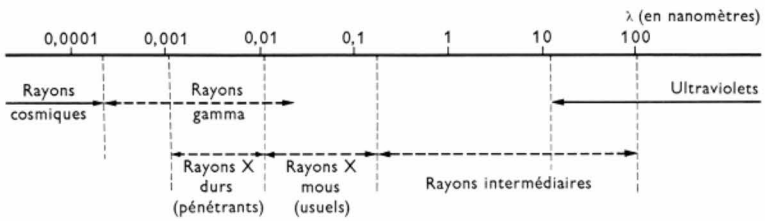


Fig. IV-6 — Répartition des rayons X

Le réglage de la longueur d'onde d'un rayonnement X, c'est-à-dire de sa dureté, se fait en modifiant la tension d'accélération U : plus la d.d.p. est grande et plus le rayonnement X comprend des radiations de faibles longueurs d'onde. Les longueurs d'onde des rayons X sont petites comparées à celles des radiations lumineuses. Les « sauts » d'électrons à l'origine de l'émission de rayons X se font entre des niveaux proches du noyau alors que dans le cas de l'émission de lumière, ils se produisent entre des niveaux éloignés de celui-ci.

4.2. Intensité d'un rayonnement X. — L'intensité d'un faisceau de rayons X (faisceau sensiblement cylindrique) représente l'énergie qui traverse chaque seconde une surface unité normale au rayon moyen du faisceau. Pour une direction déterminée, l'intensité du rayonnement issu d'une source quasi ponctuelle est égale à l'énergie émise chaque seconde, dans un angle solide unité, autour de la direction considérée.

Dans le cas d'un faisceau monochromatique (c'est-à-dire de longueur d'onde λ déterminée), il est aussi simple de définir l'intensité au moyen du nombre de photons émis ou reçus chaque seconde (puisqu'ils transportent tous la même énergie hf). La variation de l'intensité I d'un rayonnement X en fonction de la longueur d'onde λ permet de parfaitement définir ce rayonnement (fig. IV-7). Avec un tube de Coolidge l'intensité du rayonnement est réglée en agissant sur le nombre d'électrons du faisceau incident, c'est-à-dire sur la tension de chauffage du filament.

4.3. Spectre de rayonnement. — La courbe $I(\lambda)$ constitue le *spectre du rayonnement X*. Son étude a conduit à mettre en évidence :

— *un spectre continu :* l'intensité du rayonnement varie de façon continue (d'où le nom du spectre) avec la longueur d'onde dès que celle-ci dépasse un seuil λ_0. C'est le spectre qui correspond au premier mode d'émission des rayons X (photons émis à la suite du freinage des électrons sur l'anticathode) ;

— *un spectre de raies* caractéristiques formant une suite discontinue propre au métal constituant l'anticathode (raies caractéristiques des atomes constituant celle-ci, correspondant au second mode d'émission des rayons X).

Dans le *spectre continu*, l'intensité du rayonnement croît très rapidement dès que λ dépasse λ_0 ; elle atteint un maximum pour une longueur d'onde λ_{max}, avant de décroître lentement. λ_0 et λ_{max} sont indépendantes de la nature de l'anticathode et ne sont fonction que de la d.d.p. U appliquée au tube. En effet, nous avons vu que les longueurs d'onde du spectre sont obligatoirement supérieures à :

$$\lambda_0 = \frac{hc_0}{eU} = \frac{1239{,}4.10^{-9}}{U}$$

(λ_0 en mètres, U en volts). Ainsi pour une tension U de 100 000 V, λ_0 est égale à 12,5 pm.

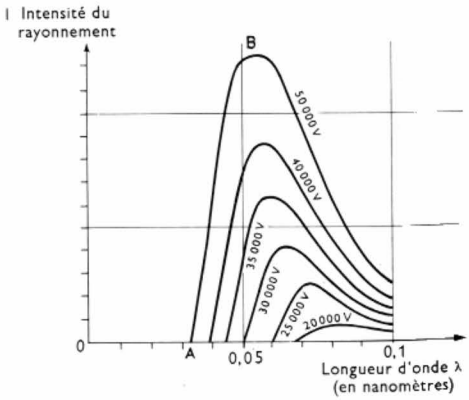


Fig. IV-7 — Influence de la tension sur le spectre de rayons X. Les abscisses des points A et B représentent respectivement les valeurs de λ_0 et λ_{max} pour une tension U de 50 000 V.

En ce qui concerne la longueur d'onde maximale λ_{max}, elle est liée à λ_0 par la relation empirique : $\lambda_{max} = 1{,}5\ \lambda_0$.

La figure IV-7 reproduit un réseau de courbes $I = f(\lambda)$ correspondant à différentes valeurs de la d.d.p. U appliquée au tube : l'énergie rayonnée est d'autant plus localisée vers les longueurs d'onde faibles et le rayonnement d'autant plus pénétrant que la tension d'accélération des électrons est plus élevée.

Le *spectre de raies* (fig. IV-8) apparaît lorsque la tension appliquée au tube dépasse une certaine valeur, liée à la nature de l'anticathode comme nous l'avons vu ci-dessus.

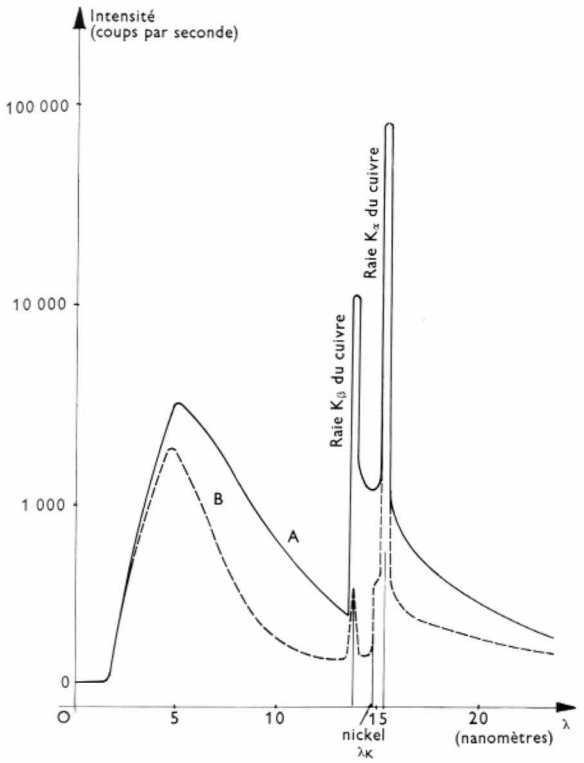


Fig. IV-8 — Spectre avec raies

Courbe A : spectre du rayonnement d'un tube à anticathode de cuivre fonctionnant en courant redressé. — Courbe B : spectre du même rayonnement après interposition d'un écran de 0,02 mm de nickel

Par exemple, si l'anticathode est constituée par un élément léger, seules les raies de la série K apparaissent ; s'il s'agit d'un élément lourd tel que l'uranium, les raies de la série N sont observées à basse tension et lorsque la tension croît, apparaissent successivement les séries M, puis L et enfin K, chacune pour des valeurs bien déterminées de la tension appliquée.

L'étude des raies spectrales des rayons X a montré que la racine carrée de la fréquence d'une même raie (par exemple, la raie K) prise dans les spectres des éléments successifs de la classification périodique des éléments est une fonction sensiblement linéaire du numéro atomique (loi de Moseley, fig. IV-9). Cette loi est surtout vérifiée pour les séries K et L, et n'est qu'approximative pour les séries supérieures, mais elle permet d'effectuer l'analyse d'un corps en l'utilisant comme anticathode, même lorsque le corps à analyser ne figure qu'en quantité très faible.

Une conséquence importante de l'existence de ces raies caractéristiques est que le *rayonnement X peut être considéré comme monochromatique dans certaines conditions*. Ainsi, lorsque la tension de fonctionnement permet d'obtenir la raie $K\alpha$ (de longueur d'onde $\lambda_{K\alpha}$), celle-ci ayant une très grande intensité par rapport aux intensités du spectre continu (plus de 100 fois plus grande), le rayonnement est pratiquement monochromatique (de longueur d'onde $\lambda_{K\alpha}$). Lorsque cette particularité n'est pas recherchée, c'est-à-dire lorsqu'un spectre continu est désiré (rayonnement blanc »), les utilisateurs peuvent employer un tube à anticathode de tungstène sous une tension inférieure à 695 kV (seuil d'émission de la raie $K\alpha$ pour ce corps).

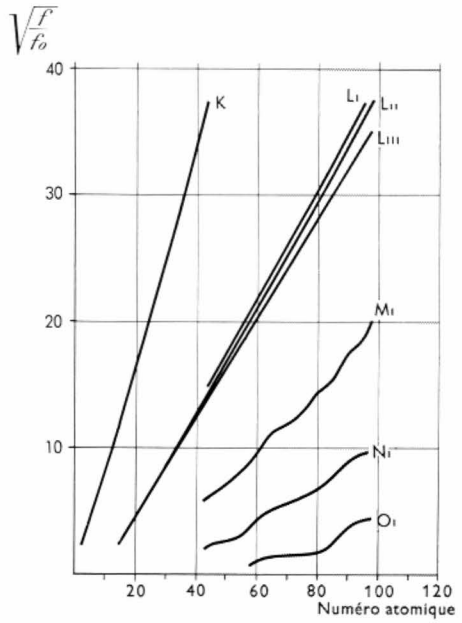


Fig. IV-9 — Courbes illustrant la loi de Moseley

5. PROPRIÉTÉS DES RAYONS X

5.1. La diffraction des rayons X. — Lorsque les premiers expérimentateurs voulurent vérifier les phénomènes de réflexion, de réfraction et de diffraction avec ces rayons, ils se heurtèrent à de très grandes difficultés dues à la faible longueur d'onde des rayons X.

En optique, pour étudier la diffraction, les réseaux utilisés sont constitués par des surfaces planes de verre sur lesquelles sont tracés un grand nombre de traits équidistants et parallèles (en général 60 à 200 traits par millimètre, mais certains réseaux comportent jusqu'à 1 200 traits par millimètre). La diffraction avec les rayons X n'a pu être mise en évidence qu'en envoyant un faisceau de rayons très étroit sur un réseau très fin recevant le rayonnement sous une incidence presque rasante. Auparavant von Laue avait imaginé d'utiliser les réseaux naturels constitués par les *cristaux* (il a utilisé un cristal de blende) ; un cristal d'un corps est en effet formé par des assemblages de particules (atomes, molécules, ions) régulièrement groupés selon des plans parallèles appelés *plans réticulaires* (fig. IV-10) : ces plans jouent le rôle de surfaces planes réfléchissantes comme les traits d'un réseau. Les rayons X sont diffractés dans des directions privilégiées dépendant de la configuration du cristal et de ses éléments de symétrie. Si un très fin pinceau de rayons X est envoyé sous une incidence normale, sur un cristal placé devant une plaque photographique, la diffraction fait apparaître sur celle-ci de petites taches régulièrement réparties autour d'une tache centrale due aux rayons qui ont traversé le cristal

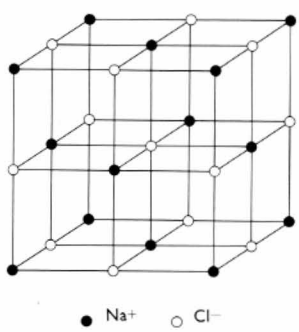


Fig. IV-10

Maille de chlorure de sodium

sans déviation (fig. IV-11). La figure obtenue est caractéristique des dimensions des *mailles* du cristal, c'est-à-dire de la distance entre les plans réticulaires à l'origine de la diffraction et de la longueur d'onde du rayonnement (fig. IV-12). Si la longueur d'onde du rayonnement X est connue, la structure du cristal étudié peut être déterminée (cela a été fondamental pour le développement de nos connaissances sur la structure de la matière) et inversement.

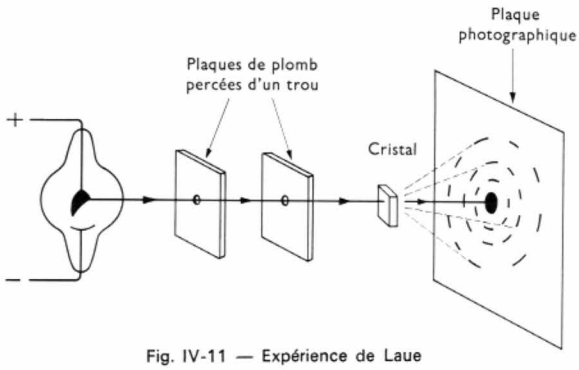


Fig. IV-11 — Expérience de Laue

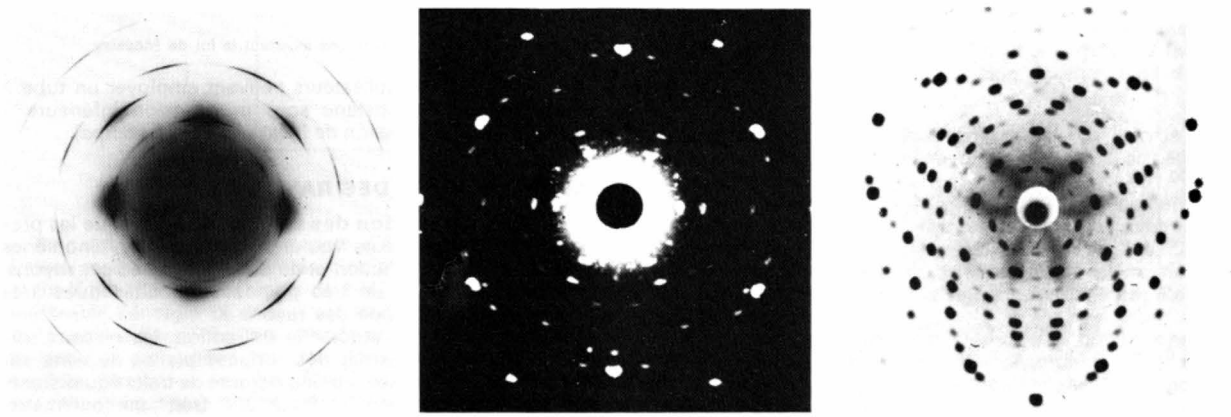


Fig. IV-12 — Diagrammes de Laue (*Palais de la Découverte*)

5.2. Polarisation et analyse spectrale des rayons X. — Tout comme la lumière, les rayons X sont partiellement polarisés lorsqu'ils sont émis par l'anticathode. Des polarisateurs et des analyseurs jouant le même rôle à l'égard des rayons X que les nicols en optique classique ont pu être mis au point. Il est ainsi possible d'effectuer l'analyse spectrale du rayonnement X.

6. INTERACTION DES RAYONS X ET DE LA MATIÈRE

Les corps traversés par les rayons X absorbent plus ou moins le rayonnement selon sa longueur d'onde et selon les masses atomiques des éléments qui entrent dans leur constitution. Mais l'interaction des rayons X et de la matière ne se limite pas à une absorption simple. Une partie du rayonnement est renvoyée dans toutes les directions par effet de diffusion simple : les trajectoires des photons sont déviées mais les longueurs d'onde ne sont pas changées. Une autre partie est formée de photons ayant perdu de l'énergie ; il y a eu changement de longueur d'onde pour le rayon au passage dans le corps : c'est l'*effet Compton* (fig. IV-13). Les photons peuvent aussi être absorbés et un certain nombre d'électrons sont arrachés au corps : c'est l'*effet photoémissif*. L'atome excité retourne à l'état normal en émettant un autre rayonnement X dit de *fluorescence* ou *secondaire*. La longueur d'onde n'a aucun rapport avec celle du rayonnement X incident (ou primaire) mais elle est caractéristique de l'atome excité.

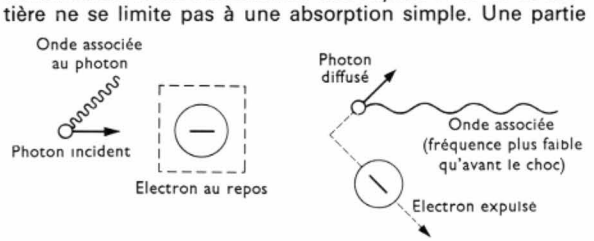


Fig. IV-13 — Représentation schématique de l'effet Compton

6.1. Absorption. — À la traversée d'un écran mince et homogène d'épaisseur x, un rayonnement monochromatique X est partiellement absorbé.

Si avant l'écran, son intensité est désignée par I_0, après l'écran, elle est égale à :

$$I = I_0 \, \mathbf{e}^{-\mu x} \quad (\mathbf{e} = 2{,}718).$$

μ, appelé *coefficient linéaire d'absorption*, dépend de la nature de l'écran.

Parfois l'absorption est définie par le *coefficient d'absorption massique* $\frac{\mu}{\rho}$ rapport du coefficient d'absorption μ et de la masse volumique ρ du corps. Il est possible de vérifier que, pour un corps donné, μ diminue avec la longueur d'onde du rayonnement c'est-à-dire lorsque les rayons sont plus durs. De plus, pour une radiation déterminée, l'absorption est d'autant plus grande que la masse atomique du corps est plus grande. Ainsi pour réduire de moitié l'intensité d'un rayonnement X en utilisant une plaque d'aluminium comme écran, il faut qu'elle ait une épaisseur de 0,6 μm si $\lambda = 1$ nm et de 0,6 m si $\lambda = 10^{-2}$nm. De même, pour obtenir une réduction de moitié d'un rayonnement de longueur d'onde égale à 0,1 nm, il faut 6 mm de carbone ($Z = 6$), 0,6 mm d'aluminium ($Z = 13$) et 2,4 μm de plomb ($Z = 82$).

L'étude de l'absorption en fonction de la longueur d'onde a montré qu'il existait des « longueurs d'onde *critiques* d'absorption », et cela a confirmé les hypothèses concernant les orbites quantifiées des électrons dans l'atome.

6.2. Diffusion. — L'effet de *diffusion* des corps peut être défini par un coefficient σ qui permet de caractériser l'importance du rayonnement renvoyé dans toutes les directions. L'effet de *fluorescence*, qui est compris dans l'absorption, peut aussi se caractériser par un coefficient τ. À titre indicatif, le tableau suivant indique la valeur des divers coefficients massiques mesurés pour la longueur d'onde $\lambda = 0{,}071$ nm.

Élément	Z	μ/ρ	σ/ρ	τ/ρ
Carbone . . .	6	0,68	0,18	0,50
Aluminium .	13	5,35	0,20	5,15
Cuivre	29	53,7	0,29	53,41
Argent	47	28,5	0,47	28,15
Plomb	82	140	0,82	139,18

6.3. Conséquences de l'action des rayons X. — Les rayons X impressionnent les émulsions photographiques ; cela a été utilisé dès leur découverte, en *radiographie* notamment. Ils provoquent aussi la fluorescence de certains corps tels le sulfure de zinc, le tungstène de calcium ou le platinocyanure de baryum, et cette propriété est utilisée en *radioscopie*.

Les rayons X rendent les gaz conducteurs en provoquant leur *ionisation ;* cette propriété se rattache à l'effet photoélectrique : tout corps, placé sur le trajet des rayons X, émet des électrons animés de grandes vitesses et des rayons X secondaires, à cause des échanges d'énergie entre les photons X et les atomes de la matière traversée.

Les rayons X ont une action *biologique* importante : ils peuvent altérer et même détruire les tissus vivants. Leurs effets sont cumulatifs.

7. MESURES DES CARACTÉRISTIQUES D'UN RAYONNEMENT X

Un rayonnement X est défini par son spectre $I(\lambda)$.

7.1. Étude du spectre émis. — La composition du spectre est déterminée en utilisant le phénomène de diffraction sur un réseau ou un cristal tournant, ou par l'intermédiaire des électrons émis par photoémission. La longueur d'onde limite λ_0 est déterminée en tenant compte de la tension appliquée au tube à rayons X ; quant à la « dureté » moyenne du spectre, elle est déduite d'une mesure d'absorption du rayonnement ou à partir de la valeur de la d.d.p. accélératrice.

L'absorption moyenne peut être évaluée directement avec un appareil tel que le *radiochromètre;* c'est un disque constitué par 12 secteurs d'aluminium ayant respectivement 1, 2, 3, ..., 12 mm d'épaisseur, le centre étant formé d'un disque d'argent de 0,11 mm d'épaisseur. Pour des tensions inférieures à 80 000 volts, le disque d'argent arrête tout le spectre, tandis que les secteurs d'aluminium l'arrêtent en fonction de leur épaisseur ; il suffit de rechercher, en se plaçant devant un écran, quelle est l'épaisseur de lame qui donne la même absorption que le disque d'argent pour avoir une idée de la pénétration des rayons.

7.2. Mesure de l'intensité du rayonnement. — La mesure de cette intensité peut s'effectuer soit directement par la mesure d'un courant d'ionisation, soit indirectement en mesurant la quantité de rayonnement (produit de l'intensité du rayonnement et du temps) à l'aide d'un procédé chimique.

7.2.1. Mesure directe. — Elle met en œuvre l'ionisation produite dans un gaz soumis au rayonnement X. Le courant d'ionisation croît avec la tension aux bornes du tube contenant le gaz et atteint une valeur limite appelée *courant de saturation;* pour une tension très élevée, il se produit une décharge disruptive, sous l'influence de l'ionisation par choc. La valeur du courant d'ionisation étant liée à l'intensité du rayonnement ionisant, *l'intensité du rayonnement* peut être déterminée par simple mesure du courant de saturation. Si le rayonnement conserve toujours la même composition spectrale, c'est-à-dire si le tube producteur de rayons X fonctionne toujours sous la même tension, le courant de saturation est proportionnel à l'intensité du rayonnement.

7.2.2. Mesure indirecte. — Les appareils utilisant une réaction chimique sont basés sur le changement de coloration progressive que subissent certains corps soumis aux rayons X.

— Le *radiomètre de Holzknecht* est le plus ancien ; il est constitué par un mélange de sulfate de sodium et de chlorure de potassium fondus, qui passe du jaune au vert foncé sous l'effet des rayons X ; cet appareil n'a plus qu'un intérêt historique : il a servi pour déterminer l'unité H, quatre unités H étant la dose maximale que peut supporter la peau sans subir d'altération.

— Le *radiomètre de Sabouraud et Noiré* utilise le changement de coloration du vert-jaune au jaune-brun du platinocyanure de baryum (le changement de coloration est détecté par comparaison avec des teintes-étalons).

Les procédés chimiques ne sont applicables qu'avec des rayons de dureté bien déterminée, mais ils sont suffisants pour les applications usuelles et en particulier pour les applications médicales.

8. LES DOMAINES D'APPLICATION DES RAYONS X

Les rayons X ont non seulement aidé à connaître la structure intime de la matière, mais ont aussi été à l'origine du développement de la cristallographie. Le champ d'application de ce rayonnement dépasse désormais le cadre des recherches en laboratoire ; il s'étend de plus en plus dans certaines industries :

— dans *l'industrie chimique :* les rayons X interviennent dans la fabrication de certains corps ou dans le contrôle des produits ;

— *en métallurgie,* ils permettent de détecter les défauts

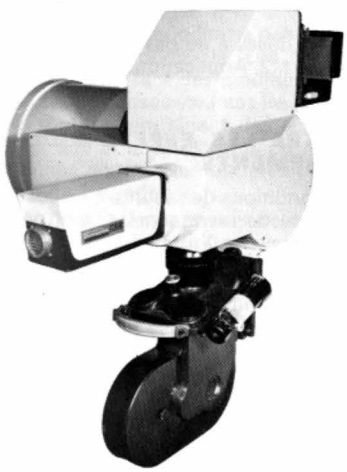


Fig. IV-14 — Amplificateur de brillance à trois directions (photographie, cinéma et télévision) (*C.G.R.*)

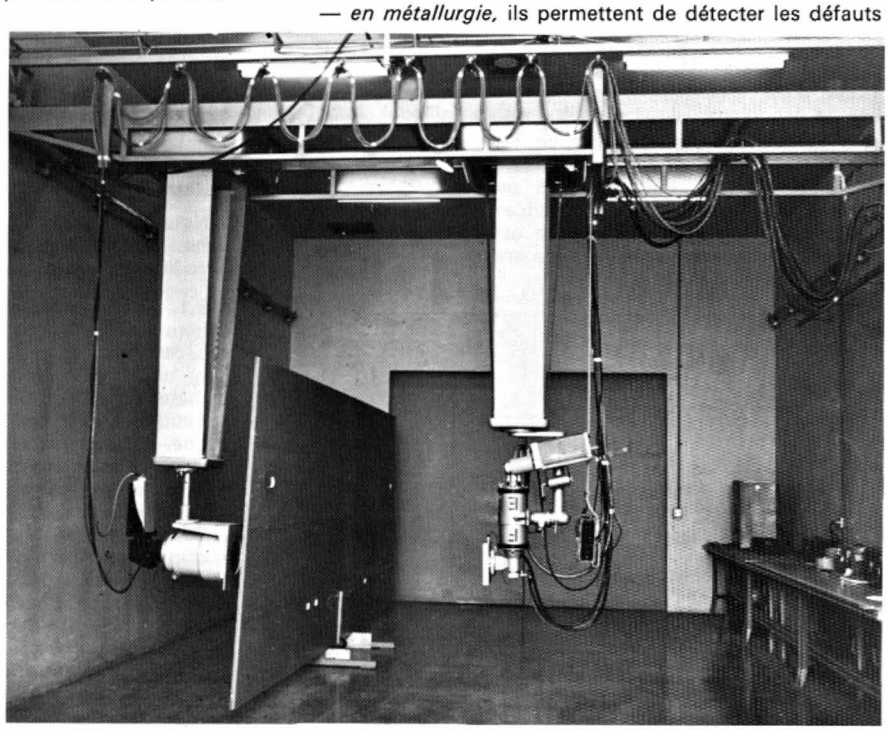
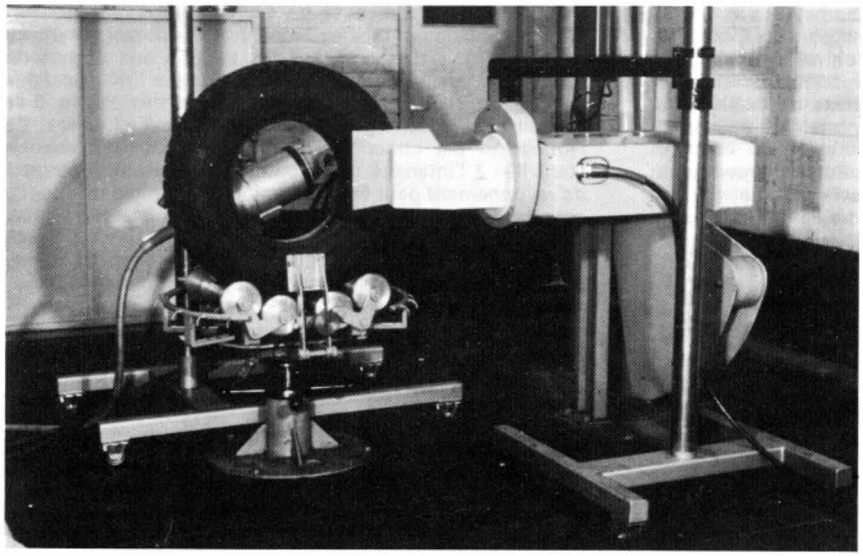


Fig. IV-15 — Radioscopie télévisée indirecte : contrôle de structures (au centre, tubes à rayons X et caméra de contrôle ; à gauche, intensificateur d'image et caméra de télévision) (*Philips industrie*)



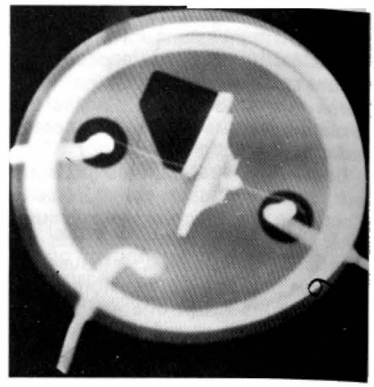


Fig. IV-16 — Radioscopie indirecte d'un transistor: image formée sur un récepteur de télévision (*Philips industrie*)

Fig. IV-17 — Contrôle radioscopique télévisé d'un pneumatique avec un convertisseur d'images et un tube à rayons X fonctionnant sous tension constante de 150 kV (***Balteau***)

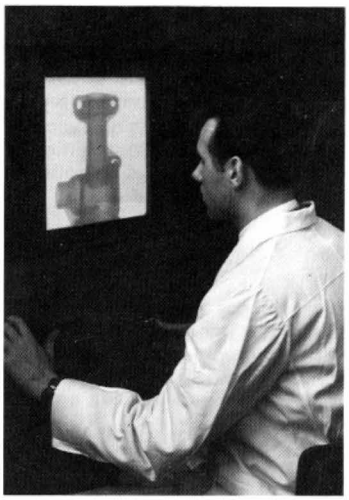


Fig. IV-18 — Radioscopie directe d'une pièce en fonte d'aluminium: image formée sur un écran fluorescent (*Philips industrie*)

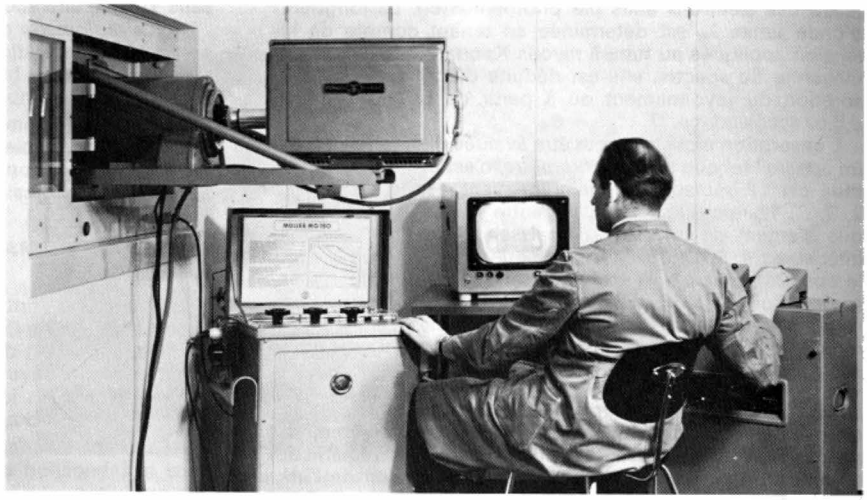


Fig. IV-19 — Équipement de radioscopie par méthode indirecte avec tube intensificateur d'image caméra et récepteur de télévision et pupitre de commande du tube à rayons X (*Philips industrie*)

d'une pièce usinée (par radiographie) ou de suivre les effets d'un traitement mécanique ou thermique (par l'étude des microcristaux du métal ou de l'alliage) ;

— en *médecine,* les rayons X sont couramment utilisés, comme moyen d'investigation et comme procédé thérapeutique, pour le traitement du cancer, par exemple. En effet, les cellules les plus sensibles aux rayons X sont celles dont l'activité reproductrice est la plus grande: il est possible de les détruire par une irradiation convenable,

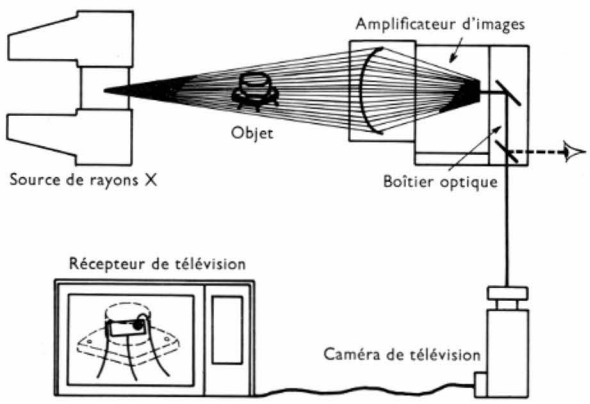


Fig. IV-20 — Schéma d'une installation de radioscopie industrielle avec amplificateur de brillance

mais il faut tenir compte des doses à ne pas dépasser sans danger pour l'être humain (V. t. 2, Applications de l'électronique à la médecine).

9. PROTECTION CONTRE LES EFFETS BIOLOGIQUES DES RAYONNEMENTS

Nous allons évoquer les conditions de sécurité à respecter dans l'utilisation d'une source de rayonnement, tant pour la radioactivité que pour les rayons X.

9.1. Différentes radiations nucléaires. — L'atmosphère terrestre arrête la plupart des radiations venues des espaces interplanétaires, mais elle en laisse passer cependant un certain nombre. (V. chap. V). De même, notre planète émet des radiations naturelles, variables selon l'altitude et les sols, plus intenses en montagne qu'en plaine, en pays granitique qu'en pays calcaire ; ces radiations sont dues aux nucléides radioactifs présents dans le sol, dans l'air, dans certaines eaux thermales, dans les matériaux de construction, etc.

Cette *radioactivité naturelle,* sensiblement constante à l'échelle humaine s'ajoute à l'irradiation interne du corps humain (due à la présence du potassium radioactif) et à la *radioactivité artificielle* résultant des traitements radiothérapiques, des explosions nucléaires expérimentales, de l'industrie nucléaire, etc. Le développement moderne des applications de la radioactivité oblige à connaître les effets nocifs des radiations et le danger qui pourrait résulter d'une trop grande accumulation de déchets radioactifs.

9.2. L'ordre de grandeur des doses d'irradiation. — L'effet d'une irradiation dépend de sa durée et de son intensité. Pour étudier quantitativement et rationnellement les effets d'un rayonnement, le problème essentiel est de mesurer la dose absorbée, c'est-à-dire l'énergie absorbée par le milieu irradié.

L'unité de quantité de rayonnement X (ou γ) est, le *rontgen* (symbole R). Il représente la quantité de rayonnement X (ou γ) telle que l'émission corpusculaire, qui lui est associée dans 0,001 293 g d'air, produise dans l'air, des ions transportant une quantité d'électricité de l'un ou l'autre signe égale à $\frac{1}{3.10^9}$ coulomb. La dose de radiations reçue peut aussi être évaluée en *rem*, qui mesure l'effet biologique produit par l'irradiation et qui dépend d'ailleurs de la nature du rayonnement; ainsi pour des rayons X ou γ une énergie de 10 R produit un effet de 10 rems, tandis qu'il suffit d'une énergie de 1 R pour obtenir le même effet avec certains neutrons.

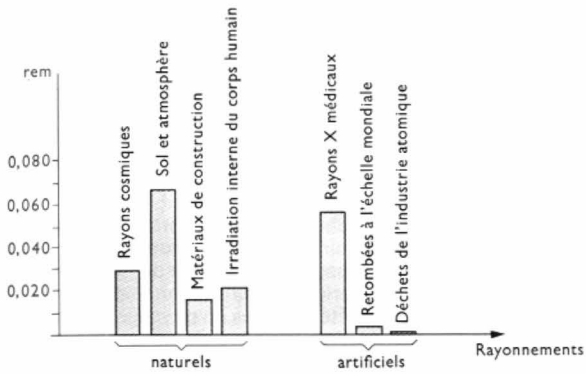


Fig IV-21 — Origine des rayonnements et doses annuelles reçues par un individu

La figure IV-21 montre que la radioactivité naturelle délivre à l'homme environ 0,2 rem par an, alors que les normes de sécurité indiquent 0,5 rem par an pour la population en général et 5 rems pour les travailleurs spécialisés, mais ces doses sont bien inférieures (100 à 1 000 fois) au seuil dangereux.

9.3. Les effets biologiques des radiations. — Les rayonnements α, β, γ et ceux formés de neutrons sont les plus dangereux; les rayons X, de même nature que les rayons γ, correspondent à des énergies plus faibles et leurs effets sont superficiels. Les ionisations dues à tous ces rayons produisent des modifications biochimiques dans les cellules des tissus vivants; les molécules atteintes subissent des ruptures entraînant des lésions plus ou moins graves selon que le tissu est plus ou moins radiosensible, et que le temps d'irradiation est plus ou moins long. Il est nécessaire de distinguer:

— *l'irradiation externe,* dont l'étendue et la localisation ont une grande importance; il y a destruction des cellules en surface et l'action en profondeur de certains rayons se trouve favorisée;

— *l'irradiation interne* ou *contamination,* due à la pénétration de radioéléments à l'intérieur de l'organisme où ils détruisent des cellules vivantes et où ils peuvent rester longtemps, si leur période est grande.

9.3.1. Effets somatiques des radiations. — Les rayonnements nucléaires peuvent provoquer l'altération des fonctions importantes de l'organisme; la peau, les os, l'intestin, les organes générateurs du sang sont des tissus très sensibles, car les divisions cellulaires y sont très actives. Les conséquences les plus graves des irradiations (notamment à long terme) sont la leucémie, les radionécroses, les cancers cutanés, les lésions consistant en des destructions cellulaires, des modifications du protoplasma et en l'apparition de cancer des organes atteints. L'organisme peut lutter contre ces effets, s'ils sont limités, grâce à une *régénération naturelle*. Parmi les radioéléments les plus dangereux il faut citer: le strontium 90, le radium, le plutonium qui sont solubles et qui se fixent dans les os, l'iode 131 retenu par la thyroïde, le polonium et le plutonium (insolubles); celui-ci est fixé dans les poumons.

9.3.2. Effets génétiques des radiations. — Les radiations affectent la division des cellules, en provoquant des lésions dans les *chromosomes*. Lorsque les cellules touchées sont celles qui participent à la reproduction, ces lésions sont transmises avec les caractères héréditaires et elles entraînent des mutations de l'espèce. Il n'y a pas ici de restauration naturelle possible comme dans le protoplasma, et la plus petite dose crée un effet.

9.3.3. Conséquences. — Quelle que soit la raison de l'irradiation (naturelle, thérapeutique, accidentelle), les lésions dues aux rayonnements apparaissent quand la dose reçue dépasse 50 rems; dans la moitié des cas, une dose de 500 rems est mortelle (dose léthale 50 %) et elle l'est dans tous les cas lorsqu'elle atteint 1 500 rems. Les irradiations *aiguës* et *généralisées* (forte dose reçue en une seule fois) provoquent le *mal des rayons:* les troubles peuvent être immédiats avec des hémorragies gastro-intestinales, ou se manifester après plusieurs semaines par des accidents sanguins dus à l'atteinte de la moelle osseuse. Les *irradiations aiguës localisées* ont peu d'influence sur l'état sanguin, mais en revanche, elles ont une importante action cutanée (*radioépidermite*, qui guérit, et *radiodermite*, qui ne guérit pas). Elles provoquent des lésions diverses (osseuses, oculaires, nerveuses), ou atteignent les organes de reproduction: cela peut entraîner une *stérilité* différée mais définitive chez l'homme, ou immédiate mais parfois temporaire chez la femme. Quant aux *irradiations chroniques,* elles provoquent les mêmes troubles: les effets des diverses irradiations s'ajoutent mais les doses accumulées doivent être plus importantes puisque l'organisme se restaure partiellement.

Actuellement, il est très difficile de réparer ou d'atténuer l'évolution des lésions subies et toute irradiation inutile ou dangereuse doit être évitée.

9.4. La protection contre les rayonnements nucléaires. — La Commission Internationale de Protection a fixé à 200 rems la dose maximale que doit recevoir un individu au cours de sa vie. En outre, la dose maximale admissible par semaine est fixée à 100 millirems, ce qui n'entraîne aucun trouble durant l'existence; si, accidentellement, une personne reçoit une dose dépassant cette limite, elle doit être soustraite à toute irradiation pendant le temps nécessaire à la régénération de son organisme.

9.4.1. Contrôle des doses reçues. — Dans les laboratoires, des appareils mesurent la radioactivité des poussières de l'air, et des compteurs détectent tout rayonnement pénétrant, provoquant l'alerte si l'intensité devient dangereuse. Les travailleurs portent aussi des films sensibles; après développement leur noircissement est contrôlé au densitomètre.

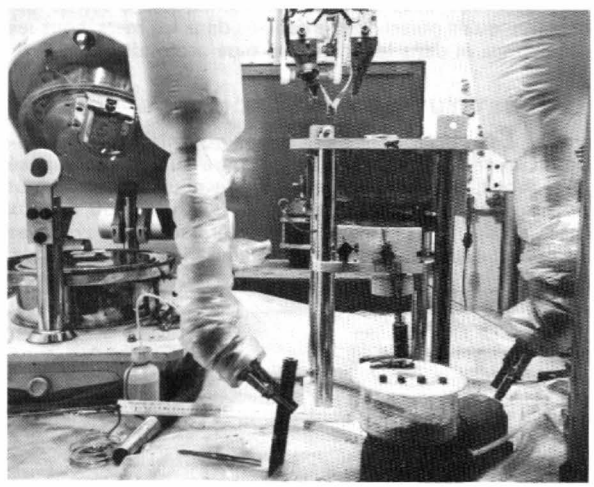


Fig. IV-22 — Cellule chaude de manipulateurs (*C.E.N.G.*)

9.4.2. Précautions prises. — Le plomb ou le béton lourd peuvent être utilisés pour former un écran contre un rayonnement pénétrant. Les manipulations se font à distance, à travers des verres épais chargés en plomb, au besoin même par télécommande, car la dose reçue varie comme l'inverse du carré de la distance à la source.

Les travaux les plus dangereux sont les manipulations chimiques de corps radioactifs (surtout lorsqu'ils sont volatils) : il faut alors opérer dans des boîtes à gants étanches, ventilées, et le port d'un scaphandre est parfois nécessaire pour éviter toute contamination.

9.5. L'élimination des déchets radioactifs. — En libérant une nouvelle source d'énergie, celle du noyau, l'homme utilise la chaleur due au passage des radiations corpusculaires ou électromagnétiques à travers la matière. Mais cette découverte entraîne la production de *déchets radioactifs* abondants au sortir des laboratoires ou des centrales nucléaires. Il faut distinguer deux catégories : les déchets *actifs*, stockés à l'intérieur des centres atomiques et les déchets *dilués* qui sont rejetés dans les fleuves lorsque leur activité est rendue inoffensive après traitement. Ainsi le Rhône apporte 700 curies par an dans la Méditerranée dont la radioactivité totale est voisine de 600 millions de curies.

Il a été nécessaire de réglementer le stockage des déchets car leur accumulation risque d'aggraver la pollution de l'atmosphère ou la contamination des rivières. Une partie des déchets peut être stockée au *niveau du sol*, mais de plus en plus les stockages se font dans des *cavités souterraines* ou au *fond des mers*.

La découverte de la radioactivité et l'utilisation de l'énergie nucléaire ont constitué depuis quelques dizaines d'années une source de progrès indispensable pour l'homme. Sans avoir une crainte irraisonnée des rayonnements nucléaires, l'humanité doit cependant prendre toutes les précautions nécessaires pour s'en protéger.

CHAPITRE V

LES RAYONS COSMIQUES

1. MISE EN ÉVIDENCE

Nous avons vu que pour déceler la présence des particules élémentaires, il est possible d'utiliser la chambre de Wilson, qui permet d'étudier les trajectoires, et le compteur de Geiger-Müller bien adapté au comptage des particules (V. chap. 2). Dans ces appareils, les particules traversent une cavité remplie de gaz et donnent naissance à des ions qui rendent le gaz conducteur ; l'importance du rayonnement se déduit de celle de l'ionisation produite. Or, quelles que soient les précautions apportées dans la construction et les mesures, il subsiste une *ionisation résiduelle ;* aussi dès 1900, Wilson avait-il admis qu'elle était due à un rayonnement extrêmement pénétrant et d'une origine sans doute extra-terrestre.

Des séries de mesures effectuées en altitude, entre 1909 et 1913, à l'aide de ballons convenablement équipés, montrèrent que vers 9 000 mètres d'altitude l'ionisation résiduelle était environ dix fois plus grande qu'au niveau du sol ; cela semblait bien confirmer l'origine extra-terrestre du rayonnement. Dès lors, une étude systématique de ces rayons, appelés *rayons cosmiques*, fut entreprise ; des mesures furent effectuées en montagne, dans les grottes et dans les mines, sous les lacs et dans les profondeurs des mers, en ballons sondes et en ballons stratosphériques. De toutes ces observations il résulte que les rayons cosmiques sont extrêmement pénétrants et qu'il est pratiquement impossible d'échapper à leur influence. En effet, si l'intensité d'un rayonnement X est diminué de moitié par quelques millimètres de plomb, il faut quelques centimètres pour les rayons les plus pénétrants, et un mètre de plomb est nécessaire avec des rayons cosmiques. C'est ce qui explique qu'ils puissent être décelés dans les mers, sous les montagnes et dans les mines les plus profondes.

2. CONSTITUTION DES RAYONS COSMIQUES

2.1. Les particules des rayons cosmiques. — L'étude du rayonnement cosmique a montré qu'il était composé d'électrons, de photons, peut-être de neutrons, et surtout de noyaux : protons (75 %), hélions (20 %), ou noyaux plus lourds (5 %). Les particules formant ces rayons se déplacent à grande vitesse et leur énergie est considérable, des centaines de milliers de fois plus grande que l'énergie obtenue dans le plus puissant accélérateur de particules En passant dans le champ magnétique du Soleil ou de la Terre, ces particules ne sont d'ailleurs pratiquement pas déviées, sauf toutefois les électrons de faible énergie.

Dans la haute atmosphère terrestre, certaines particules peuvent entrer en collision avec des atomes d'azote ou d'oxygène, subir un freinage et provoquer des réactions nucléaires qui sont à l'origine d'un rayonnement secondaire. Ces réactions ont été étudiées en physique des hautes énergies ; elles ont conduit les physiciens à admettre que dans les rayons cosmiques on trouvait aussi des muons et des mésons.

2.2. Les caractéristiques du muon et des mésons. — Le *muon*, appelé autrefois *méson mu*, est une particule de masse égale à 207 fois celle de l'électron et de durée de vie voisine de 10^{-6} s. Il porte une charge égale à celle de l'électron. Parmi les mésons, on distingue les *mésons pi* (π) ou *pions*, les *mésons K* et les *mésons nu* (ν). Les premiers ont une masse égale à 273 fois celle de l'électron et leur durée de vie est voisine de 10^{-8} s. Les mésons *K* et les mésons nu sont dits lourds (respectivement 966 et 1 075 fois plus lourds qu'un électron). Leur durée de vie est encore plus courte que celle des pions ; elle est inférieure à 10^{-16} s pour les mésons nu. Ces particules ont aussi été mises en évidence en laboratoire dans certaines réactions nucléaires où interviennent des particules d'énergie supérieure à 100 MeV.

3. ORIGINE DES RAYONS COSMIQUES

D'après les hypothèses actuelles, les rayons cosmiques ne semblent pas d'origine solaire mais paraissent provenir des espaces lointains ; comparés à tous les rayonnements existants, ce sont ceux dont la pénétration est la plus grande. Nous avons d'ailleurs vu que les corpuscules qui les constituent peuvent correspondre à des énergies très importantes pouvant atteindre 10^9 MeV. Chaque minute, il arrive sur la terre 20 particules par centimètre carré environ, avec une énergie moyenne de 1 000 MeV : l'homme subit sans dommage les effets de ces radiations naturelles, mais pour les véhicules spatiaux il faut tenir compte de l'importance de ce rayonnement.

MAGNÉTISME

CHAPITRE PREMIER

RAPPELS SOMMAIRES DES PHÉNOMÈNES MAGNÉTIQUES

1. AIMANTS

Il existe des minéraux, comme l'oxyde magnétique de formule Fe_3O_4, qui possèdent la propriété d'attirer la limaille de fer : de tels corps sont appelés *aimants naturels*. D'autres peuvent acquérir cette propriété : ce sont des *aimants artificiels ;* ainsi un morceau de fer mis au contact d'un aimant naturel devient lui-même aimant : il est aimanté (il peut aussi être aimanté par l'action d'un circuit électrique de forme appropriée : bobine circulaire plate ou longue). Cette aimantation transmise ou *aimantation induite* présente deux formes différentes suivant la substance qui subit l'aimantation.

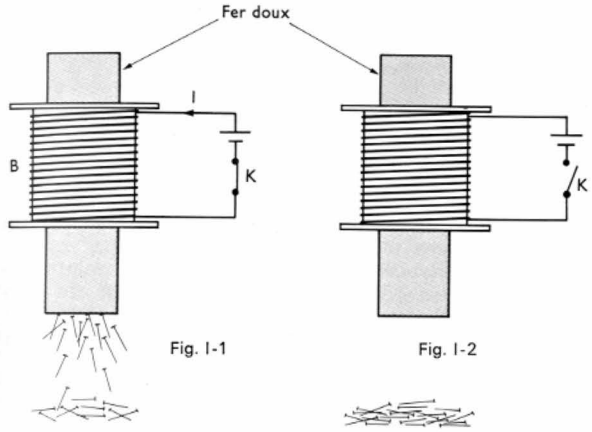


Fig. I-1 Fig. I-2

Le fer doux s'aimante temporairement lorsqu'il est placé dans le champ magnétique de la bobine B. L'aimantation cesse lorsque la bobine n'est plus alimentée

1.1. Substances à aimantation temporaire. — Certains matériaux, comme le fer doux, ne gardent leur aimantation que lorsqu'ils sont soumis à l'action d'un aimant naturel ou d'un circuit électrique (fig. I-1) ; l'aimantation cesse dès qu'on les soustrait à cette action (fig. I-2).

1.2. Substances à aimantation permanente. — D'autres matériaux comme l'acier trempé, restent partiellement aimantés alors que l'aimant naturel ou le circuit électrique n'a plus d'action sur elles. On dit que de tels corps possèdent une *aimantation rémanente*.

2. CHAMP MAGNÉTIQUE

La région de l'espace où l'on peut mettre en évidence des actions magnétiques est appelée *champ magnétique*. L'expérience montre que ces actions consistent en forces d'attraction ou de répulsion et en couples d'orientation. Par exemple, à la surface de la terre, un corps aimanté tend à s'orienter suivant une direction qui caractérise le *champ magnétique terrestre*.

3. LES AIMANTS LONGS

Avec un aimant dont la longueur est égale à plusieurs dizaines de fois la largeur ou l'épaisseur, on constate que *les actions magnétiques sont localisées aux extrémités :* par exemple, la limaille de fer n'est attirée que par les extrémités d'un aimant long (fig. I-3). On appelle *pôles magnétiques* ces régions où le magnétisme semble être concentré. Il faut noter qu'il n'apparaît jamais un seul pôle sur un aimant.

Fig. I-3

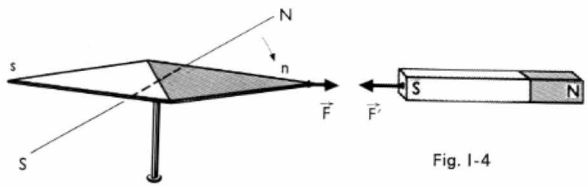


Fig. I-4

Attraction entre deux pôles de noms contraires

Dès que l'on approche l'un de l'autre deux pôles de deux aimants longs il y a *attraction* ou *répulsion* suivant les extrémités choisies. Cela a conduit à penser qu'il y aurait deux « magnétismes » concentrés dans les pôles de l'aimant : ils ont été appelés *magnétisme nord* et *magnétisme sud*. Les pôles ont reçu les noms de *pôle nord* et de *pôle sud* et l'on peut dire qu'il y a *attraction entre des pôles de noms contraires et répulsion entre des pôles de même nom* (fig. I-4 et I-5).

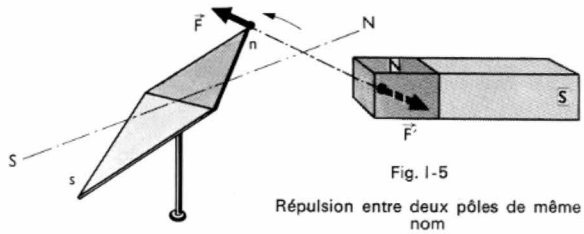


Fig. I-5

Répulsion entre deux pôles de même nom

Lorsqu'une aiguille aimantée est placée dans le champ magnétique terrestre, l'une de ses extrémités s'oriente toujours vers le pôle nord terrestre : par définition on l'appelle le *pôle nord de l'aimant ;* l'autre extrémité orientée vers le sud terrestre est évidemment le pôle sud de l'aimant (fig. I-6).

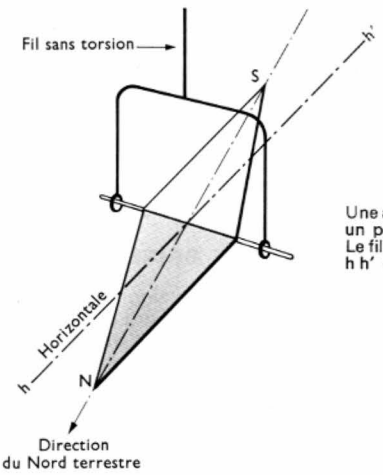


Fig. I-6

Une aiguille aimantée présente un pôle nord et un pôle sud. Le fil de torsion et l'horizontale h h' définissent le plan méridien magnétique

4. LOI DE COULOMB

Coulomb a trouvé que les forces d'attraction ou de répulsion qui s'exerçaient entre pôles séparés par une distance d, décroissaient suivant l'inverse du carré de d (fig. I-7). Ce résultat présente une grande analogie avec la loi de Coulomb utilisée en électrostatique (V. t. 1, Électricité, chap. 11). En suivant les mêmes méthodes il a été possible de définir des *masses magnétiques* pour caractériser les pôles des aimants. Par la suite il est apparu qu'une *masse magnétique n'est pas une réalité* mais, comme cette notion permettait de simplifier l'étude et l'interprétation de nombreux phénomènes magnétiques, il sembla préférable de la conserver. Pendant longtemps d'ailleurs l'utilisation des masses magnétiques constitua le meilleur moyen de traduire l'aimantation d'un corps et pour cette raison on rappellera rapidement la définition de la masse magnétique.

Par définition, en un point donné d'un champ magnétique, les masses magnétiques m et m', portées par deux pôles de deux aimants différents sont proportionnelles aux forces $\vec{F}$ et $\vec{F'}$ qui s'exercent sur ces pôles :

$$\frac{m}{m'} = \left| \frac{\vec{F}}{\vec{F'}} \right| .$$

Les masses magnétiques sont donc des grandeurs mesurables. L'unité de masse magnétique est l'ampère-mètre (symbole : A . m).

La loi de Coulomb exprime que la force exercée entre deux masses magnétiques ponctuelles m et m' est proportionnelle à ces masses magnétiques et inversement proportionnelle au carré de leur distance d :

$$F = K \frac{m\,m'}{d^2}$$

Dans le système SI on exprime F en newtons, m et m' en ampères-mètres, d en mètres. K est une constante égale à $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}$ H/m ; μ_0 est appelé la perméabilité absolue du vide.

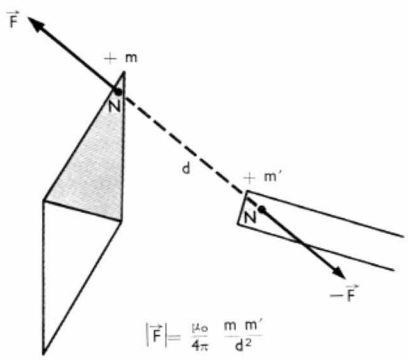


Fig. I-7

Il est souvent commode de considérer que les *masses magnétiques d'un pôle nord sont des grandeurs positives* et que *celles d'un pôle sud sont des grandeurs négatives :* la quantité totale de magnétisme d'un aimant est nulle.

La loi d'interaction des masses magnétiques se traduisant par la même formule que la loi d'interaction des charges électriques en électrostatique, tous les théorèmes généraux de l'électrostatique ont des équivalents en magnétisme (théorèmes de Gauss, de Coulomb, formule de Poisson).

5. EXPÉRIENCE DE L'AIMANT BRISÉ

On pourrait penser qu'en coupant une aiguille aimantée en son milieu on arriverait à isoler un pôle nord d'un côté et un pôle sud de l'autre. L'expérience de l'aimant brisé montre qu'il n'en est rien : *tout fragment d'aiguille aimantée possède deux pôles*, comme l'aiguille initiale (fig. I-8).

En juxtaposant les petits aimants brisés on constate la disparition des pôles intermédiaires et l'on retrouve l'aimant initial.

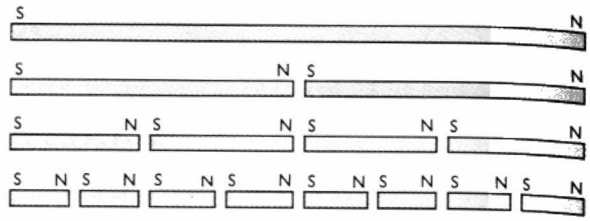


Fig. I-8 — Expérience de l'aimant brisé

L'aimantation n'est donc pas une propriété localisée aux pôles, elle affecte tout le volume de l'aimant qui apparaît comme une association d'un grand nombre d'aimants élémentaires.

6. INDUCTION MAGNÉTIQUE. LIGNES D'INDUCTION

En chaque point d'un champ magnétique on est amené à définir une grandeur vectorielle (car les effets produits sur l'aiguille aimantée ont un sens parfaitement déterminé), appelée **induction magnétique.** On la représente généralement par la lettre $\vec{B}$.

Dans le vide, l'induction peut être considérée comme égale à la *force s'exerçant sur un pôle nord portant une masse magnétique unité.*

D'après la loi de Coulomb, l'intensité de la force d'attraction ou de répulsion s'exerçant sur une masse magnétique m placée en un point A est proportionnelle à m et elle est donnée par la relation suivante :

$$\vec{F} = m\,\vec{B}$$

L'induction en un point peut être représentée par un *vecteur* (comme toute force) *dirigé selon l'axe magnétique d'une aiguille aimantée* placée en ce point (axe passant par les pôles de l'aiguille) et orienté du pôle sud vers le pôle nord (fig. I-9). Le module du vecteur est proportionnel à l'intensité B de l'induction. Cette intensité

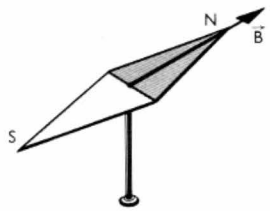


Fig. I-9

B est définie à partir des lois de l'électromagnétisme et elle s'exprime en *teslas* (symbole : T). En un point d'un champ magnétique uniforme, l'induction est égale à 1 T si un conducteur rectiligne indéfini de 1 m de long, parcouru par un courant d'intensité 1 A, est soumis à une force de 1 N (V. t. 1, Électricité, chap. 24).

L'induction en un point dépend du dispositif produisant le champ magnétique, de la position de ce dispositif par rapport au point où l'on considère l'induction et aussi de la nature du milieu dans lequel l'ensemble est plongé, c'est-à-dire de la perméabilité de ce dernier. Pour mieux connaître un champ magnétique, on trace souvent des lignes d'induction ou lignes de champ.

Les *lignes d'induction d'un champ magnétique* sont des courbes tangentes en chacun de leurs points à un vecteur induction $\vec{B}$. On leur donne pour sens celui du vecteur $\vec{B}$.

On peut se faire une idée de la forme des lignes d'induction en déplaçant une petite aiguille aimantée dans le champ magnétique : en chaque point elle prend la direction du vecteur $\vec{B}$ (fig. I-10). On peut opérer plus rapidement en réalisant un *spectre magnétique*. On saupoudre de limaille de fer le plan où l'on veut étudier les lignes d'induction : chaque grain de limaille joue le rôle d'une petite aiguille aimantée et s'oriente en tombant dans le champ. L'ensemble des grains dessine le spectre magnétique (fig. I-11).

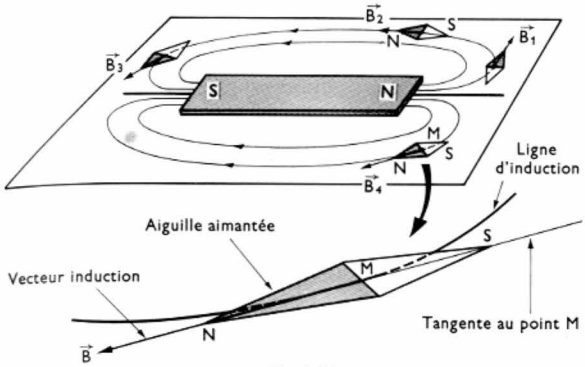


Fig. I-10

Lignes d'induction tracées dans le champ d'un aimant droit

Dans le cas d'un aimant droit, les lignes s'épanouissent à partir des pôles. Avec un aimant en fer à cheval il en est de même, mais, de plus, elles sont pratiquement parallèles dans la zone séparant les deux branches de l'aimant.

Un ensemble de lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé définit un **tube d'induction.** Aucune ligne de champ ne peut sortir ou entrer d'un tube donné, puisque

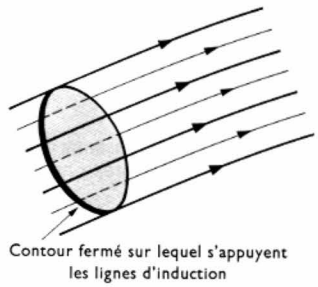


Fig. I-12

Tube d'induction

deux lignes d'induction ne peuvent passer par le même point (fig. I-12).

Le champ magnétique terrestre est un exemple de champ magnétique. Il est défini en chaque point par deux angles, la *déclinaison* et l'*inclinaison*, et par l'intensité de la composante horizontale de l'induction. La déclinaison est l'angle

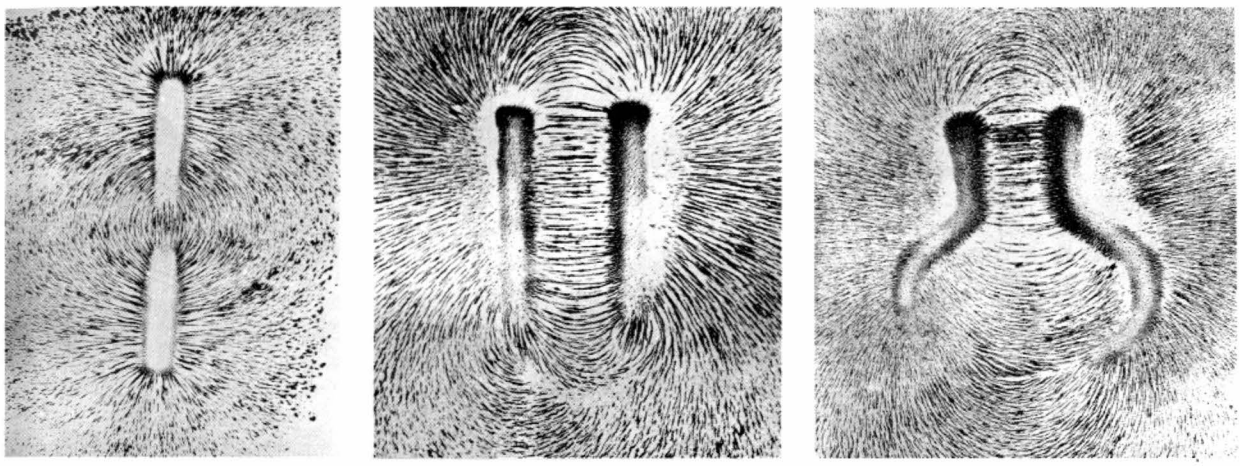


Fig. I-11 — Spectres magnétiques (*Roger Perrin*)

Il est intéressant de noter qu'en un point d'un champ magnétique ne peut passer qu'une ligne (sinon, en ce point, il y aurait deux orientations possibles pour une même aiguille aimantée).

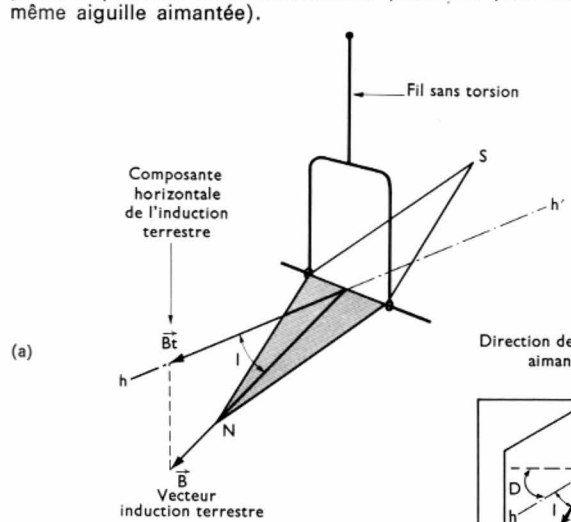


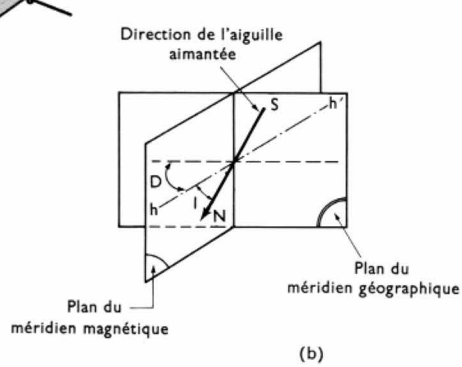
Fig. I-13

Champ magnétique terrestre
a - Inclinaison terrestre (angle I)
b - Déclinaison terrestre (angle D du dièdre)

que fait le plan du méridien géographique, plan vertical passant par le pôle nord géographique, avec le plan du méridien magnétique, plan vertical contenant l'aiguille aimantée. L'inclinaison correspond à l'angle que fait le vecteur induction magnétique terrestre avec le plan horizontal (fig. I-13).

7. CHAMP MAGNÉTIQUE UNIFORME

7.1. Définition. — On dit qu'un champ magnétique est *uniforme* lorsque dans la région de l'espace considéré tous les vecteurs $\vec{B}$ sont équipollents. Les lignes d'induction de ce champ sont des droites parallèles entre elles; par exemple, le champ qui règne entre les branches d'un aimant en U est uniforme (fig. I-14).



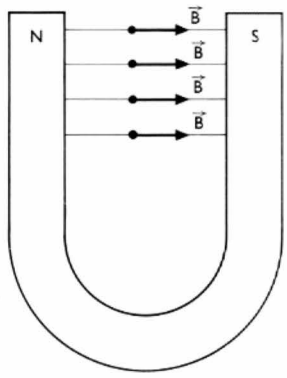


Fig. I-14

7.2. Action d'un champ uniforme sur un aimant. Moment magnétique. — Dans un champ magnétique uniforme où l'induction en un point est $\vec{B}$, un barreau droit aimanté *NS* (fig. I-15) est soumis à un couple de moment *T*. En effet, les pôles de l'aimant sont soumis aux forces :

$$\vec{F_A} = m\vec{B} \text{ pour le pôle nord,}$$
$$\vec{F_B} = -m\vec{B} \text{ pour le pôle sud.}$$

Les forces ont la même intensité, mais leurs sens sont opposés. Si leurs points d'application sont séparés par une distance *l* le moment *T* est égal à :

$$T = mBl \sin \alpha = (ml)\, B \sin \alpha$$

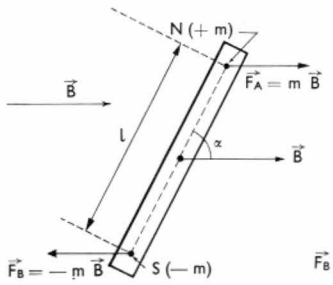


Fig. I-15

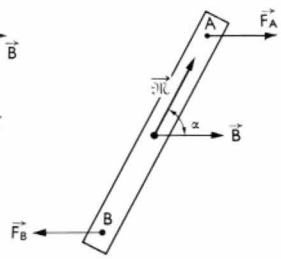


Fig. I-16

Ce résultat peut être exprimé sous une autre forme en introduisant une grandeur vectorielle appelée **moment magnétique de l'aimant.** Elle est représentée par un vecteur $\vec{\mathcal{M}}$ de module $\mathcal{M} = ml$, dirigé selon l'axe *SN* des pôles de l'aimant, du pôle sud vers le pôle nord (fig. I-16).

Le moment du couple qui s'exerce sur le barreau aimanté est alors donné par la relation suivante :

$$T = \mathcal{M}B \sin \alpha$$

ou vectoriellement par l'égalité :

$$\vec{T} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$$

Sous l'action de ce couple l'aimant pivote (si rien ne s'oppose à ce mouvement) jusqu'à ce que l'angle α soit nul, c'est-à-dire jusqu'à ce que les vecteurs $\vec{\mathcal{M}}$ et $\vec{B}$ aient même direction et même sens (fig. I-17).

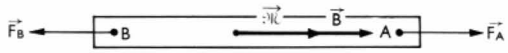


Fig. I-17

Il est intéressant de noter que le moment magnétique de l'aimant permet de caractériser ce dernier *sans connaître ni les masses magnétiques portées par les pôles, ni la distance qui sépare ceux-ci.* Cette grandeur dépend notamment du volume de l'aimant.

L'unité de moment magnétique est l'*ampère-mètre carré* (symbole : $A.m^2$).

8. AIMANTATION

Les actions magnétiques exercées ou subies par un aimant quelconque sont le résultat des actions exercées ou subies par les divers éléments en lesquels on peut décomposer l'aimant. Un petit élément de volume *dv* entourant un point *P* constitue un aimant de moment magnétique $d\vec{\mathcal{M}}$. Les actions exercées ou subies par lui dépendent uniquement de ce moment magnétique élémentaire.

Lorsque le volume *dv* devient infiniment petit, le rapport $\frac{d\vec{\mathcal{M}}}{dv}$ tend vers une limite $\vec{J}$:

$$\vec{J} = \frac{d\vec{\mathcal{M}}}{dv}$$

Cette limite $\vec{J}$ est appelée *aimantation* ou *intensité d'aimantation* au point *P*. Cette grandeur représente le **moment magnétique de l'unité de volume ;** elle s'exprime en ampère par mètre (symbole : A/m).

On définit aussi le moment magnétique de l'unité de masse de substance ou **moment magnétique massique :**

$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{\mathcal{M}}}{dm} = \frac{\vec{J}}{\rho}$$

(si *dm* représente la masse de l'élément *dv* considéré et si ρ désigne la masse volumique de ce corps).

Dans un même champ magnétique des substances différentes s'aimantent différemment et il est possible de comparer leurs aimantations au moyen de $\vec{J}$ ou de $\vec{\sigma}$.

9. FLUX MAGNÉTIQUE

On considère souvent une grandeur scalaire, beaucoup plus pratique que l'induction, appelée *flux magnétique.*

Si, dans un champ magnétique uniforme, on place une surface *ds* dont la normale $\vec{N}$ fait un angle α avec le vecteur induction $\vec{B}$, le flux $d\Phi$ (fig. I-18) à travers cette surface est égal à :

$$d\Phi = B\, dS \cos \alpha$$

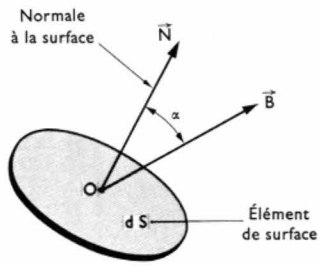


Fig. I-18

Flux à travers une surface

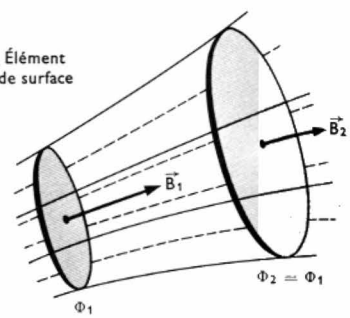


Fig. I-19

Flux à travers un tube d'induction

Plus généralement, dans un champ magnétique non uniforme une surface *S* embrasse un flux Φ donné par la relation suivante :

$$\Phi = \iint_S B\, dS \cos \alpha$$

(*B* représente l'intensité de l'induction en un point où ce vecteur fait un angle α avec la normale correspondante). Dans le système SI, le flux magnétique s'exprime en *webers* (symbole : Wb).

À l'intérieur d'un tube de force le flux magnétique conserve une valeur constante (fig. I-19). Cette propriété fondamentale permet de dire que l'induction croît lorsque la section du tube d'induction diminue et inversement.

10. CHAMP OU EXCITATION MAGNÉTIQUE. PERMÉABILITÉ MAGNÉTIQUE

10.1. Définition. — On appelle *champ magnétique* ou *excitation magnétique* une grandeur vectorielle $\vec{H}$ que l'on définit à partir de l'induction $\vec{B}$ par la relation :

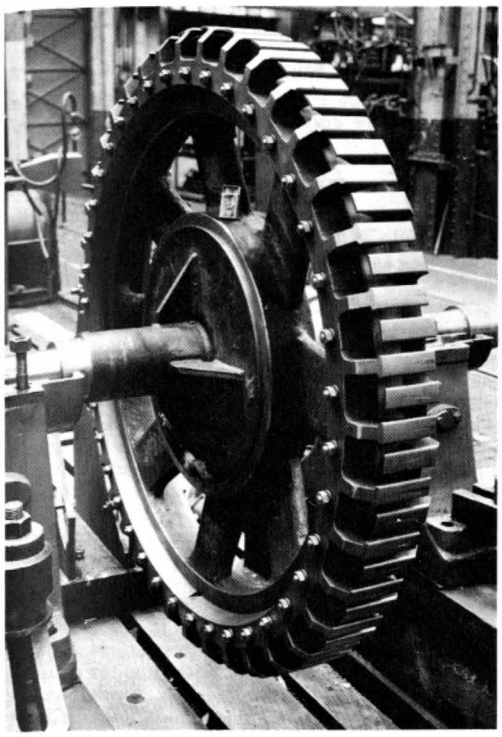
$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$$

μ est un coefficient qui dépend du milieu et qui est appelé **perméabilité magnétique absolue.** Dans le vide ou dans l'air cette relation s'écrit :

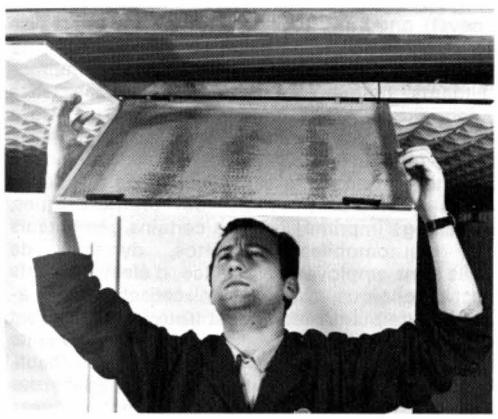
$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad (\mu_0 = 4\pi.10^{-7} \text{ H/m})$$

L'unité de champ magnétique est *l'ampère par mètre* (symbole : A/m).

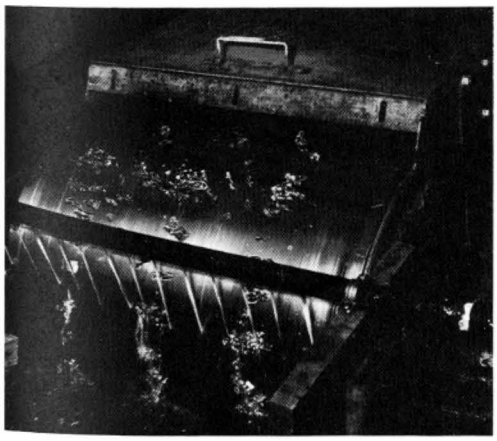
UTILISATION DES AIMANTS



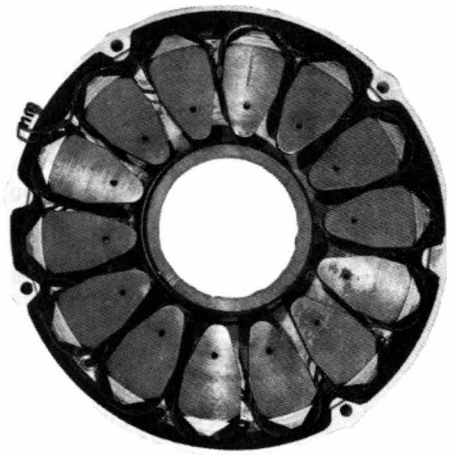
(*Alsthom*)
Rotor d'alternateur pilote diphasé à aimants permanents et à axe vertical (12 kVA, 75 tr/mn, 220 V, 80 pôles)



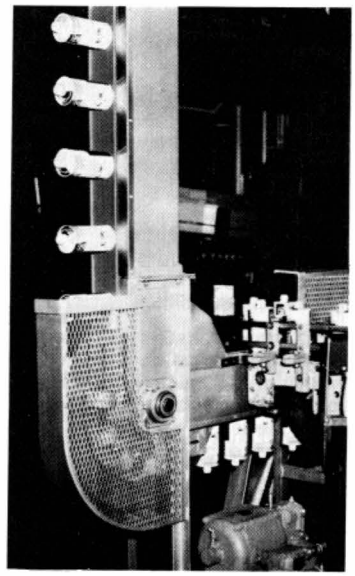
(*Arelec*)
Utilisation d'aimants permanents pour la fixation de panneaux d'un plafond suspendu



Tambour magnétique d'épuration en milieu liquide *(Céfilac)*

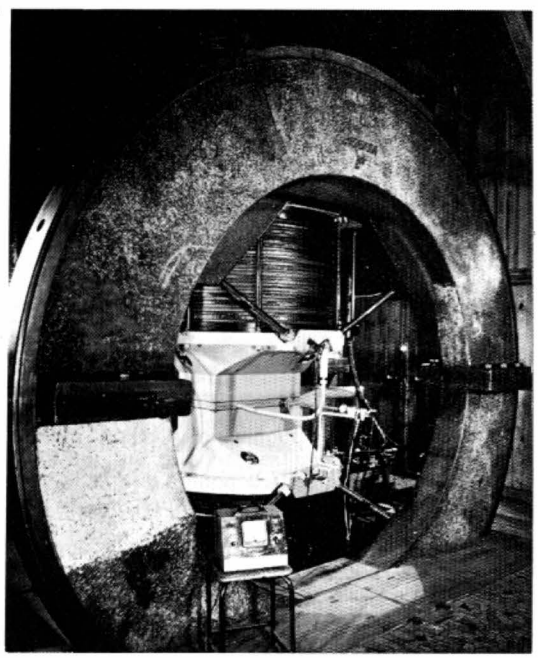


(*Allevard-Ugine*)
Inducteur de moteur à 14 aimants



(Céfilac)
Élévateur magnétique vertical pour boîtes de conserve

(*Arelec*)
Gobelets magnétiques, pouvant recevoir divers objets, pour fixation sur des tables en fer



Aimant permanent de 70 tonnes avec grand spectrographe au laboratoire de spectrométrie nucléaire d'Orsay
(*C.N.R.S.*)

Indépendante du milieu considéré, l'excitation magnétique est seulement liée à la cause qui produit le champ magnétique (aimant ou circuit parcouru par un courant électrique).

10.2. Influence du milieu. — Lorsqu'une ligne d'induction passe d'un premier milieu dans un deuxième milieu de perméabilité différente, on constate qu'en traversant la surface de séparation, le champ magnétique $\vec{H}$ et l'induction $\vec{B}$ changent de direction et d'intensité. Si H_t et H_n, B_t et B_n désignent respectivement les composantes des vecteurs $\vec{H}$ et $\vec{B}$ selon la tangente et la normale à cette surface au point d'intersection, on montre (fig. I-20) :

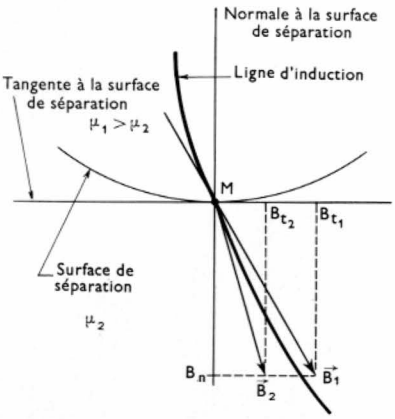


Fig. I-20

Traversée de la surface de séparation de deux milieux, par une ligne d'induction

1° *pour le champ magnétique*, que la composante tangentielle ne change pas, tandis que les composantes normales dans le premier et dans le second milieu (H_{n_1} et H_{n_2}) sont inversement proportionnelles aux perméabilités respectives μ_1 et μ_2 de ces milieux :

$$\frac{H_{n1}}{H_{n2}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

2° *pour l'induction magnétique*, que la composante normale conserve la même valeur, tandis que les composantes tangentielles B_{t_1} et B_{t_2} dans le premier et dans le second milieu sont proportionnelles aux perméabilités μ_1 et μ_2 :

$$\frac{B_{t_1}}{B_{t_2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

11. SUSCEPTIBILITÉ MAGNÉTIQUE

L'aimantation $\vec{J}$ d'un corps dépend du champ magnétique $\vec{H}$ au point où il se trouve. Le rapport de ces deux grandeurs est appelé **susceptibilité magnétique du corps.** Il est souvent représenté par la lettre χ :

$$\chi = \frac{\vec{J}}{\vec{H}}$$

C'est un nombre abstrait dont la valeur est une caractéristique du corps.

Si $\vec{J}$ et $\vec{H}$ ont le même sens, χ est positif ; le moment magnétique $\vec{\mathfrak{M}}$ du corps aimanté a le même sens que le champ magnétisant : *le corps s'aimante dans le sens du champ.*

Si $\vec{J}$ et $\vec{H}$ sont de sens contraire, χ est négatif ; le moment magnétique $\vec{\mathfrak{M}}$ du corps aimanté a le sens contraire du champ magnétisant : *le corps s'aimante en sens inverse du champ.*

12. FABRICATION DES AIMANTS

Les aimants permanents ont d'abord été fabriqués à partir d'acier ou chrome-cobalt. Vers 1935, on a commencé à étudier des alliages de fer-aluminium, nickel, cobalt et cuivre. Ces alliages fondus ou frittés sont connus sous le nom de ticonal ou alnico. Vers 1951, on a utilisé les ferrites de baryum et de strontium. Actuellement les alliages ticonal et les ferrites sont employés concurremment et sont les deux types de matériaux à aimants permanents les plus couramment utilisés. Dans certains cas spéciaux, on emploie aussi divers alliages de cuivre-nickel-cobalt, cuivre-nickel-fer, manganèse-bismuth, manganèse-aluminium, platine-cobalt, vanadium-cobalt-fer, des poudres de fer ou fer-cobalt agglomérées. Des alliages de cobalt et terres rares sont en cours de développement et présentent des qualités magnétiques remarquables. Avec les matériaux modernes, la désaimantation, due au vieillissement ou à l'action d'un champ magnétique (si ce dernier n'est pas trop intense), peut être considérée comme négligeable. Cette propriété permet d'ailleurs de réaliser des aimants présentant des pôles de noms contraires très proches les uns des autres. Ainsi les formes traditionnelles des aimants en acier (barreau ou fer à cheval) ont pu être abandonnées et l'on réalise des aimants ayant la forme de pastilles, de bâtonnets, de couronnes, etc. Cela explique les utilisations fort nombreuses des aimants permanents dans divers accessoires (plateaux, fermetures, entraînements, jouets, etc.). Dans les appareils de mesures électriques (galvanomètres, ampèremètres, voltmètres, etc.), ils ont permis notamment une grande amélioration de la sensibilité et de la fidélité. Dans certains moteurs (moteurs de tourne-disques, moteurs à bobinage imprimé) et dans certains générateurs (alternateurs d'automobiles, magnétos, dynamos de bicyclette), ils sont employés à la place d'électroaimants (V. t. 1, Électrotechnique, chap. 1). La réalisation d'appareils de volume et de poids réduits s'est trouvée grandement facilitée par leur utilisation. On emploie aussi des aimants en électroacoustique (dans des écouteurs, des haut-parleurs, des microphones) et en électronique (dans des appareils de laboratoire et dans divers tubes électroniques : magnétrons, carcinotrons, etc.).

CHAPITRE II

MILIEUX MATÉRIELS MAGNÉTIQUES

1. MOMENT MAGNÉTIQUE ATOMIQUE

En étudiant systématiquement l'action d'un champ magnétique dit *champ magnétisant* sur un très grand nombre de corps, on a été conduit à distinguer trois catégories principales : les *diamagnétiques*, les *paramagnétiques* et les *ferromagnétiques*.

Avec les corps paramagnétiques et diamagnétiques l'aimantation cesse lorsque le champ magnétisant est supprimé. Avec les corps ferromagnétiques l'aimantation persiste plus ou moins en l'absence du champ magnétisant.

Pour expliquer ces différents types d'aimantation il faut considérer le moment magnétique présenté par chaque atome et celui d'une parcelle de corps comprenant un grand nombre d'atomes. On va donc rappeler ce que représente le **moment magnétique atomique.**

Le moment magnétique atomique résulte des mouvements des électrons qui gravitent autour du noyau et qui, en même temps, tournent sur eux-mêmes.

Un électron décrivant une trajectoire d'aire S avec une fréquence de rotation n équivaut à un courant électrique d'intensité ne (si e désigne la charge de l'électron) circulant dans une spire de surface S ; par conséquent

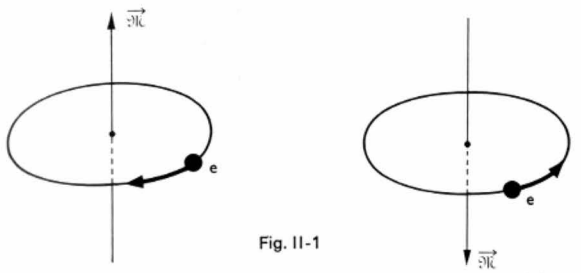


Fig. II-1

on peut associer à cet électron un moment magnétique de module égal à *nSe*. Ce *moment magnétique orbital* peut être représenté par un vecteur $\vec{\mathcal{M}}$ perpendiculaire au plan de la trajectoire (fig. II-1) ; son sens dépend du sens de rotation de l'électron autour du noyau (V. t. 1, Électricité, chap. 24, § 6.4). À ce moment orbital, il faut ajouter un *moment magnétique de spin* (V. t. 1, Physique nucléaire chap. 1, § 2.4.), qui est d'ailleurs très supérieur au premier.

Dans un atome ces différents moments magnétiques se composent pour donner le **moment résultant atomique.** Pour certains corps, comme les diamagnétiques par exemple, ce moment est nul. Pour d'autres corps il n'est pas nul, mais une parcelle de matériau ne paraît pas aimantée pour autant : les moments atomiques ont toutes les directions possibles et le *moment magnétique de l'ensemble est nul.*

Ce qui vient d'être dit s'applique à des corps ne se trouvant pas dans un champ magnétique. Dans le cas contraire, le corps s'aimante : toute parcelle de ce corps présente un moment magnétique. L'aimantation obtenue dépend de la nature du corps comme on va le voir à présent.

2. LES DIAMAGNÉTIQUES

On appelle diamagnétiques les substances qui présentent une *aimantation $\vec{J}$ proportionnelle au champ $\vec{H}$ dans lequel elles sont placées et de sens opposé à celui-ci.* La susceptibilité magnétique de ces corps est négative : *ils s'aimantent en sens inverse du champ magnétisant* (fig. II-2).

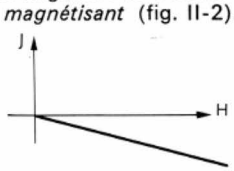


Fig. II-2

Cette susceptibilité magnétique est faible : par exemple pour l'eau $\chi = -0{,}72.10^{-6}$, pour le bismuth $\chi = -1{,}4.10^{-6}$. Parmi les corps diamagnétiques on trouve des gaz, des liquides et des solides : par exemple, tous les métalloïdes autres que l'oxygène, beaucoup de métaux (or, argent, mercure, cuivre, plomb), beaucoup de sels et presque toutes les substances organiques (benzène, naphtalène). Pour comprendre l'influence du champ magnétisant on va considérer le cas simple d'un atome dans lequel un électron de masse m décrit une trajectoire circulaire de rayon r avec une vitesse angulaire ω. L'électron est soumis à une force attractive $\vec{F}$ due à la présence du noyau et à une force centrifuge égale et opposée à cette force $\vec{F}$. L'intensité F de cette force est donc égale à :

$$F = m\,\omega^2\,r$$

Si cette vitesse angulaire ω correspond à une fréquence de rotation de n tours par seconde ($\omega = 2\,\pi n$), le moment orbital dû à cet électron a un module égal à :

$$\mathcal{M} = n\,S\,e$$

en désignant par S la surface de l'orbite ($S = \pi\,r^2$) et par e la charge d'un électron. Si l'atome est placé en un point d'un champ d'induction magnétique où le vecteur $\vec{B}$ est perpendiculaire au plan de l'orbite, une force supplémentaire d'intensité $f = Bev$ s'exerce sur l'électron (V. t. 1, Électronique, chap. 2). Elle est dirigée suivant le rayon de la trajectoire mais selon le sens de rotation de l'électron sur celle-ci ; cette force est dirigée vers le centre de l'orbite (fig. II-3) ou vers l'extérieur (fig. II-4). Ce sens

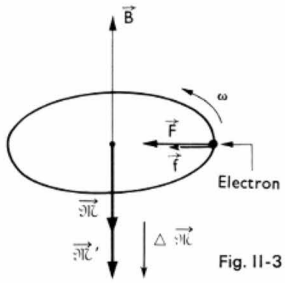


Fig. II-3

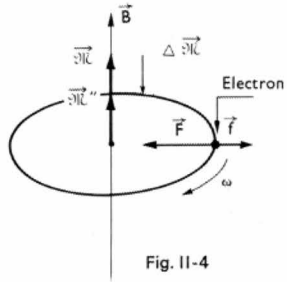


Fig. II-4

est obtenu en appliquant la règle des trois doigts ou celle de l'observateur d'ampère (V. t. 1, Électricité, chap. 24).

Dans le premier cas, l'action de cette force se traduit par une augmentation de l'accélération normale de l'électron et de la vitesse angulaire ω ; le module du moment magnétique prend une valeur $\mathcal{M}'$ supérieure à $\mathcal{M}$. L'orbite reste inchangée (Langevin a montré qu'il en est ainsi dans tous les cas) et l'intensité de la résultante des forces $\vec{F}$ et $\vec{f}$ est égale à celle de la force centrifuge $m\omega'^2 r$ si ω' désigne la nouvelle valeur de la vitesse angulaire ($\omega' = \omega + \Delta\omega$)

$$F + Bev = m\,(\omega + \Delta\omega)^2\,r$$
$$= m\,(\omega^2 + 2\,\omega\,\Delta\omega + \Delta\omega^2)\,r$$

Si l'accroissement $\Delta\omega$ de la vitesse angulaire est petit vis-à-vis de ω, c'est-à-dire si $\Delta\omega^2$ est négligeable devant les autres termes de la somme, on obtient l'égalité suivante :

$$\Delta\omega = \frac{Bev}{2\,m\,\omega\,r} = \frac{Be}{2\,m} \quad (\text{car } v = r\,\omega)$$

La variation $\Delta\mathcal{M}$ du module du moment magnétique résultant de la variation $\Delta\omega$ est donc égale à :

$$\Delta\mathcal{M} = Se\,\Delta n = Se\,\frac{\Delta\omega}{2\,\pi} = \frac{r^2Be^2}{4\,m}$$

Dans le second cas, l'action de $\vec{B}$ produit une diminution de ω et le module du moment magnétique prend une valeur $\mathcal{M}''$ inférieure à $\mathcal{M}$. Dans les deux cas le vecteur $\Delta\vec{\mathcal{M}}$ qui traduit la variation du moment magnétique est dirigé en sens opposé de l'induction magnétique $\vec{B}$.

En l'absence de champ magnétisant, le moment magnétique atomique est nul. Sous l'action de ce champ le moment magnétique orbital des électrons est modifié et chaque atome présente un moment magnétique résultant de sens opposé à celui du champ d'induction $\vec{B}$. Il en est de même pour un certain volume d'un corps diamagnétique : il s'aimante en sens inverse du champ magnétisant. Un diamagnétique n'est donc pas attiré par le pôle qui produit le champ mais il est repoussé vers les régions où l'induction est faible.

3. LES PARAMAGNÉTIQUES

3.1. Explication du paramagnétisme. — On appelle paramagnétiques les substances qui présentent une *aimantation proportionnelle au champ dans lequel elles sont placées et de même sens que lui.* Pour ces substances,

Fig. II-5

χ est positif et peu élevé (comme les susceptibilités des diamagnétiques) (fig. II-5). Par exemple, pour l'oxygène $\chi = 107{,}7.10^{-6}$ à 20 °C. Parmi les substances paramagnétiques on trouve l'oxygène, l'acide nitrique, l'ozone, un assez grand nombre de métaux (platine, palladium, potassium, sodium, aluminium, chrome, manganèse, etc.), de nombreux sels (notamment de fer, de chrome, de manganèse, de cuivre, etc.) et les éléments de la famille des terres rares (V. t. 1. Physique nucléaire, chap. 1, § 3).

Pour une substance paramagnétique, la symétrie des trajectoires des électrons est insuffisante et la somme des moments magnétiques électroniques n'est pas nulle : l'atome possède un moment magnétique résultant $\vec{\mathcal{M}}$.

Comme on l'a dit, en l'absence de tout champ extérieur les moments magnétiques atomiques ont toutes les orientations possibles et pour un certain volume de matière les effets de tous ces moments magnétiques s'annulent: le corps n'est pas aimanté. En revanche, sous l'action d'un champ extérieur $\vec{H}$, chaque atome tend à s'orienter de façon que les moments magnétiques $\vec{\mathcal{M}}$ des atomes soient parallèles au champ $\vec{H}$ et de même sens. La résultante de tous les moments magnétiques contenus dans un volume déterminé de substance n'est plus nulle et le moment résultant a le même sens que le champ magnétisant $\vec{H}$: le corps s'aimante dans le sens du champ.

Le paramagnétisme n'exclut pas le diamagnétisme qui se traduit par une variation de moment magnétique électronique opposée à la direction du champ. Cependant, pour les substances paramagnétiques, dont les atomes ont des symétries plus faibles, c'est le phénomène d'orientation des moments atomiques dans le sens du champ qui est prépondérant. Le diamagnétisme est sous-jacent. En général il est négligeable par rapport au paramagnétisme sauf dans quelques substances comme le palladium ou le platine où on a pu le mettre nettement en évidence.

3.2. Loi de Curie. — On considère des substances paramagnétiques à structure simple: les molécules présentent des moments magnétiques mais elles *sont suffisamment éloignées les unes des autres pour que les actions mutuelles d'orientation soient négligeables*. L'hypothèse contraire sera étudiée plus loin (paramagnétisme à champ moléculaire). L'orientation des atomes dans le champ est constamment détruite à mesure qu'elle tend à se réaliser, du fait des chocs entre atomes. Elle est d'autant moins importante que l'agitation thermique est plus grande c'est-à-dire que la température est plus élevée. C'est ce que traduit la loi expérimentale de Curie: la susceptibilité χ est inversement proportionnelle à la température absolue T du corps:

$$\chi = \frac{C}{T}$$

C désigne la *constante de Curie*.

Cette relation en entraîne une autre entre σ et T:

$$\sigma = \frac{C' H}{T} \qquad \left(C' = \frac{C}{\rho}\right)$$

Langevin a donné une démonstration thermodynamique de la loi expérimentale de Curie. Il a également établi une théorie du paramagnétisme fondée sur les principes de la mécanique statistique; elle fournit des résultats plus complets que l'expérience et étend considérablement le domaine du contrôle de la théorie par l'expérience.

Ce résultat permet de déduire une valeur de la constante C':

$$C' = \frac{m \sigma_0^2}{3 R}$$

m est la masse d'une mole de molécules; la constante σ_0 représente le moment magnétique massique que posséderait la substance si les axes de toutes les molécules étaient parallèles au champ; on l'appelle *saturation absolue*. Elle est égale au produit du moment magnétique d'une molécule par le nombre de molécules contenues dans l'unité de masse. R est la constante des gaz parfaits relative à une mole de molécules ($R = 8{,}314$ J/mol . K).

Cependant, ces théories thermodynamiques statistiques ne conviennent que pour les gaz peu comprimés et pour certaines solutions peu étendues. Pour toutes les autres substances on ne peut pas négliger les actions mutuelles des molécules les unes sur les autres.

3.3. Paramagnétisme à champ moléculaire

3.3.1. Influence du champ moléculaire. — Pour certaines substances paramagnétiques, l'orientation d'une molécule est due au champ extérieur $\vec{H}$ et à l'action des molécules voisines. Weiss considère que l'action de l'ensemble des molécules (pourvues de moments magnétiques) sur l'une d'entre elles est équivalente à un champ magnétique proportionnel à l'aimantation $\vec{J}$ et de même orientation qu'elle; ce champ $\vec{H}_m$ est appelé **champ moléculaire:**

$$\vec{H}_m = n\vec{J} \quad (n \text{ étant une constante})$$

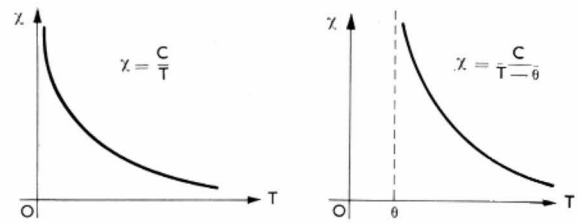
Pour une substance à champ moléculaire, au lieu du champ $\vec{H}$ il faut considérer la somme du champ extérieur $\vec{H}$ et du champ moléculaire $\vec{H}_m$. La relation utilisée précédemment s'écrit alors sous la forme suivante:

$$\vec{J} = C\frac{\vec{H} + \vec{H}_m}{T} = C\frac{\vec{H} + n\vec{J}}{T}$$

C désignant la constante de Curie.

La susceptibilité magnétique devient alors égale à:

$$\chi = \frac{C}{T - \theta}$$



Paramagnétique suivant la loi de Curie — Paramagnétique à champ moléculaire

Fig. II-6

La susceptibilité magnétique χ devient infinie pour une température θ appelée *température de point de Curie* (fig. II-6). Lorsque $T = \theta$ tous les moments magnétiques sont alors orientés parallèlement à la direction du champ excitateur. Les constantes C et θ peuvent être mesurées directement.

3.3.2. Exemples de paramagnétisme à champ moléculaire. — L'oxygène est un exemple de corps paramagnétique. À l'état gazeux et sous pression modérée l'oxygène suit la loi de Curie:

$$\chi = \frac{C}{T} \quad \text{au moins jusqu'à 720 K.}$$

À la température ordinaire, la constante de Curie a été mesurée avec précision: $C = 0{,}031\,58$.

Pour l'oxygène gazeux fortement comprimé il faut tenir compte du champ moléculaire:

$$\chi = \frac{C}{T - \theta}$$

$\theta = 5{,}6$ K pour de l'oxygène dont la densité relative par rapport à l'air d est égale à 0,2 à 20 °C. $\theta = -25{,}6$ K si $d = 0{,}4$ à 20 °C. La température θ est donc négative. *Le point de Curie n'est pas accessible* dans ce cas: même au zéro absolu on n'obtiendrait pas l'orientation complète des axes magnétiques. Cela montre que pour l'oxygène les actions mutuelles gênent l'orientation par le champ extérieur au lieu de la favoriser: *le champ moléculaire de l'oxygène est négatif*. Les nombreuses mesures effectuées ont montré que le coefficient n du champ moléculaire est proportionnel à la densité. Des champs moléculaires positifs ou négatifs se manifestent dans les solutions de beaucoup de sels des métaux du groupe du fer. Pour ces substances la température θ du point de Curie est comprise entre quelques degrés Celsius et quelques dizaines de degrés Celsius. De très nombreux sels suivent la loi $\chi = \frac{C}{T - \theta}$ et cela dans de grands intervalles de température (de — 150 à 600 °C).

Exemples:

$Fe\,SO_4$ (sulfate ferreux)	$\theta = -16$ °C
$Mn\,Cl_2$ (chlorure de manganèse)	$\theta = +21$ °C
$Fe_2\,(SO_4)_3$ (sulfate ferrique)	$\theta = -73$ °C
$Cu\,SO_4$ (sulfate de cuivre)	$\theta = -72$ °C

3.3.3. Les exceptions. — Quelques substances font exception à la loi et présentent un *paramagnétisme indépendant de la température:* c'est le cas du permanganate de potassium (dont le paramagnétisme est constant) et

de certains oxydes métalliques (CuO, NiO, Fe_2O_3 aux températures élevées). Le point de Curie apparaît comme la *limite inférieure pour laquelle la substance est paramagnétique*. Dans le ferromagnétisme (V. ci-après) il représentera une limite supérieure: au-dessus de cette température l'aimantation est proportionnelle au champ magnétisant et les corps sont alors de véritables paramagnétiques suivant bien la théorie du champ moléculaire (leur susceptibilité est alors égale à $\chi = \frac{C}{T - \theta}$. Ce sont d'ailleurs les métaux ferromagnétiques, portés à une température supérieure au point de Curie, qui ont permis les premières vérifications de la loi précédente.

4. FERROMAGNÉTISME

4.1. Généralités. — On appelle ferromagnétiques des substances susceptibles d'acquérir une aimantation considérable, beaucoup plus forte que celle des paramagnétiques ou des diamagnétiques (fig. II-7).

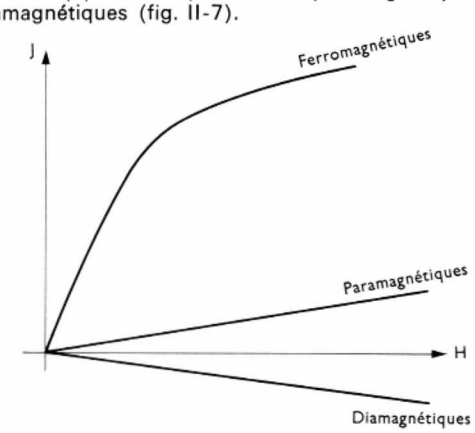


Fig. II-7

Les principales substances ferromagnétiques sont le fer le nickel, le cobalt, le gadolinium, leurs alliages et certains de leurs composés. La pyrrhotine (sulfure de fer hexagonal de composition voisine de FeS) est ferromagnétique de même que la magnétite qui est l'aimant naturel le plus anciennement connu. Certains alliages de fer ne sont pratiquement pas magnétiques, comme l'alliage à 88 % de fer, 12 % de manganèse; de même l'alliage à 68 % de fer et 32 % de nickel a les propriétés d'une substance paramagnétique. En revanche certains alliages appelés alliages de Heussler (comme celui qui est formé de 61,5 % de cuivre, 23,5 % de manganèse et 15 % d'aluminium) sont fortement ferromagnétiques alors que chacun des constituants pris séparément ne possède pas de propriétés ferromagnétiques. Toutes les substances sont des solides cristallisés; il n'existe pas de fluides ferromagnétiques.

Les substances ferromagnétiques présentent une aimantation exceptionnellement élevée et, de plus, *cette aimantation n'est pas proportionnelle au champ magnétisant* comme dans les substances paramagnétiques ou diamagnétiques. Elle croît avec le champ et tend vers une limite, appelée *aimantation à saturation*, atteinte lorsque le champ a une valeur suffisante. De plus, l'aimantation n'est pas une fonction définie du champ agissant, elle dépend du passé de l'échantillon c'est-à-dire des champs magnétiques dans lesquels il a été placé antérieurement et plus généralement de tous les traitements magnétiques, mécaniques et thermiques qu'a subis l'échantillon. Ces conséquences de l'histoire antérieure sont désignées sous le nom de *phénomène d'hystérésis*.

4.2. Courbe de première aimantation. — Pour préciser la façon dont s'effectue l'aimantation d'un corps ferromagnétique, on trace la **courbe de première aimantation :** elle représente les variations de l'induction B ou de l'aimantation J (modules de $\vec{B}$ ou de $\vec{J}$) dans le matériau en fonction de l'intensité H du champ magnétisant lorsque celui-ci croît à partir d'une valeur nulle. Pour tracer cette courbe il faut enlever préalablement

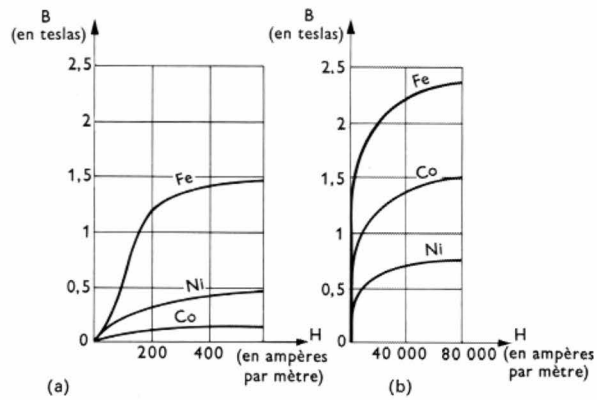


Fig. II-8 — Courbes de première aimantation
a - en champs faibles, b - en champs forts

toute trace d'aimantation en chauffant la substance à une température supérieure à son point de Curie (775 °C pour le fer) et la laisser refroidir à l'abri de tout champ magnétique (V. ci-après). On l'aimante ensuite en la plaçant dans un champ $\vec{H}$ que l'on fait croître progressivement.

Les courbes de première aimantation $B(H)$ pour du fer, du nickel et du cobalt ont été représentées sur les figures II-8; (il faut noter un changement dans la position relative des courbes du cobalt et du nickel pour les champs faibles et les champs forts.) La figure II-9 donne les courbes de première aimantation $B(H)$ de certains alliages.

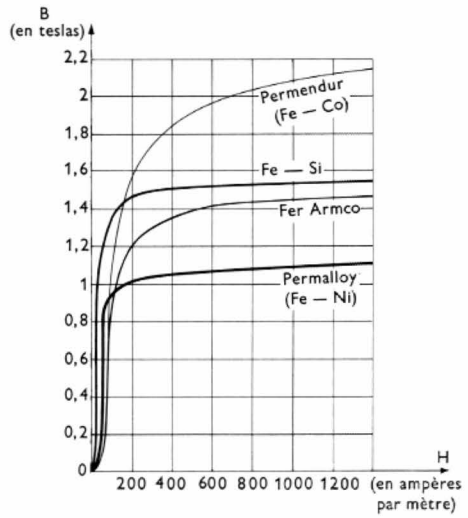


Fig. II-9

Sur une courbe de première aimantation $J(H)$ on peut distinguer trois régions (fig. II-10) :

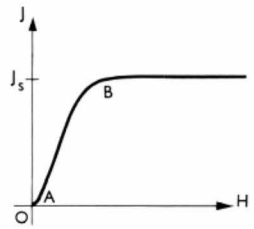


Fig. II-10

1° Celle qui correspond aux champs faibles (de O à A) : l'aimantation croît régulièrement et lentement avec le champ.

2° Celle des champs moyens (de A à B) : l'aimantation croît très rapidement.

3° Celle des champs intenses (au-delà de B) : l'aimantation tend asymptotiquement vers une limite J_s qui est l'aimantation à saturation (caractéristique de la substance).

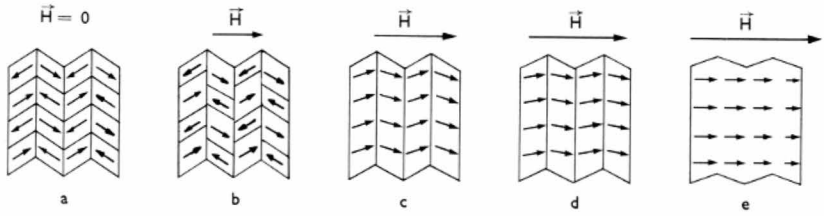


Fig. II-11

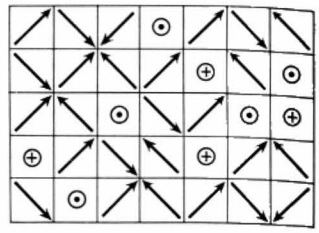


Fig. II-12

Domaines de Weiss
Dans chaque domaine l'induction est représentée par un vecteur
⊙ Vecteur dirigé vers l'observateur
⊕ Vecteur de sens opposé au précédent

L'interprétation de la courbe de première aimantation utilise les résultats des travaux de P. Weiss (1907). On admet qu'une substance ferromagnétique est divisée en domaines spontanément aimantés à saturation (*domaine de Weiss*). On a pu montrer expérimentalement l'existence de ces domaines microscopiques. On sait maintenant que les forces orientant les moments magnétiques des atomes sont des forces d'échanges analogues à celles qui assurent la stabilité de certaines molécules (hydrogène par exemple) ; elles ne s'exercent pratiquement qu'entre atomes voisins. Les domaines peuvent comprendre un grand nombre d'atomes (10^{15}) et l'on peut expliquer leur existence en faisant intervenir les forces de couplage avec le réseau cristallin (forces magnétocristallines). En surface se forment des domaines dits de fermeture car ils ferment le circuit magnétique emprunté par le flux qui passe d'un domaine à un autre. Entre deux domaines se trouve non pas une simple paroi, mais une couche de passage (*paroi de Bloch*) à l'intérieur de laquelle l'aimantation tourne progressivement d'une direction à la direction opposée (en restant toujours dans un plan parallèle à ces deux directions).

Si la substance ne se trouve pas dans un champ magnétique, les aimantations des domaines adjacents sont opposées et l'aimantation macroscopique de l'échantillon est nulle (fig. II-11 a). Si l'on applique un champ magnétique, les domaines dont l'aimantation spontanée a une direction voisine de celle du champ augmentent de volume aux dépens des autres et une légère aimantation apparaît (fig. II-11 b). Les déplacements des parois qui limitent les domaines sont réversibles dans les champs magnétisants faibles ; les parois reprennent leur position initiale si le champ redevient nul. Si l'on augmente encore l'intensité du champ $\vec{H}$, les déplacements des parois deviennent plus importants en amplitude et *irréversibles* ; dans certains domaines l'aimantation s'inverse brutalement pour prendre la direction du champ magnétisant. Les domaines sont devenus moins nombreux et plus volumineux (fig. II-11 c). Lorsque le champ continue à croître, la direction de l'aimantation spontanée de tous les domaines tend à se confondre avec celle du champ magnétisant (fig. II-11 d). Puis il se produit une disparition des dernières parois et pour un champ très intense on obtient la saturation de l'échantillon (fig. II-11 e).

Théoriquement, dans une substance idéalement pure et bien cristallisée, les déplacements de paroi ne nécessitent aucune dépense d'énergie. En fait, il n'en est pas ainsi pour les substances réelles qui ont des tensions internes irrégulièrement distribuées et où se rencontrent des cavités et des inclusions non magnétiques.

Les *directions d'aimantation spontanée des domaines correspondent à des directions cristallographiques*. Dans le cas du fer, par exemple, ce sont les trois directions correspondant aux arêtes de la maille cubique élémentaire ; pour chaque direction il y a deux sens d'aimantation spontanée (fig. II-12). Toutefois, l'orientation peut être modifiée par des tensions d'origine externe ou interne ou encore par des champs démagnétisants internes pouvant provenir d'inclusions non magnétiques ; il se forme des domaines très allongés appelés *pics de Néel*. L'aimantation n'est pas toujours uniforme à l'intérieur des domaines.

Les observations des domaines de Weiss se font en disposant des suspensions colloïdales de magnétite (dont les grains sont proches de 1 μm ou même plus petits) sur la surface des substances ferromagnétiques étudiées. On constate que les petits grains s'orientent dans les directions de magnétisation spontanée. Il faut avoir préparé la surface par polissage électrolytique. Les dimensions habituelles des domaines sont comprises entre 10 et 100 μm.

L'aimantation à saturation dépend notamment de la nature du corps et de sa température (fig. II-13). À mesure que cette dernière augmente, d'une part l'aimantation à saturation décroît, d'autre part elle est atteinte avec des excitations magnétiques moins intenses. À une température

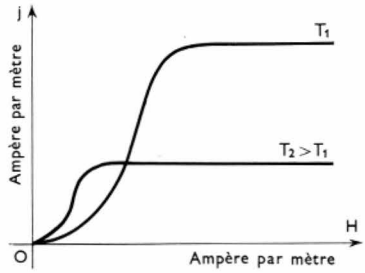


Fig. II-13

Influence de la température sur l'aimantation d'un corps

plus ou moins élevée selon le corps, le ferromagnétisme disparaît même. C'est *le point de Curie* (fig. II-14). Le corps porté à des températures plus élevées se comporte comme une substance paramagnétique et sa susceptibilité (fig. II-6) est alors donnée par la loi suivante :

$$\chi = \frac{C}{T - \theta}$$

On utilise cette propriété pour désaimanter les corps. On les porte pour cela à une température dépassant légèrement celle du point de Curie et on les laisse ensuite se refroidir à l'abri de toute action magnétique.

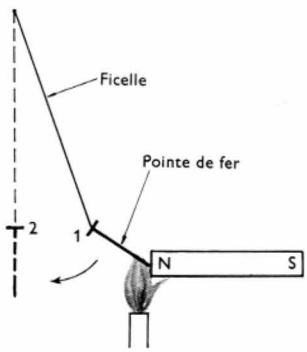


Fig. II-14

Désaimantation d'un corps par chauffage à une température légèrement supérieure à celle du point de Curie

1. La pointe de fer est attirée par l'aimant
2. Le ferromagnétisme a disparu

En conclusion, les substances ferromagnétiques s'aimantent comme les paramagnétiques, c'est-à-dire dans le sens du champ, mais :

1° elles prennent une aimantation élevée même pour des faibles valeurs de l'excitation magnétique ;

2° cette aimantation induite n'est pas proportionnelle au champ ;

3° elle peut être conservée par le corps après qu'il ait été retiré du champ magnétique.

Les corps ferromagnétiques présentent un grand intérêt pratique. En effet, ils ont permis la réalisation des machines

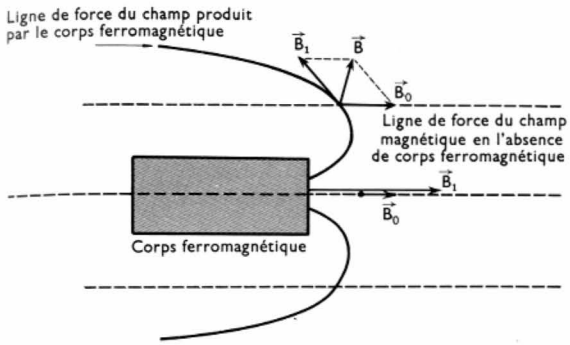


Fig. II-15 — Modification d'un champ magnétique par introduction d'un corps ferromagnétique dans celui-ci

électriques, des électroaimants, des aimants permanents etc. Dans les premiers on les utilise pour réaliser des circuits magnétiques. Pour comprendre leur rôle, il faut savoir qu'un champ magnétique est profondément modifié si l'on introduit dans celui-ci un matériau ferromagnétique. En effet, ce corps, en s'aimantant, produit à son tour un champ magnétique et, en un point, l'induction est la résultante de l'induction due au champ inducteur et de l'induction due au matériau aimanté (fig. II-15). Ainsi les lignes d'induction semblent canalisées par le matériau ferromagnétique, ce qui permet l'obtention d'induction et de flux élevés (fig. II-16).

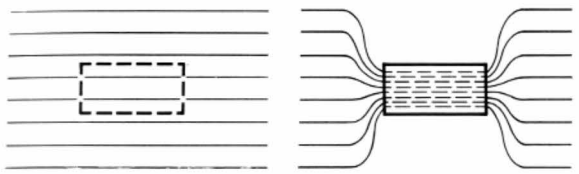


Fig. II-16 — Lignes d'induction du champ magnétique avant et après l'introduction du corps ferromagnétique

4.3. Hystérésis. — La courbe d'aimantation rend compte du comportement d'un matériau magnétique non aimanté que l'on place dans un champ magnétique croissant indéfiniment à partir d'une valeur nulle. Mais elle n'en rend plus compte lorsque le matériau a été aimanté. En effet, si, partant d'un point M correspondant à une excitation magnétique H_m, on fait décroître cette dernière, le point figuratif de la courbe $J(H)$ décrit une portion de courbe située au-dessus de la précédente (fig. II-17). Le matériau conserve donc une certaine aimantation. C'est le **phénomène d'hystérésis.** Ainsi se trouve mis en évidence, un retard à la désaimantation (d'où le nom d'hystérésis).

Pour une valeur du champ $\vec{H}$ l'aimantation J_2 est supérieure à J_1 ; cela signifie que les domaines de Weiss ne reprennent pas tous l'orientation qu'ils possédaient pour cette même valeur du champ lorsqu'on les a aimantés pour la

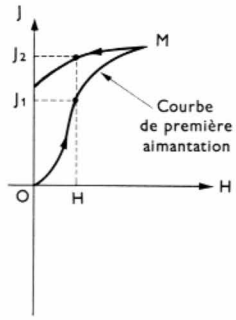


Fig. II-17

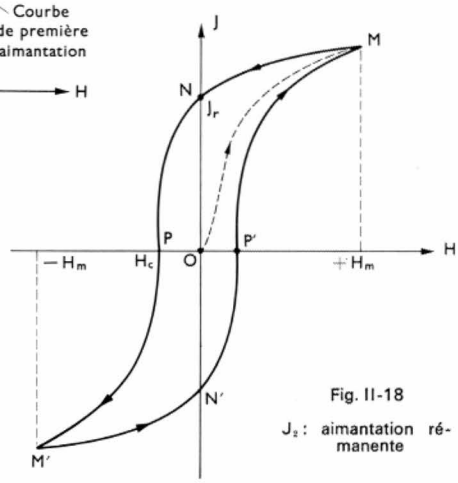


Fig. II-18

J_r : aimantation rémanente

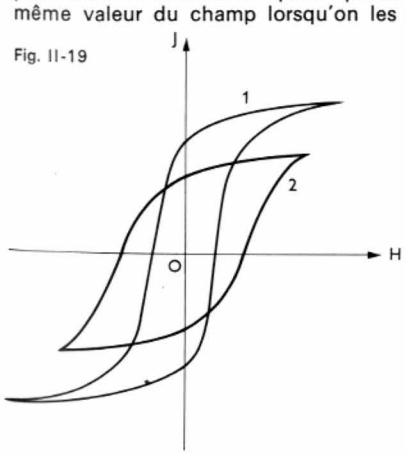
première fois. L'aimantation d'un ferromagnétique soumis à un champ dont l'intensité varie entre deux limites $+H_m$ et $-H_m$ prend une suite de valeurs auxquelles correspond une courbe $J(H)$ fermée appelée cycle d'aimantation ou *cycle d'hystérésis* (fig. II-18). L'étude des cycles est très importante parce qu'elle permet de connaître les traitements auxquels sont soumis les tôles des transformateurs et de certaines machines électriques industrielles.

Lorsque le champ magnétisant décroît de $+H_m$ à 0 le point figuratif de l'aimantation décrit l'arc MN ; l'induction n'est pas nulle lorsque le champ est nul : sa valeur, représentée par ON, est appelée *aimantation rémanente.* Le champ magnétisant est ensuite négatif (on continue à le faire croître en valeur absolue) et il faudra atteindre une valeur H_c appelée *champ coercitif* pour que l'aimantation s'annule (cela correspond à l'arc NP de la courbe). Lorsque le champ magnétisant passe de l'intensité $-H_c$ à $-H_m$, le point figuratif décrit l'arc PM'. La branche $M'N'M$ correspond à la variation du champ de $-H_m$ à $+H_m$.

Un cycle d'aimantation n'acquiert sa forme définitive qu'après plusieurs variations du champ $\vec{H}$ entre les deux limites $-\vec{H_m}$ et $+\vec{H_m}$ (phénomène de traînage magnétique).

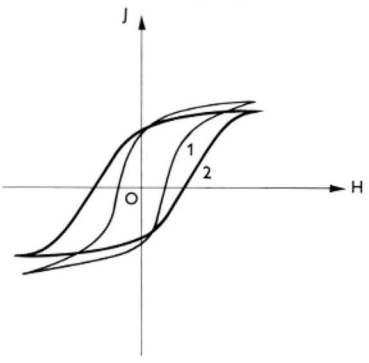
La forme du cycle d'hystérésis dépend de nombreux facteurs et notamment de la composition de la substance ferromagnétique : pour les aciers, par exemple, la présence de carbone dans le fer a pour effet d'élargir le cycle. L'aimantation rémanente est plus faible, le champ coercitif plus grand (fig. II-19). Trempe et écrouissage provoquent des modifications de même sens (fig. II-20 et II-21).

Fig. II-19



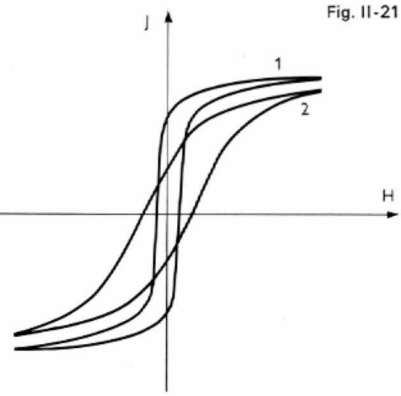
1. Fer 2. Acier

Fig. II-20



1. Acier recuit
2. Le même acier trempé

Fig. II-21



1. Fer doux 2. Fer écroui

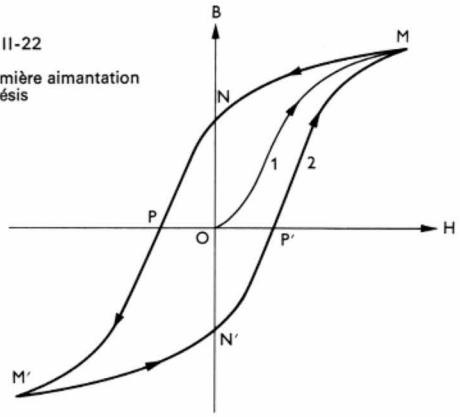


Fig. II-22
1. Courbe de première aimantation
2. Cycle d'hystérésis

On représente souvent les variations de l'intensité de l'induction $\vec{B}$ en fonction de l'excitation magnétique $\vec{H}$ (fig II-22) car ces deux grandeurs sont facilement mesurables (ce qui n'est pas le cas de $\vec{J}$). Comme dans le cas précédent, on est amené à définir une courbe de première aimantation et un cycle d'hystérésis si $\vec{H}$ évolue entre deux valeurs opposées. Les courbes ont des formes semblables pour les valeurs faibles et pour les valeurs moyennes du champ $\vec{H}$; en revanche lorsque le champ $\vec{H}$ est suffisamment intense, l'aimantation $\vec{J}$ reste constante et égale à $\vec{J}_s$ (aimantation à saturation) tandis que $\vec{B}$ croît légèrement avec $\vec{H}$.

4.4. Perméabilité absolue et perméabilité relative. — La similitude des courbes $J(H)$ et $B(H)$ s'explique parfaitement car les grandeurs $\vec{B}$, $\vec{J}$ et $\vec{H}$ sont liées. En un point d'un barreau ferromagnétique que l'on suppose provisoirement infiniment long, le champ magnétique est la somme du champ extérieur $\vec{H}$ et du champ moléculaire représenté par l'aimantation $\vec{J}$.

L'induction $\vec{B}$ en ce point est alors donnée par la relation suivante :

$$\vec{B} = \mu_o (\vec{H} + \vec{J})$$

On peut encore écrire que l'aimantation $\vec{J}$ est égale au produit de $\vec{H}$ et du nombre χ qui est la susceptibilité du matériau *pour la valeur* $\vec{H}$ *du champ magnétisant*. Ce nombre n'est pas constant : il dépend non seulement de $\vec{H}$ mais des états magnétiques antérieurs. Dans le cas d'une première aimantation, χ croît progressivement, passe par un maximum et décroît ensuite. Lorsque $\vec{H}$ augmente, et que le corps est saturé, l'aimantation J_s restant constante, le rapport $\frac{J_s}{H}$ tend progressivement vers une valeur nulle (fig. II-23). La susceptibilité n'est donc pas indépendante du champ $\vec{H}$ comme dans le cas d'un corps paramagnétique. Cette particularité étant notée, puisque l'on a encore $\vec{J} = \chi\vec{H}$, on peut écrire :

$$\vec{B} = \mu_o (1 + \chi) \vec{H}$$

En posant :

$$\mu_r = 1 + \chi$$

on déduit :

$$\vec{B} = \mu_o . \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$$

avec :

$$\mu = \mu_o \mu_r$$

μ_r et μ représentent les **perméabilités relative et absolue du corps.** Dépendant de χ, μ_r varie avec l'intensité du champ H. Dans le cas d'une première aimantation, sa valeur passe par un maximum, puis décroît ensuite et tend vers 1 (fig. II-24).

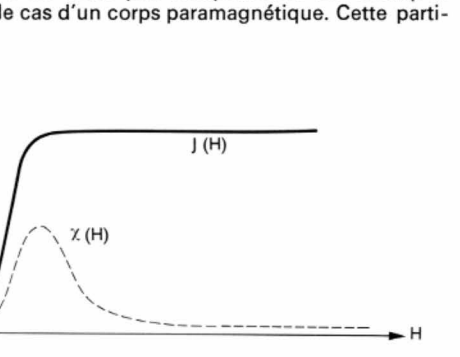


Fig. II-23

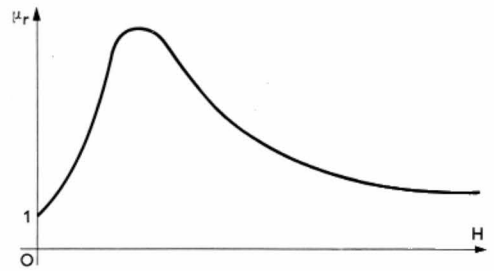


Fig. II-24 — Variation de la perméabilité relative d'un corps ferromagnétique en fonction de celle de l'excitation magnétique

Remarque : Si le corps n'est pas infiniment long, les régions polaires produisent en tout point intérieur un champ qui se retranche du précédent : c'est le **champ démagnétisant** (fig. II-25). Il faut le rendre négligeable, autant que faire se peut, pour conserver un aimant.

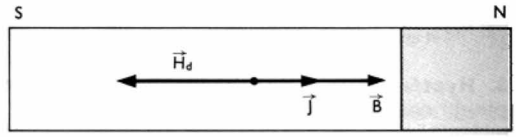


Fig. II-25 — Champ démagnétisant $\vec{Hd}$

Dans ce but, pendant les périodes où un aimant reste inemployé, on l'introduit dans un circuit magnétique ne présentant aucun entrefer pour supprimer ces zones polaires. Ainsi on associe deux aimants droits en réunissant les pôles de noms contraires par des morceaux de fer doux ; de même on place une barrette de fer doux entre les pôles d'un aimant en U (fig. II-26).

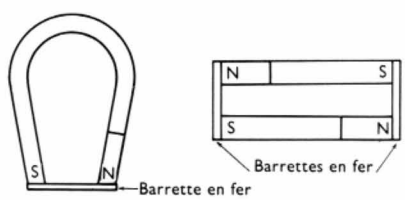
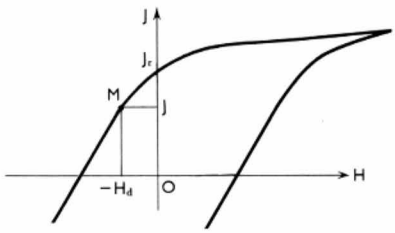


Fig. II-26

Conservation des aimants permanents

4.5. Conséquences de l'hystérésis. — L'hystérésis des corps ferromagnétiques a permis la réalisation des aimants permanents artificiels ; en effet, pour fabriquer ces derniers, il faut employer une substance pouvant s'aimanter et *présentant une certaine aimantation rémanente ainsi qu'un champ coercitif suffisant* pour que le champ démagnétisant soit inférieur à ce dernier. Le point M, qui caractérise l'état magnétique de l'aimant, est placé de façon que l'énergie conservée par celui-ci soit la plus forte possible (fig. II-27). En revanche, le phénomène d'hystérésis présente quelques inconvénients. Ainsi, pour *désaimanter* complètement un corps ferromagnétique, il faut le placer

Fig. II-27



Point de fonctionnement d'un aimant permanent

dans un champ dont l'amplitude varie entre deux valeurs extrêmes $+ H_m$ et $- H_m$ progressivement décroissantes et non pas seulement dans un champ de sens contraire à celui qu'il produit (fig. II-28). Il est, en effet, nécessaire que le point figuratif de l'état magnétique du corps décrive

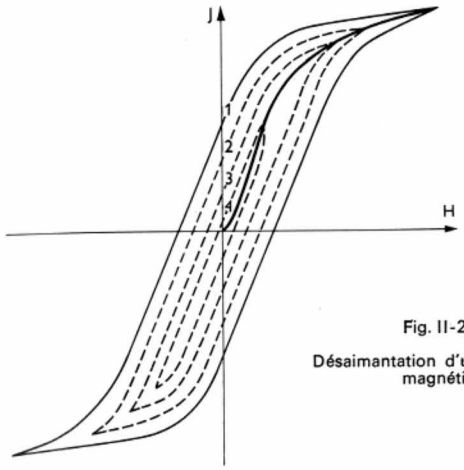


Fig. II-28

Désaimantation d'un corps ferromagnétique

une série de cycles dont l'amplitude diminue régulièrement pour que le dernier se réduise à un point. À cette seule condition l'induction rémanente a une valeur nulle à la fin de l'opération.

Du fait de leur hystérésis, les corps ferromagnétiques absorbent une certaine énergie lorsqu'on les place dans un champ magnétique variant entre $+ H_m$ et $- H_m$. L'énergie consommée est proportionnelle à l'*aire du cycle d'hystérésis et au volume de la substance*. En courant alternatif, un cycle étant décrit à chaque période, les pertes sont proportionnelles à la fréquence du courant. Les pertes par unité de volume se calculent dans certains cas à l'aide de la formule empirique de Steinmetz :

$$P = K f \widehat{B}^n$$

où l'on représente la fréquence du courant par f, l'induction maximale par $\widehat{B}$ et où n est un exposant compris entre 6 et 12 selon le matériau. K, constante dépendant de la nature de la substance, est généralement comprise entre 100 et 500. On exprime f en hertz, $\widehat{B}$ en teslas et P en watts.

5. ANTIFERROMAGNÉTISME

Dans les substances antiferromagnétiques, les moments magnétiques des ions du réseau cristallin sont orientés deux à deux en sens contraire : l'aimantation spontanée est alors nulle. Dans un champ magnétique il se produit une légère aimantation comparable à celle d'un paramagnétique.

Le chrome, l'oxyde de fer FeO, le fluorure de manganèse MnF_2, le sulfure de manganèse MnS sont des corps antiferromagnétiques.

Étudiées par le professeur Louis Néel (Prix Nobel de physique en 1970) les substances antiferromagnétiques présentent une susceptibilité maximale pour une température T_N (température de Néel). La susceptibilité croît

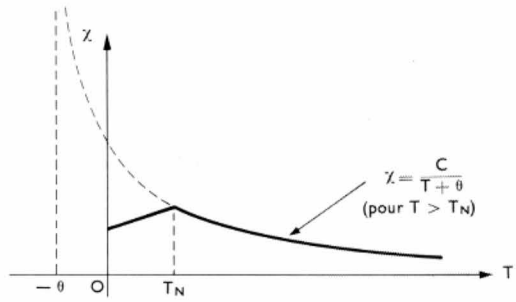


Fig. II-29 — Antiferromagnétisme

avec la température T jusqu'à T_N, puis au-delà de cette température elle décroît en suivant la loi de Curie-Weiss :

$$\chi = \frac{C}{T + \theta}$$

C désigne une constante et θ représente une température constante généralement positive (fig. II-29).

6. FERRIMAGNÉTISME

Le ferrimagnétisme s'observe avec certains ferrites qui sont des corps dont la composition chimique peut être représentée par la formule générale $MeFe_3O_4$ où le symbole Me désigne un ou plusieurs métaux bivalents (cuivre, zinc, nickel, manganèse, cadmium, magnésium, cobalt, etc.).

Dans ces ferrites les ions métalliques et les ions oxygène sont disposés aux nœuds d'un réseau cristallin et le moment magnétique d'un certain volume de cette substance dépend des moments magnétiques de ces ions. Pratiquement tout se passe comme s'il y avait deux sous-réseaux correspondant à des moments magnétiques de sens contraire (fig. II-30). On a vu qu'il en est de même dans un

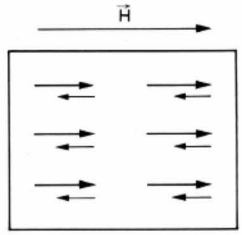


Fig. II-30

Représentation schématique des deux sous-réseaux d'un corps ferrimagnétique

corps antiferromagnétique mais, dans ce cas, les moments magnétiques opposés ayant même module, leurs effets s'annulent. En revanche dans un corps ferrimagnétique, les modules de ces moments sont différents et il n'y a pas compensation : on observe une aimantation *spontanée* lorsqu'on le place dans un champ magnétique. *L'aimantation à saturation est plus faible que pour un corps ferromagnétique* (l'induction à saturation la plus importante est voisine de 0,5 T contre 2 T avec certains aciers) puisque les deux réseaux ont des effets antagonistes. L'agitation thermique limite l'ordre nécessaire à l'aimantation. Avec certains corps ferrimagnétiques les effets des deux sous-réseaux se compensent parfaitement à une température déterminée : *le corps n'est plus magnétique* (point de compensation). Si la température croît encore, l'aimantation s'inverse (fig. II-31).

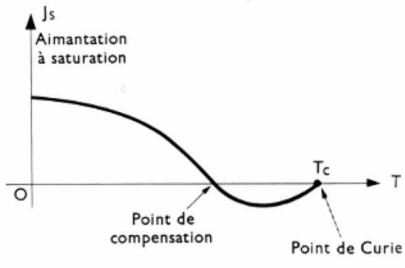


Fig. II-31

À une température inférieure à celle correspondant au point de compensation, le comportement d'un corps ferrimagnétique se rapproche beaucoup de celui d'un corps ferromagnétique. Les variations de l'induction $\vec{B}$ dans le corps dépendent de celles du champ magnétisant $\vec{H}$ et elles sont représentées par une courbe de première aimantation ou par un cycle d'hystérésis selon que le corps a été préalablement aimanté ou non.

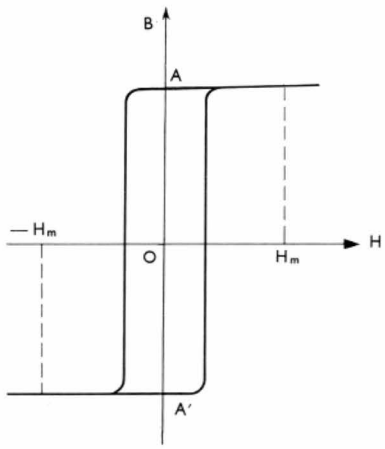


Fig. II-32

L'hystérésis présentée par les ferrimagnétiques a été mise en œuvre pour réaliser des mémoires de calculateurs. On utilise un tore de ferrite à cycle d'hystérésis rectangulaire (ferrite au manganèse-magnésium par exemple) et selon son aimantation, il représente un état 1 ou un état 0 (on dit un *bit* 1 ou 0). Un bit 1 sera concrétisé par le tore aimanté à saturation par un champ $\overrightarrow{H_m}$ (état correspondant au point *A* sur la figure II-32) tandis qu'un bit 0 sera figuré par le tore aimanté par un champ $-\overrightarrow{H_m}$ (état correspondant au point *A'*). (V. t. 1, Informatique, chap. 3, § 3).

Il existe des ferrites du type magnétoplombite à structure cristalline hexagonale de formule (Fe_2 O_3) 6 MeO (Me représentant le symbole d'un corps qui est le plomb, le baryum ou le strontium). Ces substances présentent une

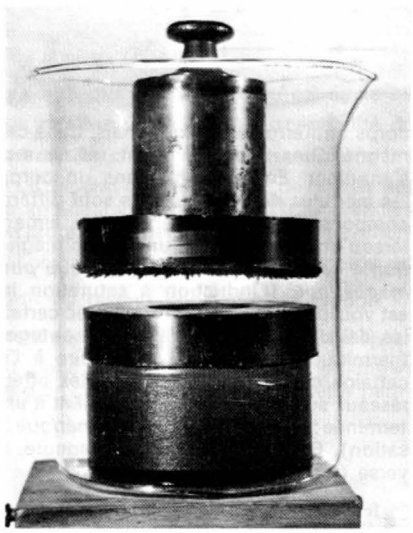


Fig. II-33

Dans ces deux anneaux de ferroxdure les forces de répulsion qui s'exercent entre pôles magnétiques de même nom sont telles qu'elles équilibrent l'effet de la pesanteur maintenant l'anneau supérieur en suspension dans l'air (*Kitrosser*)

anisotropie magnétocristalline très élevée. Cette propriété a permis la réalisation d'aimants par agglomération, puis frittage de grains ayant la taille du domaine de Weiss (environ 1 μm). Ces aimants se caractérisent par un fort champ coercitif et une induction rémanente de valeur moyenne (fig. II-33 et II-34).

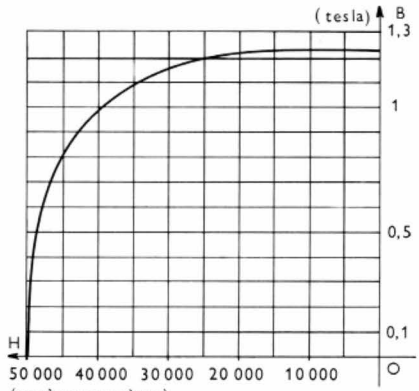


Fig. II-34

Courbe de désaimantation du ticonal 600

7. LA MAGNÉTOSTRICTION

On appelle magnétostriction *la déformation élastique qui accompagne l'aimantation d'un corps ferromagnétique*. Elle se manifeste principalement avec des alliages de fer, cobalt et nickel. Une augmentation de l'induction entraîne une diminution de la longueur du corps ferromagnétique. Si l'on supprime le champ, le barreau reprend sensiblement sa forme. Inversement, si l'on augmente la longueur du barreau placé dans un champ uniforme, il se produit une diminution de l'induction magnétique dans le matériau.

Pour un matériau donné, la contraction Δl est indépendante du sens du champ. Elle est proportionnelle à la longueur l de l'échantillon et est fonction de l'intensité H du champ magnétique. La contraction relative $\frac{\Delta l}{l}$, d'abord sensiblement proportionnelle à H, tend ensuite vers un maximum (3.10^{-5} pour $H = 16\,000$ A/m, *dans le cas du nickel*), comme la courbe caractéristique de la magnétostriction le montre (fig. II-35). En faisant varier périodiquement le

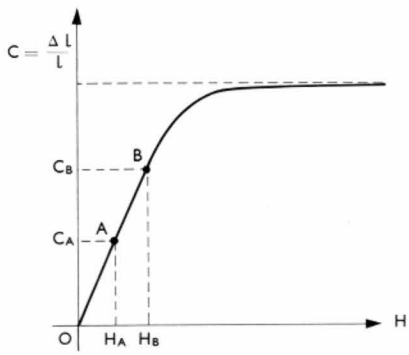


Fig. II-35

champ entre les valeurs $\overrightarrow{H_A}$ et $\overrightarrow{H_B}$ qui correspondent à deux points *A* et *B*, convenablement choisis sur la partie rectiligne de la courbe, la longueur du barreau varie à la même fréquence, de sorte que les extrémités se comportent comme des pistons agissant sur le milieu ambiant à la fréquence du courant.

La magnétostriction est mise en œuvre pour la production d'ultrasons en vue d'applications industrielles (nettoyage par ultrasons, usinage, etc.).

8. DÉSAIMANTATION ADIABATIQUE

Dans une substance quelconque, l'établissement d'un champ magnétique s'accompagne d'une élévation brusque de la température du corps. Inversement, sa suppression entraîne un abaissement de la température. La variation de température n'est importante qu'au voisinage du point de Curie. On l'a utilisé pour obtenir de très basses températures, inférieures à celle de l'hélium liquide. La température la plus basse 0,004 4 K a été obtenue par de Haas avec un mélange de deux aluns (chromate de potassium et aluminate de potassium) à la température de 1,92 K par suppression d'un champ de 2,4 T.

ÉLECTRICITÉ

L'électricité est une partie fondamentale de la physique où est étudié un grand nombre de phénomènes, en apparence très divers mais qui sont tous liés à la présence ou au déplacement de ce que nous appellerons des charges électriques. L'électricité se subdivise elle-même en plusieurs parties :

— l'*électrocinétique* où sont étudiés les déplacements des charges électriques dans les conducteurs et les effets thermiques et chimiques qui accompagnent ces déplacements ;

— l'*électrostatique* où est abordée l'étude des phénomènes liés à la présence de charges électriques immobiles, notamment celle des forces d'attraction ou de répulsion qui s'exercent sur ces charges ;

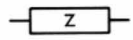
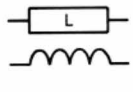
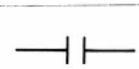
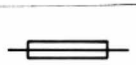
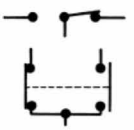
— l'*électromagnétisme*, partie réservée aux effets magnétiques des courants, aux forces de répulsion ou d'attraction liées au mouvement des charges électriques.

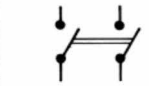
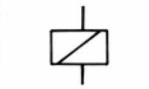
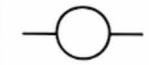
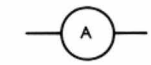
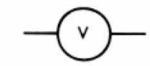
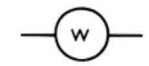
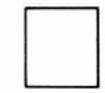
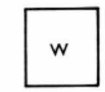
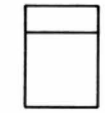
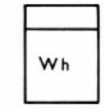
Nous grouperons sous le titre *Courant alternatif* l'étude de phénomènes plus complexes, faisant intervenir simultanément les trois branches de l'électricité que nous venons de citer. Ces phénomènes se produisent lorsque certaines grandeurs électriques varient en fonction du temps.

Principaux symboles utilisés dans les schémas électriques

Symbole	Désignation
ou	Courant continu (si la première risque d'entraîner des confusions)
ou 50 Hz	Courant alternatif (éventuellement avec indication de la fréquence du courant)
1	Symbole pour appareils et machines utilisables en courant continu et en courant alternatif
	Courant ondulé (ou redressé)
1	Système monophasé
3	Système triphasé
● ou o	Borne, connexion de deux conducteurs

Symbole	Désignation
	Croisement de deux conducteurs sans connexion électrique
	Croisement de deux conducteurs avec connexion électrique
	Terre
	Masse
R	Résistance (non réactive)
	Résistance variable

Symbole	Désignation
	Impédance
	Inductance (le second symbole est aussi utilisé pour représenter un enroulement de machine électrique)
	Condensateur
	Coupe-circuit à fusible (appelé souvent fusible)
	Interrupteur
	Commutateur (deux variantes)
	Disjoncteur
	Combiné disjoncteur-fusible
	Contacteur
	Bouton poussoir ouvert au repos
	Bouton poussoir fermé au repos
	Bouton poussoir lumineux

Symbole	Désignation
	Interrupteur bipolaire
	Organe de commande d'un relais
	Voyant lumineux
	Lampe à incandescence
	Appareil indicateur ou appareil de mesure, symbole général. À l'intérieur du dessin on place une lettre ou un symbole pour préciser quelle est la fonction de l'appareil : A pour ampèremètre, V pour voltmètre, Ω pour ohmmètre, etc.
	Ampèremètre (indicateur)
	Voltmètre (indicateur)
	Wattmètre (indicateur)
	Appareil enregistreur, symbole général. Une lettre placée à l'intérieur précise quelle est la fonction.
	Wattmètre enregistreur
	Compteur, symbole général
	Compteur d'énergie (wattheuremètre)

ÉLECTROCINÉTIQUE

CHAPITRE PREMIER

LE COURANT ÉLECTRIQUE

1. LE COURANT ÉLECTRIQUE DÉFINI PAR SES EFFETS

Considérons le montage de la figure I-1, il comprend :

— une batterie d'accumulateurs semblable à celle qui équipe une voiture ;

— un interrupteur K ;

— une lampe à incandescence L ;

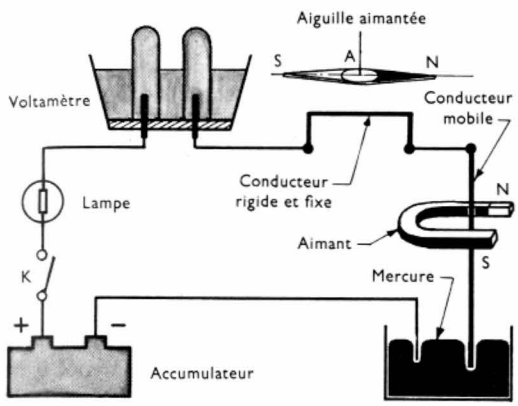


Fig. I-1a

— une cuve remplie d'une solution de soude, dans laquelle plongent deux tubes à essais contenant chacun une électrode en platine reliée à un conducteur (un tel appareil constitue un voltamètre) ;

— un fil de cuivre horizontal disposé parallèlement à une aiguille aimantée A ;

— un fil de cuivre vertical. Il est mobile autour de l'extrémité par laquelle il est suspendu et il passe entre les branches d'un aimant en fer à cheval ; son extrémité inférieure plonge dans une cuve de mercure.

Tous ces appareils sont disposés à la suite les uns des autres, reliés par des fils de connexion. Le montage ainsi réalisé, dit **montage en série,** est un exemple de circuit électrique.

Aussi longtemps que l'interrupteur est ouvert, c'est-à-dire se trouve dans la position représentée sur la figure I-1a, il ne se produit rien : **le circuit est ouvert.** En revanche, au moment où nous fermons l'interrupteur, il se produit immédiatement et simultanément plusieurs effets :

— la lampe à incandescence s'allume,

— dans la solution de soude, autour de chaque électrode, de petites bulles se dégagent, s'élèvent dans le liquide et peu à peu le gaz qu'elles contiennent remplit les tubes à essais. Après quelques instants nous pouvons constater que le gaz recueilli dans un des tubes ne brûle pas mais rallume une allumette ne présentant plus qu'un point incandescent : c'est de l'oxygène. Le gaz recueilli dans l'autre tube brûle dans l'air en donnant de la vapeur d'eau : c'est de l'hydrogène ; le volume d'hydrogène dégagé est exactement le double du volume d'oxygène dégagé dans le même temps. Cela prouve qu'il s'est produit une décomposition de l'eau conformément à l'équation chimique suivante :

$$H_2O \longrightarrow H_2\uparrow + \frac{1}{2}O_2\uparrow$$

— l'aiguille aimantée dévie, et le fil suspendu entre les branches de l'aimant se déplace.

Lorsque l'interrupteur est fermé (alors le **circuit est fermé)** nous disons qu'il passe un courant électrique dans le circuit et les tranformations qui se produisent sont les effets du passage du courant. Nous distinguerons trois sortes d'effets :

— les **effets magnétiques :** naissance de forces entre aimants et conducteurs parcourus par des courants ;

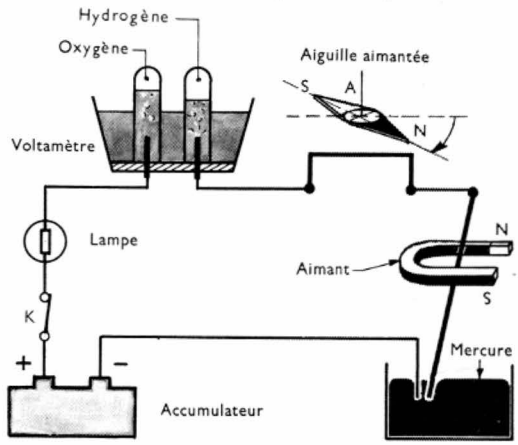


Fig. I-1b

— les **effets chimiques :** décomposition de l'eau ;

— les **effets thermiques :** élévation de la température du filament de la lampe : il devient incandescent.

Si nous répétons l'expérience sans la batterie d'accumulateurs il ne se passe rien. Nous appellerons **générateur électrique** un appareil qui peut produire un courant, lorsqu'on relie ses bornes aux deux extrémités d'un circuit électrique. Un générateur se représente symboliquement comme indiqué figure I-2.

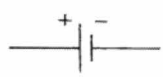


Fig. I-2

Représentation symbolique d'un générateur

2. CONDUCTEURS ET ISOLANTS

Si nous coupons l'un des fils de connexion, nous remarquons que les effets du courant disparaissent aussitôt : le courant ne passe plus. Il suffit d'une très petite tranche d'air entre ces extrémités pour obtenir ce résultat. Les effets du courant réapparaissent dès que nous remettons en contact les deux extrémités sectionnées.

En parcourant le circuit, le courant traverse successivement une suite de corps parmi lesquels : le métal dont sont faits les fils de connexion, le filament de tungstène de la lampe à incandescence, la solution de soude et le mercure des cuves. Tous ces corps qui laissent passer le courant sont appelés *conducteurs*. Nous constatons que l'air ne laisse pas passer le courant : c'est un *isolant*. Cela explique le fonctionnement d'un interrupteur qui permet d'interrompre ou de rétablir à volonté le courant en pratiquant une coupure dans le circuit électrique.

En intercalant divers corps dans le circuit, nous pouvons déterminer s'ils sont conducteurs ou isolants selon qu'ils laissent passer ou non le courant. En réalité il n'a pas été trouvé d'isolant parfait et à cette méthode approximative de classification, nous substituerons des critères plus

rigoureux ultérieurement (V. t. 1, Électronique, chap. 1).

Tous les métaux et leurs alliages sont des conducteurs, de même que certaines formes de carbone comme le graphite ou le charbon qui entrent dans la constitution de certaines électrodes. En revanche, la plupart des métalloïdes, le caoutchouc, le papier, la paraffine, la plupart des matières plastiques et des tissus sont des isolants. Parmi les liquides, les solutions d'acides, de bases ou de sels dans l'eau sont conductrices (elles sont appelées *électrolytes*) alors que l'eau pure, l'alcool et la plupart des huiles sont des isolants.

3. SENS DU COURANT

Dans le circuit considéré prédédemment (fig. I-1), si nous intervertissons les connexions du circuit au générateur nous constatons que les déviations de l'aiguille aimantée et du fil suspendu entre les branches de l'aimant changent de sens. L'eau est encore décomposée lors du passage du courant mais les rôles des électrodes sont inversés : dans le tube où apparaissait primitivement de l'hydrogène, maintenant se dégage de l'oxygène, et inversement. En revanche la lampe à incandescence brille de la même façon dans les deux cas. Pour ces raisons, un *sens* a été attribué au courant : les effets magnétiques et chimiques du courant dépendent de ce sens, alors que l'effet thermique n'en dépend pas. Ce sens a été choisi arbitrairement. Il a fallu distinguer les deux bornes du générateur : l'une est appelée la **borne positive** et l'autre la **borne négative ;** la 1re est celle qui est directement reliée à l'électrode du voltamètre où se dégage l'oxygène. Les premiers expérimentateurs admirent que dans le *circuit extérieur au générateur le courant va de la borne positive à la borne négative*. Par un hasard malheureux ce sens est le contraire de celui du déplacement des électrons qui constituent le courant électrique comme nous le verrons bientôt.

4. EXPÉRIENCES D'ÉLECTRISATION

Un bâton d'ébonite ou de verre frotté énergiquement avec une étoffe de laine acquiert la propriété d'attirer les corps légers : il est électrisé. Par contre une tige métallique, et plus généralement un corps conducteur, ne peut être électrisée que si elle est tenue par l'intermédiaire d'un isolant (fig. I-3).

Les forces qui s'exercent sur les objets légers proches des corps électrisés prennent leur origine dans l'apparition de charges électriques à la surface de ces corps. Dans les isolants, ces charges restent à l'endroit où le frottement les a fait apparaître, tandis que dans les conducteurs ces charges peuvent se déplacer ; elles quittent le conducteur, en s'écoulant par l'intermédiaire du corps de l'opérateur, si le conducteur n'est pas tenu par l'intermédiaire d'un isolant.

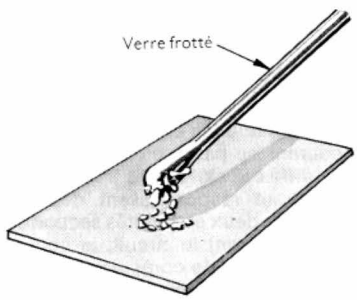


Fig. I-3

Électrisation par frottement
Du verre frotté attire de petits bouts de papier

Un grand nombre d'expériences ont permis de mettre en évidence deux sortes de charges électriques qualifiées arbitrairement de positives et de négatives : par exemple, un bâton de verre frotté se charge positivement, et un bâton d'ébonite, négativement. Deux corps chargés d'électricité de même signe se repoussent, tandis que deux corps chargés d'électricité de signe contraire s'attirent.

5. EXPÉRIENCE DE ROWLAND (1876) — (fig. I-4)

Un disque tournant circulaire *D*, chargé électriquement, est mis en rotation rapide autour d'un axe *A*. Comme dans tout isolant, les charges portées par *D* sont immobiles *par rapport au disque* mais elles sont évidemment entraînées

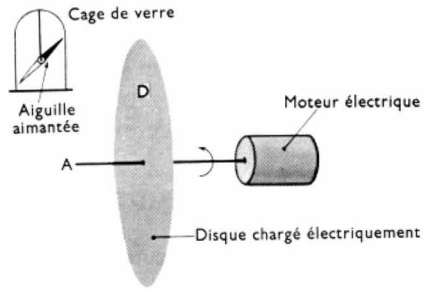


Fig. I-4 — Expérience de Rowland

dans la rotation autour de *A*. Au voisinage du disque se trouve une petite aiguille aimantée, suspendue à un fil de soie et disposée dans une cage en verre pour éviter qu'elle ne se déplace sous l'action des courants d'air dus à la rotation du disque. Lorsque la vitesse de rotation est suffisamment grande, nous constatons que l'aiguille aimantée pivote ; pour obtenir un déplacement appréciable, il faut un disque très fortement chargé et des vitesses de rotation très grandes. Cette expérience présente le grand intérêt de montrer que les charges électriques en déplacement produisent les mêmes effets magnétiques qu'un courant électrique. Nous sommes alors conduits à penser que le courant électrique est en fait un *déplacement de charges électriques*. D'autre part, les expériences d'électrisation ont mis en évidence la propriété des charges électriques de se déplacer librement dans les conducteurs et de ne pas se déplacer dans les isolants ; cela est bien en accord avec le fait que le courant électrique traverse les conducteurs et non les isolants.

6. ORIGINE ATOMIQUE DE L'ÉLECTRICITÉ

La matière est composée d'atomes formés d'un noyau autour duquel gravitent les électrons qui sont des particules chargées d'électricité négative. Le noyau étant chargé d'électricité positive, l'atome est électriquement neutre (V. t. 1, Physique nucléaire, chap. 1). Lorsque nous frottons deux corps l'un contre l'autre, il peut y avoir des échanges d'électrons : certains sont arrachés aux atomes situés à la surface d'un des corps et ils se fixent à la surface de l'autre. Le corps qui perd des électrons se charge positivement et celui qui en reçoit se charge négativement. En conclusion, les deux espèces d'électricité, électricité négative et électricité positive, sont simplement le résultat de la présence ou de l'absence d'électrons.

Le courant électrique dans un circuit correspond à un déplacement d'ensemble d'électrons qui ne sont plus liés à un noyau d'atome. Ces particules appelées *électrons libres* sont nombreuses dans les corps conducteurs et, au contraire, extrêmement rares dans les isolants (V. t. 1, Électronique, chap. 1).

7. QUANTITÉS D'ÉLECTRICITÉ ET INTENSITÉ DU COURANT

En série dans un circuit électrique introduisons plusieurs voltamètres contenant des solutions de soude et différant entre eux par leurs formes, leurs dimensions et par la concentration de ces solutions. Après passage d'un courant électrique, nous constatons que les volumes de gaz dégagés sont les mêmes pour tous les voltamètres. Cela nous conduit à penser que la même quantité d'électricité traverse toutes les sections d'un circuit, c'est-à-dire que les électrons en mouvement ne s'accumulent nulle part. Nous admettrons que la quantité d'électricité qui a traversé ce circuit est proportionnelle à la masse d'hydrogène qui s'est dégagé dans un de ces voltamètres. Cela permet de définir une unité de quantité d'électricité. Dans le système international, elle est appelée le *coulomb* (symbole : C) ; avec une quantité d'électricité de 96 500 coulombs il se dégage une mole d'atomes d'hydrogène, soit une masse de 1,008 gramme, ou un volume de 11,2 litres, dans les conditions

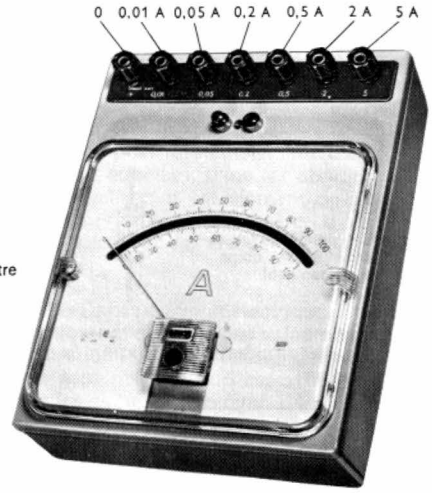


Fig. I-5

Ampèremètre

(*A.O.I.P.*)

normales de température et de pression (0 °C et 1 atmosphère).

L'intensité d'un courant *constant est numériquement égale à la quantité d'électricité qui traverse le circuit dans l'unité de temps.* Dans le système international, l'unité d'intensité est l'*ampère* (symbole : A). Si nous désignons par Q la quantité d'électricité qui a traversé une section d'un circuit, par I l'intensité du courant dans ce circuit et par t le temps de passage du courant, nous pouvons écrire la relation suivante :

$$I = \frac{Q}{t}$$

I est exprimé en ampères, Q en coulombs et t en secondes.

Pratiquement, l'intensité d'un courant n'est pas déduite de la mesure d'une quantité d'électricité mais elle est obtenue directement au moyen d'un appareil appelé *ampèremètre* (fig. I-5) ; il se place en série dans le circuit et donne l'intensité du courant par simple lecture (V. t. 2, Mesures et appareils de mesure).

CHAPITRE II

EFFET JOULE

1. LOI DE JOULE

L'effet Joule est le dégagement de chaleur qui se produit chaque fois qu'un courant traverse un conducteur. Pour mesurer la quantité de chaleur produite, pendant un temps déterminé, par un courant d'intensité connue, passant à travers un conducteur donné, nous plaçons ce conducteur

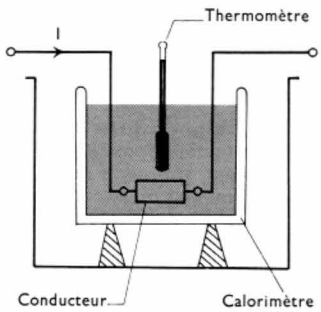


Fig. II-1

Étude de l'effet Joule

dans un calorimètre (fig. II-1). Nous pouvons alors constater que la quantité de chaleur dégagée W est proportionnelle au temps t de passage du courant et au carré de l'intensité I de ce courant. Elle dépend également du conducteur.

$$W = R\ I^2\ t$$ **(loi de Joule)**

Nous appellerons **résistance du conducteur** la constante de proportionnalité R ; elle s'exprime en ohms (symbole Ω), si W est exprimé en joules, I en ampères et t en secondes. Par définition un ohm est donc la résistance d'un conducteur qui est le siège d'un dégagement de chaleur équivalent à un joule lorsqu'il est traversé par un courant d'un ampère pendant un temps d'une seconde.

2. AUTRES EXPRESSIONS DE LA LOI DE JOULE

Nous appelons J l'équivalent mécanique de la calorie et Q la quantité de chaleur dégagée, exprimée en calories ; nous pouvons écrire : $Q = \frac{1}{J} R\ I^2\ t \approx 0{,}24\ R\ I^2\ t$

La puissance calorifique P qui apparaît dans un conducteur est donnée par le quotient de l'énergie W et du temps t de passage du courant : $P = \frac{W}{t}$

Si ce conducteur présente une résistance R et s'il est parcouru par un courant d'intensité I, il vient :

$$P = RI^2$$

Il faut exprimer P en watts, R en ohms et I en ampères.

3. RÉSISTANCE D'UN CONDUCTEUR

Comme nous venons de le voir, la résistance d'un conducteur permet de le caractériser du point de vue de l'effet Joule. La loi de Joule, écrite sous la forme équivalente :

$$R = \frac{W}{I^2 t}$$

peut être utilisée pour déduire la résistance de la mesure de l'échauffement du liquide d'un calorimètre.

Cependant cette mesure est peu précise et, par la suite, nous verrons des méthodes plus précises pour mesurer une résistance.

4. RÉSISTIVITÉ

La résistance R d'un fil homogène, de section constante S, est proportionnelle à sa longueur l et inversement proportionnelle à sa section S :

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

Le facteur de proportionnalité dépend de la nature du conducteur employé et est appelé **résistivité** de la sub-

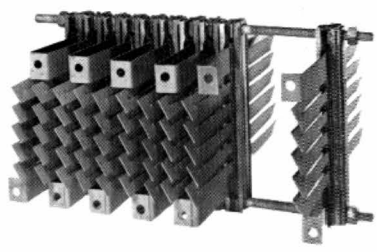


Fig. II-2

Résistance industrielle : grilles en tôle découpée interchangeables (*Le métal déployé*)

stance formant le conducteur. Dans le système international, il faut exprimer la résistivité ρ en ohms-mètres (symbole : Ω . m), la longueur l du fil en mètres et la section S en mètres carrés. Un sous-multiple est aussi utilisé parfois : le microhm-centimètre (symbole $\mu\ \Omega$. cm) égal à $10^{-8}\ \Omega$. m.

Remarque : La détermination de la résistance est effectuée parfois au moyen de la formule suivante :

$$R = \frac{\rho\, l}{100\, S}$$

où R est exprimé en ohms, l en mètres, ρ en microhms-centimètres et S en millimètres carrés.

La *résistivité varie avec la température*. D'une manière générale, la résistivité des métaux et alliages augmente avec la température, alors que celle des solutions et des semiconducteurs (que nous définirons en électronique) diminue quand la température croît (V. t. 1, Électronique, chap. 1).

Voici, à titre indicatif, les valeurs des résistivités de quelques corps, aux températures ordinaires :

MÉTAL	ρ en ohms-mètres
Argent recuit	$1{,}49 \times 10^{-8}$
Cuivre recuit	1,58 —
Cuivre écroui	1,62 —
Or	2 —
Aluminium	2,9 —
Fer recuit	9,64 —
Fer galvanisé	15,33 —
Plomb	19 —
Maillechort	30 —
Nickeline	35 —
Manganine	46 —
Constantan	50 —
Rhéotan	52 —
Ferro-nickel	78 —
Mercure liquide	94 —

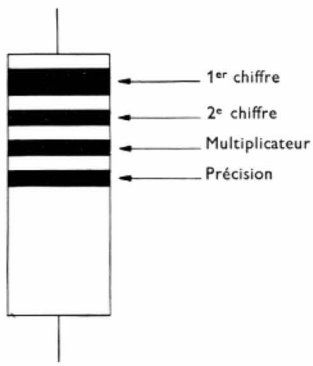
Les résistivités des isolants sont échelonnées entre 10^5 et $10^8\ \Omega$. m.

En première approximation, la résistivité ρ_t à la température t est donnée en fonction de la résistivité ρ_0 à 0 °C par la relation :

$$\rho_t = \rho_0\ (1 + \alpha t)$$

α, appelé **coefficient de température,** dépend du conducteur. Ce coefficient de température peut être considéré comme constant et indépendant de la température seulement si celle-ci varie dans un domaine limité (une centaine de degrés environ).

α est un nombre concret : il s'exprime en degrés à la puissance moins un (symbole : K^{-1} ou $°C^{-1}$).



Code des couleurs

Fig. II-3

Marquage des résistances au carbone

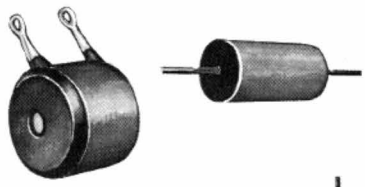


Fig. II-4a

Résistances bobinées (conducteur noyé dans l'isolant)

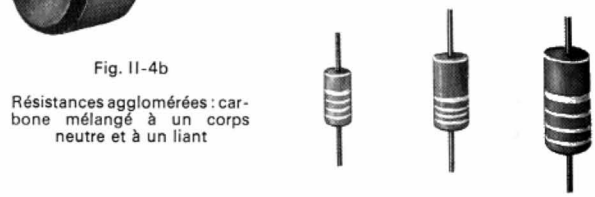


Fig. II-4b

Résistances agglomérées : carbone mélangé à un corps neutre et à un liant

Coefficients de température α (exprimés en degré à la puissance moins un).

Cuivre pur	0,003 88
Fer pur	0,006 25
Ferro-nickel	0,000 93
Rhéotan	0,000 41
Maillechort	0,000 36
Nickeline	0,000 30
Constantan	$\pm$ 0,000 02
Manganine	$\pm$ 0,000 02

5. CONDUCTANCE ET CONDUCTIVITÉ

La conductance (symbole : G) **est l'inverse de la résistance ;** elle s'exprime en *siemens* (symbole : S) ou en *ohm à la puissance moins un* (symbole : Ω^{-1}) ; $1\ \Omega^{-1} = 1$ S. La **conductivité** σ **est l'inverse de la résistivité ;** nous avons donc les formules suivantes :

$$G = \frac{1}{R} \qquad \sigma = \frac{1}{\rho}$$

6. APPLICATIONS PRATIQUES DE L'EFFET JOULE

6.1. Température d'équilibre d'un conducteur. — Un conducteur parcouru par un courant s'échauffe mais, en même temps, il cède de la chaleur au milieu ambiant par rayonnement, convection ou conduction. La chaleur cédée augmentant avec la différence de température entre le conducteur et le milieu ambiant, au bout d'un certain temps, il s'établit un régime permanent : le fil a atteint sa température d'équilibre (fig. II-5).

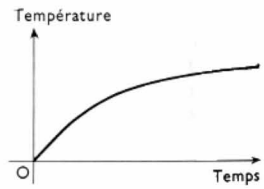


Fig. II-5

Échauffement d'un conducteur en fonction du temps

La température d'équilibre varie beaucoup suivant les conditions de déperdition de chaleur : un conducteur nu, dans l'air, se refroidit beaucoup plus facilement que s'il est placé sous gaine isolante. Dans tous les appareils et dans tous les dispositifs électriques, la température d'équilibre choisie dépend des matériaux employés, notamment de la température maximale à laquelle il est possible de les utiliser

Signification des couleurs des anneaux	Noir	Brun	Rouge	Orange	Jaune	Vert	Bleu	Violet	Gris	Blanc	Or	Argent
1er et 2e chiffre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
Multiplicateur	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6					
Précision	$\pm$ 1 %	$\pm$ 2 %									$\pm$ 5 %	$\pm$ 10 %

sans que leurs propriétés soient altérées. Cette température d'équilibre est un des facteurs qui limite la puissance admissible par un appareil (par exemple, un moteur) (V. t. 1, Électrotechnique, chap. 2).

6.2. Éclairage par incandescence. — Une lampe à incandescence se compose principalement d'un filament dont la température d'équilibre, dans les conditions habituelles d'emploi, est telle que cet élément devient incandescent. Il émet alors une vive lumière, d'autant plus blanche que la température est élevée (V. t. 2, Éclairage électrique, chap. 3).

6.3. Fusibles. — Dans un circuit électrique, il ne faut pas que l'intensité du courant atteigne des valeurs trop élevées, sinon une détérioration des installations peut en résulter. Des conducteurs à point de fusion assez bas ou *fusibles* sont insérés dans les circuits à protéger. Dès que l'intensité du courant dépasse une valeur déterminée, le fusible fond et le circuit est alors coupé. Les caractéristiques d'un fusible (longueur, section, forme) dépendent de l'intensité minimale du courant qui doit provoquer sa fusion (V. t. 2, Transport et distribution de l'énergie électrique, chap. 6).

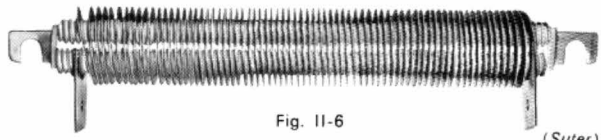


Fig. II-6 (*Suter*)

Résistance avec ruban de constantan

6.4. Électrothermie. — Le chauffage électrique est une des applications de l'effet Joule (radiateurs électriques, plaques chauffantes, fers à repasser, etc.) (V. t. 2, Électrothermie et Applications électrodomestiques).

CHAPITRE III

DIFFÉRENCE DE POTENTIEL LOI D'OHM

1. DIFFÉRENCE DE POTENTIEL ENTRE LES EXTRÉMITÉS D'UNE PORTION DE CIRCUIT NE CONTENANT PAS DE GÉNÉRATEUR

1.1. Transformation de l'énergie électrique. — Considérons la portion de circuit *AB* représentée par la figure III-1 : entre *A* et *B* le courant traverse successivement une lampe à incandescence, un voltamètre contenant une solution de soude, et un moteur électrique entraînant une charge. Lorsque nous faisons passer le courant, la lampe s'illumine ; dans cet appareil, de l'énergie électrique est transformée en énergie thermique. Dans le voltamètre de l'hydrogène et de l'oxygène se dégagent ; ils peuvent être recombinés en les faisant détoner au contact d'une flamme ce qui prouve que le mélange détonant possède de l'énergie chimique (qui se transforme par explosion en énergie mécanique et énergie thermique) et cette énergie chimique provient de la transformation d'énergie électrique. Quant au moteur électrique il permet de transformer en énergie mécanique une partie de l'énergie électrique qu'il reçoit. Par ailleurs, le moteur et, à un degré moindre, les fils de connexion s'échauffent par effet Joule. Conformément au principe de conservation de l'énergie, l'énergie électrique fournie au circuit est égale à la somme des énergies thermique, mécanique et chimique produites dans ce circuit.

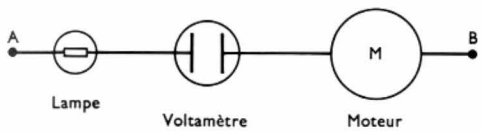


Fig. III-1

Lorsque le circuit est parcouru par un courant d'intensité constante, l'énergie W consommée est proportionnelle au temps t de passage du courant ; la puissance électrique absorbée est égale au quotient de l'énergie W et du temps t : $P = \frac{W}{t}$; P est exprimé en watts, W en joules et t en secondes.

1.2. Différence de potentiel (ou d.d.p.). — *La différence de potentiel entre les points A et B, ou tension entre A et B, est numériquement égale au quotient U de la puissance P et de l'intensité I du courant dans AB :*

$$U = \frac{P}{I}$$

Dans le système international, l'unité de différence de potentiel est le *volt ;* c'est la différence de potentiel entre deux points d'un fil conducteur parcouru par un courant constant d'un ampère lorsque la puissance dissipée entre ces points est égale à un watt.

Remarque : La puissance P est donnée par la relation suivante :

$$P = UI$$

P est exprimé en watts, U en volts et I en ampères. L'énergie absorbée W pendant un temps t est aussi donnée par la formule suivante :

$$W = UIt$$

W est exprimé en joules, U en volts, I en ampères et t en secondes. L'énergie est parfois exprimée en watts-heures (symbole : Wh) ; U, I et t sont alors exprimés respectivement en volts, en ampères et en heures.

Si nous remarquons que It est justement la quantité Q d'électricité qui traverse le circuit pendant le temps t, la formule précédente s'écrit aussi :

$$W = UQ$$

(W est exprimé en joules, U en volts, Q en coulombs).

Nous constatons alors que la *d.d.p. U aux bornes d'un circuit représente l'énergie absorbée par celui-ci lorsqu'il est traversé par une quantité d'électricité de 1 C.*

2. LOI D'OHM POUR UNE RÉSISTANCE

Une résistance (parfois nommée *résistance morte*) est un élément de circuit dans lequel toute l'énergie électrique fournie par le courant est transformée en chaleur par effet Joule (fig. III-2). Les éléments chauffants des radiateurs électriques, ceux des fers à repasser sont des résistances.

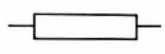


Fig. III-2

Représentation schématique d'une résistance

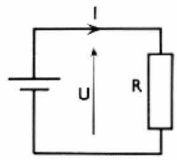


Fig. III-3

Loi d'Ohm pour une résistance
$U = RI$

La puissance dissipée par effet Joule dans une résistance R est donnée par la formule : $P = RI^2$ (fig. III-3), I étant l'intensité du courant dans la résistance. D'autre part, la puissance consommée est égale à : $P = UI$ si U désigne la d.d.p. aux bornes de la résistance ; ces deux puissances étant égales, nous déduisons l'égalité suivante :

$$UI = RI^2$$

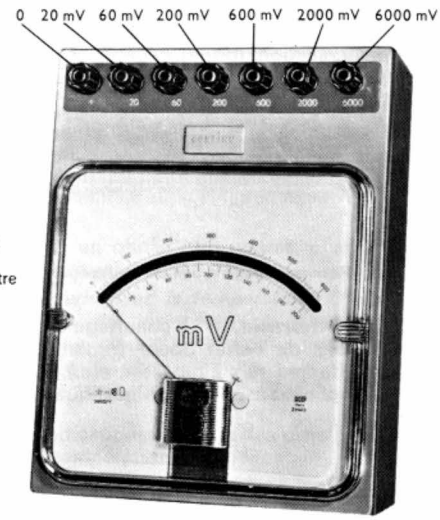


Fig. III-4
Millivoltmètre

(*A.O.I.P.*)

soit en divisant par I :

$$U = RI$$ **(loi d'Ohm)**

La d.d.p. *U* aux extrémités d'une résistance est numériquement égale au produit de cette résistance et de l'intensité du courant qui la traverse. *U* est exprimé en volts, *R* en ohms et I en ampères.

L'ohm est légalement défini comme étant la résistance qui existe entre deux points d'un fil conducteur parcouru par un courant de 1 ampère lorsqu'une différence de potentiel constante de 1 volt est appliquée entre ces deux points, ce conducteur n'étant le siège d'aucune force électromotrice.

Remarque : La relation traduisant la loi d'Ohm est utilisée pour exprimer la puissance dissipée par une résistance lorsqu'on connaît la d.d.p. entre ses bornes :

$$P = RI^2 = R\left(\frac{U}{R}\right)^2 = \frac{U^2}{R}$$

Pour une tension U déterminée la chaleur dégagée par effet Joule est donc inversement proportionnelle à la résistance R.

3. MESURE DES DIFFÉRENCES DE POTENTIEL

La mesure des différences de potentiel est réalisée avec un appareil appelé *voltmètre* (fig. III-4). Pour mesurer la différence de potentiel entre deux points *A* et *B*, il suffit de brancher un voltmètre entre ces deux points, sans modifier le circuit, et le résultat est obtenu par simple lecture (V. t. 2, Mesures et appareils de mesure).

4. ADDITIVITÉ DE DIFFÉRENCES DE POTENTIEL

Considérons des portions de circuit *AB, BC, CD, DE* associées en série (fig. III-5) ; chaque portion peut contenir un ou plusieurs appareils (résistance, générateur). Un courant de même intensité traverse toutes ces portions de circuit. Nous appelons U_{AB} la tension entre *A* et *B*, U_{BC} la tension entre *B* et *C*, etc. La puissance dissipée dans *AB* est égale à $(U_{AB}I)$, celle dissipée dans *BC* à $(U_{BC}I)$, etc.

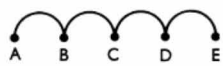


Fig. III-5

La puissance totale dissipée entre *A* et *E* est égale à $(U_{AE}I)$. D'après la loi de conservation de l'énergie, elle est égale à la somme des puissances dissipées dans chaque portion du circuit. Nous avons donc l'égalité suivante :

$$(U_{AB}\,I) + (U_{BC}\,I) + (U_{CD}\,I) + (U_{DE}\,I) = U_{AE}\,I$$

En divisant par I, nous déduisons une relation entre les d.d.p. :

$$U_{AB} + U_{BC} + U_{CD} + U_{DE} = U_{AE}$$

La d.d.p. entre *A* et *E* est égale à la somme des d.d.p. entre *A* et *B*, entre *B* et *C*, entre *C* et *D* et entre *D* et *E*.

CHAPITRE IV

ASSOCIATIONS DE RÉSISTANCES COURANTS DÉRIVÉS

1. RÉSISTANCES EN SÉRIE

Considérons plusieurs résistances R_1, R_2, R_3, R_4, associées en série (fig. IV-1). La d.d.p. entre les extrémités *A* et *E* du circuit est égale à la somme des d.d.p. U_{AB} entre *A* et *B*, U_{BC} entre *B* et *C*, U_{CD} entre *C* et *D*, U_{DE} entre *D* et *E*.

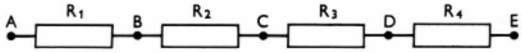


Fig. IV-I — Loi d'association des résistances en série $R = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$

Toutes ces résistances sont branchées en série et parcourues par le même courant I ; en appliquant la loi d'Ohm à chacune d'elles, nous pouvons écrire les relations suivantes :

$$U_{AB} = R_1\,I\,;\quad U_{BC} = R_2\,I\,;\quad U_{CD} = R_3 I\,;\quad U_{DE} = R_4\,I$$

donc : $$U_{AE} = R_1\,I + R_2\,I + R_3\,I + R_4\,I$$

ou encore : $$U_{AE} = (R_1 + R_2 + R_3 + R_4)\,I$$

Au point de vue de la loi d'Ohm, tout se passe donc comme si une résistance unique *R* était branchée entre les points *A* et *E*, et de valeur égale à :

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$$

Nous pouvons donc retenir la règle suivante : *des résistances branchées en série sont équivalentes à une résistance unique égale à la somme de ces résistances.*

2. RÉSISTANCES EN PARALLÈLE OU EN DÉRIVATION ; COURANTS DÉRIVÉS

2.1. Cas général. — Plaçons entre deux points *A* et *B* plusieurs résistances (fig. IV-2). Le courant I dans le circuit principal donne naissance à plusieurs courants dérivés, et comme il n'y a nulle part accumulation de charges électriques, l'intensité du courant principal est égale à la somme des intensités des courants dérivés. Cela se vérifie expérimentalement en intercalant des ampèremètres dans chacune des branches du circuit.

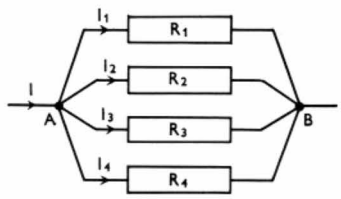


Fig. IV-2
Association de résistances en parallèle

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

Fig. IV-3 a — Boîte de résistances (*A.O.I.P.*)

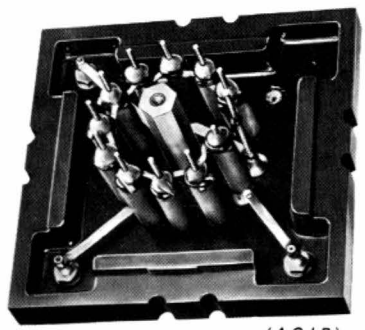
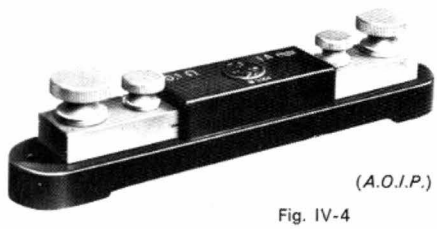


Fig. IV-3 b — Vue interne montrant l'association en série

(*A.O.I.P.*)



(*A.O.I.P.*)

Fig. IV-4

Résistance étalonnée à 4 bornes

Or la loi d'Ohm appliquée à chacune des résistances R_1, R_2, R_3, R_4 nous fournit les relations suivantes :

$$U_{AB} = R_1 I_1 = R_2 I_2 = R_3 I_3 = R_4 I_4$$

Nous pouvons donc écrire les égalités suivantes :

$$I = \frac{U_{AB}}{R_1} + \frac{U_{AB}}{R_2} + \frac{U_{AB}}{R_3} + \frac{U_{AB}}{R_4}$$

$$= U_{AB}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)$$

Au point de vue de la loi d'Ohm, tout se passe donc comme si les résistances R_1, R_2, R_3, R_4 étaient remplacées par une résistance unique R donnée par la relation suivante :

$$\boxed{\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}}$$

Comme nous appelons *conductance* l'inverse de la résistance, nous pouvons donc énoncer la règle suivante : *la conductance d'un ensemble de résistances en dérivation est égale à la somme des conductances de ces résistances.*

2.2. Cas de deux résistances. — La résistance équivalente à deux résistances R_1 et R_2 associées en parallèle est donnée par la relation précédente $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Cependant elle s'écrit souvent sous la forme suivante :

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

2.3. Intensité des courants dérivés. — Le courant dérivé dans une branche a une intensité inversement proportionnelle à la résistance de la branche :

$$I_1 = \frac{U_{AB}}{R_1},\ I_2 = \frac{U_{AB}}{R_2},\ \text{etc.}$$

2.4. Remarque. — La conductance $\frac{1}{R}$ de la résistance équivalente à un ensemble de résistances en dérivation est supérieure à chacune des conductances. Il en résulte que la résistance équivalente est inférieure à chacune des résistances placées en dérivation. Dans le cas particulier de deux résistances dont l'une est beaucoup plus faible que l'autre, la résistance équivalente est pratiquement égale à la plus faible des deux résistances.

3. APPLICATIONS DES LOIS SUR LES ASSOCIATIONS DE RÉSISTANCES

a) Shunt d'un ampèremètre. — Un ampèremètre est un appareil qui, placé dans un circuit électrique, indique par simple lecture l'intensité du courant qui le traverse. Avec un ampèremètre sensible il suffit que le courant ait une intensité de quelques milliampères pour que l'aiguille se déplace d'une extrémité à l'autre de la graduation. Pour mesurer des courants d'intensité élevée il faut placer en dérivation avec l'ampèremètre une résistance appelée shunt (fig. IV-5). Un ampèremètre dont l'aiguille occupe une position déterminée ne produit plus aucune énergie mécanique ou chimique : il peut donc être assimilé à une résistance pure de valeur a. Si nous désignons par s la résistance du shunt,

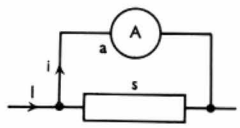


Fig. IV-5

la résistance R équivalente à l'ampèremètre shunté est égale à : $R = \frac{s\,a}{s + a}$. Appelons I l'intensité du courant à mesurer et i celle du courant qui traverse l'appareil de mesure ; le shunt est donc traversé par un courant d'intensité égale à $(I - i)$.

$$ai = s(I - i) = RI$$

Par conséquent : $\frac{I}{i} = \frac{a}{R}$

Le rapport $\frac{a}{R}$ de l'intensité I du courant qui traverse le circuit à l'intensité i du courant qui traverse l'ampèremètre est appelé *pouvoir multiplicateur du shunt*. Il est égal à $\frac{s + a}{s} = 1 + \frac{a}{s}$; il peut être très grand. Par exemple, si la résistance s du shunt est la fraction $\frac{1}{999}$ de la résistance de l'ampèremètre, le pouvoir multiplicateur du shunt est égal à 1 000, et l'ampèremètre peut mesurer des courants mille fois plus grands que ceux pour lesquels il était initialement prévu.

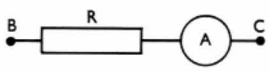


Fig. IV-6 — Voltmètre : la différence de potentiel entre B et C est proportionnelle à la déviation de l'aiguille de A

b) Voltmètre. — Placé en dérivation entre deux points d'un circuit, un voltmètre indique par simple lecture la d.d.p. entre ces deux points. Il doit donc avoir une résistance très grande pour ne pas modifier de façon appréciable le courant circulant dans le circuit et les différences de potentiel. Dans la pratique, un voltmètre est obtenu en associant en série un ampèremètre très sensible (microampèremètre ou milliampèremètre) et une grande résistance (fig. IV-6).

Considérons le cas d'un milliampèremètre pour lequel l'aiguille se trouve en fin de graduation si le courant qui le traverse est égal à 1 mA ; plaçons-le en série avec une résistance de 100 000 Ω. L'ensemble constitue un voltmètre qui permet de mesurer une tension égale sensiblement à 100 V (la loi d'Ohm appliquée à la résistance s'écrit : 100 000 Ω × 10^{-3}A = 100 V) si nous négligeons la d.d.p. aux bornes de l'ampèremètre par rapport à celle aux bornes de la résistance.

Il faut retenir qu'un **voltmètre se branche en dérivation** entre les deux points soumis à la d.d.p. à mesurer alors qu'un **ampèremètre se branche en série** dans un circuit.

CHAPITRE V

GÉNÉRATEURS
FORCE ÉLECTROMOTRICE

1. FORCE ÉLECTROMOTRICE D'UN GÉNÉRATEUR

Dans le circuit de la figure I-1, le courant est fourni par une batterie d'accumulateurs ; elle est aussi appelée *générateur électrique*. D'autres générateurs sont employés : les piles électriques, les dynamos, les alternateurs sont les plus courants.

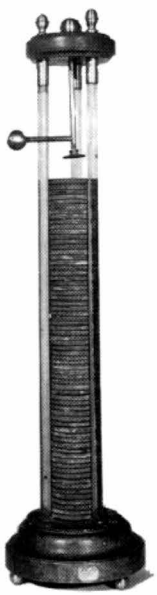


Fig. V-1
Pile de Volta
(*C.N.A.M.*)

Lorsque les pôles d'un générateur électrique sont reliés par une chaîne ininterrompue de conducteurs, ceux-ci sont traversés par un courant. Dans le circuit extérieur au générateur, une énergie électrique W se transforme en énergie thermique, en énergie mécanique ou en énergie chimique. De même, à l'intérieur du générateur une énergie W_i est perdue car il se produit un dégagement de chaleur par effet Joule. L'énergie totale W_t consommée dans le circuit est fournie par le générateur ; en fait le générateur ne crée pas d'énergie, il permet seulement la transformation en énergie électrique d'une autre forme d'énergie, mécanique dans le cas des dynamos et alternateurs, chimique dans le cas des piles et des accumulateurs.

La *force électromotrice* d'un générateur (en abrégé f.é.m.) permet de le caractériser. Elle est numériquement égale au quotient de l'énergie W_t qu'il fournit et de la quantité d'électricité Q qui a traversé le circuit en t secondes :

$$E = \frac{W_t}{Q}$$

Pendant ce temps t, si les conditions de fonctionnement ne changent pas (puissance fournie par le générateur : P_t, intensité du courant dans le circuit : I) nous pouvons écrire les relations suivantes :

$$W_t = P_t\, t \quad \text{et :} \quad Q = I\, t$$

D'où : $E = \dfrac{P_t\, t}{I\, t}$ et : $\boxed{E = \dfrac{P_t}{I}}$

La f.é.m. est donc égale au quotient de la puissance P_t fournie par le générateur et de l'intensité I du courant débité. C'est une grandeur de même nature qu'une d.d.p. : elle s'exprime en *volts*. De nombreux générateurs, en particulier la plupart des piles et accumulateurs, présentent une f.é.m. constante.

2. RÉSISTANCE INTERNE

Nous avons vu qu'une partie de l'énergie fournie par le générateur se transformait en chaleur à l'intérieur de celui-ci. La résistance interne r du générateur représente la résistance qui est à l'origine de cet effet Joule. Elle est donc donnée par la relation suivante :

$$r = \frac{W_i}{I^2 t}$$

(*C.I.P.E.L.*)

(*Tudor*)

(*Mallory*)

Différentes présentations de générateurs électrochimiques

3. AUTRES CARACTÉRISTIQUES D'UN GÉNÉRATEUR

Un générateur est également caractérisé par sa **puissance nominale,** c'est-à-dire par la valeur maximale de la puissance que le générateur peut fournir en permanence. Dans certains cas, cette caractéristique est remplacée par l'indication de l'**intensité maximale** du courant qui peut être débité par le générateur. Ces deux grandeurs dépendent notamment de l'effet Joule admissible à l'intérieur du générateur, c'est-à-dire de la résistance interne de ce dernier. Pour les piles et les accumulateurs, une autre caractéristique est indiquée : la **capacité ;** elle indique la quantité d'électricité qu'ils peuvent fournir lors d'une décharge complète (V. chap. 9).

4. LOI D'OHM POUR UN GÉNÉRATEUR

Par définition, la d.d.p. U entre les bornes du générateur est égale au quotient de la puissance P fournie au circuit extérieur et de l'intensité I du courant : $U = \dfrac{P}{I}$. Dans le générateur de résistance interne r la puissance dissipée par effet Joule est égale à rI^2. La puissance totale P_t fournie par le générateur est égale à la somme de ces deux puissances :

$$P_t = P + rI^2 \quad \text{ou :} \quad P = P_t - rI^2$$

Comme $P_t = E.I$, nous pourrons écrire la relation suivante :

$$UI = EI - rI^2$$

et, en simplifiant par I :

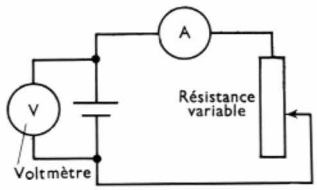
$$\boxed{U = E - rI}$$

Cette expression traduit la loi d'Ohm pour un générateur : *la d.d.p. aux bornes d'un générateur est numériquement égale à la f.é.m. de ce générateur diminuée de la chute ohmique interne* (chute de tension dans la résistance interne).

Pour vérifier expérimentalement la loi d'Ohm, il faut étudier les variations de la d.d.p. U aux bornes d'un générateur en fonction de l'intensité I du courant débité (fig. V-2).

Fig. V-2

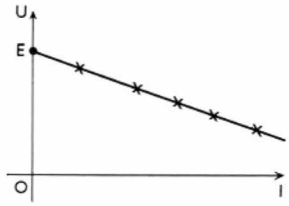
Étude expérimentale de la différence de potentiel aux bornes d'un générateur en fonction de l'intensité du courant débité



La courbe représentative de la fonction $U(I)$ est une droite. L'ordonnée à l'origine de cette droite est égale à la f.é.m. E du générateur, et le coefficient directeur de la droite est proportionnel à $(-r)$, le coefficient de proportionnalité dépendant des échelles choisies (fig. V-3).

Fig. V-3

Courbe représentative de la différence de potentiel U aux bornes d'un générateur en fonction de l'intensité I du courant qui le traverse

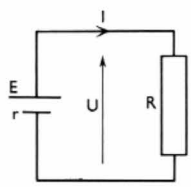


Remarque : Si nous branchons un voltmètre aux bornes d'un générateur qui n'alimente pas un circuit (générateur à vide), la *d.d.p. indiquée est sensiblement égale à la f.é.m. du générateur.* En effet la résistance interne d'un voltmètre est en général très élevée et l'intensité du courant débité peut être considérée comme nulle. Si $I = 0$, nous avons bien : $U = E$.

5. LOI DE POUILLET POUR UN CIRCUIT EXTÉRIEUR RÉDUIT À UNE RÉSISTANCE

Une résistance R est alimentée par un générateur de f.é.m. E et de résistance interne r (fig. V-4) ; une tension U

Fig. V-4



est appliquée aux bornes de la résistance R et d'après la loi d'Ohm nous pouvons écrire :

$$U = RI$$

C'est également la tension aux bornes du générateur et par conséquent :

$$U = E - rI$$

En égalant ces deux relations nous déduisons *la loi de Pouillet :*

$$RI = E - rI \quad \text{ou :} \quad \boxed{E = (R + r)\,I}$$

(E est exprimé en volts, R et r en ohms, I en ampères).

Dans un circuit ne comprenant qu'un générateur et des résistances, la f.é.m. du générateur est numériquement égale au produit de l'intensité du courant et de la résistance totale du circuit (somme des résistances intérieure et extérieure).

Remarque : Cette relation nous permet de déterminer facilement à quelle condition la puissance fournie à la résistance R est maximale. Le générateur de f.é.m. E et de résistance intérieure r débite un courant I ; la puissance P reçue par la résistance R est égale à $R.I^2$. Or d'après la loi de Pouillet :

$$I = \frac{E}{R + r}$$

et :

$$P = R\left(\frac{E}{R + r}\right)^2$$

Cette puissance est maximale lorsque le rapport $\dfrac{R}{(R + r)^2}$ est maximal.

$$\frac{R}{(R + r)^2} = \frac{1}{\left(\sqrt{R} + \dfrac{r}{\sqrt{R}}\right)^2}$$

L'expression au dénominateur, formée de deux nombres dont le produit est constant $\left(\sqrt{R}.\dfrac{r}{\sqrt{R}} = r\right)$ est minimale lorsque ces deux nombres sont égaux,

c'est-à-dire si : $\sqrt{R} = \dfrac{r}{\sqrt{R}}$ ou : $r = R$

Donc, avec un générateur déterminé, la puissance délivrée à la résistance R est maximale lorsque cette résistance est égale à la résistance interne du générateur.

6. GROUPEMENTS DE GÉNÉRATEURS

6.1. Générateurs en série. — Branchons dans un circuit plusieurs générateurs en série : le pôle positif de l'un est relié au pôle négatif du suivant, et ainsi de suite (fig. V-5 a et b). Lorsque le circuit est traversé par un courant d'intensité I, chaque générateur fournit une puissance égale au

Fig. V-5 a

Générateurs en série
$E = E_1 + E_2 + E_3 + E_4$
$r = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$

Fig. V-5 b

Représentation schématique d'une batterie de générateurs en série

produit de sa force électromotrice et de l'intensité I ; par effet Joule, il absorbe une puissance égale au produit de sa résistance intérieure et du carré de l'intensité du courant. Ces générateurs sont donc équivalents à un générateur unique (de f.é.m. E et de résistance interne r) qui débiterait un courant I en fournissant une puissance EI égale à la somme des puissances fournies par chacun d'eux ; dans ce générateur équivalent les pertes par effet Joule, égales à rI^2 seraient la somme des puissances perdues dans les générateurs :

$$EI = E_1I + E_2I + E_3I + E_4I$$
$$rI^2 = r_1I^2 + r_2I^2 + r_3I^2 + r_4I^2$$

En simplifiant la première relation par I et la seconde par I^2 nous obtenons :

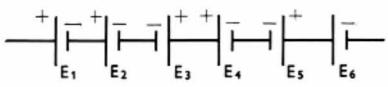
$$\boxed{\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 + E_3 + E_4 \\ r &= r_1 + r_2 + r_3 + r_4 \end{aligned}}$$

Ce générateur a une f.é.m. E et une résistance intérieure r égales respectivement à la somme des f.é.m. et à la somme des résistances de chaque générateur ; autrement dit *les f.é.m. et les résistances internes de générateurs montés en série s'additionnent.*

Le groupement série est intéressant pour obtenir un ensemble générateur présentant une f.é.m. élevée. Sans aucun inconvénient, un groupement série peut comprendre des générateurs non identiques ; cependant, c'est le générateur débitant le plus faible courant qui limite la puissance du groupe.

Remarque : Dans le montage de la figure V-6 des générateurs sont associés en série et les générateurs 3 et 5 sont montés en opposition par rapport aux précédents (c'est-à-dire en sens inverse des autres). Il faut soustraire les f.é.m. des générateurs montés en opposition au lieu de les ajouter (ils se comportent comme des récepteurs) : *les f.é.m. s'additionnent algébriquement.*

Fig. V-6



Branchement en série contenant des générateurs en opposition :
$E = E_1 + E_2 - E_3 + E_4 - E_5 + E_6$

6.2. Générateurs en parallèle. — Considérons *n* générateurs *identiques* (f.é.m. E_1 et résistance interne r_1) dont tous les pôles positifs sont reliés au même point *P* et dont

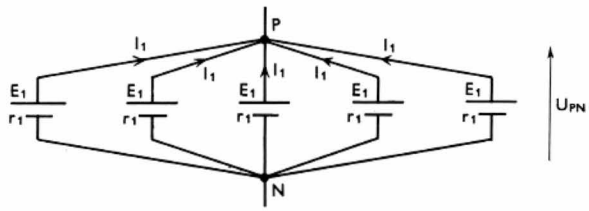


Fig. V-7 — Groupement de cinq générateurs en parallèle

tous les pôles négatifs sont reliés au même point *N* (fig. V-7). La d.d.p. aux bornes de chacun d'eux a la même valeur $U_{PN} = E_1 - r_1 I_1$, si I_1 représente l'intensité du courant dans une des dérivations.

Le générateur équivalent à l'ensemble débite un courant $I = nI_1$; nous désignerons sa f.é.m. par *E* et sa résistance interne par *r*. Évidemment nous avons :

$$U_{PN} = E - rI$$

En comparant les deux relations que nous venons d'écrire et sachant que $I_1 = \frac{I}{n}$ nous déduisons les deux égalités suivantes :

$$\boxed{\begin{aligned} E &= E_1 \\ r &= \frac{r_1}{n} \end{aligned}}$$

La f.é.m. de l'ensemble est égale à la valeur commune de la f.é.m. de chaque générateur (cela se vérifie aisément au moyen d'un voltmètre) et *la résistance de l'ensemble est n fois plus faible que la résistance de chaque générateur.*

Les courants $I_1 = \frac{I}{n}$ fournis par les divers générateurs s'additionnent pour donner le courant I dans le circuit principal. Le groupement en parallèle est donc intéressant chaque fois qu'un courant d'intensité plus élevée que celle que peut fournir chaque générateur est nécessaire.

Remarque : Le couplage en parallèle de générateurs non identiques pose de délicats problèmes, car le générateur dont la f.é.m. est la plus élevée peut débiter dans les autres générateurs du groupement. Si les résistances internes de ces éléments sont faibles (cas des accumulateurs), des courants d'intensité très élevée prennent naissance, entraînant la destruction du matériel. Avec des générateurs électromécaniques, ce couplage est parfaitement réalisable, car débit et f.é.m. peuvent être facilement réglés pour éviter ce danger.

6.3. Groupement mixte. — Pour réunir les avantages des deux associations précédentes et obtenir simultanément un courant d'intensité élevée et une grande f.é.m., nous utilisons un *groupement mixte* formé de plusieurs groupements

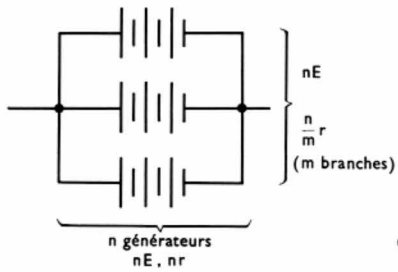


Fig. V-8

Groupement mixte de générateurs

en série associés en parallèle (fig. V-8). Dans le cas de *m* branches composées chacune de *n* générateurs identiques de f.é.m. *E* et de résistance interne *r*, la f.é.m. de l'ensemble sera égale à *nE* et la résistance interne à $\left(\frac{n}{m} \cdot r\right)$.

7. COURT-CIRCUIT

Un générateur est en court-circuit lorsque ses bornes sont réunies par un conducteur de résistance pratiquement nulle. L'intensité est alors égale au quotient de la f.é.m. du générateur et de sa résistance interne ; elle peut parfois atteindre des valeurs très grandes (plusieurs centaines d'ampères dans le cas des accumulateurs au plomb comme nous le verrons ci-après). Le dégagement de chaleur provoque une détérioration rapide des générateurs et, en général, divers dispositifs sont prévus pour les protéger (fusibles, disjoncteurs).

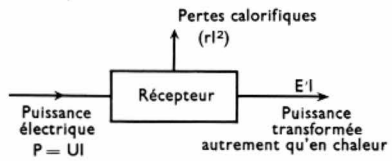
CHAPITRE VI

RÉCEPTEURS
FORCE CONTRE-ÉLECTROMOTRICE

1. RÉCEPTEURS

Un récepteur est un appareil qui permet de transformer de l'énergie électrique en énergie mécanique, chimique, etc. (fig. VI-1). Un récepteur présente une résistance interne *r'* ;

Fig. VI-1



lorsqu'il est traversé par un courant d'intensité I il dissipe une puissance égale à $r'I^2$ par effet Joule. S'il transforme une puissance P', il absorbe donc une puissance électrique égale à : $(r'I^2 + P')$.

La force contre-électromotrice d'un récepteur (en abrégé f.c.é.m.) **est numériquement égale au quotient E' de la puissance P' et de l'intensité I du courant :**

$$\boxed{E' = \frac{P'}{I}}$$

Dans de nombreux cas, la f.c.é.m. est indépendante de l'intensité du courant qui traverse le récepteur.

Un voltamètre est un exemple de récepteur : il dissipe une certaine puissance par effet Joule et le reste de la puissance consommée est transformé en énergie chimique. Dans le cas de l'électrolyse d'une solution de soude (V. chap. 1) cette énergie peut être récupérée par recombinaison de l'hydrogène et de l'oxygène recueillis. Dans ce cas, l'énergie chimique produite est proportionnelle à

la masse des gaz qui se dégagent dans l'appareil. Comme par définition, l'intensité du courant est proportionnelle à cette masse de gaz, l'énergie chimique, et donc la puissance P' transformée en énergie chimique, sont également proportionnelles à l'intensité I ; le rapport de P' et de I n'est autre que la f.c.é.m. du voltamètre.

La définition de la f.c.é.m. comme quotient d'une puissance et d'une intensité implique que cette grandeur est de même nature qu'une f.é.m. ; elle s'exprime en *volts*.

2. LOI DE POUILLET GÉNÉRALISÉE

2.1. Étude d'un cas simple. — Utilisons un générateur de f.é.m. E, de résistance interne r pour alimenter un récepteur de f.c.é.m. E' et de résistance interne r' (fig. VI-2).

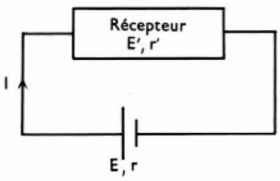


Fig. VI-2

Loi de Pouillet E — E' = (r+r') I

La puissance électrique consommée est égale à :

$$EI = rI^2 + r'I^2 + P'$$

P' désignant toujours la puissance transformée par le récepteur, autrement qu'en chaleur ($P' = E'I$). Divisons par I, nous tirons l'égalité suivante :

$$E = (r + r')\,I + E'$$

ou encore :

$$E - E' = (r + r')\,I$$

Nous voyons qu'*un récepteur se comporte comme un générateur monté en opposition* ou comme un générateur de f.é.m. négative. Cela explique le nom de force *contre-électromotrice* donné à E'.

2.2. Cas général. — Considérons un circuit comprenant en série des générateurs, des récepteurs et des résistances (fig. VI-3). Nous considérerons comme récepteurs, les

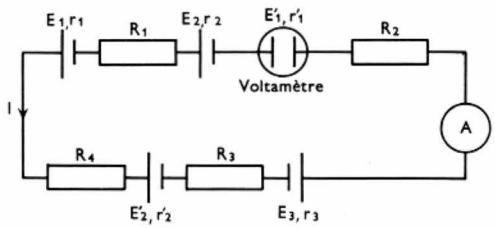


Fig. VI-3

générateurs montés en opposition. Soit E_1, E_2, E_3 les f.é.m. des générateurs et r_1, r_2, r_3 leurs résistances internes ; de même appelons E'_1, E'_2 les f.c.é.m. des récepteurs, r'_1, r'_2 les résistances internes ; R_1, R_2, R_3, R_4 sont des résistances. Nous désignerons :

— par ΣR *la résistance totale du circuit ;*

$$\Sigma R = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + r_1 + r_2 + r_3 + r'_1 + r'_2$$

— par ΣE la somme des f.é.m. ;

— par $\Sigma E'$ la somme des f.c.é.m.

En raisonnant comme nous l'avons fait pour le cas particulier précédent, nous pouvons écrire la relation suivante :

$$\boxed{\Sigma E - \Sigma E' = \Sigma RI}$$ **(loi de Pouillet généralisée)**

3. DIFFÉRENCE DE POTENTIEL AUX BORNES D'UN RÉCEPTEUR

Si nous appliquons une d.d.p. U aux bornes d'un récepteur traversé par un courant d'intensité I, il reçoit une puissance $P = UI$; une partie égale à $r'I^2$ est transformée en chaleur et le reste $E'I$ se retrouve sous forme d'énergie chimique ou mécanique. Le principe de la conservation d'énergie permet d'écrire :

$$UI = r'I^2 + E'I$$

En divisant par I, nous déduisons :

$$\boxed{U = r'I + E'}$$ **(loi d'Ohm pour un récepteur)**

Cette loi peut être vérifiée expérimentalement (fig. VI-4) en étudiant les variations de la tension U en fonction

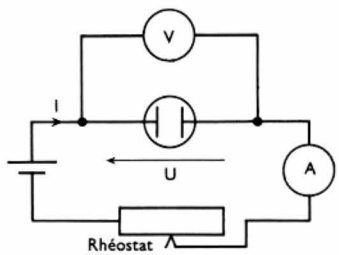


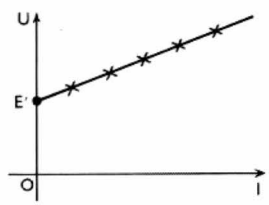
Fig. VI-4

Mesure de la f.c.é.m. d'un récepteur

de l'intensité I du courant. La courbe obtenue permet de déterminer E' et r' (fig. VI-5). E' est l'ordonnée à l'origine de la droite obtenue et le coefficient directeur de la droite est proportionnel à r' (dans le cas particulier où E' ne dépend pas de I).

Fig. VI-5

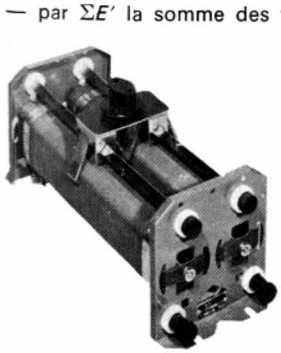
Variation de la différence de potentiel aux bornes d'un récepteur en fonction de I



Remarque : Un moteur électrique transforme de l'énergie électrique en énergie mécanique en utilisant les effets magnétiques du courant (V. chap. 23) mais si le moteur ne peut tourner (moteur calé) il se comporte alors comme une simple résistance (égale à sa résistance interne).

4. APPLICATION DES LOIS DE POUILLET : INFLUENCE D'UN RHÉOSTAT

Introduisons dans un circuit électrique un rhéostat (fig. VI-6) c'est-à-dire une résistance que nous pouvons faire varier. L'intensité I du courant traversant le circuit étant fonction de la somme des résistances ΣR, en modifiant la valeur du rhéostat et sans rien changer au reste du circuit, nous pouvons facilement régler cette intensité I du courant à la valeur désirée.



(*Sic-S.A.F.C.O.*)

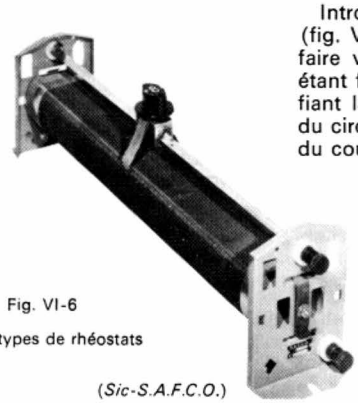


Fig. VI-6

Divers types de rhéostats

(*Sic-S.A.F.C.O.*)

Rhéostat avec capot métallique (*Sofair-A.D.B.*)

CHAPITRE VII

ÉLECTROLYSE

1. ÉTUDE QUALITATIVE

1.1 Électrolyse d'une solution d'acide chlorhydrique. — L'eau pure est un isolant, alors qu'une solution d'acide, de base ou de sel est conductrice ; de telles solutions sont appelées **électrolytes.** Le passage du courant dans ces solutions s'accompagne le plus souvent d'effets chimiques : il se produit une **électrolyse.** L'appareil utilisé pour étudier ces effets est un voltamètre ; il se compose d'une cuve contenant l'électrolyte et de deux conducteurs, les **électrodes** qui plongent dans l'électrolyte. L'électrode par laquelle arrive le courant lorsque le voltamètre est placé dans un circuit électrique est appelée **anode** (*elle est reliée au pôle positif du générateur)* ; l'électrode de sortie du courant est la **cathode.** *À l'intérieur d'un voltamètre, le courant va de l'anode à la cathode* (fig. VII-1).

Dans une solution d'électrolyte, se trouvent des particules chargées, appelées **ions,** qui peuvent se déplacer librement dans le liquide. Par exemple, dans une solution d'acide chlorhydrique, se trouvent des ions H^+ et des ions Cl^- ; les premiers sont des atomes d'hydrogène auxquels il manque un électron (donc réduits à un proton puisque l'atome d'hydrogène se compose d'un noyau formé d'un seul proton, autour duquel gravite un seul électron) ; les seconds sont des atomes de chlore autour desquels gravite un électron excédentaire. Les ions H^+ sont chargés positivement et les ions Cl^- négativement (V. t. 1, Physique nucléaire, chap. 1).

Lorsqu'une d.d.p. est appliquée aux bornes du voltamètre, il se produit un mouvement des ions : les ions positifs H^+ vont vers la cathode et les ions négatifs Cl^- vers l'anode. Pour cette raison, les ions négatifs sont appelés **anions** et les ions positifs, **cations.** Arrivés à la cathode, les ions H^+ se recombinent avec des électrons pour former de l'hydrogène gazeux (électriquement neutre) :

$$2\ H^+ + 2\ e^- \rightarrow H_2\uparrow$$

À l'anode, les ions Cl^- cèdent leur électron excédentaire pour former du chlore gazeux :

$$2\ Cl^- \rightarrow Cl_2\uparrow + 2\ e^-$$

Au cours de l'électrolyse d'une solution d'acide chlorhydrique, il se dégage donc de l'hydrogène au niveau de la cathode et du chlore au niveau de l'anode. Le nombre d'électrons que l'anode reçoit en un temps donné est égal au nombre d'électrons cédés par la cathode pendant le même temps.

Électrolyte : solution d'acide chlorhydrique	
H^+	Cl^-
CATHODE	*ANODE*
$2\ H^+ + 2\ e^- \rightarrow H_2\uparrow$	$2\ Cl^- \rightarrow Cl_2\uparrow + 2\ e^-$
Dégagement d'hydrogène	Dégagement de chlore

L'exemple précédent est assez simple ; dans de nombreux cas il n'en est pas de même car les produits formés par l'électrolyse peuvent réagir avec l'électrolyte ou avec les électrodes comme nous allons le voir à l'aide de quelques exemples.

1.2. Action sur l'électrolyte

1.2.1. Électrolyse d'une solution aqueuse de chlorure de sodium. — L'électrolyte est placé dans un voltamètre à électrodes en carbone qui ne sont pas attaquées par les produits formés.

La solution de chlorure de sodium dans l'eau contient des ions sodium Na^+ et des ions chlore Cl^-. Au cours de l'électrolyse, les anions Cl^- se déchargent sur l'anode et il y a dégagement de chlore gazeux. Au voisinage de la cathode, la concentration en ions Na^+ augmente mais ceux-ci ne se déchargent pas. Par contre, du fait de la présence de ces charges, il se produit une ionisation des

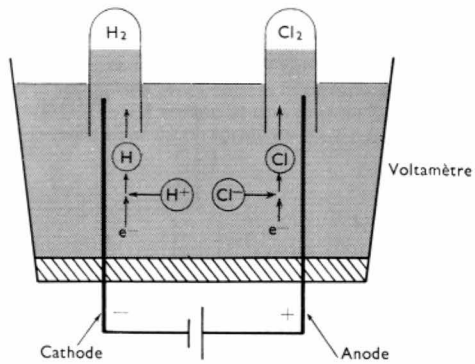


Fig. VII-1 — Représentation schématique de l'électrolyse d'une solution d'acide chlorhydrique

molécules d'eau se trouvant dans cette zone. Des électrons, libérés au niveau de la cathode, sont captés par des molécules d'eau qui donnent naissance à deux ions suivant le processus schématisé par l'équation suivante :

$$2\ H_2O + 2\ e^- \rightarrow 2\ OH^- + H_2\uparrow$$

De l'hydrogène se dégage donc, et il se forme des ions OH^-.

Globalement, l'électrolyse aboutit à un appauvrissement de la solution en ions Cl^- et ceux-ci sont remplacés par des ions OH^-. Autrement dit, au cours de l'électrolyse, le chlorure de sodium est progressivement remplacé par de la soude (Na^+, OH^-). D'autre part, si le chlore dégagé à l'anode peut réagir avec la soude formée à la cathode, il se forme de l'*hypochlorite de sodium* (*eau de javel*).

Électrolyse d'une solution aqueuse de chlorure de sodium	
Na^+	Cl^-
CATHODE	*ANODE*
Ionisation de l'eau $2\ H_2O + 2\ e^- \rightarrow 2\ OH^- + H_2\uparrow$	$2\ Cl^- \rightarrow Cl_2\uparrow + 2\ e^-$
Dégagement d'hydrogène	Dégagement de chlore

1.2.2. Électrolyse d'une solution de soude. — L'électrolyte est placé dans un voltamètre à électrodes en fer.

Une solution de soude contient des ions Na^+ et des ions OH^-. Comme dans le cas de l'électrolyse d'une solution de chlorure de sodium, les ions Na^+ ne se déchargent pas au voisinage de la cathode mais celle-ci cède des électrons et il se produit une ionisation des molécules d'eau suivant la même réaction que précédemment :

$$2\ H_2O + 2\ e^- \rightarrow 2\ OH^- + H_2\uparrow$$

L'hydrogène se dégage sur la cathode et la solution s'enrichit en ions OH^-. À l'anode, arrivent les ions OH^- et il se produit la réaction schématisée par l'équation suivante :

$$4\ OH^- \rightarrow 2\ H_2O + O_2\uparrow + 4\ e^-$$

De l'oxygène se dégage donc, et il se forme de l'eau.

L'anode recueille le même nombre d'électrons que la cathode en cède et l'électrolyse aboutit globalement à la décomposition de l'eau suivant la réaction :

$$2\,H_2O \rightarrow 2\,H_2\uparrow + O_2\uparrow$$

Électrolyte : solution de soude	
Na^+	OH^-
CATHODE	*ANODE*
Ionisation de l'eau $2\,H_2O + 2\,e^- \rightarrow 2\,OH^- + H_2\uparrow$	$4\,OH^- \rightarrow 2\,H_2O + O_2\uparrow + 4\,e^-$
Dégagement d'hydrogène	Dégagement d'oxygène

1.3. Action sur les électrodes. Électrolyse d'une solution de sulfate de cuivre avec anode en cuivre (électrolyse à anode soluble). — Pour les trois électrolyses précédentes nous avons utilisé des électrodes ne réagissant pas avec les produits formés. Dans d'autres cas, elles sont choisies de façon à obtenir certaines réactions.

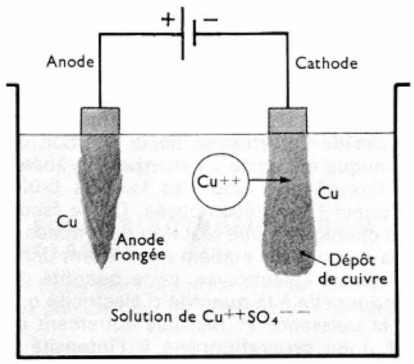


Fig. VII-2

Électrolyse à anode soluble (sulfate de cuivre entre électrodes de cuivre)

Une solution de sulfate de cuivre contient des cations Cu^{++} et des anions SO_4^{--} (fig. VII-2). À la cathode, les ions cuivriques Cu^{++} se déchargent, et il se forme un dépôt de cuivre métallique. À l'anode, les ions sulfate SO_4^{--} s'accumulent sans se décharger, et provoquent une ionisation des atomes de cuivre de l'électrode ; ceux-ci passent dans la solution sous forme d'ions Cu^{++}. Il y a donc simultanément *dissolution d'un atome de cuivre de l'anode et dépôt d'un atome de cuivre sur la cathode ;* dans le même temps, deux électrons passent dans le circuit extérieur de l'anode à la cathode. Au total, il se produit donc un simple transport de cuivre de l'anode à la cathode.

Électrolyte : solution de sulfate de cuivre	
Cu^{++}	SO_4^{--}
CATHODE	*ANODE*
$Cu^{++} + 2\,e^- \rightarrow Cu\searrow$	Ionisation de l'anode en cuivre $Cu \rightarrow Cu^{++} + 2\,e^-$
Dépôt de cuivre sur la cathode	Dissolution du cuivre de l'anode

Avec une solution de nitrate d'argent et une anode en argent nous obtenons un dépôt d'argent à la cathode.

Cette technique est susceptible de très nombreuses applications industrielles : raffinage électrolytique des métaux (dans le cas du cuivre, si l'anode est en cuivre brut, nous recueillons sur la cathode du cuivre électrolytique contenant moins de un pour mille d'impuretés), obtention de dépôts métalliques sur certains objets (argenture, chromage, V. t. 2, Électrochimie, chap. 9).

1.4. Remarque : Électrolyse des bases et des sels fondus. — Contrairement aux acides, la plupart des bases et des sels amenés à l'état liquide par fusion, cela en l'absence totale d'eau, conduisent le courant car ils ont une structure ionique. Ils peuvent donc être électrolysés. Citons, par exemple, l'électrolyse du chlorure de sodium anhydre fondu. À la cathode, les ions Na^+ se transforment en sodium (liquide à la température de fusion du chlorure) qui se rassemble à la surface de l'électrolyte. À l'anode se dégage du chlore.

Électrolyte : chlorure de sodium anhydre fondu	
Na^+	Cl^-
CATHODE	*ANODE*
$2\,Na^+ + 2\,e^- \rightarrow 2\,Na$ Obtention de sodium	$2\,Cl^- \rightarrow Cl_2\uparrow + 2\,e^-$ Dégagement de chlore

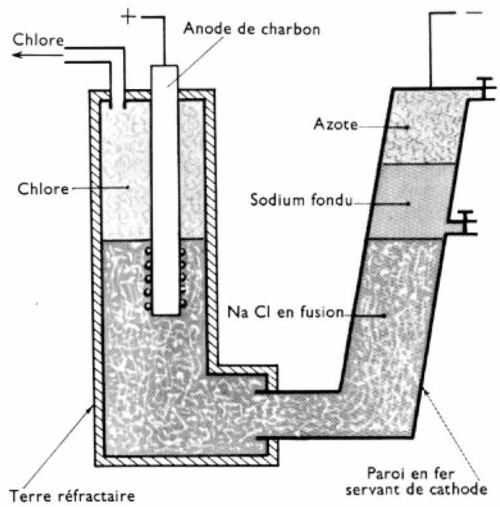


Fig. VII-3 — Électrolyse du chlorure de sodium fondu

Cette électrolyse est utilisée industriellement pour préparer le sodium ; il faut une atmosphère non oxydante (par exemple d'azote) pour éviter l'oxydation du sodium (fig. VII-3).

2. ÉTUDE QUANTITATIVE

Dans un même circuit, disposons en série plusieurs voltamètres, contenant des électrolytes différents : une solution

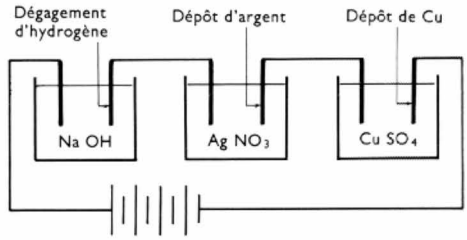


Fig. VII-4

de soude dans le premier, une solution de nitrate d'argent ($AgNO_3$) dans le second, une solution de sulfate de cuivre dans le troisième. Sur les cathodes, nous obtenons respectivement de l'hydrogène, de l'argent et du cuivre. L'expérience montre que la masse de corps obtenue au bout d'un temps donné t, est proportionnelle au quotient de la masse atomique A de l'élément recueilli et de sa valence n dans l'électrolyte considéré. Ce quotient, appelé *valence-gramme*, est une caractéristique de l'élément (V. tabl. ci-après).

Élément	Masse atomique	Valence	Valence-gramme
Argent . . .	108	1	108
Chlore . . .	35,5	1	35,5
Hydrogène	1	1	1
Potassium	39	1	39
Sodium . .	23	1	23
Cuivre . . .	64	2	32
Zinc	65,4	2	32,7
Aluminium	27	3	9
Or	197	3	65,7
Fer	56	2 (ion ferreux)	28
		3 (ion ferrique)	18,7
Étain	119	2 (ion stanneux)	59,5
		4 (ion stannique)	29,8

Cela signifie que la quantité d'électricité nécessaire pour libérer un gramme d'hydrogène lors de l'électrolyse d'une solution aqueuse de soude permet d'obtenir un dépôt de 108 g d'argent, de 32 g de cuivre. Par ailleurs, nous avons admis que la masse m de corps recueilli est proportionnelle à la quantité d'électricité Q qui a traversé le circuit (V. chap. 1, § 8). Donc nous pouvons écrire : $m = k \frac{A}{n} Q$, k est une constante de proportionnalité. Comme par définition le coulomb est la quantité d'électricité qui libère $\frac{1}{96\,500}$ g d'hydrogène à la cathode d'un voltamètre contenant de la soude, nous déduisons la relation suivante :

$$m = \frac{1}{96\,500} \frac{A}{n} It \quad \text{ou} \quad m = \frac{1}{96\,500} \frac{A}{n} Q$$

(m et $\frac{A}{n}$ sont exprimés en grammes, Q en coulombs, I en ampères, t en secondes).

Loi de Faraday : *La masse de corps formé aux électrodes est proportionnelle :*

1° *à la valence-gramme de l'élément libéré ;*

2° *à la quantité d'électricité ayant traversé le voltamètre.*

Cette loi s'applique évidemment aux produits primaires et non à ceux fournis par des réactions secondaires.

3. INTERPRÉTATION DES PHÉNOMÈNES ET DE LA LOI DE FARADAY

Dans un conducteur, le courant électrique est un déplacement d'électrons ; dans un électrolyte, il est dû à un déplacement d'ions : les ions positifs vont vers la cathode et les ions négatifs vers l'anode. Au niveau de la cathode les ions positifs se déchargent, donnant de l'hydrogène ou un métal. Il faut n électrons pour libérer un atome d'éléments M si le cation correspondant est porteur de n charges positives (M^{n+}) : $M^{n+} + ne^- \rightarrow M$.

Pour libérer une mole d'atomes d'élément (c'est-à-dire N atomes, si N est le nombre d'Avogadro, $N = 6{,}023 \times 10^{23}$), une quantité d'électricité égale à celle portée par (Nn) électrons sera nécessaire ; pour obtenir une valence-gramme, quantité n fois plus petite qu'une mole d'atomes, il suffit d'une quantité d'électricité égale à N fois la charge e d'un électron, soit :

$$(6{,}023 \times 10^{23} \times 1{,}602 \times 10^{-19}) = 96\,500 \text{ C.}$$

Nous retrouvons bien le résultat précédent : une quantité d'électricité de 96 500 C, souvent appelée un *faraday* (symbole : F), est nécessaire pour libérer une valence-gramme d'un élément.

4. FORCE CONTRE-ÉLECTROMOTRICE D'UN VOLTAMÈTRE

Dans un voltamètre, l'énergie électrique qui n'est pas transformée en chaleur par effet Joule est transformée en énergie chimique. Cette énergie peut être déterminée en étudiant les réactions qui se produisent. Par exemple, dans le cas de l'électrolyse de la solution de soude, l'énergie chimique est égale à l'énergie que libéreraient l'hydrogène et l'oxygène si nous les faisions brûler ensemble pour reformer l'eau décomposée. D'une façon générale, l'énergie chimique d'une réaction déterminée est proportionnelle à la quantité de matière intervenant dans la réaction. Dans le cas de l'électrolyse, cette quantité de matière est proportionnelle à la quantité d'électricité qui traverse le circuit et la puissance P' dissipée autrement que par effet Joule est donc proportionnelle à l'intensité I du courant. Par conséquent, la force contre-électromotrice égale au rapport $\frac{P'}{I}$ est constante.

Dans le cas particulier d'une électrolyse à anode soluble, la quantité de métal qui se transforme en ions à l'anode est égale à la quantité de métal déposée sur la cathode par décharge des ions. Globalement, l'énergie chimique libérée est donc nulle, et le voltamètre ne présente aucune f.c.é.m. Un voltamètre à anode soluble se comporte donc comme une résistance.

CHAPITRE VIII

POLARISATION D'UN VOLTAMÈTRE

1. PHÉNOMÈNE DE POLARISATION DANS UN VOLTAMÈTRE

Considérons le montage représenté par la figure VIII-1 : le voltamètre contient une solution d'acide sulfurique, et ses électrodes A et C sont deux lames de plomb identiques. Au début de l'expérience, le commutateur K est ouvert, et l'aiguille du voltmètre branché entre les électrodes reste au zéro : il n'y a aucune différence de potentiel entre les deux électrodes. Plaçons K en position 1 : un courant traverse le circuit et le voltamètre consomme une certaine puissance électrique, égale au produit de l'intensité du courant (indiquée par l'ampèremètre) et de la tension aux bornes du voltamètre (indiquée par le voltmètre).

Le passage du courant dans le voltamètre s'accompagne d'une électrolyse qui produit la décomposition de l'eau de la solution. Sur l'anode A apparaît de l'oxygène qui se dégage partiellement. Par ailleurs, une partie de l'oxygène

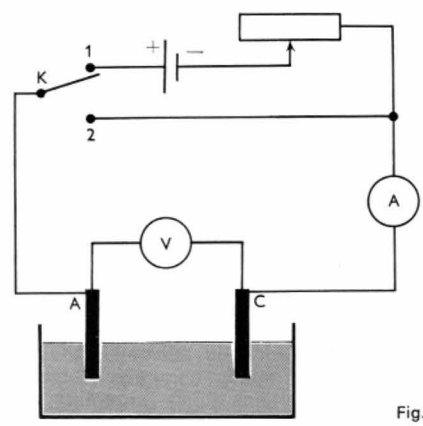


Fig. VIII-1

formé oxyde le plomb de l'électrode et après un certain temps, l'électrode est recouverte d'un produit de couleur brune. Sur la cathode *C*, l'hydrogène libéré ne se dégage pas totalement non plus : une partie de ce gaz est retenue par le plomb de l'électrode et peu à peu elle se colore en gris. Les électrodes qui primitivement étaient identiques, ne le sont plus : la chaîne de conducteurs : électrode-électrolyte-électrode est dissymétrique. *Le voltamètre est polarisé.* Le voltamètre a permis la conversion d'énergie électrique en énergie chimique : il a donc joué le rôle d'un *récepteur.*

Ouvrons maintenant le commutateur *K* ; l'aiguille du voltmètre ne revient pas au zéro. *Le voltamètre polarisé présente, entre ses bornes, une différence de potentiel lorsqu'il est en circuit ouvert (tout comme un générateur).* Fermons maintenant *K* dans la position 2 : grâce à l'ampèremètre, nous décelons le passage d'un courant circulant dans le sens contraire du sens précédent. Cela prouve que *le voltamètre polarisé est devenu un générateur,* dont le pôle positif est l'électrode *A* qui était l'anode dans la première partie de l'expérience. Le passage du courant produit une décomposition de l'eau ; l'hydrogène se dégage maintenant sur l'électrode *A*, et réduit les oxydes de plomb qui s'y étaient formés pendant la première partie de l'expérience. L'oxygène libéré sur l'électrode *C* (qui était primitivement la cathode) oxyde l'hydrogène qui y était fixé et il se reforme de l'eau. Les produits accumulés lors de la polarisation disparaissent peu à peu, et le voltamètre tend à revenir à son état initial. Les réactions chimiques qui se produisent sont les réactions inverses de celles qui avaient lieu pendant la polarisation. Cette dépolarisation du voltamètre s'accompagne d'une transformation de l'énergie chimique en énergie électrique.

2. ÉTUDE DE LA FORCE ÉLECTROMOTRICE D'UN VOLTAMÈTRE POLARISÉ

Un générateur de force électromotrice *E* et de résistance intérieure *r*, traversé par un courant d'intensité *I*, présente entre ses bornes une d.d.p. *U* donnée par la relation suivante :

$$U = E - rI$$

Lorsque le voltamètre polarisé est utilisé comme générateur, nous pouvons vérifier expérimentalement que la courbe de variation de la tension *U* aux bornes du voltamètre en fonction de l'intensité *I* du courant est une droite ; cela prouve que *r* et *E* sont indépendants de l'intensité du courant. Répétons ces mesures en faisant varier l'écartement des électrodes ou en les enfonçant plus ou moins dans l'électrolyte : nous constatons que la résistance intérieure *r* varie mais que la f.é.m. reste constante. L'expérience montre également que cette f.é.m. est égale à la f.c.é.m. de l'appareil lorsqu'il fonctionne en voltamètre (première partie de l'expérience).

Ce résultat est général : *f.c.é.m. d'un voltamètre et f.é.m. d'un voltamètre polarisé utilisé en générateur ne dépendent que de la nature des électrodes et de l'électrolyte.*

3. RENDEMENT ÉNERGÉTIQUE DU VOLTAMÈTRE

Au cours de l'expérience décrite, nous avons vu que le voltamètre transforme de l'énergie électrique en énergie chimique au cours du phénomène de polarisation. Une partie de cette énergie est retransformée en énergie électrique, au cours de la dépolarisation ; cependant une partie de l'énergie est perdue, car une partie des gaz formés se dégage et ils ne se recombinent pas. *Le rendement énergétique* du voltamètre est le quotient de l'énergie électrique libérée au cours de la dépolarisation et de l'énergie utilisée pendant la polarisation. Ce quotient est inférieur à 1 à cause des pertes d'énergie dues à l'effet Joule dans le voltamètre et aussi au dégagement des gaz. Néanmoins, le voltamètre emmagasine de l'énergie lorsque le courant le traverse dans un sens et restitue cette énergie lorsque le courant le traverse dans l'autre sens. Cette propriété a été mise en œuvre dans les *accumulateurs*.

CHAPITRE IX

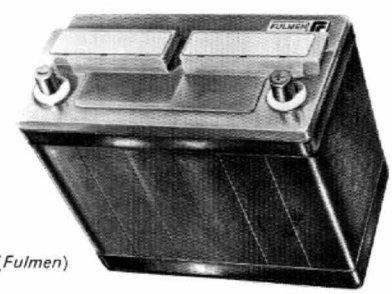
ACCUMULATEURS ET PILES (1)

1. ACCUMULATEURS AU PLOMB (fig. IX-1)

Si nous répétons un grand nombre de fois l'expérience de polarisation et de dépolarisation avec un voltamètre à électrodes en plomb dont l'électrolyte est une solution d'acide sulfurique (V. chap. 8, § 1), le rendement énergétique augmente. Les électrodes subissent de profondes modifications ; en particulier, l'anode devient poreuse à la suite des nombreuses réactions d'oxydation et de réduction qui y sont produites. D'autre part, la capacité de l'accumulateur, c'est-à-dire la quantité totale d'électricité qu'il est susceptible d'emmagasiner augmente. Ce procédé a été utilisé industriellement pour fabriquer les premiers accumulateurs (Planté, 1859) ; en intervertissant le rôle des deux électrodes, elles devenaient également poreuses.

Actuellement, les électrodes sont des plaques en alliages de plomb et d'antimoine contenant des oxydes de plomb dans les alvéoles : les plaques positives renferment du minium de plomb Pb_3O_4 et les plaques négatives de la litharge PbO. Lors de la première charge, le minium de plomb se transforme en bioxyde de plomb PbO_2 et la litharge donne du plomb spongieux. L'électrolyte est une solution d'acide sulfurique de masse volumique égale à

(*Tudor*)



(*Fulmen*)

Fig. IX-1

Divers types d'accumulateurs au plomb

Bac plastique et bac verre

Batterie pour véhicule de tourisme

(1) Production d'énergie électrique : V. t. 1, Autres sources d'énergie électrique.

1,2 kg/dm³. Ces accumulateurs correspondent à la chaîne dissymétrique suivante :

Oxyde de plomb PbO_2 (électrode positive)	*Solution d'acide sulfurique*	*Plomb* Pb (électrode négative)

Lors de la décharge, l'hydrogène se dégage sur l'électrode positive et réduit l'oxyde de plomb en sulfate de plomb, tandis que les ions sulfate SO_4^{--} produisent l'oxydation de l'électrode négative en sulfate de plomb également. Pendant la charge les électrodes initiales se reconstituent ; en effet les réactions chimiques qui se produisent dans l'accumulateur sont réversibles (théorie de la double sulfatation). La concentration de l'électrolyte diminue au cours de la décharge de l'accumulateur et augmente au cours de la charge. Pour cette raison il est facile de vérifier qu'un accumulateur est chargé : il suffit de mesurer la densité de l'électrolyte.

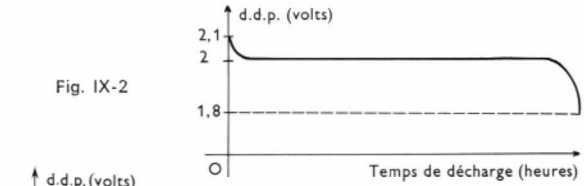


Fig. IX-2

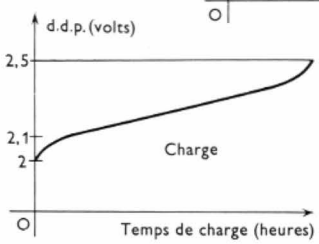


Fig. IX-3

Pendant toute la décharge, la f.é.m. reste pratiquement constante et voisine de 2 V (fig. IX-2). Au cours de la charge, elle est légèrement supérieure à 2 V et lorsque la batterie est très chargée, elle peut atteindre 2,4 V (fig. IX-3). À la fin de la décharge se produit une brusque chute de f.é.m. Il ne faut jamais laisser la f.é.m. devenir inférieure à 1,8 V, ni laisser l'accumulateur longtemps déchargé, sinon les électrodes se recouvrent d'une couche blanche de sulfate de plomb, qui empêche toute recharge. L'accumulateur est sulfaté : les cristaux de sulfate atteignent des dimensions trop grandes, obstruent les pores de la matière active et ne peuvent plus être transformés lors de la charge.

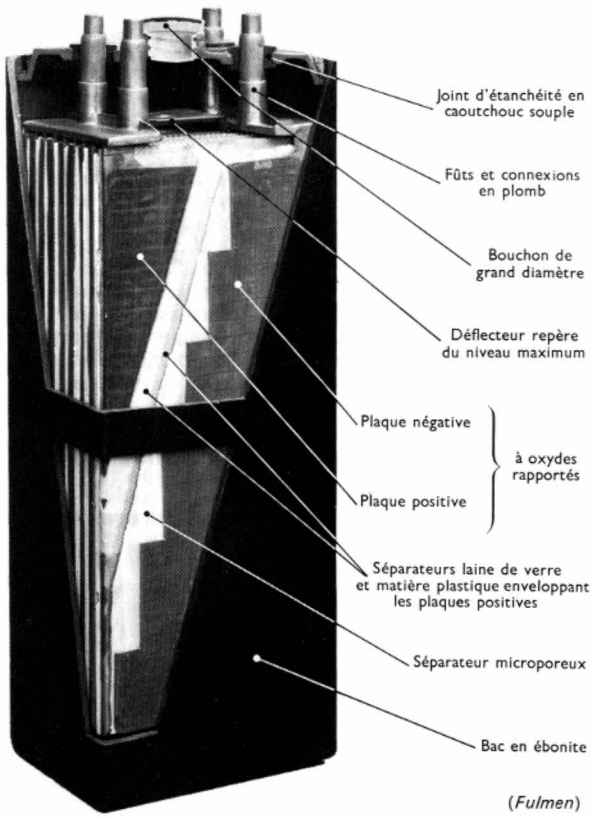


Fig. IX-4 — Coupe d'un élément au plomb, montrant les plaques à oxydes rapportées

Fig. IX-5 — Batterie stationnaire Ironclad-Tudor en bacs gummite (*Tudor*)

Le rendement énergétique d'un accumulateur au plomb est, en général, compris entre 0,7 et 0,8.

La résistance interne d'un accumulateur au plomb est très faible : voisine du centième d'ohm pour les accumulateurs habituels, elle peut être inférieure au millième d'ohm pour les gros accumulateurs.

La capacité d'un accumulateur au plomb est proportionnelle à la masse des plaques et est comprise entre 10 et 15 Ah par kilogramme de plaque. La capacité en énergie qui représente l'énergie que peut restituer un accumulateur au cours d'une décharge complète a une valeur comprise entre 22 et 33 Wh/kg.

En pratique, les accumulateurs au plomb sont associés en série, pour former une batterie de f.é.m. suffisante. En particulier, les batteries employées dans les voitures comprennent trois ou six éléments de façon à ce que leur f.é.m. soit de 6 ou 12 V (V. fig. IX-1). Des séparateurs poreux en matière isolante (bois, polychlorure de vinyle, polystyrène, etc.) empêchent tout contact entre plaques de polarités différentes et s'opposent au cheminement de la matière active d'une plaque vers l'autre (fig. IX-4).

Il ne faut absolument pas mettre en court-circuit les bornes d'un accumulateur car l'intensité du courant peut atteindre des valeurs très importantes, dangereuses pour l'appareil : par exemple, un accumulateur de f.é.m. 2 V et de résistance intérieure d'un centième d'ohm, mis en court-circuit, débite un courant de 200 A.

L'électrolyte liquide, acide fort, a longtemps constitué un sérieux inconvénient, car il rend la manipulation de ces accumulateurs très délicate. L'emploi de batteries étanches constitue un important progrès. Dans une batterie étanche l'électrolyte est immobilisé par un agent gélifiant et plusieurs évents permettent le dégagement des gaz provenant de la décomposition de l'eau lors d'une surcharge éventuelle.

D'autre part, pour supprimer l'attaque des armatures des plaques par l'acide lorsque le générateur se trouve en circuit ouvert (ce qui entraîne la décomposition de l'eau et un dégagement gazeux gênant l'obtention de l'étanchéité) ces armatures sont réalisées en un matériau inattaquable formé de calcium et de plomb.

L'accumulateur au plomb (fig. IX-5) s'emploie comme réservoir d'énergie électrique (source auxiliaire, source de secours) fixe ou mobile, et aussi comme régulateur de tension (batterie tampon), puisque la d.d.p. entre ses bornes reste sensiblement constante quel que soit le débit, du fait de la très faible valeur de sa résistance interne.

Les accumulateurs au plomb sont cependant lourds et fragiles et leur entretien nécessite beaucoup de soins; aussi a-t-on essayé de les remplacer par d'autres accumulateurs, plus maniables pour certains usages.

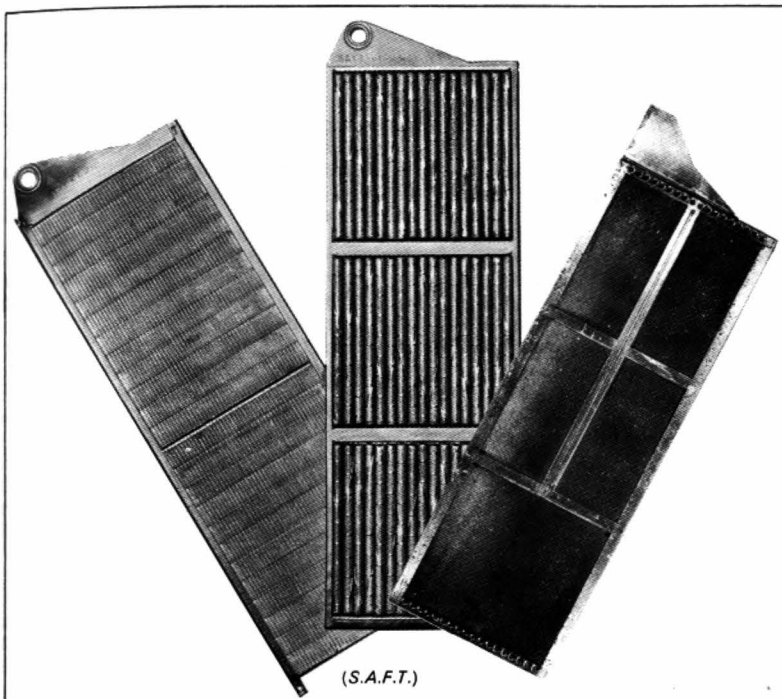
2. LES ACCUMULATEURS ALCALINS

L'*accumulateur alcalin* (V. tableau ci-dessous), concurrent de l'accumulateur au plomb, comporte un électrolyte basique : une solution de potasse, le plus souvent, et des électrodes métalliques.

Cet accumulateur est robuste, d'un poids relativement faible, et ne demande qu'un entretien réduit. Il peut rester déchargé pendant plusieurs mois sans inconvénient, ce que ne peut supporter un accumulateur au plomb. D'autre part, l'électrolyte basique, moins dangereux que l'électro-

ACCUMULATEURS ALCALINS

CADMIUM-NICKEL



(*S.A.F.T.*)

De gauche à droite : plaque pochette, plaque tubulaire et plaque frittée

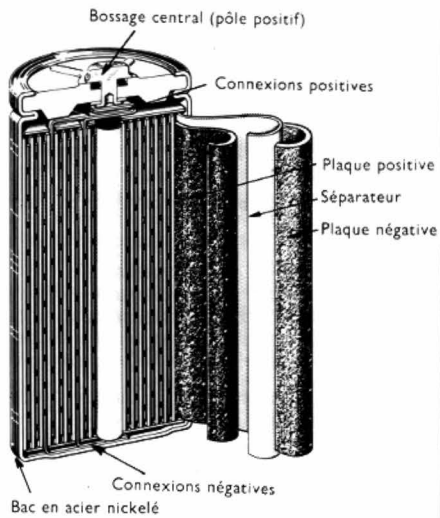
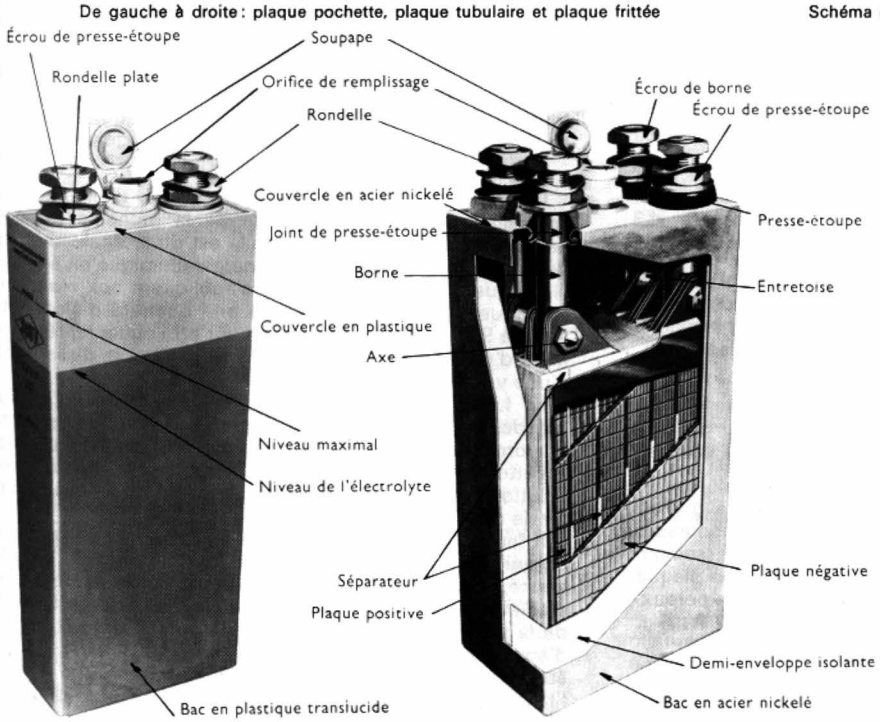


Schéma d'un accumulateur cylindrique étanche

(*S.A.F.T.*)



Accumulateur semi-étanche en coupe (*S.A.F.T.*)

(*Aglo*)

Élément « bouton » 0,25 Ah

Élément cylindrique étanche de 3 Ah

(*Aglo*)

lyte acide, a rendu facile la réalisation de batteries entièrement étanches, de toutes capacités et qui permettent d'obtenir toutes les tensions désirées. Le volume de ces éléments est comparable à celui des piles sèches, qu'ils peuvent facilement remplacer. Cependant, l'accumulateur alcalin reste d'un coût relativement élevé.

Entrent dans cette catégorie :

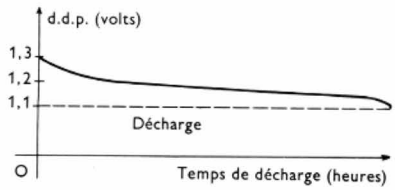
a) l'*accumulateur cadmium-nickel*, représenté par la chaîne suivante :

hydroxyde de nickel Ni $(OH)_3$	*solution d'hydroxyde de potassium* K OH à 20%	*cadmium*
(électrode positive)		(électrode négative)

Lors de la décharge, sur la plaque positive se forme un hydroxyde de nickel Ni $(OH)_2$, et sur la plaque négative un hydroxyde de cadmium Cd $(OH)_2$. La concentration de l'électrolyte reste constante. Lors de la charge on retrouve évidemment les éléments de départ.

Chaque élément présente une f.é.m. de 1,2 V (fig. IX-6).

Fig. IX-6



b) l'*accumulateur argent-zinc*, représenté par la chaîne suivante :

oxyde d'argent	*solution d'hydroxyde de potassium*	*zinc*
(électrode positive)	K OH	(électrode négative)

Pendant la décharge, sur la plaque positive se forme de l'argent, et sur la plaque négative de l'hydroxyde de zinc Zn $(OH)_2$.

La f.é.m. d'un élément d'accumulateur argent-zinc est sensiblement égale à 1,5 V. Le principal avantage de cet accumulateur est sa grande capacité en énergie par unité de masse ou de volume : 130 Wh/kg et 300 Wh/dm³, 4 à 6 fois supérieure à celle des batteries à électrolytes acides. En revanche son prix est très élevé, à cause de l'emploi de l'argent.

c) l'*accumulateur zinc-air*, représenté par la chaîne dissymétrique suivante :

oxygène de l'air	*solution d'hydroxyde de potassium* K OH	*zinc*

L'oxygène est pompé dans l'air à travers une paroi poreuse en nickel, qui joue le rôle de catalyseur. Lors de la décharge, tout se passe comme si l'oxygène de l'air oxydait le zinc à l'état d'oxyde de zinc ZnO soluble dans l'électrolyte. Cette transformation est réversible.

L'accumulateur zinc-air, de capacité en énergie élevée, puisqu'elle atteint 170 Wh/kg, rend possible l'emploi de moteurs électriques sur les chariots industriels, les voitures de livraisons, et même les voitures particulières.

Les nombreux progrès accomplis expliquent la grande variété d'accumulateurs réalisés. L'évolution se poursuit. L'emploi d'accumulateurs à électrolyte organique semble très prometteur. Un premier type, comportant une plaque positive en cuivre et une plaque négative en lithium poreux, présente une capacité en énergie atteignant 500 Wh/kg.

Les formes sous lesquelles les accumulateurs se présentent sont très nombreuses. Les batteries les plus courantes sont contenues dans des récipients rectangulaires ou cylindriques. Les plus petits accumulateurs occupent un volume ne dépassant pas 1 cm³.

En microélectronique on emploie aussi des accumulateurs à électrolyte solide. Ils sont constitués d'une pastille d'iodure d'argent jouant le rôle d'électrolyte et portant sur ses faces de minces films métalliques, l'un d'argent (plaque positive), l'autre de platine ou de palladium (plaque négative) déposés par évaporation.

3. PILES ÉLECTRIQUES

Au chapitre 8, nous avons vu qu'un voltamètre dont les électrodes sont rendues dissymétriques par le phénomène de polarisation peut se comporter comme un générateur. Nous pouvons aussi obtenir immédiatement un générateur en plongeant **deux électrodes de nature différente** dans un électrolyte. L'ensemble constitue une **pile électrique.** La f.é.m. d'une pile électrique dépend de la nature de l'électrolyte et de celle des électrodes ; elle est indépendante de leur forme et de la distance qui les sépare. En revanche la résistance intérieure de la pile varie beaucoup avec les dimensions et l'écartement des électrodes.

Les piles, comme les accumulateurs, sont donc formées par une *chaîne de conducteurs dissymétrique*. Ce sont tous des **générateurs électrochimiques** mais la recharge d'une pile n'est pas possible alors que celle d'un accumulateur est facilement réalisable.

3.1. Pile de Volta. — L'électrode positive est une lame de cuivre et l'électrode négative, une lame de zinc amalgamé (fig. IX-7) ; l'électrolyte est de l'acide sulfurique qui n'attaque pas les électrodes lorsque aucun courant ne circule. La f.é.m. est voisine de 1 V et la résistance intérieure est proche de quelques ohms. Lors du passage du courant,

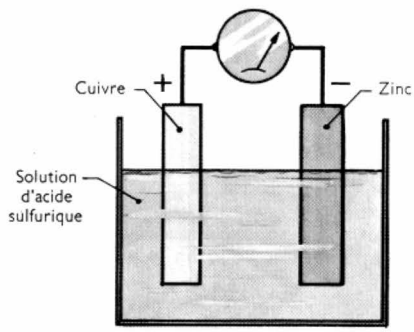


Fig. IX-7

il se dégage de l'hydrogène à la cathode (électrode de sortie du courant, donc *électrode positive* dans le cas d'un générateur) ; à l'anode, le zinc passe dans la solution, sous forme d'ions Zn^{++}. Globalement, la réaction qui se produit peut être schématisée par l'équation chimique suivante :

$$Zn + 2\,H^+ \rightarrow Zn^{++} + H_2\uparrow$$

Cette réaction est exothermique. Elle a, d'ailleurs, lieu spontanément lorsqu'on plonge de la grenaille de zinc dans de l'acide sulfurique. La pile est donc également un générateur qui transforme de l'énergie chimique en énergie électrique. Les lois de Faraday s'appliquent aux réactions chimiques qui se produisent, et une quantité d'électricité égale à 96 500 C est nécessaire pour provoquer le dégagement d'une valence-gramme d'hydrogène et la dissolution d'une valence-gramme de zinc.

La f.é.m. de la pile diminue rapidement lorsqu'on lui fait débiter un courant électrique. Une couche isolante d'hydrogène s'intercale très rapidement dans la chaîne, et cette dernière prend la forme suivante : cuivre-hydrogène-solution d'acide sulfurique-zinc. La pile ne peut plus fournir de courant : elle est polarisée.

Il faut essuyer soigneusement l'électrode de cuivre pour obtenir à nouveau la même f.é.m. qu'au début de l'expérience, soit 1 V environ. Cette baisse de f.é.m. s'accompagne d'ailleurs d'une augmentation de la résistance intérieure de la pile. Pour que la pile soit utilisable, il est nécessaire d'empêcher la polarisation de se produire. C'est ce qui a été réalisé dans les **piles à dépolarisant** où l'on détruit l'hydrogène au fur et à mesure qu'il se dégage et dans les **piles impolarisables** où la nature des contacts n'est pas modifiée par le passage du courant.

3.2. Pile Leclanché. — L'électrode négative est en zinc, et l'électrode positive en charbon (fig. IX-8). L'électrolyte est une solution de chlorure d'ammonium. Le charbon est entouré de bioxyde de manganèse (MnO_2) qui joue le rôle de dépolarisant : il oxyde l'hydrogène qui se forme

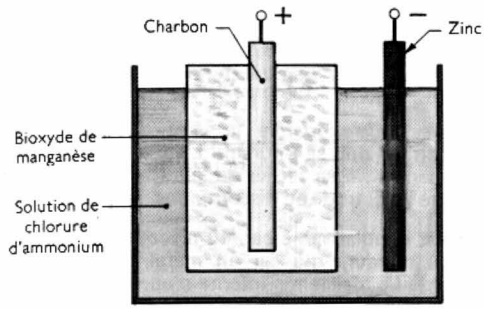


Fig. IX-8 — Schéma de principe

sur la cathode (électrode positive de la pile) et il empêche la formation d'une gaine gazeuse isolante autour de cette électrode.

À l'anode, comme dans la pile de Volta, le zinc passe dans la solution sous forme d'ions Zn^{++}. A la cathode, les ions ammonium NH_4^+ s'accumulent et ils produisent l'ionisation de l'eau de la solution :

$$2\,H_2O^+ + 2e^- \rightarrow 2\,OH^- + H_2\nearrow$$

Il y a formation d'ammoniaque NH_4OH et dégagement d'hydrogène ; celui-ci est ensuite oxydé par le bioxyde de manganèse. Cette oxydation n'est pas instantanée, et lorsque la durée de fonctionnement de la pile est trop longue la f.é.m. diminue. Il faut laisser la pile un certain temps en circuit ouvert pour que l'oxydation puisse se produire ; la f.é.m. reprend alors sa valeur initiale. La pile Leclanché convient donc parfaitement à des services intermittents.

Pour rendre l'emploi de cette pile plus pratique, l'électrolyte est parfois immobilisé en gelée par de la fécule ou de la gélose ; elle est alors appelée une *pile sèche*. L'anode en zinc est en forme de tube et sert d'enveloppe à la pile (fig. IX-10 et IX-11).

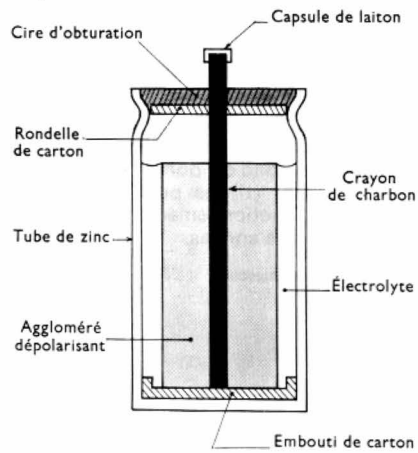


Fig. IX-10

Pile sèche Leclanché

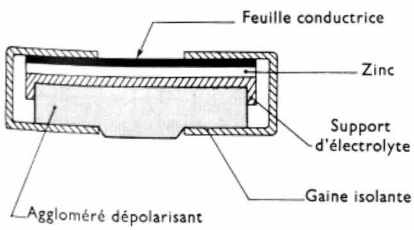


Fig. IX-11

Élément plat de pile sèche Leclanché

La f.é.m. d'une pile Leclanché est voisine de 1,5 V. Les piles de lampes de poche, de f.é.m. 4,5 V, comportent trois éléments associés en série.

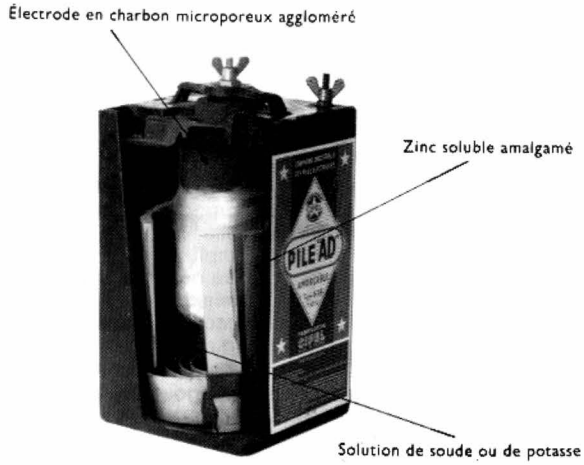


Fig. IX-9 — Coupe d'une pile de 1 000 Ah (*C.I.P.E.L.*)

La pile cesse de fonctionner lorsque tout le zinc constituant l'électrode négative du générateur a été transformé. La capacité de la pile représente la quantité d'électricité qu'elle peut fournir au total. Elle est théoriquement égale à 820 Ah par kilogramme de zinc.

La pile sèche Leclanché est la plus employée pour alimenter des appareils portatifs ou fixes (récepteurs de radiodiffusion, appareils d'éclairage, outils de faible puissance, jouets divers, etc.). Mais le nombre de ses utilisations reste limité, car elle ne peut fournir des courants très intenses et de plus, sa capacité reste relativement faible.

3.3. Pile Daniell. — La cathode est une électrode en cuivre plongeant dans une solution saturée de sulfate de cuivre ; l'anode est en zinc et plonge dans une solution de sulfate de zinc. Un vase poreux sépare les deux électrolytes (fig. IX-12). La f.é.m. de cette pile est égale à 1,08 V et sa résistance intérieure atteint quelques ohms (elle est augmentée par la présence du vase poreux).

Au moment du passage du courant, le zinc de l'anode (électrode négative de la pile) s'ionise suivant la réaction suivante :

$$Zn \rightarrow Zn^{++} + 2e^-$$

L'anode se dissout donc dans la solution de sulfate de zinc où elle baigne. À la cathode, les ions cuivriques se déchargent et se déposent sur l'électrode en cuivre.

$$Cu^{++} + 2e^- \rightarrow Cu\searrow$$

La réaction globale peut être schématisée par l'équation suivante :

$$Zn + Cu^{++} \rightarrow Zn^{++} + Cu\searrow$$

Elle est exothermique, et l'énergie chimique libérée est transformée en énergie électrique par la pile.

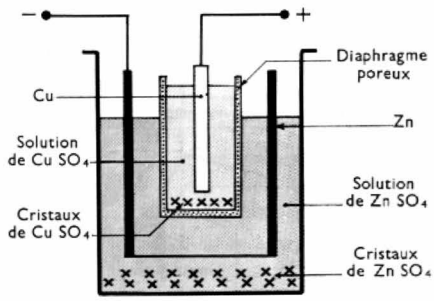


Fig. IX-12

Pile Daniell

La concentration de la solution de sulfate de cuivre est maintenue constante en plaçant des cristaux de sulfate de cuivre au fond du vase contenant la cathode.

En conclusion, lorsque le courant passe, il ne se produit aucune modification de la nature des électrodes ou des électrolytes ; pour cette raison, la f.é.m. reste constante et la pile est dite *impolarisable*.

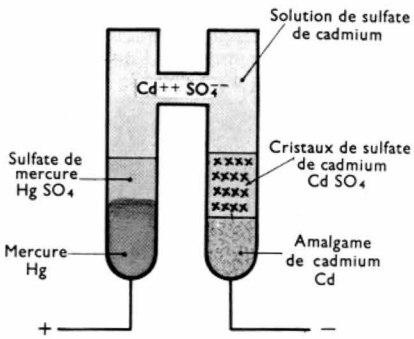


Fig. IX-13
Pile Weston

3.4. Pile Weston. — Cette pile, également impolarisable, est caractérisée par sa f.é.m. rigoureusement constante à une température donnée (elle est égale à 1,018 6 V à 20 °C). Elle est utilisée comme étalon de f.é.m. dans les mesures très précises (fig. IX-13).

La chaîne conductrice de la pile Weston est la suivante :

mercure Hg	*sulfate mercureux* $Hg_2^{++}\,SO_4^{--}$	*sulfate de cadmium* $Cd^{++}\,SO_4^{--}$	*cadmium* Cd
(électrode positive)			(électrode négative)

3.5. Pile au mercure (fig. IX-14). — L'électrode positive de la pile est de l'oxyde de mercure (en poudre) et l'électrode négative est en zinc. L'électrolyte est une solution aqueuse d'hydroxyde de potassium (KOH) saturée de zincate de potassium ($Zn\,OK_2$).

Lorsque la pile ne fonctionne pas, l'électrolyte est ionisé et il se produit diverses réactions au niveau des électrodes. À l'électrode positive, une partie de l'oxyde de mercure est hydrolysée et il y a formation d'ions mercuriques Hg^{++} et d'ions hydroxyde $(OH)^-$:

$$Hg\,O + H_2O \underset{2}{\overset{1}{\rightleftarrows}} Hg^{++} + 2\,(OH)^- \quad (I)$$

À l'électrode négative des atomes de zinc sont ionisés et il se forme de l'hydroxyde de zinc $Zn\,(OH)_2$:

$$Zn \rightarrow Zn^{++} + 2\,e^-$$

ce qui peut aussi s'écrire :

$$Zn + 2\,(OH)^- \underset{2}{\overset{1}{\rightleftarrows}} Zn\,(OH)_2 + 2e^- \quad (II)$$

L'hydroxyde de zinc se décompose et nous avons alors l'équilibre symbolisé par l'équation chimique suivante :

$$Zn\,(OH)_2 \underset{2}{\overset{1}{\rightleftarrows}} Zn\,O + OH_2$$

La pile présente alors une f.é.m. égale à 1,35 V fonction seulement de la nature des électrodes et de l'électrolyte.

Lorsque la pile fournit un courant :

— *à l'électrode positive* les ions Hg^{++} sont neutralisés et il se forme du mercure :

$$Hg^{++} + 2\,e^- \rightarrow Hg$$

L'équilibre (I) est déplacé dans le sens 1 ; l'électrode se transforme donc en mercure qui ne gêne pas le passage du courant.

— *à l'électrode négative* arrivent des ions $(OH)^-$ et l'ionisation du zinc se poursuit. L'équilibre (II) est déplacé dans le sens 1 ; il se forme de l'eau et de l'oxyde de zinc tandis que l'électrode se dissout dans la solution.

La pile est impolarisable car, au niveau de la cathode, il se forme du mercure qui est un métal bon conducteur de l'électricité. La résistance interne n'augmente pratiquement pas et la f.é.m. (fig. IX-15) n'est pas modifiée par la présence de ce corps. La concentration de l'électrolyte reste la

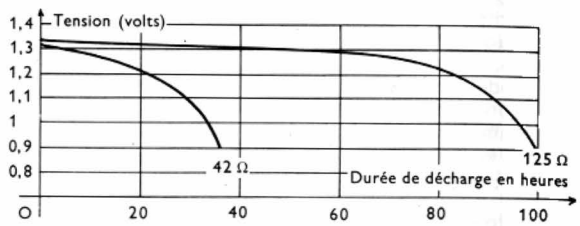


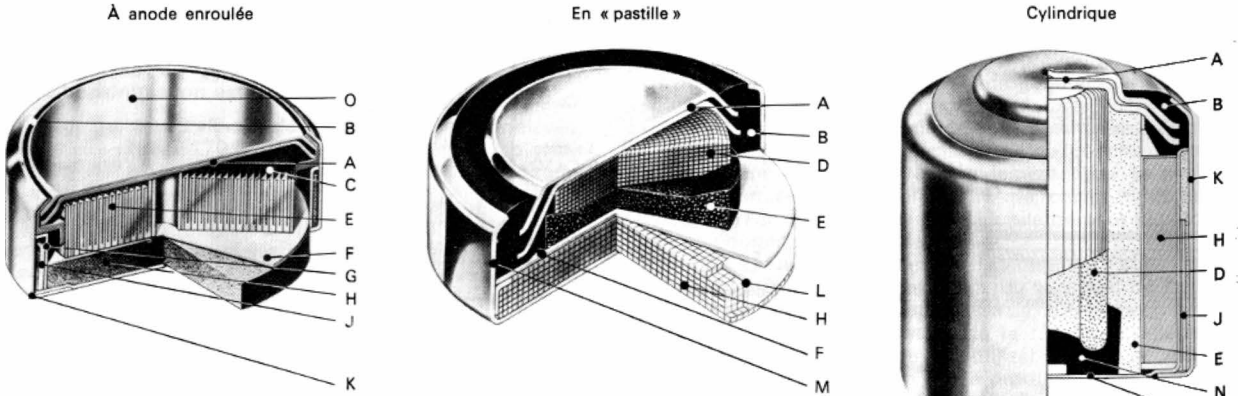
Fig. IX-15 — Courbe de décharge, en régime continu à 20 °C, d'une pile au mercure. La pile alimentait une résistance de 125 Ω dans le premier cas, de 42 Ω dans le second. (*Mallory*)

même : il n'y a pas changement du nombre d'ions K^+ et la quantité d'eau ne varie pas puisque chaque fois qu'il disparaît une molécule d'eau à l'électrode positive, il s'en forme une à l'autre électrode.

La capacité de cette pile dépend des dimensions des éléments et notamment de la masse des composants. Il faut 1 g d'oxyde de mercure et 0,3 g de zinc pour obtenir une quantité d'électricité de 250 mAh. À volume égal, la capacité d'une pile au mercure est quatre à cinq fois plus grande que celle d'une pile Leclanché. Un élément de 6,4 cm de hauteur de 1,4 mm de diamètre a une capacité de 13 Ah.

La pile a une très grande durée de vie car la potasse ne peut attaquer les électrodes durant la période de stockage. La solution est saturée en zincate de potassium résultant de la réaction de l'oxyde de zinc et de la potasse, et la dissolution du zinc est donc automatiquement limitée de ce fait (l'équilibre (II) ne peut être déplacé en dehors des périodes de fonctionnement). La pile conserve sa capacité durant plusieurs années.

Fig. IX-14 — Diverses présentations de la pile au mercure



A. Couvercle double. — B. Joint d'étanchéité (plastique). — C. Anode enroulée (zinc). — D. Anode comprimée (zinc). — E. Absorbant et électrolyte. — F. Séparateur. — G. Boîtier intérieur.— H. Électrode positive (oxyde de mercure comprimé). — J. Manchon absorbant. — K. Boîtier extérieur. — L. Épaulement de cathode. — M. Boîtier. — N. Coupelle isolante. — O. Pôle négatif.

(*Mallory*)

Les faibles dimensions de cette pile l'ont fait utiliser dans de nombreux dispositifs miniaturisés : appareils de correction auditive pouvant être placés dans le conduit de l'oreille, appareils de stimulation cardiaque implantés dans le corps, humain pour fonctionner plusieurs années. Parce que cette pile présente une f.é.m. bien constante, elle équipe des appareils de mesures électriques (contrôleur universel) ou des appareils photographiques (circuit de mesure de l'éclairement et automatismes incorporés).

3.6. Autres piles

3.6.1. Pile en forme de ruban (fig. IX-16). — L'élément essentiel, le *ruban*, est formé de trois parties en général :

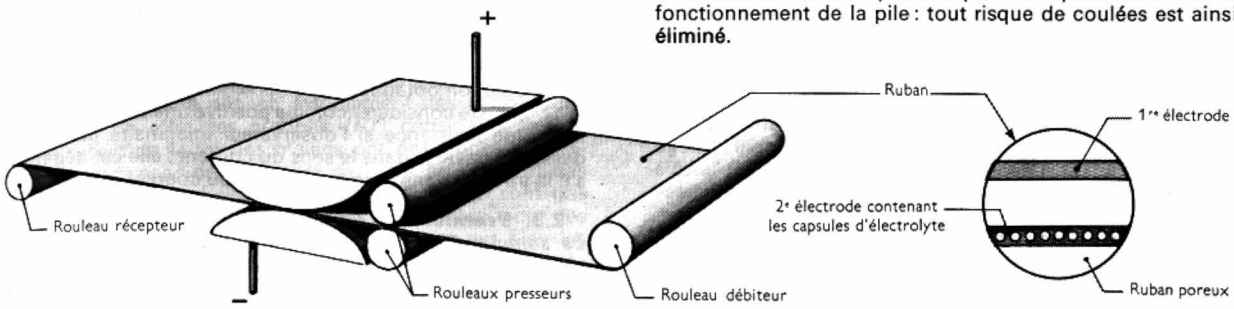
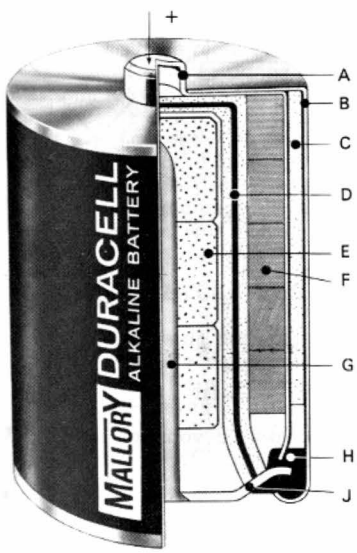


Fig. IX-16 — Pile en forme de ruban

une membrane échangeuse d'ions ou simplement poreuse comprise entre deux couches de matériaux différents (oxyde d'argent et zinc, par exemple) qui forment les électrodes. L'électrolyte est contenu dans des capsules disposées dans l'un des enduits formant les électrodes ou dans les deux et il est libéré au moment de l'utilisation. Lors de l'emploi, le ruban, entraîné à une vitesse assez faible (quelques centimètres par minute), passe entre des rouleaux presseurs qui provoquent l'éclatement des capsules contenues dans la zone qu'ils compriment. Le ruban passe ensuite entre deux électrodes collectrices du courant, sous lesquelles se produisent les réactions électrochimiques. Dans le cas d'une pile correspondant à la chaîne : oxyde d'argent-hydroxyde de potassium-zinc, ces réactions sont les mêmes que celles qui se produisent dans un accumulateur argent-zinc (v. ci-dessus). Un des intérêts de cette pile est de permettre l'obtention d'éléments de grande capacité (elle dépend de la longueur du ruban), pouvant fournir des courants intenses car il est possible en un temps très court d'épuiser complètement la portion de ruban se trouvant sous les électrodes. Par ailleurs le ruban non utilisé peut se conserver indéfiniment sans qu'aucune altération ou diminution de capacité ne soit à craindre.

3.6.2. Pile alcaline au manganèse (fig. IX-17). — Elle présente de nombreux points de ressemblance avec la pile Leclanché ; elle est dite alcaline car l'électrolyte utilisé est une solution d'hydroxyde de potassium. L'électrode positive est un mélange de carbone et de bioxyde de manganèse (dépolarisant). L'électrode négative est en zinc. Ces éléments sont contenus dans un boîtier en acier ; il est étanche et n'est pas attaqué chimiquement durant le fonctionnement de la pile : tout risque de coulées est ainsi éliminé.



A. Boîtier intérieur ; électrode négative. — B. Boîtier extérieur. — C. Manchon absorbant. — D. Électrolyte immobilisé dans un absorbant. — E. Électrode négative (zinc). — F. Électrode positive et dépolarisant (bioxyde de manganèse + graphite). — G. Collecteur .— H. Joint d'étanchéité (plastique). — J. Couvercle

Fig. IX-17

Pile alcaline au manganèse (*Mallory*)

Lorsque la pile fournit un courant, au niveau des électrodes se produisent les réactions suivantes :

— *à l'électrode positive* de la pile (cathode pour l'électrolyse), il se produit un dégagement d'hydrogène comme dans une pile Leclanché et c'est le bioxyde de manganèse qui empêche la polarisation ; il est réduit par l'hydrogène au fur et à mesure que celui-ci se forme.

— *à l'électrode négative* de la pile, il se forme de l'hydroxyde de zinc (comme dans une pile à mercure). Les caractéristiques électriques de cette pile sont beaucoup plus intéressantes que celles d'une pile Leclanché (V. tableau).

Pile	Tension nominale	Capacité en énergie	Durée de conservation en tolérant une perte de capacité de 20 %
Alcaline au manganèse	1,5 V	77 Wh/kg 0,21 Wh/cm³	30 mois
Leclanché	1,5 V	49 Wh/kg 0,12 Wh/cm³	6 à 12 mois

Comparaison des différents systèmes de piles

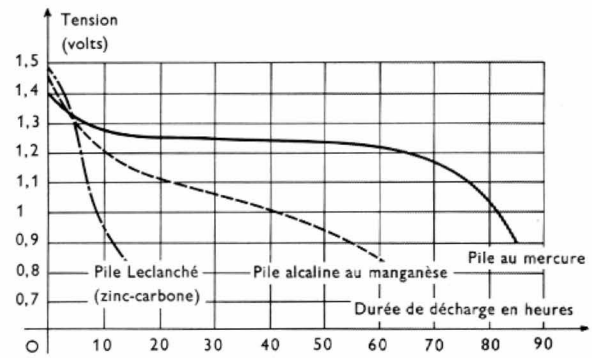


Fig. IX-18 — Décharge comparée de différentes piles (*Mallory*)

La pile présente une résistance interne de faible valeur et elle peut débiter un courant intense de manière continue sans qu'il soit indispensable de prévoir des périodes de récupération (fig. IX-18).

CHAPITRE X

RÉSEAUX DE CONDUCTEURS LOIS DE KIRCHHOFF

1. RÉSEAUX DE CONDUCTEURS

Jusqu'à présent, nous n'avons étudié que des circuits formés d'appareils branchés en série ou bien des circuits comportant des dérivations uniquement résistantes. Nous allons maintenant considérer des circuits électriques contenant des générateurs, des récepteurs et des résistances disposés de façon quelconque. De tels circuits sont appelés **réseaux de conducteurs.**

Remarquons que certains appareils jouent le rôle de récepteurs quel que soit le sens du courant qui les traverse, comme, par exemple, les voltamètres impolarisables à électrodes symétriques inattaquables. Ainsi un voltamètre à électrodes de platine plongeant dans une solution aqueuse de soude, quel que soit le sens du courant, sera le siège d'un dégagement d'hydrogène à l'électrode jouant le rôle de cathode et d'un dégagement d'oxygène à l'autre électrode. Les électrodes étant inattaquables par ces deux gaz ceux-ci se dégagent, et si le sens du courant est inversé, le rôle des électrodes l'est également. De même un moteur électrique fournit toujours de l'énergie mécanique quel que soit le sens du courant qui le traverse. En revanche, un accumulateur se comporte comme un générateur lorsque le courant le traverse en allant de la borne négative à la borne positive et comme récepteur si le sens du courant est opposé. Dans le second cas, il présente *une f.c.é.m. égale à sa f.é.m. en générateur.* Cette propriété est une caractéristique d'une catégorie d'appareils appelés *appareils polarisés réversibles.*

2. LOIS DE KIRCHHOFF

2.1. Définitions. — Une *branche* est une portion de circuit qui ne comprend que des conducteurs en série et que nous pouvons étudier en appliquant les lois d'Ohm.

Un *nœud* d'un réseau est un point commun à au moins trois branches.

Une *maille* d'un réseau est un ensemble de branches disposées en série et formant un circuit fermé, chacune n'étant considérée qu'une seule fois.

Par exemple, sur la figure X-1 :

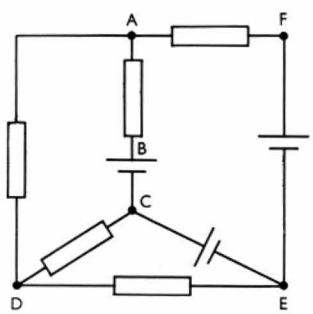


Fig. X-1

— *AC*, *CD*, *DE* sont des branches,
— les points *A*, *C*, *D*, *E* sont des nœuds (alors que *B* et *F* n'en sont pas),
— les contours *CDEC*, *ACDA* sont des mailles.

2.2. Conventions de signes. — L'application des lois de Kirchhoff impose :

1° De choisir *un sens de circulation du courant pour chaque branche* (il est indiqué par des flèches portées par chaque branche sur la figure X-2) ; si ce sens n'est pas connu, il faut le choisir arbitrairement ;

2° D'adopter *un sens positif arbitraire de circulation du courant le long de la maille* (flèche au centre de la maille *ABCDE* sur la figure X-2). Ainsi les courants dans les branches (choisis au 1°), deviennent des grandeurs algébriques : l'intensité du courant est positive si celui-ci circule dans le sens choisi, négative dans le cas contraire.

3° De compter positivement une f.é.m. ou une f.c.é.m. si, en parcourant la maille dans le sens positif choisi (qui n'est pas nécessairement celui du courant), un observateur imaginaire sort par la borne positive du générateur ou du récepteur chimique ou mécanique. Dans le cas contraire la f.é.m. ou la f.c.é.m. est considérée comme une grandeur négative. Si pour ces derniers appareils la position de la borne positive n'est pas connue, il faut la choisir arbitrairement, mais alors, il sera nécessaire de vérifier la solution obtenue.

4° De considérer comme positive une chute ohmique dans une résistance si l'observateur imaginaire utilisé ci-dessus la traverse dans le sens du courant ; elle est négative s'il la traverse dans le sens contraire du courant.

2.3. Première loi de Kirchhoff : loi des nœuds. — *La somme des intensités des courants qui arrivent à un nœud est égale à la somme des intensités des courants qui en partent.* Autrement dit, il n'y a pas accumulation de charges électriques en un nœud. Avec les notations de la figure X-3, nous écrivons :

$$I_1 + I_2 + I_4 = I_3 + I_5$$

ou :
$$I_1 + I_2 - I_3 + I_4 - I_5 = 0$$

En représentant par ΣI la **somme algébrique** des courants arrivant ou partant d'un nœud, cette loi se traduit donc par la relation suivante :

$$\Sigma I = 0$$

2.4. Deuxième loi de Kirchhoff : loi des mailles. — *Le long d'une maille, la somme algébrique des chutes de potentiel dues aux résistances est égale à la somme algébrique des f.é.m.*

Nous traduirons cette loi par une relation que nous écrivons symboliquement sous la forme suivante :

$$\boxed{\Sigma E = \Sigma(RI)}$$

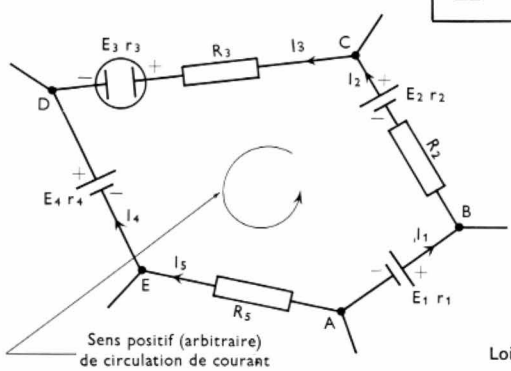


Fig. X-2
Loi des mailles

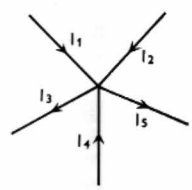


Fig. X-3
Loi des nœuds

Dans le cas de la figure X-2, nous devons écrire en tenant compte des conventions adoptées :

$$E_1 + E_2 - E_3 - E_4 = r_1 I_1 + R_2 I_2 + r_2 I_2 + R_3 I_3 + r_3 I_3 - r_4 I_4 - R_5 I_5$$

3. APPLICATION PRATIQUE DES LOIS DE KIRCHHOFF

Les lois de Kirchhoff sont employées pour déterminer des intensités dans les différentes branches d'un réseau, connaissant les résistances, les f.é.m. et les f.c.é.m. des appareils du réseau. Remarquons que les équations obtenues en appliquant ces lois sont linéaires : le problème se ramène donc à la résolution d'un système d'équations linéaires à m inconnues, m étant le nombre de branches

(V. t. 1, Mathématiques, chap. 11). Mais les lois de Kirchhoff nous donnent en général un nombre d'équations supérieur au nombre d'inconnues m : un certain nombre de ces équations sont des combinaisons linéaires des autres.

Pratiquement, pour un réseau comprenant n mailles et p nœuds, il est nécessaire de commencer par désigner chaque intensité par une lettre, en fixant arbitrairement, mais le plus vraisemblablement possible, le sens du courant dans chaque branche. Ensuite il faut écrire les lois des nœuds ; cela fournit p équations, dont $(p - 1)$ sont indépendantes, la dernière étant une combinaison linéaire des autres. Ces équations étant très simples, il est facile d'éliminer immédiatement $(p - 1)$ intensités, et le nombre d'inconnues est alors ramené à $(n - p + 1)$. Il faut alors écrire les équations des mailles ; certaines de ces équations étant surabondantes, il suffit de considérer $(n - p + 1)$ mailles *choisies de telle sorte que chaque branche appartienne au moins à l'une de ces mailles.*

La résolution du système peut alors être entreprise. La solution fournie dépend évidemment des conventions adoptées. En effet, les produits (RI) considérés lors de l'application de la loi des mailles ont des signes qui dépendent des sens des courants dans les branches et des sens de parcours choisis (les uns et les autres sont pris arbitrairement). Si toutes les valeurs trouvées pour les intensités sont toutes positives, les courants ont bien les sens choisis. Par contre, si l'une des valeurs I_n trouvée est négative, deux cas sont à considérer :

1° La branche pour laquelle l'intensité I_n est négative ne contient que *des résistances ou des appareils polarisés réversibles :* l'intensité dans cette branche a une valeur absolue égale à I_n mais le courant réel circule dans le sens contraire du sens choisi. Le problème peut être repris après avoir changé le sens du courant dans cette branche, mais il n'est pas utile d'établir un nouveau système d'équations. En effet, ce dernier se déduit du précédent uniquement par substitution de $(-I_n)$ à I_n, (les valeurs algébriques des f.é.m. et des f.c.é.m. restent inchangées) et les résultats obtenus sont évidemment les mêmes sauf pour I_n (il est alors positif, mais conserve la même valeur absolue).

2° La branche pour laquelle I_n est négatif contient *des appareils polarisés non réversibles.* Il faut alors recommencer tout le calcul en changeant le sens de I_n car les équations obtenues ne peuvent plus se déduire des précédentes par simple remplacement de I_n par $(-I_n)$.

Si le calcul de I_n donne encore une valeur négative, c'est que le problème est impossible. Il peut arriver que la différence de potentiel aux bornes du récepteur soit inférieure à sa f.c.é.m. : dans ce cas il ne passe aucun courant dans le récepteur. Il faut alors poser $I_n = 0$ et calculer les autres inconnues par les lois de Kirchhoff ; ensuite, en considérant le montage, il est nécessaire de vérifier que ces résultats peuvent réellement être obtenus.

4. CONSÉQUENCES DES LOIS DE KIRCHHOFF

4.1. Principe de superposition. — Les lois de Kirchhoff sont linéaires par rapport aux intensités, aux f.é.m. et aux f.c.é.m. Nous pouvons en déduire le principe de superposition : si aux f.é.m. E_1, E_2, E_3, ... et aux f.c.é.m. E'_1, E'_2, E'_3, ... correspondent les courants d'intensité I_1, I_2, I_3, ... nous pouvons écrire symboliquement :

$$\Sigma E_n = \Sigma R_n I_n$$

n est un indice égal à 1, 2, 3, ...

Si aux f.é.m. F_1, F_2, F_3, ... et aux f.c.é.m. F'_1, F'_2, F'_3, ... correspondent les courants J_1, J_2, J_3, ... avec les mêmes conventions, nous pouvons écrire :

$$\Sigma F_n = \Sigma R_n J_n$$

En additionnant membre à membre les deux relations précédentes nous obtenons :

$$\Sigma (E_n + F_n) = \Sigma R_n (I_n + J_n)$$

Cela signifie qu'aux f.é.m. $(E_1 + F_1)$, $(E_2 + F_2)$, $(E_3 + F_3)$, ... et aux f.c.é.m. $(E'_1 + F'_1)$, $(E'_2 + F'_2)$, $(E'_3 + F'_3)$, ... correspondent les courants $(I_1 + J_1)$, $(I_2 + J_2)$, $(I_3 + J_3)$, ...

Lorsqu'un réseau ne contient que des résistances et des générateurs, l'application de ce principe permet de connaître facilement l'intensité dans une branche. Remplaçons tous les générateurs, sauf le n-ième par leurs résistances intérieures : nous aurons dans la branche considérée une intensité I_j. Nous pouvons répéter cette opération successivement pour chacun des générateurs. Lorsque tous les générateurs débitent simultanément, l'intensité I traversant la branche considérée sera la somme des intensités I_j calculées.

Lorsqu'un réseau ne contient que des résistances et des générateurs, l'intensité du courant dans une branche est égale à la somme des intensités des courants qui passeraient dans cette branche si chaque générateur alimentait seul le montage, les autres étant remplacés par leur résistance interne (Théorème de superposition).

4.2. Théorème de Thévenin. — Considérons un réseau de conducteurs comprenant des générateurs et des résistances et branchons entre deux bornes A et B de ce réseau

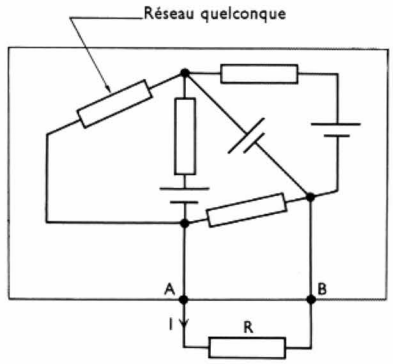


Fig. X-4

une résistance R (fig. X-4). Supposons que le courant circule de A vers B dans R et que lorsque R n'est pas branchée, la d.d.p. entre A et B est égale à U. Nous nous proposons d'étudier l'intensité I du courant dans R en appliquant le théorème de superposition des états d'équilibre. Branchons entre A et B, en série avec R, un générateur G dont la force électromotrice sera égale à U (fig. X-5 a) : il ne passe alors aucun courant dans G puisque sa f.é.m. est égale à la tension entre A et B. Cet état peut être considéré comme la superposition des deux états suivants :

1° Dans le réseau, chaque générateur est remplacé par une résistance égale à sa résistance interne (fig. X-5 b). Vu des points A et B, ce réseau est équivalent à une

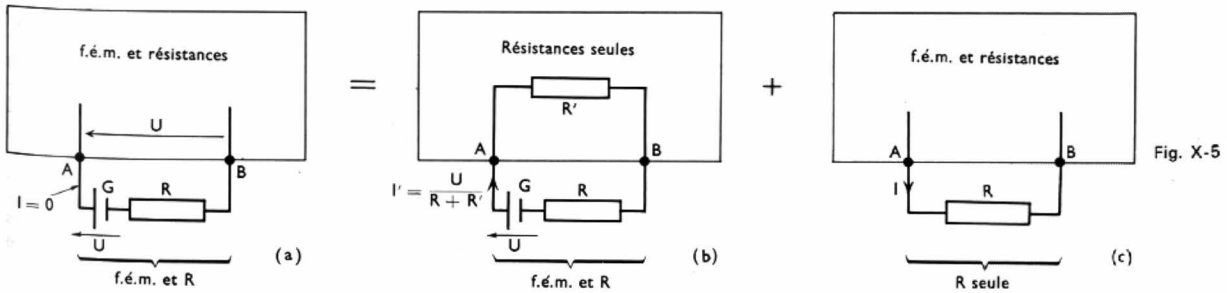


Fig. X-5

résistance R'. Le générateur G lui fournit un courant dont l'intensité est égale à :

$$I' = \frac{U}{R + R'}$$

2° Le générateur G est supprimé et nous considérons à nouveau le réseau primitif (fig. X-5 c). Le courant dans la résistance R a alors l'intensité I cherchée.

Dans le premier état nous avions :

— un réseau réduit à sa résistance R' ;
— un circuit extérieur complet, formé de G et R.

Dans le deuxième état, au contraire :

— le réseau est complet ;
— le circuit extérieur est réduit à R.

La superposition de ces deux états nous fournit bien un réseau et un circuit extérieur complets. Il en résulte que la somme des intensités I et I' est nulle (en vertu du principe de superposition) ; I est donc égal à : $\left| \frac{U}{R + R'} \right|$ et le courant circule de A vers B.

Tout se passe donc comme si le réseau était équivalent à *un générateur de f.é.m. égale à la différence de potentiel U qui existe entre les points A et B lorsque R n'est pas branchée, et dont la résistance intérieure est égale à la résistance R' vue des points A et B lorsque les générateurs sont remplacés par leurs résistances internes respectives* (fig. X-6).

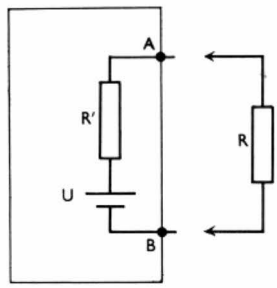


Fig. X-6

ÉLECTROSTATIQUE

CHAPITRE XI

ÉLECTRISATION - LOI DE COULOMB

1. DIFFÉRENTS MODES D'ÉLECTRISATION

1.1. Électrisation par frottement. — Depuis l'Antiquité, il a été constaté que certains corps attirent des objets légers lorsqu'ils ont été préalablement frottés, par exemple,

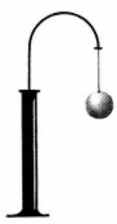


Fig. XI-1

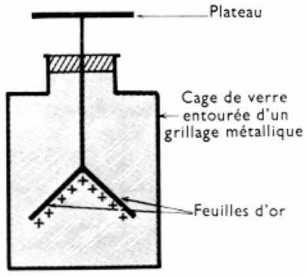


Fig. XI-2

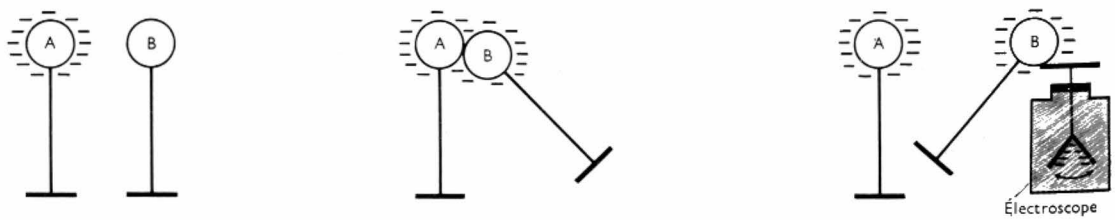
avec un drap sec : ces corps sont alors **électrisés.** Cette électrisation peut être étudiée au moyen d'un *pendule électrique*, dispositif formé d'une boule de sureau suspendue à un fil très fin (fig. XI-1). Il est aussi souvent intéressant d'utiliser un appareil appelé *électroscope à feuilles d'or* composé d'une boule (ou d'un plateau métallique) reliée à une tige métallique dont une extrémité supporte deux feuilles d'or de quelques micromètres d'épaisseur ; cette dernière partie se trouve dans une cage de verre entourée d'un grillage métallique (fig. XI-2). Lorsqu'une charge est apportée sur la boule, elle se répartit sur cette boule, sur la tige métallique et sur les feuilles d'or et celles-ci s'écartent plus ou moins.

L'électrisation par frottement résulte des échanges d'électrons qui ont lieu entre les corps lorsqu'ils sont frottés ; l'un des corps perd des électrons et il présente alors une charge positive, tandis que celui qui a reçu des électrons est chargé négativement.

Par frottement, l'ambre, l'ébonite, les matières synthétiques (nylon, plexiglas, etc.) se chargent négativement, tandis que le verre et le soufre acquièrent une charge positive. Cela explique les noms d'*électricité résineuse* et d'*électricité vitreuse* utilisés primitivement : c'est Franklin qui, en 1746, proposa de remplacer ces appellations respectivement par *électricité négative* et *électricité positive*.

1.2. Électrisation par contact (fig. XI-3). — Une sphère métallique A (sur un support en verre) préalablement électrisée, amenée au contact d'une autre sphère B, électriquement neutre, fournit à celle-ci une charge électrique. Après avoir séparé les deux sphères, nous constatons en effet, à l'aide de l'électroscope, qu'elles portent toutes deux des charges électriques de même signe. Ce phénomène s'explique immédiatement : l'électrisation est due à un excès ou un défaut d'électrons et, au moment où les deux sphères sont en contact, il y a passage d'électrons de l'une à l'autre.

Fig. XI-3



a b c

1.3. Autres modes d'électrisation. — L'*électrisation par influence* sera étudiée de façon approfondie ultérieurement : elle se produit lorsqu'un corps électrisé est approché d'un conducteur (sans le toucher) ; il apparaît une charge superficielle.

Certains corps peuvent être électrisés en les chauffant : ainsi un cristal de tourmaline chauffé présente une extrémité chargée positivement et l'autre négativement. Le corps redevient neutre en se refroidissant. L'électricité obtenue par ce moyen est appelée **pyroélectricité.**

Par *compression* ou par *traction*, certains cristaux (par ex.: le quartz) s'électrisent (**effet piézoélectrique**). En appliquant des forces de pression ou de traction entre deux faces opposées d'une lame de quartz taillée convenablement dans un cristal, il apparaît des charges de signes contraires sur deux faces perpendiculaires aux précédentes. Ce phénomène a de nombreuses applications pratiques, par exemple dans les microphones et les têtes de lecture piézoélectriques (V. t. 2, Électroacoustique).

2. LOI DE COULOMB

Des charges électriques de même signe se repoussent, tandis que des charges électriques de signes contraires s'attirent. Si la boule de sureau d'un pendule électrique porte une charge positive (fig. XI-4), nous constatons qu'elle est repoussée si nous approchons un bâton de verre frotté (sa charge est positive) et qu'elle est attirée par un morceau d'ambre frotté (sa charge est négative).

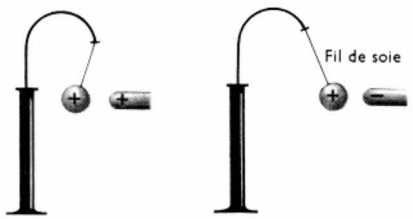


Fig. XI-4

Répulsion et attraction électrostatiques

Par définition, la quantité d'électricité portée par un corps est proportionnelle à l'intensité de la force qui s'exerce sur lui. Une charge électrique est donc une grandeur mesurable.

Deux corpuscules ponctuels placés dans le vide (fig. XI-5) à une distance r l'un de l'autre et portant des charges

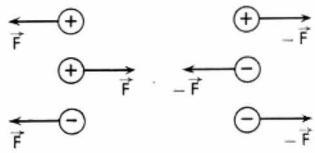


Fig. XI-5

Loi de Coulomb

électriques q et q' sont soumis à des forces égales et opposées d'intensité F, donnée par la relation :

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2} \quad \textbf{(loi de Coulomb)}$$

ε_0 représente une constante appelée la *permittivité du vide ;* $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}$ F/m (farad par mètre) et $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9$.

Si les deux corpuscules considérés ci-dessus se trouvent dans un milieu isolant homogène et isotrope occupant entièrement l'espace, tout se passe comme si l'intensité de la force $\vec{F}$ était divisée par une constante ε_r appelée la *permittivité relative du diélectrique*. Elle devient alors égale à :

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{qq'}{r^2}$$

On pose souvent $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$; ε est appelé la *permittivité absolue* de l'isolant ; q et q' sont exprimés en coulombs (on donne à q et q' le signe + ou — selon que la charge est positive ou négative), r en mètres, F en newtons.

Toute l'électrostatique que nous allons développer est fondée sur la loi de Coulomb et sur le principe suivant : la *charge d'un système électriquement isolé est constante* (*principe de la conservation de l'électricité*). Il s'interprète facilement : si une partie d'un système isolé se charge positivement, cela signifie qu'elle perd des électrons ; le système étant isolé, ceux-ci ne peuvent en sortir, et une autre partie du système doit se charger négativement afin que la charge totale reste constante.

CHAPITRE XII

CHAMP ÉLECTROSTATIQUE DANS LE VIDE POTENTIEL ET FLUX

Ce chapitre comporte de nombreuses notions théoriques et, avant de l'aborder, le lecteur aura intérêt à revoir le chapitre d'analyse vectorielle (V. t. 1, Mathématiques, chap. 19 à 21). Nous utiliserons particulièrement les notions suivantes : champ de vecteurs, gradient et potentiel, lignes de champ et surfaces équipotentielles.

1. DÉFINITION DU CHAMP ÉLECTROSTATIQUE (OU ÉLECTRIQUE)

Supposons donné un système de charges électriques (qui peuvent être considérées comme ponctuelles du fait de la structure atomique de la matière). Une charge ponctuelle

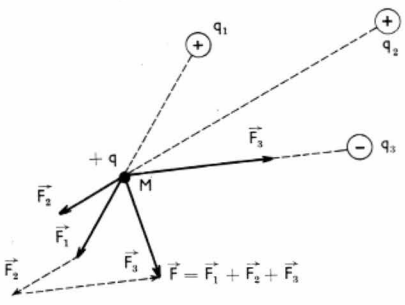


Fig. XII-1

placée au voisinage de ce système subit une force électrique qui ne dépend que de la position des différentes charges en présence et de leur valeur (fig. XII-1). Nous dirons qu'au voisinage du système règne un *champ électrostatique* (nous réservons le qualitatif électrostatique au cas où toutes les charges en présence sont immobiles).

La charge que nous utilisons pour étudier le champ créé par le système sera supposée suffisamment faible pour n'avoir aucun effet sur le système ; elle sera appelée **charge d'essai.** D'après la loi de Coulomb, la force $\vec{F}$ qui s'exerce sur cette charge (résultante des forces exercées sur la charge d'essai par toutes les charges du système à étudier) est proportionnelle à la quantité d'électricité q de la charge d'essai. En un point M de l'espace, le vecteur champ $\vec{E}$ est égal à la force $\vec{F}$ qui s'exerce sur une charge de 1 C. D'un point de vue mathématique, nous définirons le champ électrostatique comme étant un champ de vecteurs $\vec{E}$ donnés par la relation vectorielle suivante :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}}$$

Dans le système international, l'unité de champ électrostatique est le *volt par mètre* (symbole : V/m). En un point de l'espace règne un champ d'un volt par mètre si une charge d'un coulomb placée en ce point est soumise à une force d'un newton.

Remarque : **Déplacement électrostatique.** — En chaque point d'un champ électrique est également défini un vecteur déplacement électrique $\vec{D}$, indépendant du milieu et égal au produit du vecteur champ électrique $\vec{E}$ et de la permittivité ε du milieu :

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$$

Dans le cas du vide cette relation s'écrit évidemment :

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$$

L'unité de déplacement électrique est le *coulomb par mètre carré* (symbole : C/m^2).

Dans un espace où règne un champ électrique E, un volume unité possède une énergie W donnée par la relation :

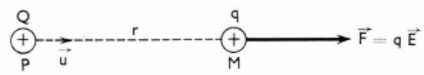
$$W = \frac{1}{2} E D$$

W est exprimé en joules, E en volts par mètre et D en coulombs par mètre carré.

2. CHAMP PRODUIT PAR UNE CHARGE ISOLÉE

Dans le vide, une charge immobile Q, placée en un point P, exerce sur une charge d'essai q disposée en un

Fig. XII-2



point M, une force donnée par la loi de Coulomb (fig. XII-2) :

$$\vec{F} = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \cdot \frac{Qq}{r^2} \vec{u} = q\vec{E}$$

$r = PM$ et $\vec{u}$ est le vecteur unitaire orienté de P vers M

$$\vec{u} = \left(\frac{\overrightarrow{PM}}{PM}\right)$$

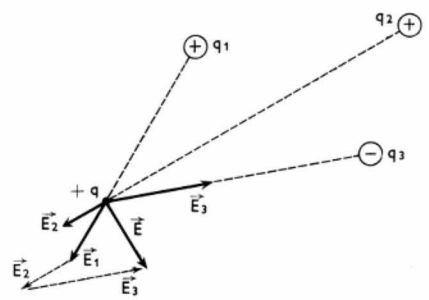
Le champ électrostatique au point M est donc donné par la relation suivante :

$$\vec{E} = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{u}$$

3. CHAMP PRODUIT PAR UN ENSEMBLE DE CHARGES ISOLÉES

Considérons un système de charges q_i (fig. XII-3) ; elles exercent chacune sur la charge d'essai q une force $\vec{F_i}$

Fig. XII-3



et la résultante de ces forces est : $\vec{F} = \Sigma \vec{F_i}$. À chaque composante $\vec{F_i}$ correspond un champ $\vec{E_i} = \frac{\vec{F_i}}{q}$ et ces champs admettent pour résultante le champ électrostatique $\vec{E}$:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{\Sigma \vec{F_i}}{q} = \Sigma \vec{E_i}$$

En un point, les champs électrostatiques créés par plusieurs charges s'additionnent **vectoriellement.**

4. CHAMP PRODUIT PAR UNE DISTRIBUTION SUPERFICIELLE UNIFORME DE CHARGES

Considérons une surface S chargée uniformément et désignons par σ la densité superficielle de charge (charge portée par unité de surface). Un élément de surface dS de centre P (fig. XII-4) porte une charge électrique égale à

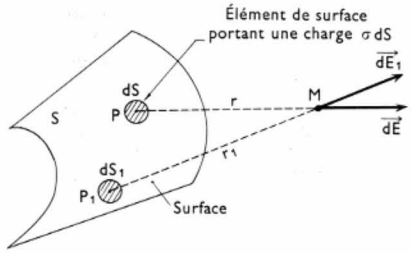


Fig. XII-4

σdS et en un point M de l'espace, cet élément de surface crée un champ électrostatique :

$$d\vec{E} = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \frac{\sigma dS}{r^2} \vec{u}$$

r étant la distance PM et $\vec{u}$ désignant un vecteur unitaire orienté de P vers M. Ce raisonnement peut être étendu à tous les éléments de surface qui peuvent être définis sur S. Les champs élémentaires obtenus en M se composent vectoriellement et le champ résultant est obtenu par intégration mathématique ; il a pour expression :

$$\vec{E} = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \iint_S \frac{\sigma dS}{r^2} \vec{u}$$

l'intégrale étant étendue à toute la surface S.

Remarque : Si la distribution n'est pas uniforme le résultat est cependant applicable mais il faut connaître la valeur de σ en chaque point P, c'est-à-dire la fonction σ (P).

5. CHAMP PRODUIT PAR UNE DISTRIBUTION VOLUMIQUE DES CHARGES

De la même façon, lorsque nous avons un volume V chargé, pour lequel la densité volumique de charge est ρ (charge par unité de volume), le champ total est la résultante des champs produits par des volumes élémentaires dv (portant une charge égale à ρdv). Le champ en un point M de l'espace est obtenu par intégration mathématique ; il est donné par l'expression suivante :

$$\vec{E} = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \iiint_V \frac{\rho dv}{r^2} \vec{u}$$

($\vec{u}$ désigne toujours le vecteur unitaire orienté du centre du volume élémentaire dv vers M).

6. LIGNES DE CHAMP

Les *lignes de champ* ou *lignes de force* du champ électrostatique sont des courbes admettant en chacun de leur point une tangente portée par le vecteur champ électrostatique $\vec{E}$ au point considéré. Ces lignes sont orientées : leur sens de parcours est le sens du vecteur $\vec{E}$, c'est-à-dire celui d'une force qui s'exercerait sur une charge positive (fig. XII-5). Les lignes de champ permettent de mieux

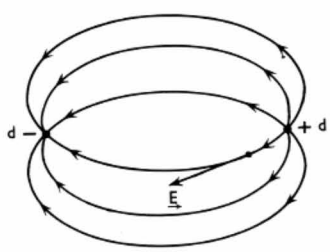


Fig. XII-5 — Lignes de champ

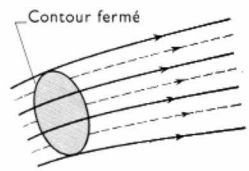


Fig. XII-6

Tube de force

connaître un champ électrique ; elles sont souvent déduites des équipotentielles (V. ci-dessous § 8). Dans certains cas, nous serons amenés à considérer des lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé : l'ensemble constitue un **tube de force** (fig. XII-6).

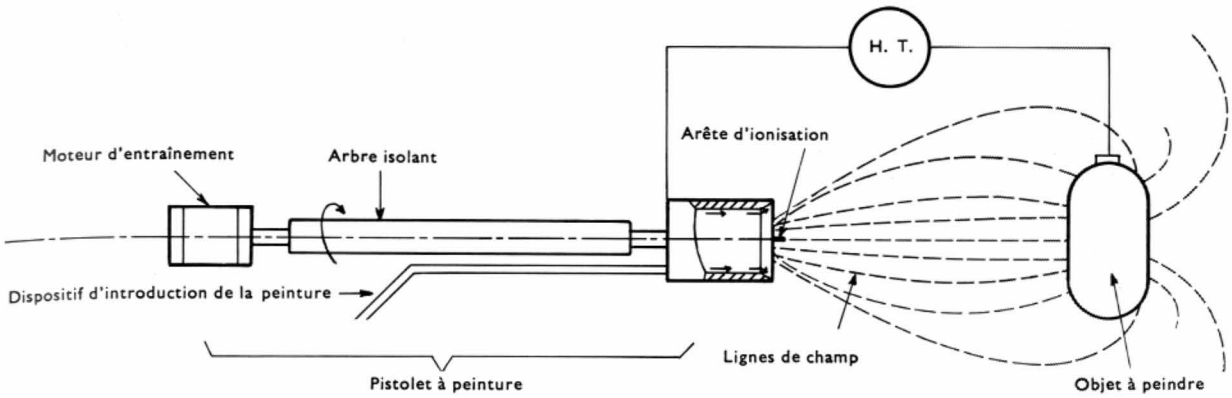


Fig. XII-7 — Schéma de principe de la peinture électrostatique

La peinture dite *électrostatique* est une illustration intéressante des possibilités offertes par l'utilisation d'un champ électrique. Dans ce procédé de peinture, un champ électrique est établi entre deux parties métalliques qui sont la tête de projection d'un pistolet à peinture et la pièce à peindre. Les lignes de champ vont de l'une à l'autre (fig. XII-7 et XII-8). Les gouttelettes de peinture qui sont chargées d'électricité suivent ces lignes même si celles-ci contournent l'objet. Ainsi, en une seule opération, toute la surface de la pièce à peindre est recouverte et les particules de peinture sont uniformément réparties. Par ailleurs, sous l'effet de la pression électrostatique (V. chap. 14) les gouttelettes éclatent et la peinture est ainsi finement pulvérisée. La d.d.p. entre la pièce et le pistolet est comprise entre 80 et 120 kV, mais aucune précaution spéciale n'est nécessaire car la source ne peut débiter un courant d'intensité supérieure à 100 ou 200 μA. Les risques d'incendie et d'explosion sont éliminés par l'emploi de peintures peu inflammables.

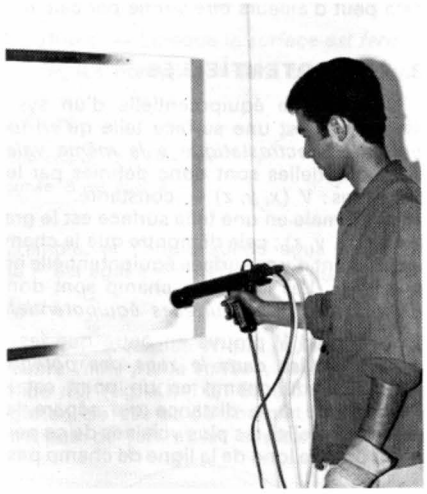


Fig. XII-8

Pistolet pour poudrage électrostatique (*Tunzini-Sames*)

7. POTENTIEL ÉLECTRIQUE

Pour caractériser un champ électrique, nous définissons souvent en chacun de ses points, au lieu du vecteur champ, une grandeur scalaire appelée le *potentiel électrostatique* ou *électrique*. Ce nombre, d'un emploi plus commode qu'un vecteur, représente en chaque point l'énergie que posséderait une charge de 1 C si elle y était placée. Malheureusement, en général nous ne pouvons définir ce nombre qu'à une constante près; c'est pourquoi nous considérerons la valeur de cette énergie par rapport à celle en un autre point; le nouveau nombre ainsi défini n'est autre que la *différence de potentiel*.

7.1. Travail des forces électrostatiques. — Considérons un système S de charges électriques produisant un champ électrique $\vec{E}$. Une charge d'essai q introduite dans ce champ est soumise à une force $\vec{F} = q\vec{E}$. Si la charge subit un petit déplacement $\vec{dl}$ (fig. XII-9) la force électrostatique qui s'exerce sur elle effectue un travail égal à $\vec{F}.\vec{dl}$ (par définition; V. t. 1, Mécanique des solides, chap. 3). Pour un déplacement fini de A à B le long d'une courbe (C) (fig. XII-10), le travail W de la force électrostatique est donc égal à:

$$W = \int_C \vec{F}.\vec{dl} = q\int_C \vec{E}.\vec{dl}$$

L'intégrale $\int_C \vec{E}.\vec{dl}$ *est la circulation du vecteur champ électrostatique* $\vec{E}$ *le long de la courbe* (C). Le travail des forces électrostatiques qui s'exercent sur une charge d'essai q se déplaçant le long de la courbe (C) est donc égal au produit de la valeur de la charge par la circulation du vecteur champ électrostatique le long de la courbe (C).

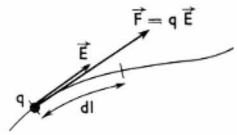


Fig. XII-9

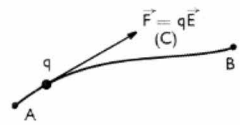


Fig. XII-10

7.2. Circulation du champ produit par une charge ponctuelle. — Une charge Q placée en un point P de l'espace crée en un point M, situé à une distance r de P, un champ électrique égal à:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}\vec{u} \quad \text{(fig. XII-11)}$$

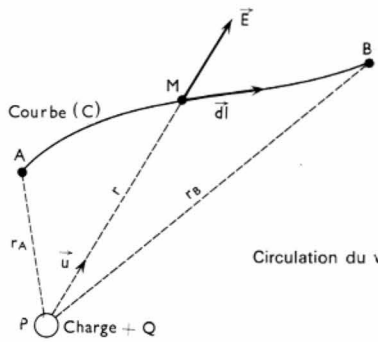


Fig. XII-11

Circulation du vecteur champ $\vec{E}$ de A à B

$\left(\vec{u}\right.$ étant le vecteur unitaire orienté de P vers M, $\left.\vec{u} = \frac{\overrightarrow{PM}}{PM}\right)$.

Pour un déplacement élémentaire dl, la circulation de ce vecteur est égale à:

$$\vec{E}.\vec{dl} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{u}.\vec{dl}}{r^2}$$

Par intégration mathématique, nous obtenons la circula-

tion de $\vec{E}$ le long de la courbe (C) joignant A à B. Elle est égale à :

$$\int_C \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{u}.\vec{dl}}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

(si $r_A = PA$ et $r_B = PB$).

La circulation du vecteur $\vec{E}$ ne dépend que de l'origine et de l'extrémité du chemin suivi. Cela prouve que le champ électrique est un champ de gradient et qu'il dérive d'un potentiel.

Pour une charge électrique ponctuelle Q placée en P, nous appellerons **potentiel électrique en *M*** (situé à une distance r de P) la quantité :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} + \text{constante}$$

Il s'agit d'une *grandeur scalaire* et elle est souvent appelée *potentiel scalaire.*

Par suite, *entre A et B, la circulation du champ produit par Q est égale à la différence* $(V_A - V_B)$ qui est appelée **différence de potentiel.**

En tenant compte du § 7.1, nous pouvons dire que *le travail W effectué par les forces électrostatiques s'exerçant sur une charge d'essai se déplaçant de A à B est égal au produit de la valeur q de la charge et de la différence de potentiel* $(V_A - V_B)$. W s'exprime par la formule suivante :

$$\boxed{W = q\,(V_A - V_B)}$$

$(V_A - V_B)$ est aussi appelée la *chute de potentiel* entre A et B.

7.3. Cas d'un système quelconque de charges. — Nous avons vu que le champ électrique produit par un système de charges est égal à la somme vectorielle des champs produits par chacune des charges prise isolément. Le champ résultant, somme de champs de gradients, est donc aussi un champ de gradients ; *il dérive donc d'un potentiel scalaire égal à la somme des potentiels scalaires de chacun des champs.* Nous pouvons donc écrire la relation :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{q_i}{r_i} + \text{constante}$$

r_i désignant la distance de la charge q_i au point M, i étant un indice qui prend les valeurs 1, 2, ..., n si le système est formé de n charges.

$V(M)$ est exprimé en *volts* puisque c'est une grandeur numériquement égale au quotient d'une énergie et d'une charge électrique comme la différence de potentiel introduite en électrocinétique.

Dans le cas d'une *répartition continue* des charges, le potentiel en un point M est donné par les relations suivantes :

— *répartition linéaire le long de la courbe* (C) *avec une densité linéaire de charges* λ :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_C \frac{\lambda\,ds}{r} + \text{constante}$$

ds désignant l'abscisse curviligne du point M sur (C) ;

— *répartition superficielle de densité* σ *sur une surface S :*

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \frac{\sigma\,dS}{r} + \text{constante}$$

— répartition volumique de la densité ρ dans un volume v :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V \frac{\rho\,dv}{r} + \text{constante}$$

La constante qui est introduite dans chaque cas est déterminée en écrivant que *le potentiel à l'infini, ou en un point déterminé du système, est nul* (par exemple, le potentiel de la terre est souvent considéré comme nul).

Dans tous les cas, le travail W des forces électrostatiques s'exerçant sur la charge d'essai q se déplaçant de A à B est égal à :

$$W = q\,(V_A - V_B)$$

Remarque : Les résultats précédents nous permettent également d'écrire la relation mathématique suivante :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$$

(V. t. 1, Mathématiques, chap. 21).

Cette relation implique que les composantes de $\vec{E}$ selon trois axes orthogonaux $\vec{Ox}$, $\vec{Oy}$, $\vec{Oz}$ sont :

$$\vec{E_x} = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i}\,, \quad \vec{E_y} = -\frac{\partial V}{\partial y}\vec{j}\,, \quad \vec{E_z} = -\frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ étant des vecteurs unitaires portés par les trois axes (fig. XII-12).

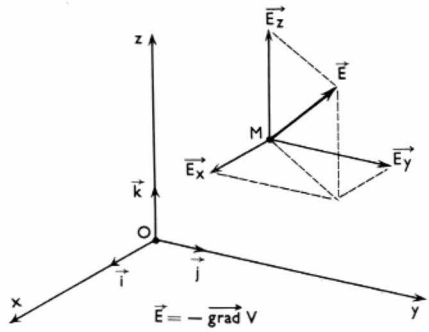


Fig. XII-12

Le fait que le champ électrostatique dérive d'un potentiel scalaire prouve en outre que le rotationnel de $\vec{E}$ est nul ; cela peut d'ailleurs être vérifié par calcul.

8. ÉQUIPOTENTIELLES

Une surface équipotentielle d'un système de charges électriques est une surface telle qu'*en tous ses points le potentiel électrostatique a la même valeur.* Les surfaces équipotentielles sont donc définies par les équations cartésiennes : $V(x, y, z) =$ constante.

La normale en une telle surface est le gradient de la fonction $V(x, y, z)$; cela démontre que le champ électrostatique en un point d'une surface équipotentielle est perpendiculaire à celle-ci. Les lignes de champ sont donc les *trajectoires orthogonales des surfaces équipotentielles* et la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$ prouve en outre que les lignes de champ sont *orientées dans le sens des potentiels décroissants.* L'intensité du champ en un point est inversement proportionnelle à la distance qui sépare les deux surfaces équipotentielles les plus voisines de ce point, cette distance étant prise le long de la ligne de champ passant par ce point.

9. FLUX DU CHAMP ÉLECTROSTATIQUE

9.1. Définition. — *Le flux d'un champ de vecteurs $\vec{E}$ à travers un élément de surface dS est égal par définition à*

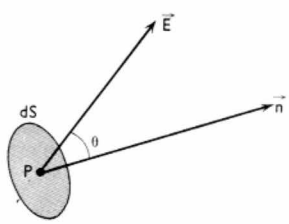


Fig. XII-13

$(\vec{E}.\vec{n}.dS)$, $\vec{n}$ étant le vecteur unitaire de la normale à l'élément de surface, *cette normale étant orientée* (fig. XII-13). Ce flux est donc aussi égal au produit $(E\,dS\cos\theta)$.

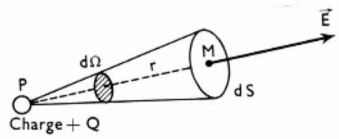
9.2. Flux dû à une charge isolée *Q*. — Déterminons le flux à travers un élément de surface dS placé en un point M d'un champ électrostatique créé par une charge Q placée en P (fig. XII-14). Si nous désignons par r la distance PM et par $\vec{u}$ le vecteur unitaire orienté de P vers $M\left(\vec{u}=\frac{\overrightarrow{PM}}{r}\right)$ le flux $d\Phi$ à travers dS est donné par la relation suivante :

$$d\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u}.\vec{n}dS = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}.\vec{n}}{r^2}dS$$

Or, par définition, la quantité $\frac{\vec{u}.\vec{n}}{r^2}dS$ est l'angle solide

Fig. XII-14

Flux à travers une surface dS



$d\Omega$ sous lequel on voit l'élément de surface dS depuis le point P (V. t. 1, Mathématiques, chap. 21). En conséquence, nous pouvons écrire la relation :

$$d\Phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega$$

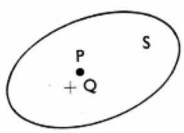
Le flux du champ électrostatique à travers une surface quelconque vue sous l'angle solide Ω depuis le point P est obtenu en intégrant mathématiquement la relation précédente. Il est égal à :

$$\boxed{\Phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\Omega}$$

9.3. Cas particuliers. — Lorsque la *surface est fermée et entoure le point P*, les normales $\vec{n}$ sont orientées vers

Fig. XII-15

Le flux produit par une charge Q à l'intérieur d'une surface fermée S est égal à $\frac{Q}{\varepsilon_0}$



l'extérieur, par exemple, et l'angle solide sous lequel la surface est vue de P est égal à 4π stéradians (fig. XII-15). *Le flux est alors égal à :* $\frac{Q}{\varepsilon_0}$.

— Lorsque la *surface est fermée et que le point P est à l'extérieur du domaine limité par la surface*, celle-ci est vue sous un angle solide nul (fig. XII-16). En effet, tout cône élémentaire d'angle solide $d\Omega$ et de sommet P coupe la surface un nombre pair de fois et les angles solides des

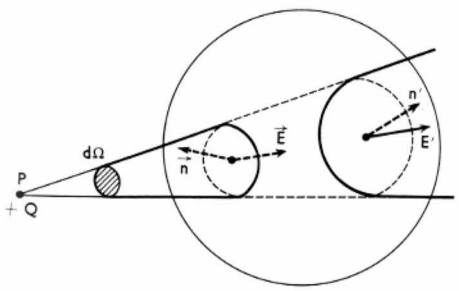


Fig. XII-16 — Le flux produit par une charge placée à l'extérieur d'une surface fermée est nul

éléments de surfaces découpés s'annulent deux à deux car ils sont de signes opposés.

Le flux du champ électrostatique créé par une charge, à travers une surface fermée n'entourant pas la charge, est donc nul.

— Si la *charge est sur la surface* (fig. XII-17), celle-ci est vue sous un angle solide égal à 2π stéradians ; le flux est donc égal à :

$$\Phi = \frac{Q}{2\varepsilon_0}$$

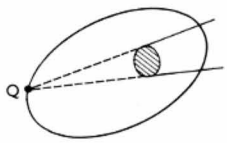


Fig. XII-17

Le flux produit par une charge placée sur la surface est égal à $\frac{Q}{2\varepsilon_0}$

— Lorsque nous avons un système de plusieurs charges, le champ électrostatique en un point de l'espace est égal à la somme vectorielle des champs que créerait en ce point chacune des charges électriques prise isolément. Le flux du champ électrostatique total est donc aussi égal à la somme des flux des champs de chaque charge prise isolément.

Le flux du champ électrostatique à travers une surface fermée S limitant un domaine D est égal à la somme des charges contenues dans D augmentée de la demi-somme des charges situées sur la surface S, l'ensemble étant divisé par ε_0 (théorème de Gauss). Cela s'exprime par la relation suivante :

$$\Phi_S = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\sum_{q_i \in D} q_i + \frac{1}{2}\sum_{q_s \in S} q_s\right)$$

q_i représente une charge contenue dans le domaine D et q_s une charge se trouvant sur la surface S.

10. CONSÉQUENCES DU THÉORÈME DE GAUSS : DIVERGENCE DE CHAMP

Dans une région de l'espace où il n'y a pas de charges électriques, à travers toute surface fermée, le flux du vecteur $\vec{E}$ *est nul.* Cela signifie que le **flux est conservatif :** le flux qui « entre » dans une surface est égal à celui qui en « sort ». Mathématiquement, nous pouvons écrire que la divergence du vecteur $\vec{E}$ est nulle.

Lorsque les charges électriques en présence ne sont pas considérées comme ponctuelles mais comme ayant un certain volume, nous pouvons définir une fonction densité de charge électrique ρ : dans un volume très petit dv autour du point M, il y aura la charge : $\rho(M)\,dv$.

Le théorème de Gauss s'applique toujours mais la somme des charges contenues dans le domaine D est alors donnée par l'intégrale :

$$\iiint_D \rho dv$$

et le flux à travers la surface S est alors égal à :

$$\Phi_S = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_D \rho dv$$

cela quelle que soit la surface S, l'intégrale étant étendue à tout le volume limité par S. Cette relation entraîne la suivante :

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \text{ (théorème d'Ostrogradski)}$$

Introduisons l'opérateur de Laplace $\triangle$: le laplacien $\triangle V$ d'une fonction scalaire V est égal à la divergence du gradient de V : $\triangle V = \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,V) = -\operatorname{div}\vec{E}$

L'équation écrite ci-dessus prend alors la forme suivante :

$$\triangle V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \text{ (formule de Poisson)}$$

En particulier, en un point où il n'y a pas de charge, $\Delta V = 0$, le potentiel est une fonction sinusoïdale.

CHAPITRE XIII

EXEMPLES DE CHAMPS ÉLECTROSTATIQUES

1. CHAMP ÉLECTRIQUE DÛ À UNE SPHÈRE UNIFORMÉMENT CHARGÉE

Considérons une sphère S de rayon R, portant la charge Q, uniformément répartie dans tout le volume de la sphère. Par raison de symétrie, le champ électrique en un point M

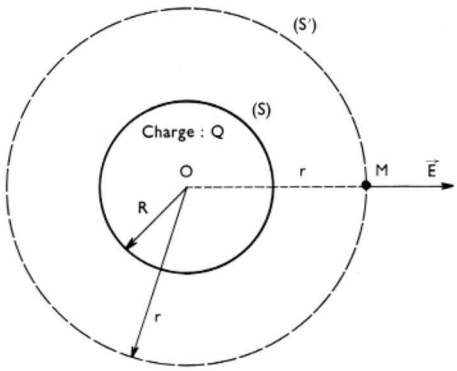


Fig. XIII-1

(fig. XIII-1) situé à une distance r ($r > R$) du centre O de S est porté par la droite OM, soit E le module de ce champ. Considérons la sphère S' de centre O et de rayon r : en tout point de cette sphère S', le vecteur champ est perpendiculaire à la surface et a pour module E. Le flux de ce champ $\vec{E}$ à travers cette sphère est égal au produit de E par la surface de S' (soit $4\pi r^2$) et aussi au quotient $\frac{Q}{\varepsilon_0}$ d'après le théorème de Gauss :

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Par suite nous obtenons :

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

En un point extérieur à une sphère uniformément chargée, le champ a la même valeur que si toute la charge de la sphère était concentrée en son centre.

Ce résultat est applicable chaque fois que la charge de la sphère présente une symétrie sphérique, comme, par exemple, lorsque les charges sont réparties à la surface du corps de façon que la densité superficielle de charge soit uniforme. Le champ en un point extérieur est alors le même que si toute la charge était concentrée au centre de la sphère. Dans ce cas, nous pouvons d'ailleurs également

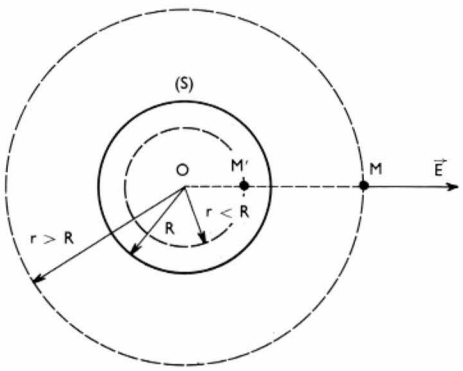


Fig. XIII-2

déterminer le champ en un point M' situé à l'intérieur de la sphère (fig. XIII-2). Nous considérerons pour cela une sphère concentrique et intérieure à la première, passant par M' : cette sphère ne contenant aucune charge électrique, le flux qui la traverse est nul et il en est de même du champ en M'.

Le champ électrostatique est nul à l'intérieur d'une sphère dont la surface est uniformément chargée et dont l'intérieur ne porte aucune charge électrique (fig. XIII-3).

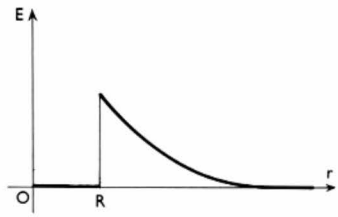


Fig. XIII-3

Champ à une distance r du centre d'une sphère dont la surface est uniformément chargée

2. CHAMP ÉLECTROSTATIQUE DÛ À UN FIL RECTILIGNE INFINI UNIFORMÉMENT CHARGÉ

Considérons un fil rectiligne indéfini portant une charge λ par unité de longueur (fig. XIII-4). Un élément de longueur dl porte une charge λdl et il produit en un point M un champ $\vec{dE}$ dont le module est égal à :

$$dE = \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{d(a\,\mathrm{tg}\,\theta)}{a^2/\cos^2\theta} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\, d\theta$$

a étant la distance de M au fil, r la distance de M au milieu P de l'élément dl, et θ l'angle de la droite MP avec le plan passant par M et perpendiculaire au conducteur.

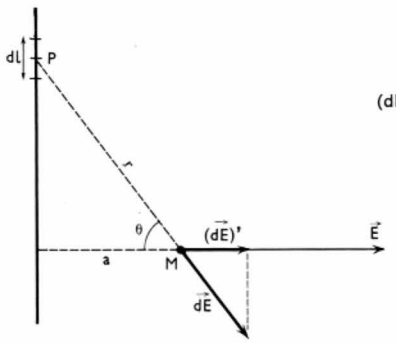


Fig. XIII-4

$(dE)' = dE \cos\theta$

Par raison de symétrie, la direction du champ résultant est perpendiculaire au fil et le module de ce champ est obtenu grâce à l'expression précédente. Le module de la composante $(\vec{dE})'$ de $\vec{dE}$, normale au fil est égale à :

$$dE\cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\cos\theta\, d\theta$$

donc :

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}$$

3. ÉTUDE D'UN DOUBLET ÉLECTRIQUE

3.1. Définition. — *Un doublet électrique est l'ensemble formé par deux charges électriques égales en valeur absolue et de signes opposés, placées à très petite distance l'une de l'autre* (fig. XIII-5). Pour étudier le champ dû à ce

doublet, nous désignons par N et P les positions des charges négative et positive, par O le milieu de PN et par $\vec{Ox}$ l'axe portant les deux charges, orienté de N vers P. Soit $+q$ et $-q$ les deux charges et l la distance qui les sépare. Nous repérons un point M de l'espace par sa distance r au point O et par l'angle $\theta = (\vec{Ox}, \vec{OM})$. Le système présentant une symétrie de révolution autour de O, nous pouvons limiter notre étude en considérant seulement un plan passant par Ox et par M ; r et θ représentent alors les coordonnées polaires de M dans ce plan.

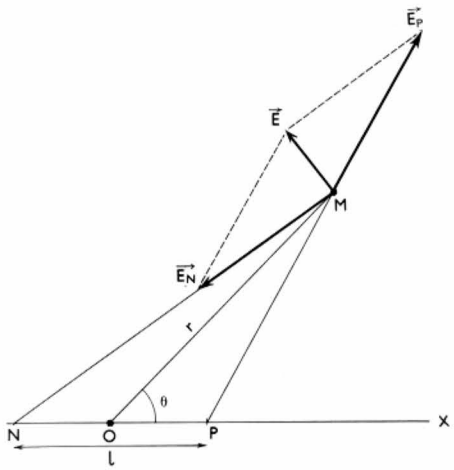


Fig. XIII-5 — Doublet électrique

La distance l étant très petite, elle pourra être négligée devant r et nous pourrons faire les approximations suivantes :

$$MN^2 = r^2 - \frac{l^2}{4} + 2r\frac{l}{2}\cos\theta \approx r^2\left(1 + \frac{l}{r}\cos\theta\right)$$

$$MP^2 = r^2 - \frac{l^2}{4} - 2r\frac{l}{2}\cos\theta \approx r^2\left(1 - \frac{l}{r}\cos\theta\right)$$

D'où (1) : $MN = r\sqrt{1 + \frac{l}{r}\cos\theta} = r\left(1 + \frac{l}{2r}\cos\theta\right)$

$$MP = r\sqrt{1 - \frac{l}{r}\cos\theta} = r\left(1 - \frac{l}{2r}\cos\theta\right)$$

et : $MN - MP = l\cos\theta$

$MN \cdot MP \approx r^2$

3.2. Potentiel en un point *M*. — Le potentiel en un point M sera fourni par l'expression suivante :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{MP} - \frac{q}{MN}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{MN - MP}{MN \cdot MP}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{l\cos\theta}{r^2}$$

Nous voyons apparaître la quantité $p = ql$, qui est appelée *moment électrique du doublet*. Si nous introduisons le vecteur $\vec{p}$ dont le module est p, orienté de N vers P, le potentiel en M s'écrit alors :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{u}}{r^2}$$

$\vec{u}$ étant le vecteur unitaire porté par $\vec{OM}$ $\left(\vec{u} = \frac{\vec{OM}}{OM}\right)$.

Le moment électrique d'un doublet est une quantité qui le caractérise au point de vue du potentiel électrique. Deux dipôles différents ayant même moment produiront le même potentiel donc aussi le même champ électrostatique.

Le moment électrique étant le produit d'une charge et d'une longueur, il s'exprime en *coulombs-mètres* (symbole : C.m) dans le système international. Lorsqu'il s'agit d'une molécule (qui est un doublet électrique dans certains cas) le coulomb-mètre est alors une unité trop grande et elle est souvent remplacée par le *debye* (symbole : D)

$$1\ \text{D} = \frac{1}{3}\cdot 10^{-29}\ \text{C.m}$$

3.3. Champ électrique en un point *M*. — Le champ électrique dû à un doublet pourrait se calculer de la même façon que le potentiel, c'est-à-dire en faisant la somme vectorielle des champs créés par chacune des deux charges. Il est plus simple d'utiliser la formule $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ V$ et d'appliquer les formules de calcul des gradients en coordonnées polaires. Les modules des composantes radiale $\vec{E_r}$ et tangentielle $\vec{E_\theta}$ du champ électrique $\vec{E}$ (fig. XIII-6) sont alors donnés par les relations suivantes :

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\cos\theta}{r^2}\right) = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\cos\theta}{r^2}\right) = \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

Le champ total au point M a pour module :

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{4\cos^2\theta + \sin^2\theta}$$

$$= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{1 + 3\cos^2\theta}$$

et l'angle $\alpha = (\vec{OM}, \vec{E})$ est donné par l'expression :

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{1}{2}\ \text{tg}\ \theta.$$

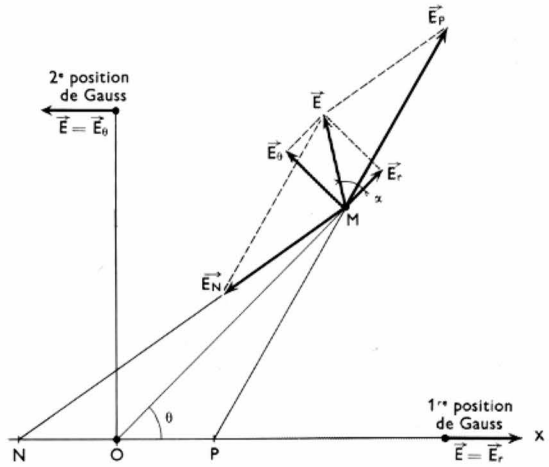


Fig. XIII-6 — Doublet électrique, positions de Gauss

3.4. Cas particuliers. — Si θ est nul, c'est-à-dire lorsque le point M se trouve sur l'axe $\vec{Ox}$, la composante tangentielle $\vec{E_\theta}$ du champ électrostatique est nulle et sa composante radiale vaut $\frac{2p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$. Le champ $\vec{E}$ en un point de $\vec{Ox}$ est donc porté par $\vec{Ox}$. Cette position de M s'appelle *première position de Gauss*.

Si θ est égal à $\frac{\pi}{2}$ rad, c'est la composante radiale $\vec{E_r}$ du champ qui est nulle, et la composante tangentielle vaut $\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$. Le champ est donc parallèle à $\vec{Ox}$ mais orienté en sens contraire de cet axe. Cette position est appelée *seconde position de Gauss*. À distance égale, le champ dans la seconde position de Gauss est égal à la moitié du champ dans la première position de Gauss.

Dans le cas d'un doublet, le champ varie comme l'inverse du cube de la distance et le potentiel comme l'inverse du carré de celle-ci, alors que pour une charge ponctuelle le champ varie en raison inverse du carré de la distance et le potentiel comme l'inverse de la distance.

(1) Si x est un nombre très petit $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$. V. t. 1, Mathématiques, chap. 16.

CHAPITRE XIV

CONDUCTEURS EN ÉQUILIBRE

1. DÉFINITION

Dans le chapitre premier, nous avons vu que dans un conducteur, les charges électriques peuvent se déplacer librement, tandis que dans un isolant elles restent fixes. *Un conducteur est en équilibre lorsque son état électrique est invariable, c'est-à-dire lorsqu'il n'y a plus de déplacement de charges dans le matériau qui le constitue.* Cela implique que le **champ électrique à l'intérieur du conducteur en équilibre est nul.** En effet, si, en un point du conducteur, le champ électrique $\vec{E}$ n'est pas nul, une force $e\vec{E}$ s'exerce sur l'électron se trouvant en ce point (e étant la charge d'un électron) et celui-ci se met en mouvement.

2. PROPRIÉTÉS DES CONDUCTEURS EN ÉQUILIBRE

Un certain nombre de propriétés résultent du fait que le champ électrostatique est nul dans les conducteurs en équilibre.

2.1. Dans un conducteur en équilibre, le potentiel électrostatique est constant. — Le champ électrique étant nul, il en est de même de ses composantes ; les relations du paragraphe 7.3, chapitre 12, montrent donc que les dérivées partielles de la fonction potentiel $V(x, y, z)$ sont nulles. *Cette fonction est donc une constante* (ce résultat est très général : une fonction est une constante si son gradient est nul et seulement dans ce cas).

2.2. Toute surface limitant un conducteur ou tracée dans sa masse est équipotentielle. — Cela est une conséquence immédiate du fait que le potentiel est constant dans le conducteur.

2.3. La densité de charges à l'intérieur d'un conducteur en équilibre est nulle. — La densité volumique des charges est donnée en fonction de la divergence du champ $\vec{E}$:

$$\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \operatorname{div} \vec{E}$$

$\vec{E}$ étant nul, il en est de même de div $\vec{E}$ et la densité de charge ρ est donc nulle. Il n'y a pas de charge dans la masse du conducteur.

2.4. Les charges électriques d'un conducteur sont réparties sur sa surface. — La densité de charges en volume étant nulle, si un conducteur porte des charges électriques et est en équilibre, *ces charges sont réparties à la surface de ce conducteur.*

Remarque : Il faut bien comprendre que ces résultats n'ont une valeur qu'à l'échelle macroscopique. Nous avons dit que la densité des charges est nulle : cela paraît en contradiction avec le fait que la matière est composée d'atomes formés d'un noyau positif autour duquel gravitent des électrons négatifs. Par densité de charges nulle, il faut entendre que la charge totale est nulle par compensation. Tous les atomes étant électriquement neutres, il en est de même pour un élément de volume, même très petit à l'échelle macroscopique car il renferme une grande quantité d'atomes.

3. CAS PARTICULIER : LES CONDUCTEURS CREUX

Les propriétés précédentes sont également celles des conducteurs présentant une cavité *ne contenant pas de charges électriques* (fig. XIV-1). Pour le montrer, nous allons considérer la fonction potentiel à l'intérieur de la cavité. Si cette fonction admet un maximum ou un minimum strict en un point (strict signifiant que la fonction n'est pas constante au voisinage de son extremum), le laplacien du potentiel est négatif dans le premier cas et positif dans le second. Or l'équation de Poisson :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

prouve qu'en un point où il n'y a pas de charges électriques, le laplacien du potentiel est nul. Cela démontre donc que la fonction potentiel n'a pas d'extremum strict : elle est constante au voisinage de chaque extremum, et comme elle est constante sur la surface limitant la cavité, elle a la même valeur dans toute la cavité. Par suite le champ est nul à l'intérieur de la cavité.

Nous pouvons également dire que si la fonction potentiel admet un extremum strict, par exemple un maximum, le champ est centrifuge autour de ce point et le flux à travers une petite surface entourant celui-ci n'est pas nul. Or, d'après le théorème de Gauss, ce flux est nul puisque cette surface n'entoure pas de charges. Par suite, nous devons conclure que le champ $\vec{E}$ est nul dans la cavité et que le potentiel est constant.

Dans un conducteur plein, ou dans un conducteur creux ne portant pas de charges dans ses cavités, les charges électriques sont réparties uniquement sur la surface extérieure du conducteur ; le champ est nul et le potentiel constant à l'intérieur du conducteur et de ses cavités.

4. CAGE DE FARADAY

Les résultats précédents s'appliquent à des conducteurs présentant une cavité communicant avec l'extérieur par des ouvertures petites devant les dimensions du conducteur et également à des conducteurs dont la surface n'est pas continue comme une cage faite de grillage (cage de Faraday).

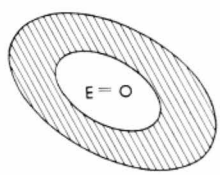


Fig. XIV-1

Le champ électrique dans la cavité est nul

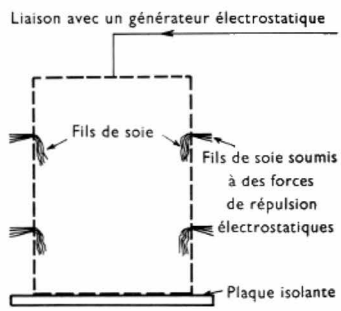


Fig. XIV-2

Pour une cage de quelques dizaines de centimètres de grandeur, les mailles du grillage peuvent atteindre un centimètre de côté sans inconvénient. Nous pouvons le vérifier expérimentalement à l'aide d'une cage de Faraday, placée sur une plaque isolante et comportant en divers points, à l'intérieur comme à l'extérieur, des touffes de fil de soie. Lorsque nous relions la cage à un générateur électrostatique qui permet de la porter à un très haut potentiel, nous constatons que les touffes de soie accrochées à l'extérieur se hérissent (ce qui indique la présence de charges électriques sur la surface extérieure de la cage) tandis que les touffes situées à l'intérieur ne se déplacent pas (fig. XIV-2). Une cage de Faraday isole donc les corps qu'elle contient des influences électrostatiques dues à des phénomènes extérieurs. Nous étudierons d'ailleurs plus en détail cet effet d'écran électrostatique en même temps que les phénomènes de capacité et d'influence électrostatique.

5. CYLINDRE DE FARADAY. MESURES DE CHARGES ÉLECTRIQUES

Un cylindre de Faraday est un cylindre creux qui présente

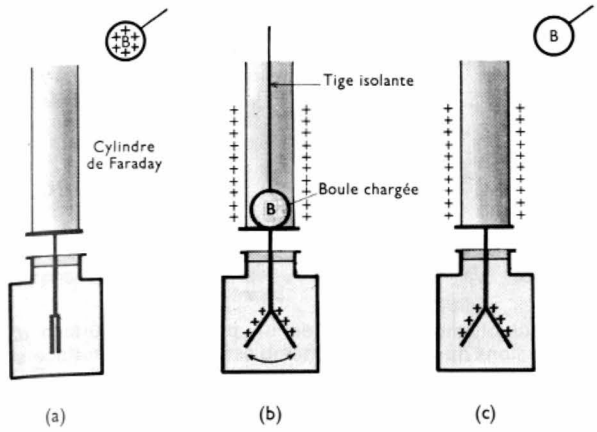


Fig. XIV-3

à une de ses extrémités une ouverture d'un diamètre faible devant la profondeur du cylindre (fig. XIV-3). Posons-le sur le plateau d'un électroscope et dans la cavité qu'il forme introduisons alors une petite boule *B* conductrice chargée, tenue par l'intermédiaire d'une tige isolante. Lorsque la boule *B* touche le fond du cylindre, *l'ensemble boule-cylindre forme alors, du point de vue électrique, un seul conducteur*. Toutes les charges électriques de la boule passent sur la surface extérieure du cylindre et sur les feuilles de l'électroscope (ces deux parties constituent la surface extérieure de l'ensemble). Si nous retirons la boule, les feuilles de l'électroscope gardent la même déviation, tandis que la boule ne porte plus aucune charge. Nous pouvons le vérifier expérimentalement en l'amenant au contact d'un autre électroscope. Toute la charge de la boule a donc passé dans le système constitué par le cylindre de Faraday et l'électroscope.

Si celui-ci est soigneusement isolé et si l'atmosphère est sèche, l'angle de déviation de l'électroscope reste fixe (l'air humide est très légèrement conducteur et, en atmosphère humide, l'électroscope se décharge lentement).

En répétant cette opération avec des charges connues, l'appareil peut alors être étalonné; il faut construire la courbe donnant la déviation α des feuilles d'or de l'électroscope en fonction de la charge électrique. Un tel appareil constitue un *électromètre :* il permet de mesurer des charges électriques.

6. ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DE LA DISTRIBUTION SUPERFICIELLE DES CHARGES SUR UN CONDUCTEUR EN ÉQUILIBRE

Si un conducteur *C* en équilibre porte des charges, celles-ci sont réparties sur sa surface extérieure. Si nous posons sur *C* un très petit disque métallique *D* (fig. XIV-4) tenu par

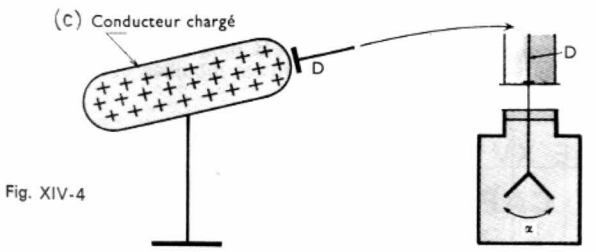


Fig. XIV-4

l'intermédiaire d'une tige isolante (l'ensemble constitue un *plan d'épreuve*), la charge électrique qui était primitivement sur la partie de la surface recouverte par le disque passe sur le disque; elle y reste lorsque nous l'éloignons de *C*. Nous pouvons alors mesurer cette charge à l'aide d'un électromètre (V. § précédent); en divisant la valeur de la charge par la surface du disque, nous obtenons la densité superficielle de charge sur le conducteur *C*. Notons que si la surface du disque *D* est très petite devant celle de *C*, la charge enlevée à chaque mesure est négligeable devant la charge totale du conducteur et la mesure ne modifie que de façon négligeable la répartition des charges sur *C*.

En recommençant cette mesure un nombre de fois suffisant, en différents points de la surface, nous pouvons avoir une idée de la densité superficielle sur *C*. Pour en donner une image concrète, il faut tracer la *surface indicatrice des densités de charges*. Sur la normale, en chaque point *M* de la surface est portée une longueur *MA* proportionnelle à la densité superficielle de charge au point *M*. La surface Σ formée par l'ensemble des points *A*, obtenue lorsque le point *M* décrit toute la surface du conducteur, est la surface indicatrice des densités de charges (fig. XIV-5). Si la den-

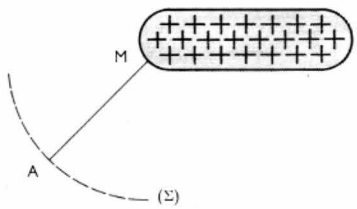


Fig. XIV-5

sité de charges est faible, la surface indicatrice est proche de la surface du conducteur; si elle est grande ces deux surfaces sont très éloignées l'une de l'autre (fig. XIV-6).

De telles indicatrices montrent, par exemple, que pour un ellipsoïde allongé, la densité de charges est maximale aux sommets du grand axe. Elle est particulièrement grande au voisinage d'une pointe conductrice.

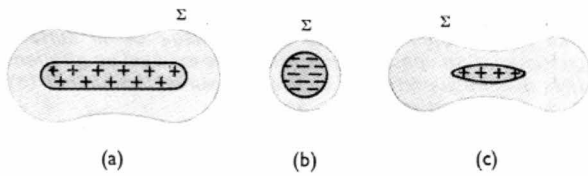


Fig. XIV-6 — Indicatrices des densités de charge

7. CHAMP ÉLECTRIQUE AU VOISINAGE D'UN CONDUCTEUR

La surface d'un conducteur est une surface équipotentielle; le champ au voisinage immédiat du conducteur est donc perpendiculaire à la surface du conducteur (pour un champ de gradients, les lignes de champ sont en tout point perpendiculaires aux surfaces équipotentielles).

Nous pouvons calculer numériquement le champ en un point très voisin de la surface, connaissant la densité superficielle de charges σ sur la surface. Soit *dS* un petit élément de surface sur le conducteur et considérons la surface Σ formée par le tube de forces circonscrit à cette surface et limité par une surface *dS'* très proche de *dS* et située à l'extérieur du conducteur (fig. XIV-7). La surface Σ est

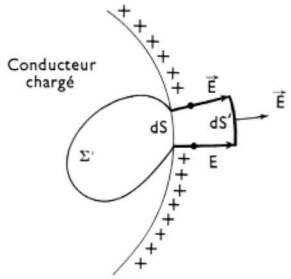


Fig. XIV-7

Champ au voisinage d'un conducteur

limitée à l'intérieur du conducteur par une surface Σ' quelconque s'appuyant sur le bord de *dS*.

Appliquons le théorème de Gauss à la surface Σ ainsi construite. La quantité totale d'électricité à l'intérieur de la surface est égale à la charge portée par *dS* c'est-à-dire (σdS). Le flux total à travers Σ est la somme algébrique des flux à travers les diverses parties que nous avons délimitées. Or le flux du vecteur champ électrique à travers Σ' est

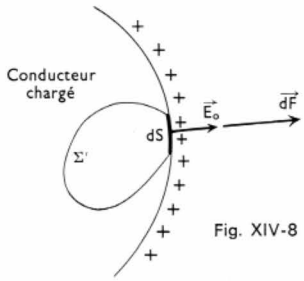


Fig. XIV-8

Pression électrostatique

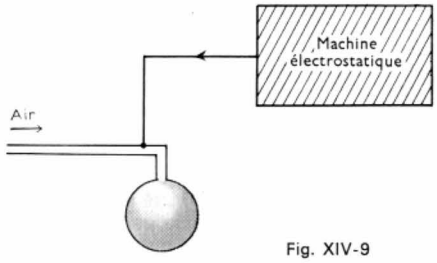


Fig. XIV-9

Une bulle de savon électriquement chargée se gonfle

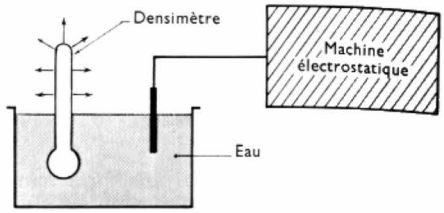


Fig. XIV-10

Un densimètre s'élève lorsqu'on porte le liquide à un potentiel très élevé

nul car le champ est nul à l'intérieur du conducteur et il en est de même du flux à travers la surface latérale du tube de force car, par définition, le vecteur champ est en tout point tangent à la surface du tube de force. Le flux sortant de la surface Σ est donc égal au flux traversant dS'. Or en un point de dS', le champ E est normal à la surface ; celle-ci étant suffisamment petite pour que le champ ait la même valeur en tous ses points, le flux à travers cette surface est donc égal à : $EdS' = EdS$ (car $dS' = dS$). Par suite, le théorème de Gauss nous donne la relation suivante :

$$EdS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma dS$$

d'où nous tirons :

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

Le champ électrostatique au voisinage de la surface extérieure d'un conducteur en équilibre est égal au quotient de la densité superficielle de charges sur le conducteur (σ) *et de la permittivité* ε_0.

Il est dirigé vers l'extérieur si la densité de charges est positive et vers l'intérieur dans le cas contraire.

La densité de charges étant très forte sur une pointe, le champ électrique est très intense au voisinage de la pointe. Dans certains cas, sous l'effet de ce champ, l'air au voisinage de la pointe peut être ionisé. Le conducteur attire alors les charges d'un signe contraire de celles qu'il porte et il se décharge. Aussi, lorsque cette décharge est désirée, utilise-t-on des pointes. Un paratonnerre constitue une pièce pointue par laquelle les parties conductrices, reliées au paratonnerre, peuvent se décharger. Ainsi est éliminé le danger résultant de la présence d'une zone chargée sur laquelle la foudre peut tomber.

8. PRESSION ÉLECTROSTATIQUE

En un point situé à la surface du conducteur, le champ n'est pas nul et il peut se calculer à l'aide du théorème de Gauss (de la même façon que le champ au voisinage du conducteur). Nous considérons un élément de surface dS sur le conducteur (fig. XIV-8) faisant partie d'une surface Σ limitée par dS et par une surface Σ' située tout entière à l'intérieur du conducteur et s'appuyant sur le bord de dS. Le flux à travers Σ' est nul (comme dans le cas étudié précédemment) et le flux sortant de Σ est donc égal au flux traversant dS, soit $(E_0 . dS)$ si E_0 est le module du vecteur champ électrique en un point de la surface dS (rappelons que le vecteur champ est normal à la surface et, en première approximation, constant si dS est suffisamment petit). *Les charges étant toutes sur la surface* Σ et la quantité d'électricité correspondante étant égale à $(\sigma . dS)$ nous pouvons écrire (théorème de Gauss, chap. 12, § 9) :

$$E_0\, dS = \frac{1}{2}\,\frac{\sigma dS}{\varepsilon_0}$$

soit :

$$E_0 = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}$$

La force $\vec{dF}$ qui s'exerce donc sur la surface dS est égale au produit du champ électrique $\vec{E_0}$ par la charge portée par dS (σdS). Le module de cette force a pour valeur :

$$dF = \frac{\sigma^2}{2\,\varepsilon_0}\,dS$$

Cette force s'exerce suivant la normale à la surface et elle est toujours dirigée vers l'extérieur (en effet, lorsque la surface est chargée positivement, le champ et la force sont dirigés vers l'extérieur ; lorsqu'elle est chargée négativement, le champ est dirigé vers l'intérieur, mais comme la charge est négative, la force est encore dirigée vers l'extérieur).

Cette force étant proportionnelle à la surface, il lui correspond une pression :

$$p = \frac{dF}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\,\varepsilon_0}$$

qui porte le nom de *pression électrostatique*.

Elle peut être mise en évidence au moyen de diverses expériences :

— une bulle de savon, à l'extrémité d'un tuyau métallique (fig. XIV-9), se gonfle lorsqu'on relie celui-ci à un générateur électrostatique qui permet de le porter à un potentiel très élevé. En effet, les forces électrostatiques qui s'exercent sur les diverses parties de la bulle sont dirigées vers l'extérieur de la bulle et elles provoquent l'augmentation de son diamètre ;

— un densimètre plongé dans l'eau s'élève lorsqu'on relie l'eau à un générateur électrostatique (fig. XIV-10). Cela est dû au fait que la résultante des forces électrostatiques s'exerçant sur le densimètre est dirigée vers le haut (la partie extérieure du densimètre est mouillée et donc conductrice).

CHAPITRE XV

INFLUENCE ET CAPACITÉ

1. INFLUENCE ÉLECTROSTATIQUE

Considérons un conducteur A neutre et isolé (fig. XV-1). Lorsque nous approchons un conducteur B chargé, par exemple positivement, nous constatons que la partie de A proche de B se charge négativement tandis que la partie de A, la plus éloignée de B, se charge positivement. Il y a **influence électrostatique.** Cette électrisation peut s'expliquer par le fait que les électrons libres du conducteur A sont attirés par B et se massent du côté de B ; de l'autre côté, il apparaît une charge positive à la suite du départ de

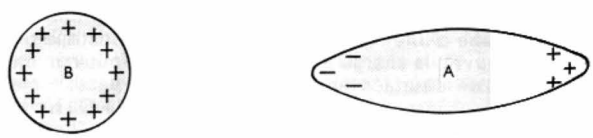
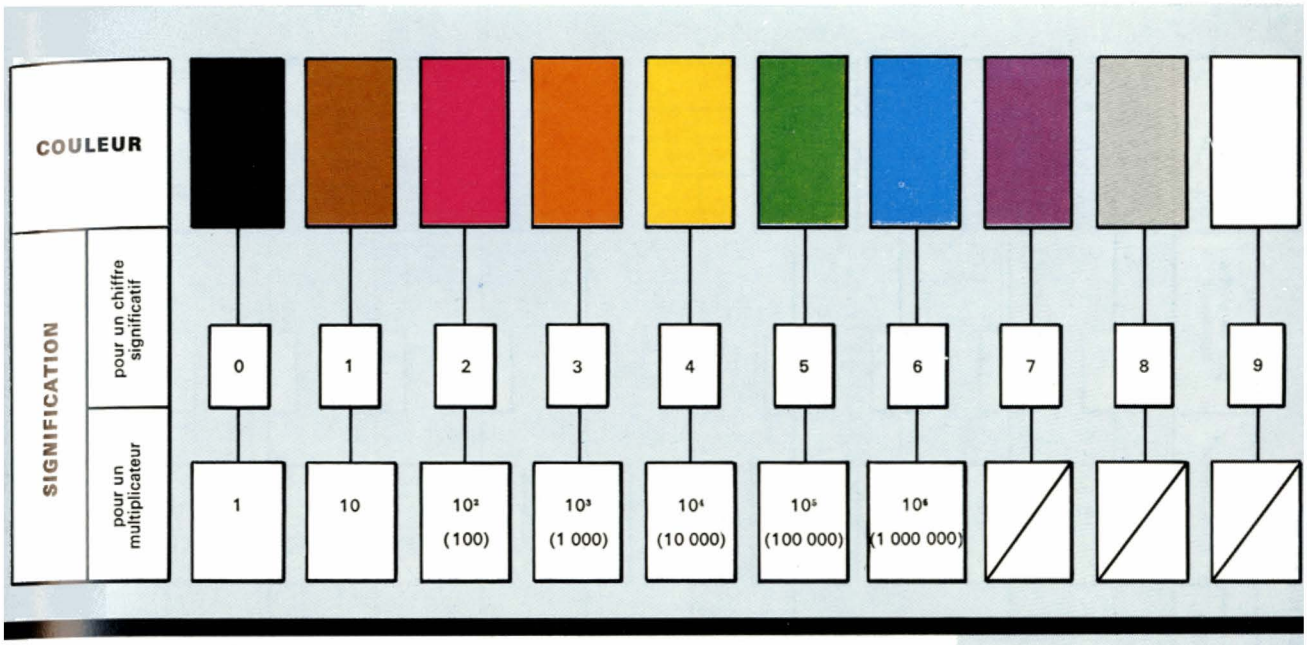
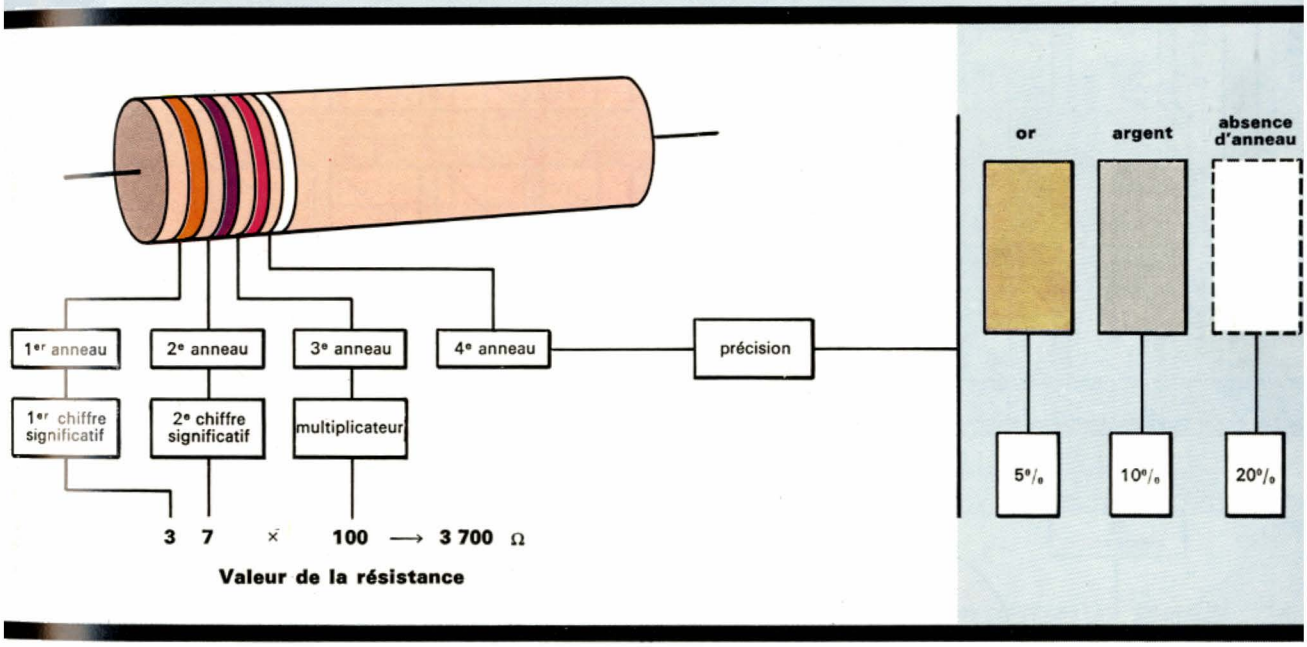


Fig. XV-1

ces électrons. Le conducteur A était neutre et isolé et sa charge totale était donc nulle. Il en est encore de même

Résistances. Code des couleurs





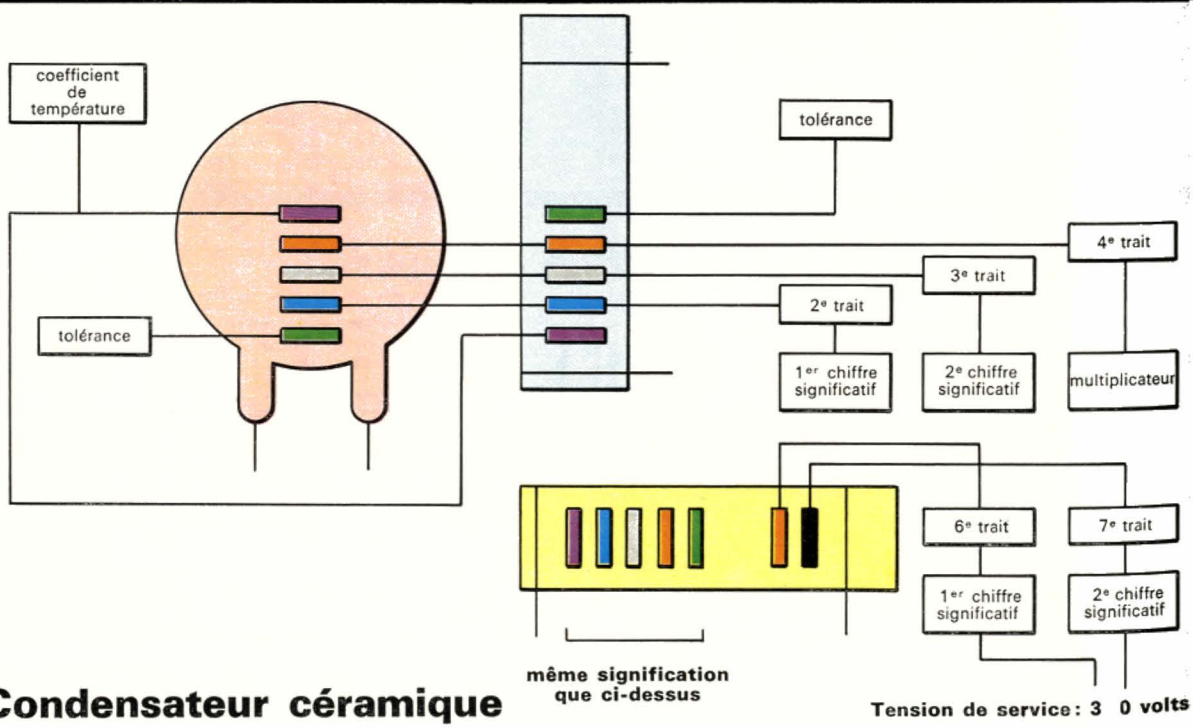
Progressions normalisées

E 6	1				1,5				2,2				3,3				4,7				6,8			
E 12	1		1,2		1,5		1,8		2,2		2,7		3,3		3,9		4,7		5,6		6,8		8,2	
E 24	1	1,1	1,2	1,3	1,5	1,6	1,8	2	2,2	2,4	2,7	3	3,3	3,6	3,9	4,3	4,7	5,1	5,6	6,2	6,8	7,5	8,2	9,1
E 48	1	1,05	1,10	1,15	1,21	1,27	1,33	1,40	1,47	1,54	1,62	1,69	1,78	1,87	1,96	2,05								
	2,15	2,26	2,37	2,49	2,61	2,74	2,87	3,01	3,16	3,32	3,48	3,65	3,83	4,02	4,22	4,42								
	4,64	4,87	5,11	5,36	5,62	5,90	6,19	6,49	6,81	7,15	7,50	7,87	8,25	8,66	9,09	9,53								

Ces nombres et leurs multiples décimaux correspondent aux valeurs des résistances (ou des condensateurs) qui sont commercialisés ; par exemple, en série E 6 on trouve des résistances de 10 Ω, 15 Ω, 22 Ω, ..., 100 Ω,150 Ω, 220 Ω, *etc.*

Condensateurs. Code des couleurs

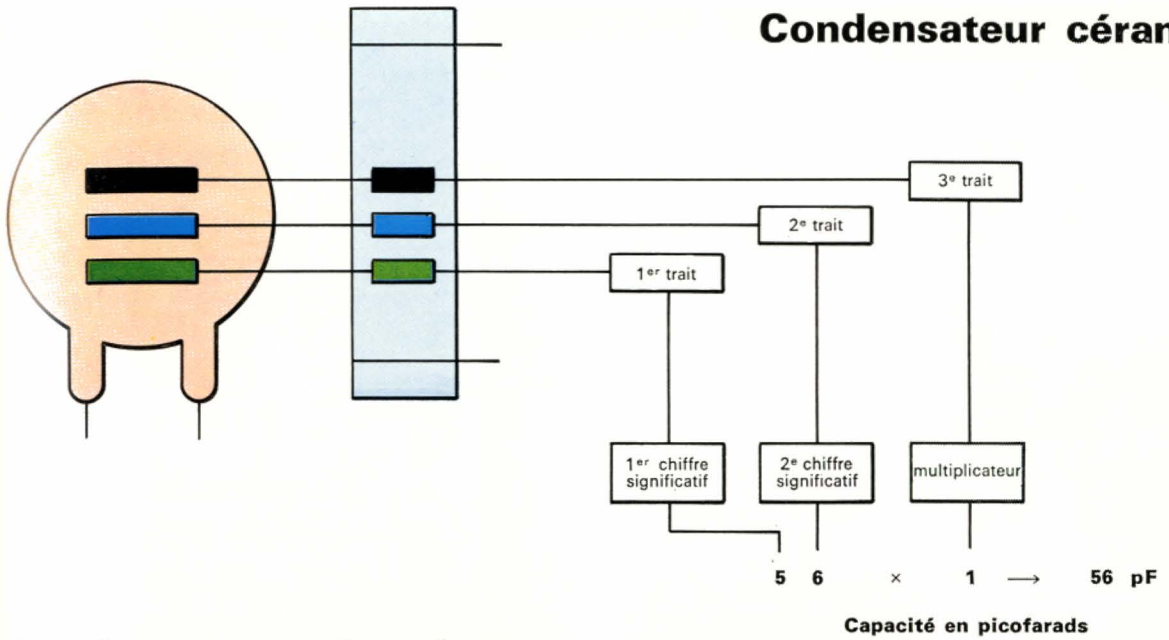
SIGNIFICATION		COULEUR											
pour un chiffre significatif			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
pour un multiplicateur *			1	10	10^2 (100)	10^3 (1 000)	10^4 (10 000)	10^5 (100 000)			10^{-2} (0,01)	10^{-1} (0,1)	
tolérance	C ⩽ 10 pF		± 2 pF	± 0,1 pF				± 0,5 pF			± 0,25 pF	± 1 pF	
	C > 10 pF		± 20 %	± 1 %	± 2 %	± 3 %		± 5 %				± 10 %	
coefficient de température			0	— 0,033 °/₀₀	— 0,075 °/₀₀	— 0,150 °/₀₀	— 0,220 °/₀₀	— 0,330 °/₀₀	— 0,470 °/₀₀	— 0,750 °/₀₀			+ 0,1 °/₀₀



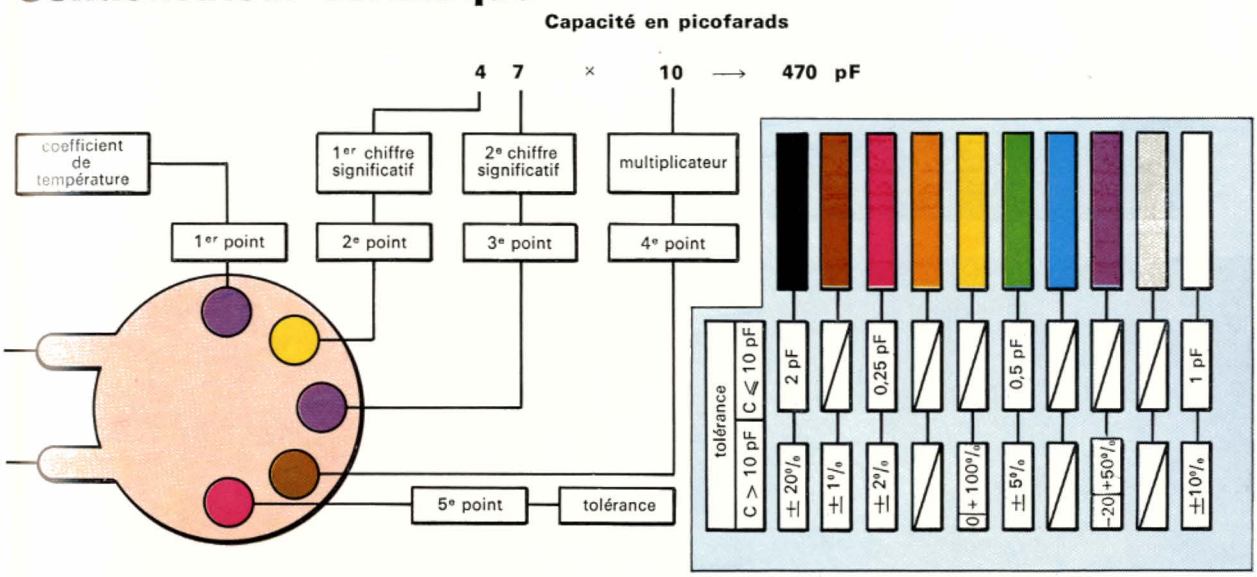
Condensateur céramique

Tension de service : 3 0 volts

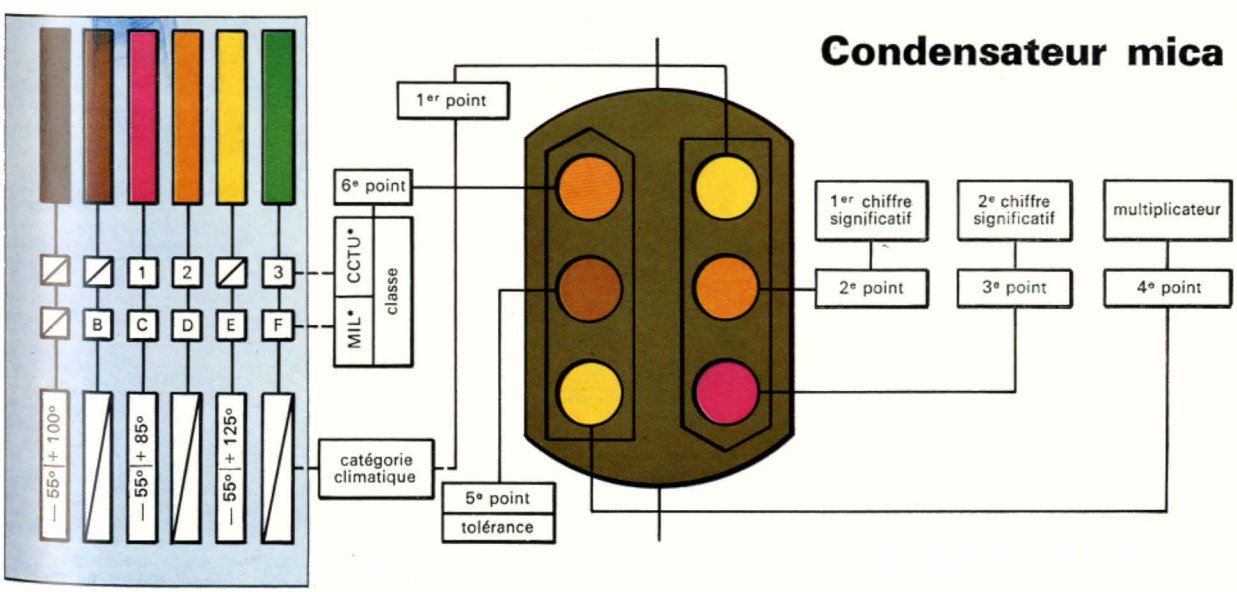
Condensateur céramique



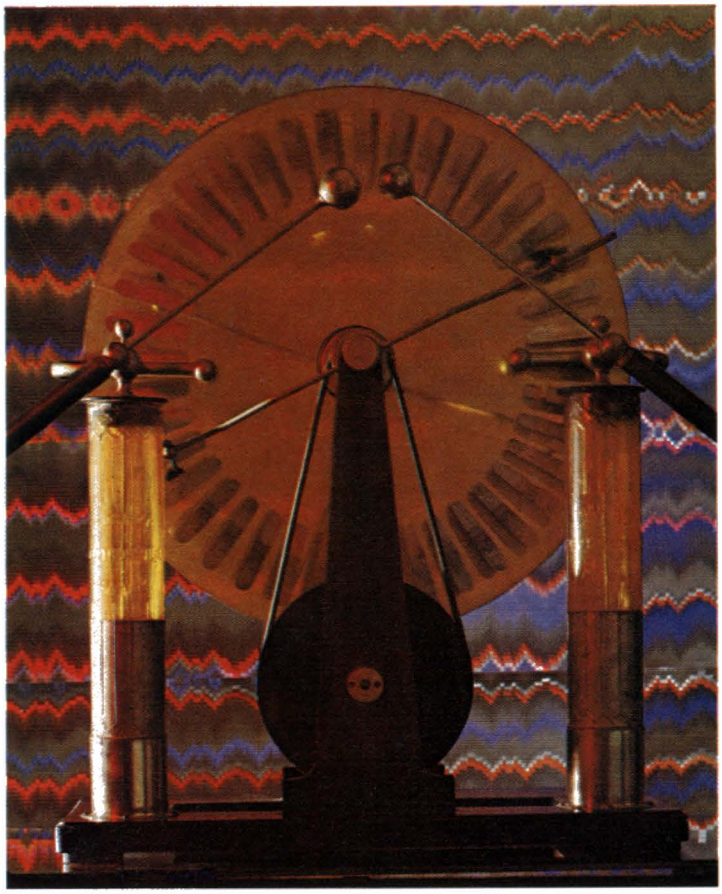
Condensateur céramique



Condensateur mica



* MIL : *homologué pour les applications militaires ;*
CCTU : *homologué par le Comité de coordination des télécommunications.*

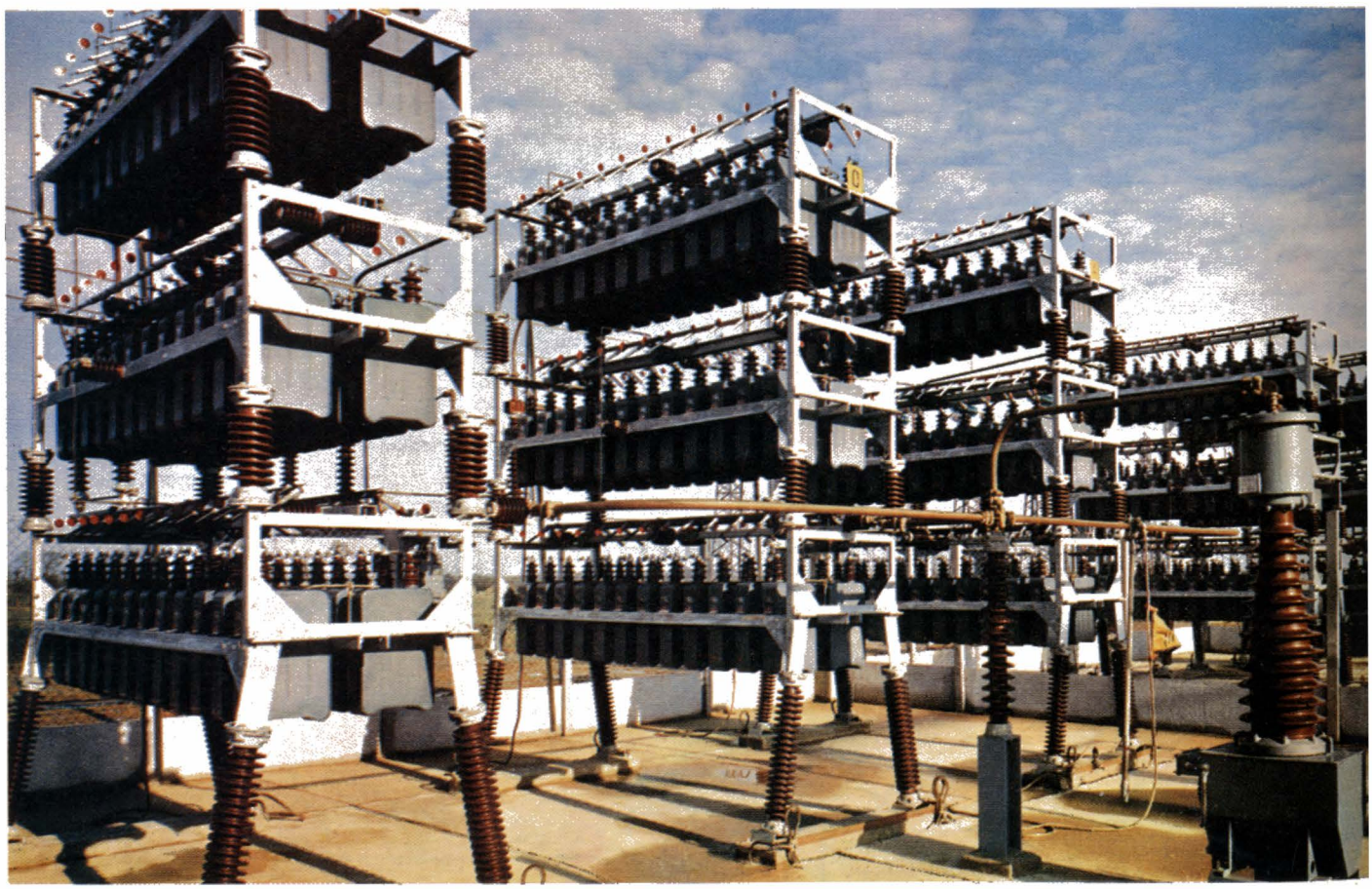


Générateur électrostatique

A gauche : la machine de Wimshurst met en œuvre le phénomène d'influence électrique qui reste la base des puissantes machines électrostatiques modernes. Lorsqu'elle fut mise au point en 1883 elle était la rivale de la bobine d'induction (ou bobine de Ruhmkorff).

Condensateurs industriels

Ci-dessous : un exemple d'utilisation de condensateurs industriels : compensation du facteur de puissance d'un réseau (*v. Électrotechnique*). Ensemble de batteries d'un poste de l'Électricité de France (C.R.T.T. Ouest, poste de Belle-Épine) : 90 000 V, 10 800 kvar.



Documents : Revue française de l'électricité. ph. Bernard Houplain (en haut) ; cliché Alsthom-Savoisienne (en bas).

et la charge négative qui apparaît d'un côté de A est donc égale en valeur absolue à la charge positive qui apparaît de l'autre côté.

Le conducteur étant en équilibre, le champ électrique est encore nul. Or le champ en un point M intérieur à A est la somme du champ $\vec{E}_B$ créé par les charges portées par B et du champ $\vec{E}_A$ créé par celles apparues sur A. $\vec{E}_B$ est orienté de B vers M, tandis que le champ $\vec{E}_A$ est orienté en sens contraire. Ces deux vecteurs ont même module, même support, et leurs sens sont opposés (fig. XV-2).

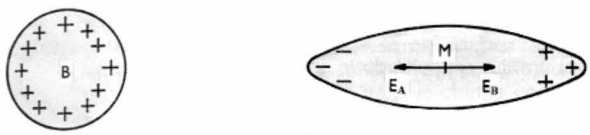


Fig. XV-2

Remarques : L'attraction des corps légers est une conséquence du phénomène d'influence. En effet au voisinage d'un corps B, chargé positivement (fig. XV-3), il apparaît sur la surface d'un corps A des charges négatives du côté faisant face au corps électrisé, et des charges positives de l'autre côté. Les charges négatives sont attirées plus que ne sont repoussées les charges positives car ces dernières sont plus éloignées de B que les premières ; globalement, il se produit une attraction qui est facilement visible si le corps est léger.

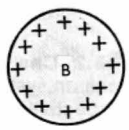
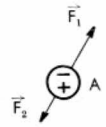


Fig. XV-3



Si nous répétons l'expérience en fixant à zéro le potentiel de A (en le reliant par un fil conducteur à la terre) lorsque B est approché (fig. XV-4) des charges électriques positives quittent A pour s'écouler dans la terre (ou plus précisément, ce sont les électrons qui viennent de la terre et qui s'amassent sur A). Donc, dans ce cas, seules subsistent les charges superficielles négatives qui sont du côté de A le plus rapproché de B. Si nous coupons alors le fil reliant A à la terre et si nous éloignons ensuite B, A reste chargé négativement.

Fig. XV-4

Donc, si l'influence conserve la charge totale d'un conducteur isolé, en revanche elle modifie la charge d'un conducteur maintenu à un potentiel constant.

2. THÉORÈME DES ÉLÉMENTS CORRESPONDANTS

Nous pouvons tracer les lignes de force du champ électrostatique créé par ces deux corps (fig. XV-5). Si nous considérons un tube de force T allant de B vers A, *la charge q_1 portée par l'élément de surface découpé sur A par le tube est égale et de signe opposé à la charge q_2 portée par l'élément de surface découpé sur B par T* (théorème des éléments correspondants). En effet, appliquons le théorème de Gauss à la surface fermée limitée par le tube de force T, par une surface Σ_1 située entièrement dans A et s'appuyant sur le tube de force, et par une surface Σ_2 située dans B s'appuyant sur le même tube. Le champ à l'intérieur d'un conducteur étant nul, les flux à travers les surfaces Σ_1 et Σ_2 sont nuls. D'autre part la surface latérale du tube de champ est en tout point tangente au vecteur champ, et le flux de celui-ci à travers le tube est donc également nul.

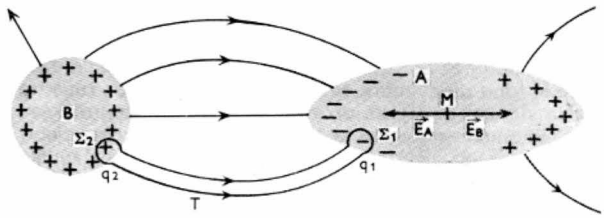


Fig. XV-5 — Influence électrostatique

Le flux total sortant de la surface est nul et par conséquent la somme algébrique des charges situées dans le volume limité par la surface est nulle. Ces charges étant égales à q_1 et q_2 nous avons donc :

$$q_1 + q_2 = 0 \quad \text{ou} \quad q_1 = -q_2$$

Conséquence : Le potentiel diminue le long d'une ligne de champ parcourue dans le sens du champ (c'est une conséquence de l'équation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$). Il y a donc des lignes de champ qui vont de B à A, et d'autres qui partent de A et vont vers l'infini. Le conducteur A, primitivement au potentiel zéro (potentiel de l'infini) puisqu'il était neutre et isolé dans l'espace, se trouve ainsi porté à un potentiel positif compris entre le potentiel de B et zéro.

3. INFLUENCE TOTALE

Il y a influence totale lorsque le conducteur influencé A entoure complètement le conducteur influençant B (fig. XV-6). Si B porte une charge $+ Q$, sur la surface intérieure de A se trouve répartie une charge $- Q$ d'après le théorème des éléments correspondants (les lignes de champ joignent la surface extérieure de B et la surface intérieure de A). Dans la pratique, il est difficile de réaliser des conducteurs qui entourent complètement d'autres conducteurs ; cependant il y a influence totale de B sur A lorsque toutes les lignes de champ qui partent de B atteignent A. Faraday a montré que c'est approximativement le cas lorsque le conducteur B est dans une cavité de A communiquant avec l'extérieur par des ouvertures de faibles dimensions devant celles de A et de B. C'est encore le cas lorsque A est une *cage en grillage entourant B, pourvu que les mailles du grillage soient petites devant les dimensions de A.*

Reprenons par exemple le dispositif étudié précédemment (fig. XV-7) comportant une cage de Faraday posée sur le plateau d'un électroscope. Lorsque nous enfonçons progressivement à l'intérieur du cylindre une boule B char-

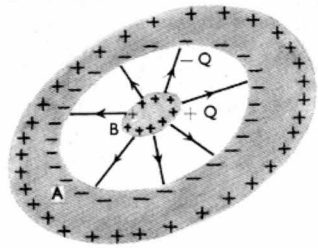


Fig. XV-6

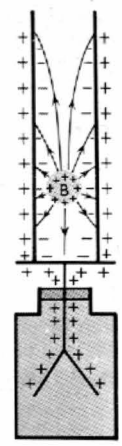


Fig. XV-7

gée, nous constatons que les plaques de l'électroscope divergent de plus en plus, mais à partir d'une certaine profondeur, leur écartement reste constant. Lorsqu'il en est ainsi toutes les lignes de champ partant de B aboutissent au cylindre et il y a influence totale.

Remarque : Si la boule entre en contact avec le fond du cylindre, nous n'observons aucune variation de l'écartement des plaques. En effet, lorsqu'il y a influence totale, la surface intérieure du cylindre porte une charge totale de même valeur absolue et de signe opposé à la charge de B, et la surface extérieure du cylindre, le plateau, la tige et les feuilles de l'électroscope portent une charge égale à la charge de la boule B. Lorsque nous amenons celle-ci en contact avec le fond du cylindre, B se décharge, la charge répartie sur la surface intérieure du cylindre est ainsi neutralisée ; ce phénomène n'a aucune conséquence sur la répartition des charges sur la surface extérieure et la charge des feuilles d'or de l'électroscope reste constante ainsi que leur déviation.

4. ÉCRANS ÉLECTRIQUES

Considérons un conducteur B entièrement entouré par un conducteur A. Si B est initialement neutre, il le reste quels que soient les conducteurs placés au voisinage de A (fig. XV-8) ; en effet nous avons vu que si un conducteur

Fig. XV-8

comporte une cavité ne contenant pas de charges, le champ électrique à l'intérieur de celle-ci est nul. Un conducteur C placé à l'extérieur de A n'exerce une influence que sur A et l'état électrique de B n'est pas modifié. Plus généralement, un système électrique quelconque placé dans la cavité d'un conducteur creux n'est pas affecté par la présence de charges électriques extérieures.

L'expérience montre qu'une enceinte discontinue comme *une cage de Faraday réalise un excellent écran électrique.* En laboratoire, murs, plafonds et planchers des salles sont souvent suffisamment conducteurs pour assurer une protection correcte contre les influences électrostatiques extérieures. Le champ électrique à l'intérieur d'un laboratoire ou à l'intérieur d'une cage de Faraday n'est pas modifié par des phénomènes extérieurs.

Les machines électrostatiques constituent des applications importantes des phénomènes d'influence (V. chap. 20).

5. CAPACITÉS ET COEFFICIENTS D'INFLUENCE

5.1. Cas d'un conducteur isolé dans l'espace. — Considérons un conducteur A isolé dans l'espace portant la charge Q ; soit V son potentiel (nous admettons qu'à l'infini le potentiel est nul). Si nous remplaçons la charge Q par une charge nQ, le champ électrique en tout point de l'espace sera multiplié par n, donc aussi le potentiel V du conducteur. La charge et le potentiel du conducteur sont donc proportionnels ; le rapport C de cette charge et de ce potentiel est un nombre constant appelé **capacité du conducteur :**

$$C = \frac{Q}{V}$$

Dans le système international, ce rapport s'exprime en *farads* (symbole : F). *Un farad représente la capacité d'un conducteur isolé dans l'espace qui porte une charge d'un coulomb et dont le potentiel est égal à un volt.*

À titre d'exemple calculons la capacité d'une sphère de rayon R portant une charge Q. La charge est uniformément répartie sur la surface et, par raison de symétrie, le potentiel en un point M à une distance r du centre de la sphère ($r > R$) est égal à :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r}$$

Le potentiel étant continu, il est égal à : $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{R}$ sur la surface de la sphère, donc dans la sphère toute entière. La capacité de la sphère est donc égale à :

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

La capacité d'une sphère d'un mètre de rayon est égale à :

$$4\pi\varepsilon_0 = \frac{1}{9.10^9} = 1{,}11 \times 10^{-10}\ \text{F}$$

Le farad est donc une unité très grande et pratiquement ce sont trois sous-multiples de cette unité qui sont employés : le *microfarad*, le *nanofarad* et le *picofarad.*

$$1 \text{ microfarad} = 1\ \mu\text{F} = 10^{-6}\ \text{F}$$
$$1 \text{ nanofarad} = 1\ \text{nF} = 10^{-9}\ \text{F}$$
$$1 \text{ picofarad} = 1\ \text{pF} = 10^{-12}\text{F}$$

5.2. Cas d'un système de conducteurs. — Considérons un système de n conducteurs $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$ portant respectivement les charges $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots Q_n$ et dont les potentiels sont respectivement égaux à $V_1, V_2, V_3, \ldots V_n$.

Le potentiel en un point est donné en fonction des charges (V. chap. 12, § 7.3.) par des équations linéaires et il en est de même pour les valeurs de ces charges en fonction des potentiels. Si nous désignons par C_{pq} le coefficient de proportionnalité entre la charge Q_p et le potentiel V_q nous obtenons les relations suivantes :

$$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 + C_{13}V_3 + \ldots + C_{1n}V_n$$
$$Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 + C_{23}V_3 + \ldots + C_{2n}V_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Q_n = C_{n1}V_1 + C_{n2}V_2 + C_{n3}V_3 + \ldots + C_{nn}V_n$$

Désignons par $[V]$ la matrice-colonne dont les coefficients sont $V_1, V_2, V_3 \ldots V_n$, par $[Q]$ la matrice-colonne dont les coefficients sont $Q_1, Q_2, Q_3 \ldots Q_n$ et par $[C]$ la matrice carrée d'ordre n des coefficients C_{pq} ; nous pouvons écrire le système précédent sous la forme matricielle suivante :

$$[Q] = [C] \,.\, [V] \quad \text{(produit matriciel)}$$

Le coefficient C_{pp} est appelé **coefficient de capacité** du conducteur A_p en présence des autres conducteurs, et le coefficient C_{pq} est appelé **coefficient d'influence entre le conducteur A_p et le conducteur A_q.** Ces coefficients étant des quotients de charges et de potentiels s'expriment en farads. Une théorie plus complète permet de montrer que :

— les coefficients de capacité C_{pp} sont tous positifs ;

— les coefficients d'influence C_{pq} sont tous négatifs ;

— la matrice $[C]$ est symétrique, c'est-à-dire que $C_{pq} = C_{qp}$.

CHAPITRE XVI

ISOLANTS OU DIÉLECTRIQUES

1. POLARISATION D'UN ISOLANT

La localisation des charges électriques dans les zones où elles ont été déposées ou produites constitue une propriété caractéristique des isolants. Mais une autre particularité les sépare nettement des conducteurs : il s'agit de leur comportement dans un champ électrique. Les électrons périphériques d'un atome d'isolant étant fortement liés au

noyau et ne pouvant être libérés, un champ électrique produit une *déformation des molécules du corps* et non pas une répartition nouvelle des charges comme dans le phénomène d'influence. En effet, dans les atomes d'un diélectrique les électrons les plus externes se trouvent répartis sur les niveaux d'énergie (V. t. 1, Physique nucléaire, chap. 1) de la bande de valence, tandis que les niveaux de la bande de conduction sont inoccupés, et le passage d'un électron d'un niveau de la première à un niveau de la deuxième demande une énergie si grande qu'il s'accompagne de la destruction du corps (v. ci-dessous, *Rigidité diélectrique*). Aussi, dans un champ électrique dont l'intensité n'est pas assez grande pour entraîner cet arrachement d'électrons, le barycentre des charges positives s'écarte-t-il de celui des charges négatives car ils sont soumis à des forces de sens opposés : le doublet (V. chap. 13), constitué par la molécule dans cet état, s'oriente dans le champ comme un aimant dans un champ magnétique. *L'isolant est polarisé.* Cette polarisation s'accompagne d'ailleurs d'une variation de volume (phénomène d'*électrostriction*), due aux déformations élastiques subies par les molécules (fig. XVI-1).

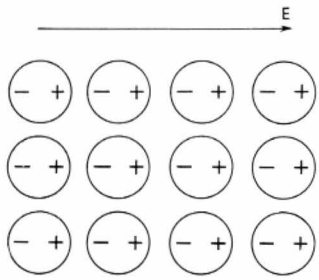


Fig. XVI-1
Polarisation d'un diélectrique

2. VECTEUR POLARISATION

2.1. Définition. — Un élément de diélectrique polarisé, de volume *dv*, présente un moment électrique $\overrightarrow{dM}$ proportionnel à *dv*. L'état électrique en chaque point du corps est caractérisé par un vecteur polarisation $\vec{P}$, qui représente le

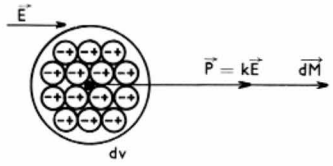


Fig. XVI-2

moment électrique de l'élément de volume entourant le point considéré, rapporté à l'unité de volume (fig. XVI-2) :

$$\vec{P} = \frac{\overrightarrow{dM}}{dv}$$

Dans un diélectrique isotrope ce vecteur est proportionnel au champ électrique $\vec{E}$ au point considéré :

$$\vec{P} = k\,\vec{E}$$

Le coefficient constant *k* est appelé la *susceptibilité* du diélectrique.

2.2. Intérêt

2.2.1. Définition d'une densité superficielle et d'une densité volumique de charges. — Lorsqu'un diélectrique est polarisé, il produit le même effet que s'il portait des charges électriques dont une partie se trouverait disposée sur la surface et l'autre fraction répartie dans la masse du corps.

En tout point *M* de la surface, *la densité superficielle* σ de ces charges fictives est précisément égale au produit scalaire $(\vec{P}.\vec{n})$ du vecteur polarisation $\vec{P}$ en *M*, et du vecteur unitaire $\vec{n}$ normal à la surface en ce point ; σ est donc numériquement égal à la composante normale P_n du vecteur polarisation (fig. XVI-3).

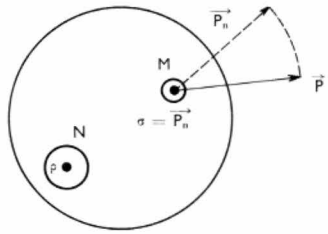


Fig. XVI-3

Pour les charges fictives qui seraient disposées dans la masse du corps, *la densité volumique* en un point *N* a une valeur ρ égale à l'opposé de la divergence du vecteur $\vec{P}$ en ce point :

$$\rho = -\operatorname{div}\vec{P} = -\left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}\right)$$

(si P_x, P_y, P_z représentent les composantes de *P* selon trois axes orthonormés).

Ainsi l'étude de l'électrostatique des isolants se ramène à celle du vide grâce à l'emploi de ces charges fictives.

2.2.2. Permittivité absolue et permittivité relative. — Cette méthode a aussi permis de constater que la plupart des formules utilisées pour les cas où des charges électriques se trouvent dans le vide, restent vraies à la condition de remplacer dans celles-là la permittivité ε_0 du vide par un terme ε, appelé la *permittivité absolue* du milieu. Le rapport $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \varepsilon_r$ est appelé la *permittivité relative du* diélectrique.

ε_r est sensiblement égal à 1 pour l'air, à 8 pour le mica et il peut atteindre 10 000 pour certaines céramiques à base de titanate de baryum.

3. VECTEUR DÉPLACEMENT

En un point au sein d'un diélectrique, *le vecteur déplacement* $\vec{D}$ *est égal au produit* $\varepsilon\,\vec{E}$. Il est aussi égal à la somme du vecteur $\varepsilon_0\vec{E}$ et du vecteur polarisation $\vec{P}$.

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$$

Le flux de ce vecteur $\vec{D}$ est conservatif, alors que le flux du vecteur champ électrique $\vec{E}$ ne l'est pas.

4. DIÉLECTRIQUES PARFAITS ET DIÉLECTRIQUES IMPARFAITS

L'étude des diélectriques conduit à distinguer les *diélectriques parfaits*, qui présentent une résistivité infinie et pour lesquels *k* et ε sont des constantes, et les autres isolants, qualifiés d'*imparfaits*. Pour ces derniers la permittivité absolue varie avec la température (6.10^{-3} % par degré pour le mica), avec la fréquence du champ électrique $\vec{E}$ (s'il est alternatif), avec le module de ce champ, etc. Dans les diélectriques anisotropes la permittivité absolue dépend aussi de la direction considérée.

Dans le cas d'un diélectrique parfait, $\vec{D}$, $\vec{E}$, $\vec{P}$ ont la même direction et la relation donnant la valeur du déplacement $\vec{D}$ entraîne la suivante :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + k = \varepsilon_0\left(1 + \frac{k}{\varepsilon_0}\right) = \varepsilon_0\varepsilon_r$$

5. HYSTÉRÉSIS DIÉLECTRIQUE

Dans un diélectrique imparfait, le phénomène de polarisation n'est pas réversible, c'est-à-dire que pour une valeur du champ $\vec{E}$, la polarisation $\vec{P}$ en un point dépend des états antérieurs. Lorsque le champ électrique $\vec{E}$ varie entre deux valeurs extrêmes $+\overrightarrow{E_m}$ et $-\overrightarrow{E_m}$, le point figuratif repré-

sentant les variations du module du vecteur $\vec{P}$ décrit une courbe fermée (fig. XVI-4). Cela permet de mettre en évidence un retard à la dépolarisation et pour cette raison cette figure est appelée *cycle d'hystérésis diélectrique*.

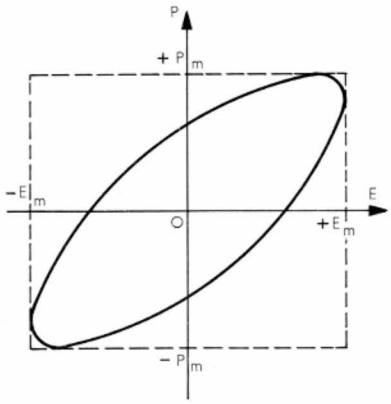


Fig. XVI-4
Hystérésis diélectrique

Elle montre que, pour redonner leur orientation primitive à des molécules d'un diélectrique, il faut dépenser de l'énergie, car des frottements internes empêchent le retour à l'état initial lorsque les conditions de départ sont à nouveau réalisées. *L'aire du cycle représente l'énergie dissipée par unité de volume et par cycle.* À cette consommation d'énergie correspond l'apparition d'énergie calorifique dans la masse du diélectrique, car toutes les molécules se polarisent. On utilise d'ailleurs cette propriété dans des dispositifs de chauffage par hyperfréquences (V. t. 2, Électrothermie, chap. 4).

6. RIGIDITÉ DIÉLECTRIQUE

Nous désignons ainsi la valeur maximale du champ électrique dans lequel l'isolant peut être placé. Au-delà, la cohésion des molécules du diélectrique n'est plus assurée et des électrons se déplacent donnant lieu à un courant intense et de faible durée, appelé **décharge disruptive.** Dans le cas d'un diélectrique solide, cette décharge entraîne la perforation de l'isolant. La rigidité diélectrique dépend de la nature de l'isolant et aussi d'un certain nombre de conditions physiques: pression dans le cas d'un gaz, température dans le cas d'un diélectrique solide, trace d'humidité dans le cas d'un liquide ou d'un solide, etc.

Rigidité diélectrique de quelques isolants	
Air sec	3 000 kV/m
Porcelaine	6 000 kV/m
Huile	10 000 kV/m
Paraffine	12 000 kV/m
Araldite	20 000 kV/m
Polychlorure de vinyle	20 000 kV/m
Silicone	40 000 kV/m
Mica	70 000 kV/m

CHAPITRE XVII

LES CONDENSATEURS

1. CAPACITÉ D'UN CONDENSATEUR

1.1. Capacité d'un conducteur en présence d'un autre conducteur relié à la terre. — Considérons un conducteur A relié électriquement au pôle positif d'une source électrique éloignée dont le pôle négatif est relié à la terre (fig. XVII-1). Ce conducteur est porté à un potentiel positif V égal à la force électromotrice de la source électrique. Sur ce conducteur se trouve une charge électrique $Q = CV$, C étant la capacité du conducteur A lorsqu'il est isolé dans l'espace (la source électrique étant éloignée, son influence sur le conducteur est négligeable).

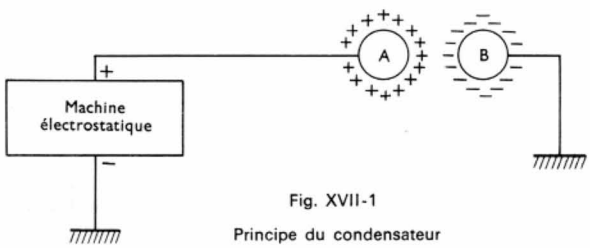


Fig. XVII-1
Principe du condensateur

Approchons alors du conducteur A un conducteur B relié à la terre. A étant chargé positivement, par influence B se charge négativement. Mais également par influence, les charges négatives de B provoquent l'apparition de charges positives supplémentaires sur A et la charge totale de A augmente (il y a « condensation » d'électricité sur A).

Les relations liant les charges respectives Q_A et Q_B des conducteurs A et B à leurs potentiels V_A et V_B s'écrivent sous la forme générale suivante :

$$Q_A = C_{AA}V_A + C_{AB}V_B$$
$$Q_B = C_{BA}V_A + C_{BB}V_B$$

Toutes les grandeurs considérées sont des grandeurs algébriques. C_{AA} et C_{BB} représentent les *coefficients de capacité de A et de B*, C_{AB} et C_{BA} correspondent aux *coefficients d'influence entre A et B* (C_{AA} et C_{BB} sont positifs, C_{AB} et C_{BA} sont négatifs).

Comme $V_B = 0$, les relations s'écrivent :

$$Q_A = C_{AA}V_A$$
$$Q_B = C_{AB}V_A$$

La capacité d'un conducteur est donc plus grande lorsqu'un autre conducteur maintenu au potentiel zéro est approché de lui. *L'ensemble des deux conducteurs forme un condensateur.*

1.2. Capacité d'un condensateur. — Supposons maintenant que le conducteur B entoure totalement A (fig. XVII-2) ; il y a donc influence totale de A sur B. A est appelé *armature intérieure* et B *armature extérieure* du condensateur. Le conducteur B porte une charge totale Q_B égale à la somme $(Q_E + Q_I)$; Q_E, charge qui apparaît sur la surface extérieure de B, ne dépend que du potentiel de

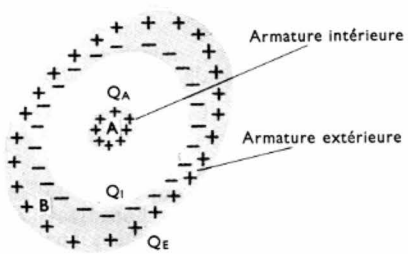


Fig. XVII-2

B ; Q_I, charge intérieure de B, est égale à $-Q_A$ (V. chap. 15, § 3). Les relations précédentes donnant Q_A et Q_B en fonction de V_A et V_B peuvent s'écrire :

$$Q_A = C_{AA}V_A + C_{AB}V_B$$
$$Q_E + Q_I = Q_E - Q_A = C_{BA}V_A + C_{BB}V_B$$

En les ajoutant membre à membre, nous obtenons Q_E;

cette quantité d'électricité ne dépendant que de V_B, nous déduisons les égalités suivantes :

$$C_{AA} = -C_{BA} = -C_{AB}$$

En posant :

$$C = C_{AA}$$
$$C' = C_{BB} - C$$

nous obtenons les relations suivantes :

$$Q_A = C(V_A - V_B)$$
$$Q_B = -C(V_A - V_B) + C'V_B$$

En général le terme $C'V_B$ est négligeable devant $C(V_A - V_B)$ et par conséquent $|Q_A| \approx |Q_B|$. Appelons Q cette valeur commune de Q_A et Q_B.

$$\boxed{Q = C(V_A - V_B)}$$

Q est appelé **charge du condensateur.** Elle est proportionnelle à la différence de potentiel entre les armatures (il est important de noter que *Q est la valeur arithmétique commune de Q_A et Q_B*).

Le coefficient de proportionnalité C est appelé **capacité du condensateur ;** il s'exprime en *farads*.

Nous allons voir que la capacité d'un condensateur est en général beaucoup plus grande que la capacité d'un conducteur isolé, d'où le grand intérêt pratique des condensateurs (fig. XVII-3).

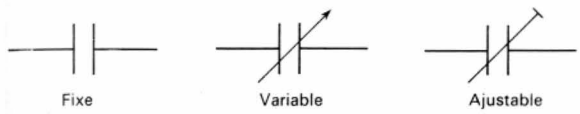


Fig. XVII-3 — Représentation symbolique d'un condensateur

2. CALCUL DE LA CAPACITÉ D'UN CONDENSATEUR

2.1. Condensateur dont la distance entre les armatures est faible et constante. — Appelons e la distance entre les armatures intérieure A et extérieure B d'un condensateur (fig. XVII-4). Supposons que l'ensemble se trouve dans le vide et que le potentiel de A soit supérieur au potentiel de B.

Afin de déterminer la capacité du condensateur, nous allons calculer la charge de l'armature intérieure A par application du théorème de Gauss. Considérons une surface Σ comprise entre les deux armatures du condensateur et parallèle aux surfaces en regard. En tout point de Σ le champ électrique est normal à cette surface Σ et constant. En première approximation, son module est égal à $E = \dfrac{V_A - V_B}{e}$ si la distance e est petite devant les dimensions des armatures. Son flux est égal au produit de E et de l'aire S de Σ (aire sensiblement égale à celle des surfaces de A et de B en regard). Toutes les charges intérieures à la surface Σ étant les charges portées par A (ce qui correspond à une quantité d'électricité Q) le théorème de Gauss nous permet d'écrire :

$$ES = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

soit :

$$Q = \varepsilon_0 ES = \varepsilon_0 \frac{S}{e}(V_A - V_B)$$

La capacité du condensateur est donc égale à :

$$\boxed{C = \varepsilon_0 \frac{S}{e}}$$

Remarque : Connaissant le champ $\vec{E}$ au voisinage de A nous aurions pu calculer la densité superficielle de charges σ sur A ($\sigma = \varepsilon_0 E$) puis la charge totale $Q = \sigma S = \varepsilon_0 ES$ et ensuite déduire la valeur de C.

Application numérique : Si les surfaces en regard ont une aire égale à celle d'une sphère de rayon égal à un mètre et si la distance des armatures est 1 mm, $C = 1{,}11 \cdot 10^{-7}$F. Elle est mille fois plus grande que la capacité d'une sphère d'un mètre de rayon isolée dans l'espace (V. chap. 15, § 5.1).

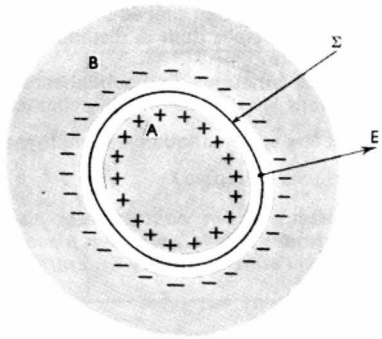


Fig. XVII-4

2.2. Capacité d'un condensateur sphérique. — L'armature intérieure A est une sphère de rayon R_1 et la surface intérieure de l'armature B est une sphère de rayon R_2 concentrique à la première (fig. XVII-5). L'ensemble est dans le vide. Par raison de symétrie, le champ $\vec{E}$ entre les armatures est radial ; si Q est la charge de l'armature intérieure, en un point situé à une distance R du centre de A ($R_1 < R < R_2$) le module de ce champ est égal à :

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}$$

(rappelons que le champ créé par la sphère A, en tout point extérieur à A, est le même que si toute la charge de A était concentrée en son centre ; de plus en un point intérieur à B le champ créé par la sphère B est nul (V. chap. 14).

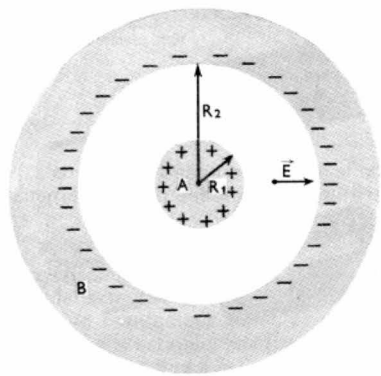


Fig. XVII-5

Condensateur sphérique

Le champ étant radial, l'équation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$ s'écrit $E = -\dfrac{dV}{dR}$ ou $dV = -E\,dR$. En intégrant nous obtenons :

$$V_A - V_B = \int_{R_1}^{R_2} E\,dR = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dR}{R^2}$$
$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{Q(R_2 - R_1)}{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}$$

soit : $$Q = (V_A - V_B)\frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_1 - R_2}$$

La capacité du condensateur sphérique est donc égale à :

$$\boxed{C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}}$$

Remarque : Lorsque $(R_2 - R_1)$ est petit devant R_1 et R_2, si nous posons $R_1 \approx R_2 \approx R$ et $e = (R_2 - R_1)$, il vient :

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R^2}{e} = \varepsilon_0 \frac{S}{e}$$

($S = 4\pi R^2$ étant l'aire des armatures en regard).

Nous retrouvons la formule démontrée précédemment qui donne la capacité d'un condensateur dont la distance des armatures est faible et constante.

En pratique, la distance des armatures d'un condensateur est toujours très faible devant les dimensions de celles-ci, et la formule $C = \varepsilon_0 \frac{S}{e}$ peut être systématiquement employée (S est l'aire d'une des surfaces en regard).

2.3. Condensateur plan. — *Un condensateur-plan est constitué par deux électrodes planes, parallèles, placées à une faible distance l'une de l'autre* (fig. XVII-6). Entre les

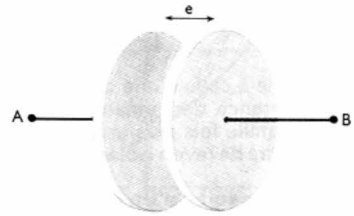


Fig. XVII-6
Condensateur plan

armatures le champ électrique est uniforme et égal à $\frac{V_A - V_B}{e}$ si V_A et V_B désignent les potentiels respectifs des bornes A et B et si e est l'écartement des deux électrodes.

Vers les extrémités, ce champ est légèrement différent (fig. XVII-7) mais la perturbation reste souvent négligeable. Les armatures délimitent une région intérieure indépendante de

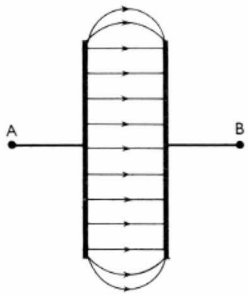


Fig. XVII-7
Lignes de champ dans un condensateur plan

l'extérieure, et bien qu'une des armatures ne soit pas complètement entourée par l'autre, les résultats obtenus précédemment sont applicables. La capacité C est encore donnée par la relation :

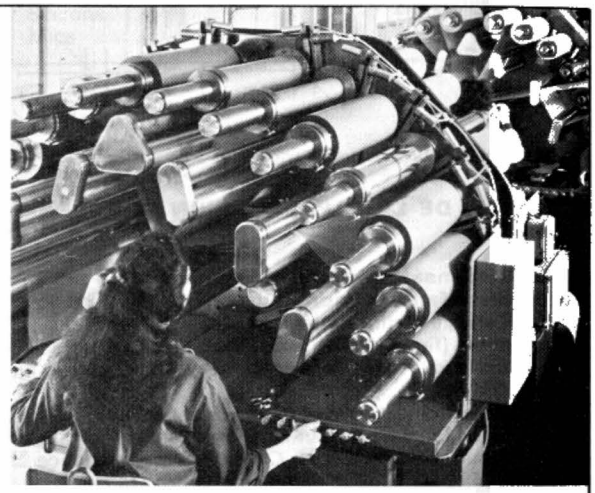
$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$$

S désigne l'aire d'une armature ou l'aire de la portion d'ar-

DIVERS TYPES DE CONDENSATEURS

Condensateurs à film plastique métallisé

Condensateur au papier



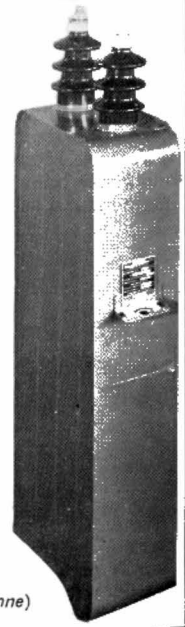
Fabrication de condensateurs (*Alsthom-Savoisienne*)

(*S.I.C.-S.A.F.C.O.*)

Condensateur électrochimique

Condensateur au papier Imprégnation au pyralène (*S.I.C.-S.A.F.C.O.*)

Condensateur électrochimique (*S.I.C.-S.A.F.C.O.*)



Condensateur au papier

(*Alsthom-Savoisienne*)

mature qui se trouve en face d'une partie de l'autre armature (fig. XVII-8).

Remarque : Dans le système international, la capacité d'un condensateur s'exprime en *farads* et le coefficient ε_0 a la même dimension que le quotient d'une capacité et d'une

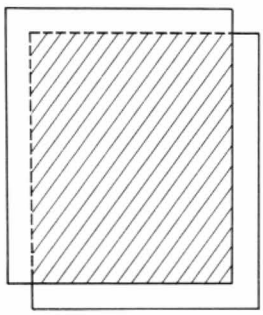


Fig. XVII-8
L'aire S à considérer correspond à la partie hachurée puisque les deux armatures sont décalées l'une par rapport à l'autre

longueur : $\varepsilon_0 = C\dfrac{e}{S}$. Dans le système international, il s'exprime donc en *farads par mètre* (symbole : F/m) :

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\,\pi}\,10^{-9}\ \text{F/m}$$

3. INFLUENCE DU DIÉLECTRIQUE D'UN CONDENSATEUR

Nous avons supposé jusqu'ici que les armatures du condensateur se trouvaient dans le vide. Si elles sont séparées par un isolant ou **diélectrique** la capacité peut être notablement augmentée. Si le diélectrique est homogène, la capacité est multipliée par un coefficient égal à la **permittivité relative** ε_r du diélectrique.

La capacité d'un condensateur dont la distance des armatures est faible devant leurs dimensions, est alors donnée par les formules suivantes :

$$C = \varepsilon_0\,\varepsilon_r\frac{S}{e} \quad \text{ou :} \quad C = \varepsilon\frac{S}{e}$$

puisque le produit $\varepsilon_0\,\varepsilon_r$ est égal à la permittivité absolue ε du diélectrique.

4. GROUPEMENTS DE CONDENSATEURS

4.1. Association en parallèle. — Toutes les armatures extérieures sont réunies à un point A porté au potentiel V_A, et toutes les armatures intérieures à un point B dont le potentiel est V_B (fig. XVII-9 et XVII-10). La charge totale portée par les armatures intérieures (qui forment un seul conducteur) est égale à la somme des charges de chacune des armatures intérieures. Il en est de même pour la charge totale portée par les armatures extérieures. Cette charge est égale à :

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots + Q_n = \sum_{j=1}^{j=n} Q_j$$
$$= C_1\,(V_A - V_B) + C_2\,(V_A - V_B)$$
$$+ \ldots + C_n\,(V_A - V_B) = (V_A - V_B)\sum_{j=1}^{j=n} C_j$$

L'ensemble présente donc une capacité C égale à :

$$C = C_1 + C_2 + \ldots + C_n$$

ou :

$$C = \sum_{j=1}^{j=n} C_j$$

Le système ainsi constitué est équivalent à un condensateur unique dont la capacité C est la somme des capacités C_j ($j = 1, 2, 3, \ldots, n$) de chaque condensateur.

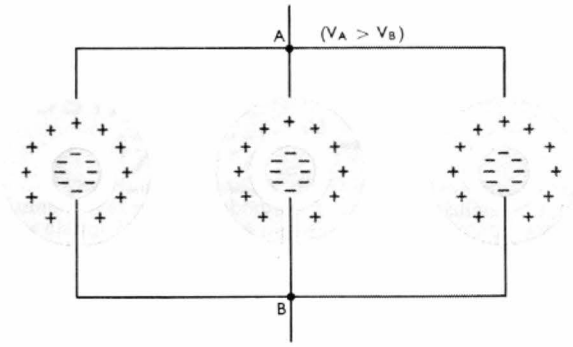


Fig. XVII-9 — Condensateurs en parallèle

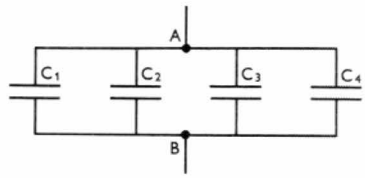


Fig. XVII-10

Condensateurs en parallèle (représentation symbolique)

4.2. Association en série. — L'armature intérieure d'un élément est reliée à l'armature extérieure du suivant (fig. XVII-11 et XVII-12). Soit A un point relié à l'armature extérieure du premier condensateur, et B un point relié à l'armature intérieure du dernier. Nous désignerons par C_1, C_2, . . . , C_n les capacités des divers condensateurs (3 seulement sont représentés sur les figures XVII-11 et XVII-12). Appliquons entre A et B une différence de potentiel U ; aux bornes de chaque condensateur, la d.d.p. est égale à U_j et nous avons la relation :

$$U = U_1 + U_2 + \ldots U_n = \sum_{j=1}^{j=n} U_j$$

L'armature extérieure du premier condensateur porte une charge Q et son armature intérieure une charge $-Q$:

$$Q = C_1U_1$$

L'ensemble formé par l'armature intérieure du premier condensateur et par l'armature extérieure du second constitue un conducteur isolé ; *sa charge totale ne varie pas.* Comme elle est nulle lorsque la d.d.p. entre A et B est nulle, nous pouvons dire que l'armature extérieure du second condensateur porte une charge égale à $+Q$ lorsque la tension U est appliquée. Le raisonnement précédent s'applique à

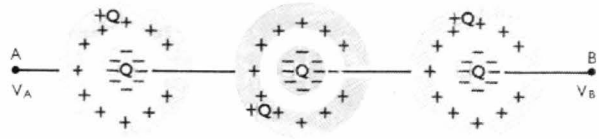


Fig. XVII-11 — Condensateurs en série ($V_A > V_B$)

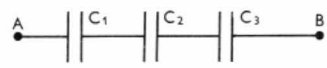


Fig. XVII-12

Condensateurs en série (représentation symbolique)

tous les autres condensateurs : nous voyons que chacun d'eux porte la même charge Q égale à :

$$Q = C_1U_1 = C_2U_2 = \ldots = C_nU_n$$

Le système formé par l'ensemble des condensateurs est donc équivalent à un condensateur unique qui porte la charge Q lorsqu'on soumet ses armatures à une différence

de potentiel U. La capacité $C = \frac{Q}{U}$ est donnée par les relations suivantes :

$$\frac{1}{C} = \frac{U}{Q} = \frac{\sum_{j=1}^{j=n} U_j}{Q} = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{U_j}{Q} = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{1}{C_j}$$

Nous pouvons aussi écrire :

$$\frac{1}{C} = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{1}{C_j}$$

L'inverse de la capacité totale est égale à la somme des inverses des capacités des divers condensateurs du montage.

5. RIGIDITÉ DIÉLECTRIQUE D'UN CONDENSATEUR

Si nous augmentons la différence de potentiel entre les deux armatures d'un condensateur, pour une certaine valeur, appelée **potentiel explosif,** il se produit une décharge électrique entre les deux armatures. Le potentiel explosif dépend de l'écartement des armatures, de leur forme et du diélectrique. Dans l'air sec, le potentiel explosif U_e entre armatures planes et parallèles est approximativement donné par la formule empirique suivante :

$$U_e = 2\,000 + 3\,000\ d$$

d, distance des armatures, est exprimée en millimètres et U_e en volts. Cette formule est applicable pour des distances comprises entre un millimètre et quelques dizaines de centimètres.

Les condensateurs portent en général l'indication de la tension limite d'utilisation. L'application d'une différence de potentiel supérieure à cette tension entraîne le perçage du diélectrique, c'est-à-dire la destruction du condensateur (appelée souvent : « claquage »).

6. PRINCIPAUX TYPES DE CONDENSATEURS USUELS

6.1. Bouteille de Leyde (fig. XVII-13). — Ce condensateur est un flacon de verre dont l'intérieur est rempli de papier d'étain ou d'aluminium, tandis que sur la surface extérieure est collée une feuille de même papier. Une tige métallique traverse un bouchon isolant et relie l'intérieur à l'une des bornes du condensateur.

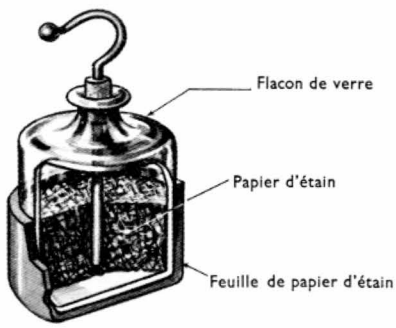


Fig. XVII-13

Ce condensateur a une capacité comprise entre cent et dix mille picofarads ; il est fragile et encombrant. Il n'est plus utilisé qu'en laboratoire ; il présente l'intérêt de supporter des tensions très élevées, pouvant atteindre plusieurs dizaines de kilovolts.

6.2. Condensateurs au mica. — Un condensateur au mica est formé d'un empilement de feuilles de mica très minces et argentées ; en reliant alternativement les couches d'argent à l'une ou à l'autre des bornes, nous obtenons un condensateur formé de plusieurs condensateurs élémentaires associés en parallèle (fig. XVII-14). L'écartement des armatures peut être faible mais une diminution d'épaisseur du diélectrique implique des tensions d'utilisation plus réduites.

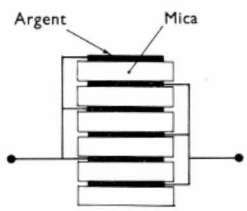


Fig. XVII-14

Condensateur au mica

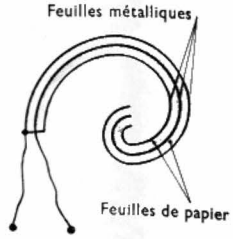


Fig. XVII-15

Condensateur au papier

6.3. Condensateurs au papier. — Les armatures sont des bandes d'étain, et le diélectrique du papier paraffiné ; l'ensemble est enroulé en spirale pour réduire l'encombrement (fig. XVII-15). Ce sont des condensateurs très économiques et peu encombrants utilisés en électronique, en téléphonie, en radio, etc.

6.4. Condensateurs variables. — Dans certains cas, en radio par exemple, il est nécessaire d'employer des condensateurs dont la capacité peut être réglée facilement. Ce résultat est obtenu en utilisant des condensateurs formés d'une série de lames parallèles fixes, toutes reliées entre elles, et une série de lames mobiles pouvant s'insérer entre les lames fixes (fix. XVII-16). La capacité est réglée en modifiant la pénétration des lames mobiles, c'est-à-dire en changeant la valeur de la surface utile des armatures. Parfois des lames de mica sont intercalées entre les lames métalliques pour accroître la capacité de l'ensemble. Celle-ci est en général variable entre une dizaine de picofarads lorsque les lames sont entièrement sorties et plusieurs centaines de picofarads lorsque les lames sont entièrement rentrées.

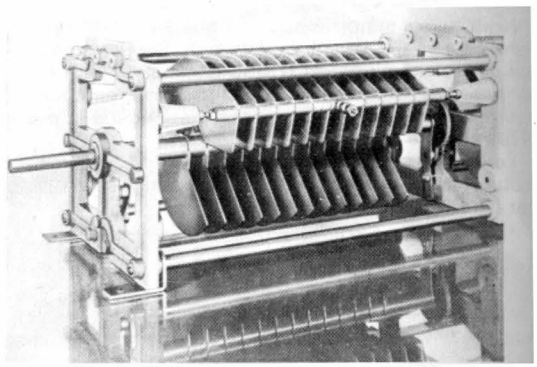


Fig. XVII-16 — Condensateur variable (*L.A.T.*)

6.5. Condensateurs électrochimiques. — Le diélectrique est formé par électrolyse. Une lame de plomb est reliée au pôle négatif d'un générateur électrique, et une lame d'aluminium au pôle positif ; entre ces deux lames se trouve un papier imprégné d'un sel oxacide (borate d'ammonium). Une électrolyse se produit et l'anode en aluminium est oxydée : elle se couvre d'une mince couche d'alumine isolante. L'ensemble constitue alors le condensateur ; le diélectrique a une épaisseur très faible et c'est pourquoi la capacité est grande : elle peut atteindre plusieurs milliers de microfarads, pour des tensions d'utilisation de quelques dizaines de volts. Ces condensateurs présentent le grand inconvénient d'être polarisés : *il faut toujours que le potentiel de l'armature d'aluminium (reliée à la borne — du condensateur) soit supérieur à celui de l'autre armature* sinon le condensateur peut être détérioré. Ce type de condensateur est en général utilisé dans les redresseurs comme condensateur de filtrage (V. t. 1, Électronique, chap. 18).

CHAPITRE XVIII

ÉNERGIE ÉLECTROSTATIQUE

1. ÉNERGIE ÉLECTROSTATIQUE D'UN SYSTÈME DE CHARGES

En un point M d'un champ électrostatique, introduisons une charge d'essai q. Nous appelons *énergie électrostatique de la charge* au point M, le travail qu'il faut fournir pour amener cette charge depuis l'infini jusqu'au point M. Si V est le potentiel électrostatique au point M et si le potentiel à l'infini est considéré comme nul, l'énergie W de la charge d'essai q est égale au produit de q et de V

$$W = q \,.\, V$$

Plus généralement, lorsque nous avons un système électrique quelconque, nous appelons *énergie électrostatique du système, le travail qu'il faut fournir pour réaliser la répartition de charges du système, les charges étant primitivement toutes à l'infini.*

2. ÉNERGIE ÉLECTROSTATIQUE D'UN CONDUCTEUR UNIQUE ISOLÉ DANS L'ESPACE

Considérons un conducteur de capacité C isolé et unique. Il porte une charge Q et son potentiel est $V = \dfrac{Q}{C}$. Le travail nécessaire pour que sa charge passe de Q à $(Q + dQ)$ est égal au travail qu'il faut fournir pour amener la charge dQ de l'infini (potentiel nul) jusqu'en un point dont le potentiel est V. Cette énergie est égale à $(V \,.\, dQ)$ ou encore à :

$$\frac{Q \,.\, dQ}{C}$$

Le travail total nécessaire pour que la charge varie d'une quantité Q_0 est obtenu par intégration mathématique. Il est égal à :

$$\int_0^{Q_0} \frac{Q \,.\, dQ}{C} = \frac{1}{2} \frac{{Q_0}^2}{C}$$

L'énergie d'un conducteur isolé et unique portant une charge Q_0 est donc égale à :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{{Q_0}^2}{C}$$

Évidemment, s'il porte une charge Q, l'énergie du conducteur devient :

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}}$$

Comme $Q = CV$, nous pouvons écrire aussi :

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2}$$

W est exprimé en joules, Q en coulombs, V en volts et C en farads.

3. ÉNERGIE D'UN SYSTÈME DE CONDUCTEURS

L'énergie d'un système de conducteurs en équilibre dont les charges respectives sont $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$ et les potentiels respectifs $V_1, V_2, \ldots, V_p$ est donnée par la formule

$$W = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n=p} Q_n \, V_n$$

W est exprimé en joules, Q en coulombs et V en volts.

Ce résultat est obtenu en raisonnant comme précédemment et en tenant compte des coefficients de capacité de chaque conducteur en présence des autres.

Cas particulier : **Énergie d'un condensateur.** — La formule précédente appliquée à un condensateur portant une charge Q, et soumis à une d.d.p. $U = (V_1 - V_2)$ s'écrit sous la forme suivante :

$$W = \frac{1}{2} (Q \,.\, V_1 - Q \,.\, V_2) = \frac{1}{2} Q \,.\, U$$

W représente l'énergie emmagasinée dans le condensateur. Comme $Q = C \,.\, U$, nous obtenons les relations suivantes :

$$\boxed{W = \frac{1}{2} Q \,.\, U = \frac{1}{2} C \,.\, U^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}}$$

L'énergie électrostatique d'un condensateur ne dépend donc que de la d.d.p. entre ses armatures. Cette énergie est restituée lors de la décharge du condensateur.

4. CALCUL DES FORCES S'EXERÇANT ENTRE DES CORPS CHARGÉS (MÉTHODE DES TRAVAUX VIRTUELS)

Lorsque l'énergie d'un conducteur est connue, il est possible de déterminer facilement la force et le moment du couple qui s'exerce sur lui.

4.1. Détermination de la force s'exerçant sur un conducteur chargé. — Considérons un conducteur chargé A, mobile dans un champ électrique mais ne pouvant effectuer qu'un mouvement de translation. La position de son centre M est définie au moyen des coordonnées (x, y, z). L'énergie de ce conducteur est :

$$W_{(x, y, z)} = W_{(M)} \quad \text{(fig. XVIII-1)}$$

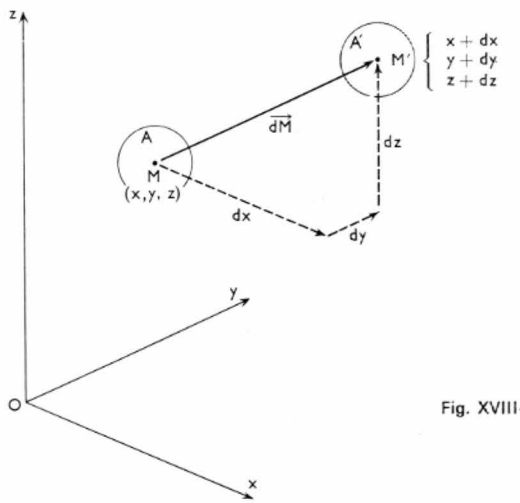


Fig. XVIII-1

Lors d'un petit déplacement défini par le vecteur $\overrightarrow{dM}$ (de composantes dx, dy, dz), l'énergie du système varie d'une quantité dW :

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz = \overrightarrow{dM} \,.\, \overrightarrow{\text{grad}}\, W(M)$$

Comme il faut fournir un travail égal à $(-\vec{F} \,.\, \overrightarrow{dM})$, cela signifie que ce conducteur est soumis à une force $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, W(M)$.

Les composantes de cette force suivant les trois directions $\vec{Ox}$, $\vec{Oy}$, $\vec{Oz}$ sont donc :

$$F_x = -\frac{\partial W}{\partial x}$$

$$F_y = -\frac{\partial W}{\partial y}$$

$$F_z = -\frac{\partial W}{\partial z}$$

4.2. Détermination du moment du couple s'exerçant sur un conducteur chargé. — De la même façon, nous pouvons calculer le moment du couple s'exerçant sur le conducteur considéré précédemment : supposons qu'il soit mobile autour d'un axe D passant par son centre de gravité, et repérons sa rotation autour de D au moyen d'un angle θ (fig. XVIII-2). Nous pouvons exprimer l'énergie électrostatique du système W en fonction de θ. Une petite rotation entraîne une variation $d\theta$ de l'angle θ tandis que l'énergie devient égale à $(W + dW)$. Or :

$$dW = \frac{dW}{d\theta}\, d\theta$$

Cela revient à dire qu'un *couple de moment* $T = -\dfrac{dW}{d\theta}$ s'exerce sur le conducteur.

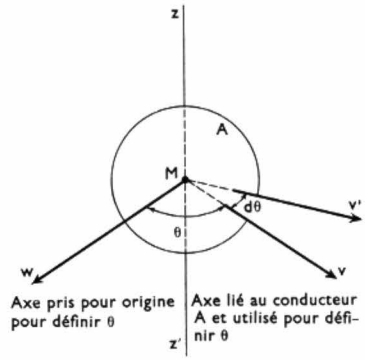


Fig. XVIII-2

Ces résultats sont très utilisés en électrométrie (V. chap. 21).

CHAPITRE XIX

ÉLECTROSTATIQUE ET ÉLECTROCINÉTIQUE DÉCHARGE D'UN CONDENSATEUR

1. DOMAINE D'APPLICATION DES LOIS DE L'ÉLECTROSTATIQUE ET DE L'ÉLECTROCINÉTIQUE

Dans les chapitres précédents, nous avons considéré soit des états d'équilibre, soit des régimes permanents : les phénomènes observés en électrostatique sont dus à la présence de charges électriques dans la matière et ceux étudiés en électrocinétique ont pour origine un déplacement de ces charges. Cependant, en électrostatique comme en électrocinétique, une charge électrique q qui passe d'un potentiel V_A à un potentiel V_B accomplit un travail $W = q.(V_A - V_B)$ qui représente le travail mécanique des forces électrostatiques s'exerçant sur la charge. Lorsque cette charge q (composée d'un certain nombre d'électrons) traverse une résistance R, le mouvement s'accomplit à une vitesse relativement faible (quelques millimètres par seconde) ; comme les électrons ont une masse très faible, leur énergie cinétique est négligeable et toute l'énergie résultant du travail des forces électrostatiques est transformée en chaleur par effet Joule. À l'échelle macroscopique, le phénomène est analogue à un frottement au cours duquel de l'énergie mécanique est transformée en chaleur.

Les lois de l'électrostatique ou de l'électrocinétique sont encore applicables lorsqu'il ne s'agit pas d'un état d'équilibre ou d'un régime permanent, c'est-à-dire lorsque les grandeurs considérées varient lentement. Il en est ainsi lorsque le rapport $\dfrac{l}{t}$ de la longueur l du circuit (longueur maximale) et de la durée minimale t pendant laquelle se produisent des variations non négligeables des grandeurs électriques (intensité, charge, potentiel, etc.) est très faible devant la vitesse de la lumière. Les états correspondants sont dits **quasi stationnaires.**

Dans la plupart des problèmes, ces approximations sont exactes mais il n'en est pas toujours ainsi : pour un réseau téléphonique, à l'échelle d'un pays, les dimensions maximales peuvent dépasser mille kilomètres. Les courants transportés ont souvent des fréquences supérieures à mille hertz (V. chap. 28), ce qui signifie qu'il y a des variations non négligeables de l'intensité du courant pendant des intervalles de temps d'une fraction de milliseconde. Le rapport distance-temps peut alors être plusieurs fois supérieur à la vitesse de la lumière et, dans un tel cas, les formules établies précédemment ne sont plus applicables. Par exemple, l'intensité du courant dans un circuit fermé, sans dérivation, n'est pas la même en tout point du circuit, à un instant donné.

2. EXEMPLES D'ÉTATS QUASI STATIONNAIRES

2.1. Décharge d'un condensateur. — Considérons un condensateur de capacité C chargé sous une tension U_0 : il porte donc une charge $Q_0 = CU_0$.

Réunissons ses deux armatures par l'intermédiaire d'une résistance R (fig. XIX-1) en fermant l'interrupteur K. Le condensateur se décharge : à travers la résistance R, passe un courant allant de l'armature positive vers l'armature négative de C.

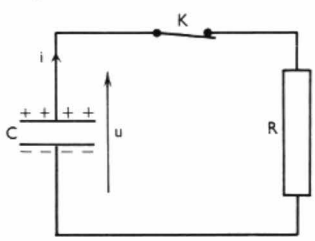


Fig. XIX-1
Décharge d'un condensateur

À l'instant t la d.d.p. entre les armatures du condensateur est égale à u et il porte une charge $q = Cu$. Le courant qui traverse la résistance a alors une intensité i donnée par l'égalité $i = \dfrac{u}{R}$ (loi d'Ohm). Or nous avons vu qu'en régime stationnaire l'intensité est égale à la quantité d'électricité qui traverse le circuit par unité de temps. Si la charge q décroît d'une quantité dq pendant un intervalle de temps dt, l'intensité i à l'instant t est donc égale à :

$$i = -\frac{dq}{dt} = -\frac{d(Cu)}{dt}$$

Nous pouvons donc écrire l'égalité suivante :

$$\frac{u}{R} = -C\frac{du}{dt}$$

ou :

$$\frac{du}{dt} = -\frac{u}{RC}$$

C'est une équation différentielle du premier ordre à

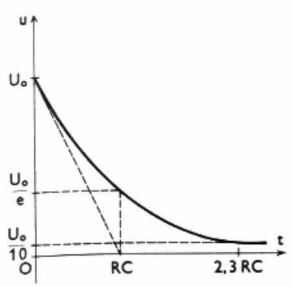


Fig. XIX-2

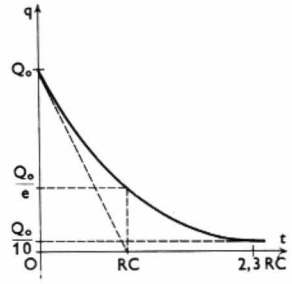


Fig. XIX-3

coefficients constants (V. t. 1, Mathématiques, chap. 22). Elle admet une solution de la forme :

$$u = U_0 \mathbf{e}^{-\frac{t}{RC}}$$

(puisque si $t = 0$, $u = U_0$). Comme $q = Cu$ et $Q_0 = CU_0$ nous avons aussi :

$$q = Q_0 \mathbf{e}^{-\frac{t}{RC}}$$

La décharge d'un condensateur à travers une résistance se fait suivant une fonction exponentielle du temps (fig. XIX-2 et XIX-3).

Le produit (RC) est appelé *constante de temps* du circuit. Il a même dimension qu'un intervalle de temps et s'exprime en secondes si R est exprimé en ohms et C en farads. Au cours de la décharge du condensateur, à l'instant où t est égal à (RC), la charge et le potentiel du condensateur sont divisés par le facteur **e** (**e**, base des logarithmes népériens, est égal à 2,718).

t	0	RC	2,3 RC	4,6 RC	6,9 RC
u	U_0	$\frac{U_0}{\mathbf{e}}$	$\frac{U_0}{10}$	$\frac{U_0}{100}$	$\frac{U_0}{1\,000}$
q	Q_0	$\frac{Q_0}{\mathbf{e}}$	$\frac{Q_0}{10}$	$\frac{Q_0}{100}$	$\frac{Q_0}{1\,000}$

2.2. Charge d'un condensateur. — Considérons un condensateur ne portant aucune charge et branchons-le, par l'intermédiaire d'une résistance, aux bornes d'un générateur électrique de force électromotrice E (fig. XIX-4). Appelons C la capacité du condensateur et R la résistance placée en série dans le circuit (nous négligeons la résistance intérieure de la pile). Nous prenons pour origine des temps le moment où nous fermons l'interrupteur K. À l'instant t, la d.d.p. aux bornes du condensateur est égale à u et il porte une charge q ($q = Cu$) ; l'intensité du courant dans le circuit est appelée i.

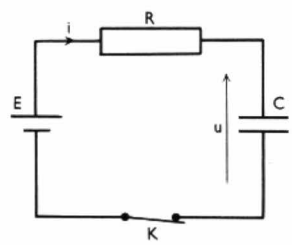


Fig. XIX-4

En appliquant la loi d'Ohm au circuit extérieur au condensateur nous obtenons la relation suivante :

$$u = E - Ri$$

Par ailleurs, entre les instants t et ($t + dt$) la charge du condensateur augmente de dq ; cela implique que l'intensité du courant est alors égale à :

$$i = +\frac{dq}{dt} = C\frac{du}{dt}$$

(le signe + résulte du fait que dq et i sont positifs en même temps). Ces deux égalités permettent d'écrire l'équation suivante :

$$u = E - RC\frac{du}{dt}$$

C'est une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants dont la solution est :

$$u = E\left(1 - \mathbf{e}^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

À l'instant $t = 0$, $u = 0$ car C n'est pas chargé (fig. XIX-5).

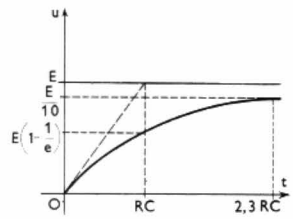


Fig. XIX-5

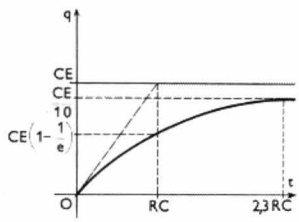


Fig. XIX-6

La *charge du condensateur* est égale à :

$$q = Cu = CE\left(1 - \mathbf{e}^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

Pour la charge, la constante de temps est encore RC, comme pour la décharge (fig. XIX-6).

La charge maximale que peut prendre le condensateur, lorsqu'il est alimenté par un générateur de force électromotrice E, est égale à (CE). Au bout d'un temps égal à 2,3 RC, la charge du condensateur est la fraction 9/10 de sa valeur maximale.

t	0	RC	2,3 RC	4,6 RC	6,9 RC
u	0	$E\left(1-\frac{1}{\mathbf{e}}\right)$	$\frac{9}{10}E$	$\frac{99}{100}E$	$\frac{999}{1\,000}E$
q	0	$CE\left(1-\frac{1}{\mathbf{e}}\right)$	$\frac{9}{10}CE$	$\frac{99}{100}CE$	$\frac{999}{1\,000}CE$

Un condensateur apparaît comme un appareil qui, lorsqu'il se charge, transforme de l'énergie électrique en énergie électrostatique et accomplit la transformation inverse pendant la décharge. Il ressemble en cela à un accumulateur. Cependant la tension aux bornes d'un accumulateur est pratiquement constante pendant la charge et la décharge, tandis que celle aux bornes d'un condensateur est proportionnelle à la charge du condensateur.

CHAPITRE XX

GÉNÉRATEURS ÉLECTROSTATIQUES

1. PRINCIPE

Un générateur électrostatique est utilisé pour produire des charges électriques, donc de l'énergie électrique, le plus souvent à partir d'énergie mécanique. Ces machines fournissent de l'électricité sous des tensions élevées (pouvant atteindre plusieurs dizaines de millions de volts), mais elles ne peuvent débiter que des courants extrêmement faibles dont les intensités ne dépassent pas quelques milliampères. Pratiquement, dans tous ces générateurs,

c'est le phénomène d'influence qui est mis en œuvre pour charger un corps qui est ensuite déplacé : c'est le *transporteur*. Ainsi, à l'origine, le transporteur emmagasine une charge Q sous un potentiel V ; dans ces conditions sa capacité est égale à $C = \frac{Q}{V}$; ensuite la position d'une armature est modifiée pour diminuer C en conservant Q constant, et cela entraîne une augmentation du potentiel du corps.

Ces générateurs ont de nombreuses utilisations dans les domaines particuliers où l'on désire de très faibles courants sous des tensions élevées : recherche nucléaire, dépoussiérage électrostatique, etc.

2. DIFFÉRENTS GÉNÉRATEURS ÉLECTROSTATIQUES

2.1. L'électrophore. — L'*électrophore* est le générateur électrostatique le plus élémentaire fonctionnant suivant ce principe. Il comporte un disque de résine, placé dans un récipient métallique, et un plateau métallique P (fig. XX-1). Le disque isolant est chargé négativement par frottement, et ensuite par influence il permet d'obtenir des charges positives sur P. À l'origine le potentiel de P est nul car, d'une part, il touche l'enveloppe métallique contenant le diélectrique et, d'autre part, cette enveloppe est reliée à la terre. Lorsque P est éloigné, sa capacité diminue et ainsi, sous une tension élevée, il permet d'apporter une certaine quantité d'électricité à un corps quelconque.

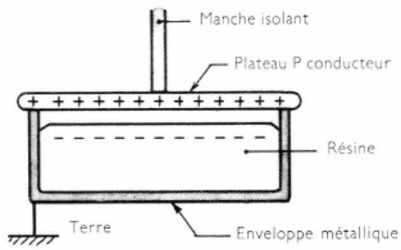


Fig. XX-1
Électrophore

2.2. Machine de Wimshurst. — Dans toutes les machines électrostatiques à influence nous retrouvons les mêmes éléments, c'est-à-dire un générateur de charges électriques, un transporteur, et un dispositif collecteur (sphères ou boules conductrices).

Dans la *machine de Wimshurst*, deux disques en verre, de mêmes dimensions et portant des secteurs métallisés, tournent en sens contraire en passant sous des balais portés par deux conducteurs C_1 et C_2 (fig. XX-2). Chacun de ceux-ci porte des charges positives à une extrémité, négatives à l'autre, et produit l'électrisation des secteurs métallisés du disque, les transporteurs, qui défilent sous lui. Ces derniers sont ensuite déchargés lorsqu'ils passent devant des peignes mettant en application le pouvoir des pointes (V. ci-dessus) et reliés à deux boules collectrices. Le fonctionnement de la machine dépend notamment des charges se trouvant sur les conducteurs C_1 et C_2. Celles-ci sont développées par influence entre un conducteur et le disque sur lequel il ne frotte pas, et à l'origine ce sont les frottements des balais sur les disques qui assurent l'amorçage.

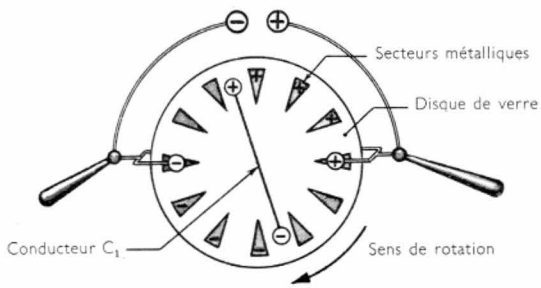


Fig. XX-2 a — Fonctionnement de la machine de Wimshurst

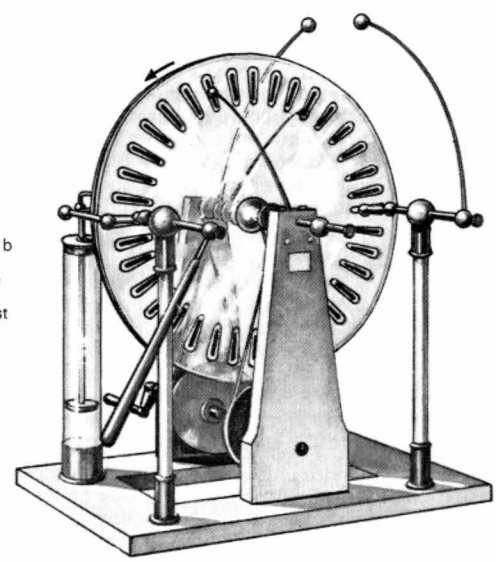


Fig. XX-2 b
Machine de Wimshurst

2.3. Machine de Van de Graaf. — C'est également une machine électrostatique à influence. Dans ce cas, le transporteur est une courroie isolante. Elle se charge en passant devant un peigne porté à un potentiel de plusieurs milliers de volts par un générateur auxiliaire (fig. XX-3). Des charges apparaissent sur les surfaces interne et externe de la sphère car il y a influence. Un autre peigne, solidaire de la sphère conductrice, permet de neutraliser les charges réparties sur la courroie. Il est ainsi possible d'obtenir une énergie électrique très grande sous des tensions de plusieurs dizaines de millions de volts (V. t. 1, Physique nucléaire, chap. 3).

2.4. Autres machines électrostatiques. — Dans d'autres machines électrostatiques plus perfectionnées, on emploie un transporteur métallique constitué par exemple par de nombreux secteurs métalliques placés sur un cylindre en matière isolante, dont l'axe se confond avec celui de la rotation. Des balais permettent de réunir ces transporteurs à la terre lorsqu'ils se chargent, et au circuit collecteur lors de leur décharge. Pour atteindre des potentiels très élevés, l'usage des pointes est proscrit et le diélectrique séparant les diverses parties doit être homogène. Pour ne pas gêner le mouvement on emploie de l'air ou un gaz sous pression. Ainsi le rendement de ces générateurs électrostatiques peut atteindre 80 % contre 20 % avec une machine de Wimshurst.

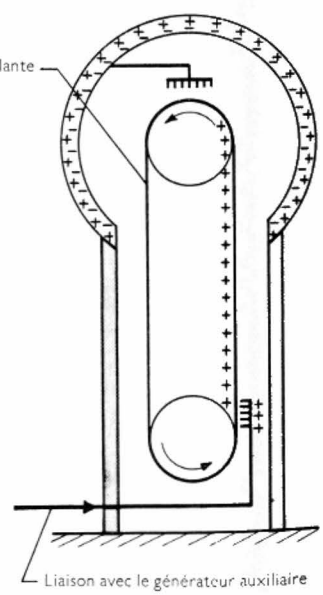


Fig. XX-3
Machine de Van de Graaf

CHAPITRE XXI

ÉLECTROMÉTRIE

1. PRINCIPE

L'électrométrie regroupe tout ce qui concerne la mesure des potentiels et des quantités d'électricité. Pour effectuer ces mesures, on utilise des *électromètres*, appareils dont le principe repose sur les propriétés d'un condensateur déformable.

Les électromètres sont surtout employés pour mesurer des d.d.p. Lorsqu'un condensateur est chargé sous une tension donnée, les armatures s'attirent et, si l'une d'elles est mobile, elle se déplace. Selon que les liaisons mécaniques permettent une translation ou une rotation, nous pouvons mesurer la force d'attraction ou le moment du couple moteur et de leur valeur nous déduisons facilement la d.d.p. appliquée. En effet, sachant que l'énergie possédée par un condensateur est égale à : $W = \frac{1}{2} C U^2$ et que la tension U est constante, la force $\vec{F}$ appliquée sur une armature se déplaçant d'une longueur dx dans le sens de cette force a une intensité égale à :

$$F = \left| \frac{dW}{dx} \right| = \frac{1}{2} U^2 \left| \frac{dC}{dx} \right|$$

tandis que le moment du couple moteur s'exerçant sur une armature pivotant d'un angle $d\alpha$ autour d'un axe est égal à :

$$T = \left| \frac{dW}{d\alpha} \right| = \frac{1}{2} U^2 \left| \frac{dC}{d\alpha} \right| .$$

(V. chap. 18, § 4).

Ainsi la détermination de F ou de T permet bien d'atteindre le résultat désiré si les fonctions $\frac{dC}{dx}$ ou $\frac{dC}{d\alpha}$ sont connues.

2. ÉLECTROMÈTRE ABSOLU

Dans l'*électromètre absolu* ou *électromètre balance* (ou d'*Abraham*), une armature d'un condensateur plan est fixée à une extrémité du fléau d'une balance (fig. XXI-1).

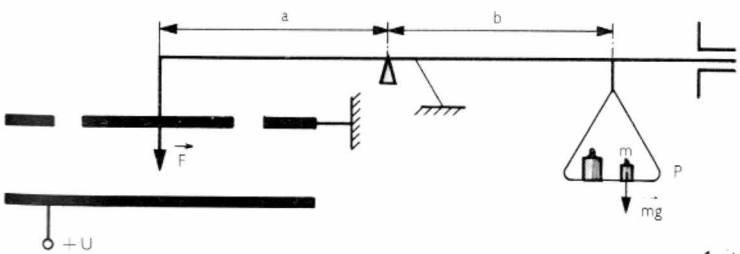


Fig. XXI-1 — Électromètre absolu

Une tare, placée dans un plateau P disposé à l'autre extrémité de ce fléau, permet de maintenir celui-ci horizontal lorsque le condensateur n'est pas chargé. Si une tension est appliquée entre les deux armatures, une force $\vec{F}$, dirigée vers le bas, s'exerce sur la plaque mobile et pour maintenir l'équilibre il faut ajouter une surcharge de masse m dans le plateau P. Avec les notations de la figure, nous pouvons écrire que l'intensité de la force $\vec{F}$ est égale au produit $\left(mg\frac{b}{a}\right)$ et la tension U est donnée par la relation suivante :

$$U^2 = \frac{2\,e^2}{\varepsilon_0 S} \cdot \frac{b}{a} \cdot mg$$

Cette expression montre que la surcharge m est proportionnelle au carré de la tension U. L'appareil est surtout intéressant pour les mesures de potentiels élevés (pouvant atteindre plusieurs centaines de kilovolts).

Dans l'*électromètre de Kelvin* la force antagoniste n'est pas obtenue à l'aide de masses marquées, mais résulte de la déformation de ressorts.

3. ÉLECTROMÈTRE À QUADRANTS

L'*électromètre à quadrants* comporte deux paires de quadrants, séparées par des rainures étroites et formant une cavité cylindrique (fig. XXI-2). Dans celle-ci une

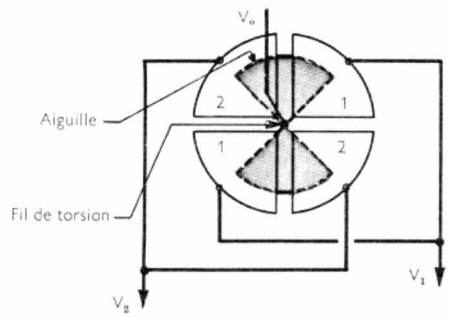


Fig. XXI-2 — Électromètre à quadrants

armature mobile, l'aiguille, peut pivoter. Elle est suspendue à un fil de torsion qui oppose un couple résistant de moment proportionnel à l'angle dont a tourné la partie mobile. Si une paire de quadrants est portée au potentiel V_1, l'autre au potentiel V_2 et l'aiguille au potentiel V_0, celle-ci prend une position d'équilibre définie par l'angle θ dont elle a pivoté en partant de sa position de repos. Elle se trouve alors soumise à un couple de moment proportionnel à θ et à deux couples antagonistes l'un par rapport à l'autre, le premier proportionnel à $(V_0 - V_1)^2$ et le deuxième à $(V_2 - V_0)^2$. L'équation d'équilibre prend donc la forme suivante :

$$\theta = K\,[\,(V_0 - V_1)^2 - (V_2 - V_0)^2\,]$$

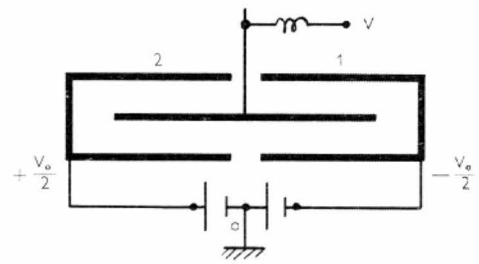


Fig. XXI-3 — Montage hétérostatique

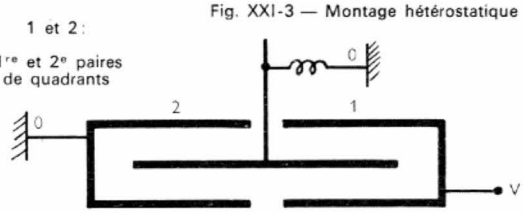


Fig. XXI-4 — Montage idiostatique

Dans un *montage hétérostatique* (fig. XXI-3), la première paire de quadrants est portée au potentiel $+\frac{V_0}{2}$, la deuxième à un potentiel $-\frac{V_0}{2}$, et l'aiguille au potentiel V à mesurer. Dans ces conditions, le potentiel V est proportionnel à θ.

Dans le *montage idiostatique* (fig. XXI-4), la première

paire de quadrants est portée au potentiel V inconnu, la deuxième et l'aiguille à un potentiel nul. L'angle θ est alors proportionnel au carré de la tension V. Ce montage ne présente de l'intérêt que pour la mesure des tensions élevées.

Remarque : Les électromètres à quadrants rendent possible la mesure des quantités d'électricité ; il faut alors réunir un quadrant à un cylindre de Faraday dans lequel la charge à déterminer est introduite. La deuxième paire de quadrants étant portée à un potentiel nul et l'aiguille à un potentiel V donné, le potentiel de la première paire est proportionnel à la charge apportée et de la mesure du premier nous pouvons déduire cette dernière.

ÉLECTROMAGNÉTISME

CHAPITRE XXII

FORMULE D'AMPÈRE

L'électromagnétisme est la partie de l'électricité où sont étudiées les forces qui s'exercent sur des circuits électriques parcourus par des courants et placés dans des champs magnétiques. Ces derniers peuvent être produits par des aimants (V. t. 1, Magnétisme, chap. 1), ou par d'autres circuits électriques. L'étude de l'induction électromagnétique, qui est à l'origine de la production de forces électromotrices (f.é.m. induites) et de courants (courants induits) dans des circuits électriques placés dans des champs magnétiques variables, fait également partie de l'électromagnétisme.

1. FORMULE D'AMPÈRE

Considérons deux circuits linéaires C et C' parcourus par des courants constants d'intensités respectives I et I' (fig. XXII-1) et désignons par $\overrightarrow{dl}$ un élément de C de longueur dl, placé en un point M et par $\overrightarrow{dl'}$ un élément de C' de longueur dl' placé en un point M'.

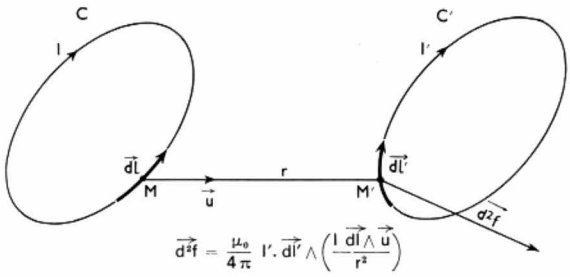


Fig. XXII-1 — Formule d'Ampère

La force $\overrightarrow{d^2f}$ qui s'exerce sur $\overrightarrow{dl'}$ est donnée par la relation suivante :

$$\overrightarrow{d^2f} = \frac{\mu_0}{4\pi} I' . \overrightarrow{dl'} \wedge \left(\frac{I \overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{u}}{r^2} \right) \quad \text{(formule d'Ampère)}$$

μ_0 étant un coefficient égal à $4\pi . 10^{-7}$ henry par mètre dans le système international (perméabilité magnétique du vide) ; r est la distance MM' et $\overrightarrow{u}$ est le vecteur unitaire de la droite MM' orientée de M vers M' $\left(\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{MM'} \right)$.

Cette force $\overrightarrow{d^2f}$ n'a en fait aucune signification physique. En particulier, si nous changeons le rôle des deux courants et si nous calculons la force qui s'exercerait sur $\overrightarrow{dl'}$, nous trouvons qu'elle n'est pas égale et opposée à la précédente. Le principe de l'égalité de l'action et de la réaction est donc mis en défaut lorsque nous appliquons la formule d'Ampère. En réalité il est impossible de créer physiquement un courant I dans un élément dl isolé et seule l'action du circuit C tout entier sur le circuit C' tout entier a une réalité physique. *La formule d'Ampère est un simple artifice de calcul.* Son emploi se justifie car tous les résultats qu'elle permet d'obtenir par intégration (M et M' parcourant respectivement C et C') sont exactement confirmés par l'expérience.

2. LOI DE BIOT ET LAPLACE. LOI DE LAPLACE

La formule d'Ampère peut se séparer en deux formules. En effet, posons :

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{u}}{r^2}$$

alors il vient :

$$\overrightarrow{d^2f} = I' \overrightarrow{dl'} \wedge \overrightarrow{dB}$$

La première formule traduit la *loi de Biot et Laplace* et la seconde, la *loi de Laplace*.

De même que la formule d'Ampère, la loi de Biot et Laplace n'a aucune signification physique réelle. En revanche en l'intégrant mathématiquement lorsque M parcourt le circuit C, nous obtenons un vecteur $\overrightarrow{B}$ donné par la formule suivante :

$$\overrightarrow{B} = \int_C \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{u}}{r^2}$$

$\overrightarrow{B}$ a une signification physique précise : c'est l'**induction magnétique au point *M'*** (V. t. 1, Magnétisme, chap. 1) produite par le passage du courant dans C.

CHAPITRE XXIII

LOI DE BIOT ET LAPLACE
EXEMPLES DE CHAMPS MAGNÉTIQUES

1. LOI DE BIOT ET LAPLACE

La loi de Biot et Laplace se traduit par la formule mathématique suivante :

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{u}}{r^2}$$

Elle signifie que l'induction magnétique élémentaire produite en un point P par l'élément de courant $I . \overrightarrow{dl}$ placé en M est représentée par un vecteur $\overrightarrow{dB}$ (fig. XXIII-1) :

— son *support* est perpendiculaire au plan contenant $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{dl}$;

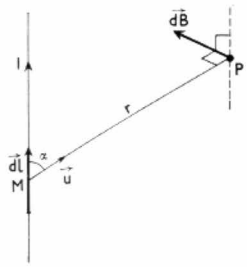


Fig. XXIII-1

Loi de Biot et Laplace

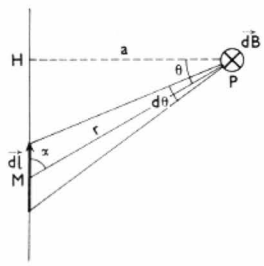


Fig. XXIII-2

Détermination du vecteur $\overrightarrow{dB}$

— son *sens* est tel que le trièdre $(\overrightarrow{dl}, \overrightarrow{MP}, \overrightarrow{dB})$ soit direct. Il est également donné par la règle de l'observateur d'Ampère (ou bonhomme d'Ampère) : un observateur porté par le conducteur et regardant le point *P*, et placé de façon que le courant entre par ses pieds et sorte par sa tête, voit le vecteur $\overrightarrow{B}$ orienté vers sa gauche ;
— son *module* est égal à

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\, dl \sin \alpha}{r^2}$$

Ce module peut s'écrire encore sous une autre forme car si *H* est la projection de *P* sur le conducteur (fig. XXIII-2)

$$HM = l = a \operatorname{tg} \theta$$

$$\text{et : } dl = \frac{a\, d\theta}{\cos^2 \theta}$$

de plus : $r \cos \theta = a$ et : $r \sin \alpha = a$

D'où : $dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\sin \alpha}{r^2} \frac{a\, d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\cos \theta}{a} d\theta$

Remarque : Rappelons à ce propos qu'un vecteur perpendiculaire au plan de la figure est représenté par un petit cercle dont le centre porte un *point* si le vecteur est orienté vers l'observateur (fig. XXIII-3) ou une *croix* si le vecteur est orienté en sens inverse (fig. XXIII-4).

Fig. XXIII-3 — Vecteur perpendiculaire au plan de la figure et orienté vers l'observateur

Fig. XXIII-4 — Vecteur perpendiculaire au plan de la figure et s'éloignant de l'observateur

2. INDUCTION MAGNÉTIQUE DUE À UN FIL RECTILIGNE INDÉFINI (Loi de Biot et Savart)

Considérons un fil rectiligne indéfini parcouru par un courant constant I et calculons le vecteur induction magnétique en un point *P* placé à une distance *a* du fil. Ce vecteur est obtenu en faisant la somme des vecteurs élémentaires $\overrightarrow{dB}$ dus à chacun des éléments $\overrightarrow{dl}$ que nous pouvons définir sur le conducteur. Les vecteurs $\overrightarrow{dB}$ sont tous perpendiculaires au plan contenant *P* et le fil conducteur ; les trièdres $(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{HP}, \overrightarrow{dB})$ sont directs (fig. XXIII-5) ; $(\overrightarrow{k}$ est un vecteur unitaire parallèle au fil et orienté dans le sens de passage du courant). Il en est de même de $\overrightarrow{B}$ et la somme de ces vecteurs $\overrightarrow{dB}$ se ramène à une intégration mathématique de la fonction donnée par la loi de Biot et Laplace :

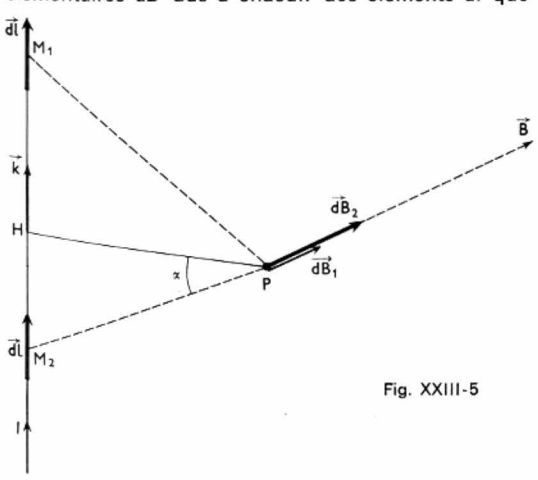


Fig. XXIII-5

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\cos \theta}{a} d\theta$$

Le module de B est obtenu en intégrant cette fonction lorsque θ varie de $-\pi/2$ à $\pi/2$ rad (M décrit ainsi tout le conducteur)

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \theta\, d\theta$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}} \quad \text{(Loi de Biot et Savart)}$$

En tous les points situés à une distance *a* du conducteur l'induction $\overrightarrow{B}$ a le même module.

Les lignes d'induction sont donc des cercles dont l'axe est le fil conducteur (fig. XXIII-6). Le sens de l'induction

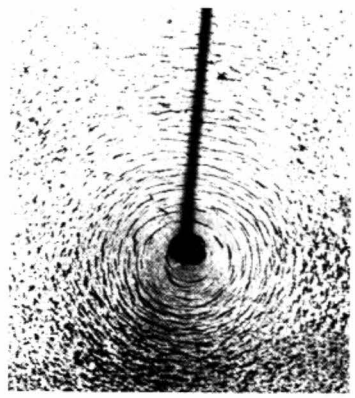


Fig. XXIII-6

Spectre du champ magnétique produit par un courant traversant un conducteur rectiligne

(*Palais de la Découverte*)

magnétique peut être trouvé en traçant un trièdre $(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{HP}, \overrightarrow{B})$ direct ou à l'aide des règles suivantes :
— *règle du bonhomme d'Ampère* (fig. XXIII-7) ; voir ci-dessus ;
— *règle du tire-bouchon de Maxwell :* un tire-bouchon avance le long du fil conducteur, dans le sens du courant (fig. XXIII-7), si nous le faisons tourner dans le sens du vecteur induction magnétique.

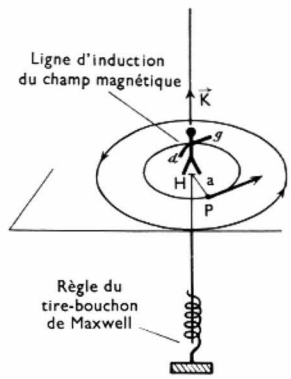


Fig. XXIII-7

Règle de l'observateur d'Ampère (celui-ci regarde le point P)

3. INDUCTION MAGNÉTIQUE EN UN POINT DE L'AXE D'UNE SPIRE CIRCULAIRE

Considérons une spire de rayon *R* (fig. XXIII-8) et calculons l'induction en un point *P* de l'axe de la spire, situé à une distance *x* du centre *O* de la spire. Si *M* est un

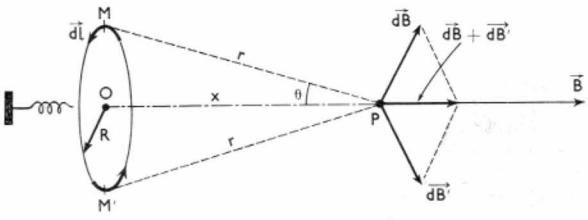


Fig. XXIII-8 — Induction magnétique sur l'axe d'une spire

point de la spire, la distance PM est égale à $r = \sqrt{x^2 + R^2}$. L'élément de courant $I.\overrightarrow{dl}$ (au point M) produit en P une induction magnétique $\overrightarrow{dB}$. Un élément $I.\overrightarrow{dl}$ placé en M' diamétralement opposé au premier, produit une induction $\overrightarrow{dB'}$, symétrique de $\overrightarrow{dB}$ par rapport à l'axe de la spire. La résultante de ces deux vecteurs est dirigée selon cet axe. Nous pouvons raisonner de la même façon pour tous les éléments de courant qui peuvent être définis sur une même moitié de la spire. Pour calculer $\overrightarrow{B}$, il suffit donc d'intégrer mathématiquement la fonction donnant la composante du vecteur $\overrightarrow{dB}$ sur l'axe de la spire (nous l'appellerons dB_x)

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\overrightarrow{dl}}{r^2}$$

(en effet $\overrightarrow{dl}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont perpendiculaires)

$$dB_x = dB\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = dB\sin\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\sin^3\theta}{R^2}\,dl$$

(car $r\sin\theta = R$)

D'où nous tirons :

$$B = \int_0^{2\pi R} \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\sin^3\theta}{R^2}\,dl = \frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3\theta = \frac{\mu_0 I}{2R}\frac{R^3}{\left(\sqrt{R^2+x^2}\right)^3}$$

Au centre de la spire, cette induction est égale à :

$$\boxed{B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}}$$

Le sens de l'induction peut toujours être trouvé par application de la règle de l'observateur d'Ampère ou à l'aide de la règle du tire-bouchon de Maxwell : un tire-bouchon porté par l'axe et tournant dans le sens du courant s'enfonce dans le sens de l'induction magnétique. Le spectre magnétique d'un tel champ est représenté sur la figure XXIII-9.

Remarque : L'induction en un point de l'axe a un module qui peut se mettre sous la forme suivante :

$$B = B_0\sin^3\theta = B_0\frac{R^3}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

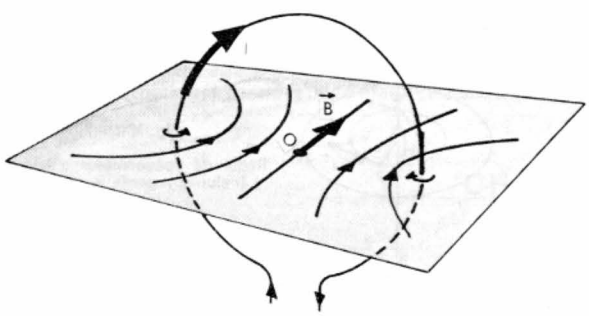


Fig. XXIII-9 — Champ magnétique produit par un courant circulant dans une spire

4. INDUCTION MAGNÉTIQUE PRODUITE AU MOYEN D'UNE BOBINE CIRCULAIRE PLATE

Une bobine circulaire plate est une bobine composée de N spires qui peuvent être considérées, en première approximation, comme étant dans le même plan, de même centre et de même rayon. L'épaisseur d'une bobine plate est négligeable devant le diamètre moyen des spires. L'induction magnétique est alors la somme des inductions produites par chacune des spires. Au centre de la spire elle est donc égale à :

$$\boxed{B_0 = \frac{\mu_0 NI}{2R}}$$

et en un point quelconque de l'axe son intensité devient :

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2R}\sin^3\theta = B_0\frac{R^3}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

R, θ, x ayant les mêmes significations que dans le cas d'une seule spire.

Application : **Bobines de Helmholtz.** Il s'agit d'un ensemble de deux bobines plates identiques, de même rayon, de même axe et associées de façon qu'elles soient parcourues par le même courant et dans le même sens. Elles permettent d'obtenir une induction magnétique sensiblement uniforme dans une petite région de l'espace.

Appelons B_0 l'induction au centre de l'une des bobines considérées isolément, R le rayon commun des bobines, $2d$ la distance entre leurs centres (fig. XXIII-10).

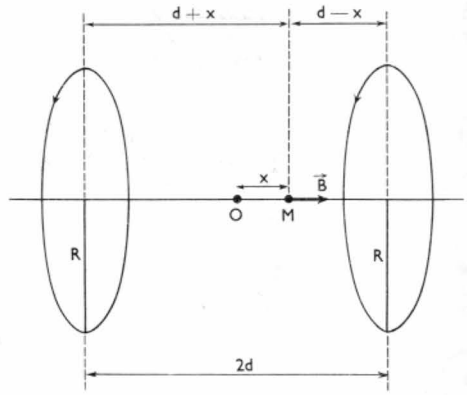


Fig. XXIII-10
Bobines de Helmholtz

L'induction en un point M de l'axe des deux bobines, situé à une distance x du milieu de la distance séparant les centres des deux bobines est égale à la somme des inductions produites par les deux bobines. Son module est donné par la relation suivante (les deux inductions ont le même sens) :

$$B = B_0\left(\frac{R^3}{[R^2+(x+d)^2]^{3/2}} + \frac{R^3}{[R^2+(x-d)^2]^{3/2}}\right)$$

Lorsque d est égal à $R/2$, pour $x = 0$, les dérivées première, seconde et troisième de B par rapport à x sont nulles. Au voisinage du milieu des deux bobines, B est donc égal à sa valeur en O, cela à un infiniment petit du quatrième ordre près. Autrement dit, si nous plaçons deux bobines plates et identiques de façon qu'elles aient le même axe et qu'elles soient séparées par une distance égale à leur rayon commun, au voisinage du milieu des deux bobines, l'induction est pratiquement constante.

Ce dispositif est utilisé en laboratoire pour obtenir une induction constante dans une petite région de l'espace et il est préféré à un solénoïde très long (V. ci-après, § 5) ; l'induction est constante dans tout l'intérieur du solénoïde mais les bobines de Helmholtz permettent des manipulations beaucoup plus aisées.

5. INDUCTION MAGNÉTIQUE DUE À UN SOLÉNOÏDE

Un solénoïde est un conducteur enroulé suivant une hélice. En général, les spires sont jointives et le pas de l'hélice est toujours très faible devant les dimensions du solénoïde. En première approximation, cet appareil est assimilable à un ensemble de spires parallèles placées les unes à côté des autres (en une ou plusieurs couches).

Nous allons calculer l'induction en un point *P* de l'axe d'un solénoïde comportant *n spires par unité de longueur.* Déterminons préalablement l'induction en un point *P*, due

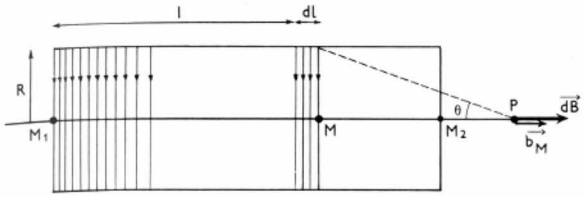


Fig. XXIII-11 — Induction magnétique d'un solénoïde

à la spire centrée en *M* (fig. XXIII-11). Elle est dirigée selon l'axe du solénoïde et son module est :

$$b_M = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3\theta$$

Un élément de solénoïde de longueur *dl* comprend (*n*.*dl*) spires et il produit une induction magnétique de module égal à :

$$dB = ndl\frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3\theta$$

Considérons que le point *M* se déplace de M_1 à M_2 (fig. XXIII-12). L'angle θ croît donc de θ_1 à θ_2 lorsque

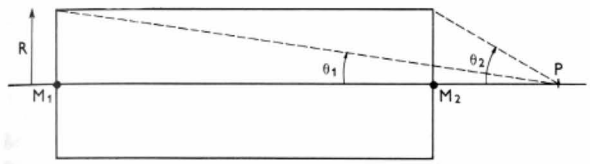


Fig. XXIII-12

$l = \overline{M_1M}$ augmente (*dl* et $d\theta$ sont donc de même signe). Comme $PM = R \operatorname{cotg} \theta$ nous avons :

$$dl = -d(PM) = -d(R \operatorname{cotg} \theta) = \frac{R\,d\theta}{\sin^2\theta}$$

Donc : $$dB = \frac{\mu_0 n I}{2} \sin\theta\, d\theta$$

L'induction totale produite par le solénoïde en *P* est obtenue en intégrant mathématiquement ce résultat. Le module de l'induction totale est donc :

$$B = \int_{\theta_1}^{\theta_2} dB = \frac{\mu_0 nI}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta\, d\theta = \frac{\mu_0 nI}{2} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

Appelons Ω l'angle solide sous lequel le solénoïde est vu depuis le point *P*. L'angle solide compris dans un cône de demi-angle au sommet θ est égal à $2\pi(1 - \cos\theta)$; l'angle solide sous lequel le solénoïde est vu de *P* est la différence des angles solides de deux cônes dont les demi-angles au sommet sont respectivement θ_1 et θ_2 (V. t. 1, Mathématiques, chap. 21).

$$\Omega = [2\pi(1 - \cos\theta_2) - 2\pi(1 - \cos\theta_1)]$$
$$= 2\pi(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

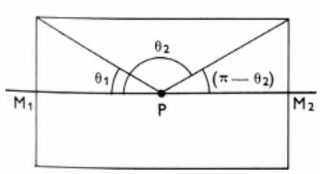


Fig. XXIII-13

Point à l'intérieur du solénoïde

$B = \mu_0 nI \left(\frac{\cos\theta_1 + \cos\theta_2}{2}\right)$

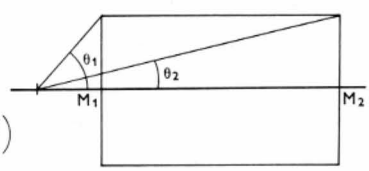


Fig. XXIII-14

Point à l'extérieur du solénoïde

$B = \mu_0 nI \left(\frac{\cos\theta_1 - \cos\theta_2}{2}\right)$

Le module de *B* peut donc s'écrire :

$$B = \mu_0 nI \frac{\Omega}{4\pi}$$

Au centre du solénoïde $\theta_1 = \pi - \theta_2$ et $\cos\theta_1 = -\cos\theta_2$.

D'où : $$\boxed{B = \mu_0 nI \cos\theta_1}$$

Dans le cas particulier d'un solénoïde très allongé, l'angle θ_1 est sensiblement nul et le cosinus de cet angle est pratiquement égal à 1. Nous avons alors :

$$\boxed{B = \mu_0 nI}$$

Pour un solénoïde de longueur *l*, qui comporte *N* spires, cette relation peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I$$

Ce résultat est encore vrai en tout point intérieur au solénoïde et suffisamment éloigné des extrémités.

Le spectre du champ magnétique confirme ce résultat (fig. XXIII-15). *À l'intérieur du solénoïde, l'induction peut être considérée comme uniforme puisque les lignes d'induction sont sensiblement parallèles à l'axe du solénoïde.*

Les spectres magnétiques obtenus dans les champs magnétiques produits par des bobines présentent de grandes ressemblances avec ceux obtenus dans les champs des aimants droits ; nous sommes conduits à distinguer les extrémités des bobines et à appeler *face Nord* celle par où sortent les lignes d'induction, et *face Sud* l'autre. L'observateur d'Ampère permet de les déterminer sans difficulté. Nous pouvons utiliser aussi la *règle du tire-bouchon de Maxwell :* un tire-bouchon, placé normalement au plan des spires et tournant dans le sens du courant, entre par la face Sud de la bobine.

Remarque : Dans toutes les formules données les grandeurs doivent être exprimées avec les unités du système SI : inductions en teslas, intensités des courants en ampères, longueurs en mètres, perméabilité magnétique du vide en henrys par mètre ($\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H/m).

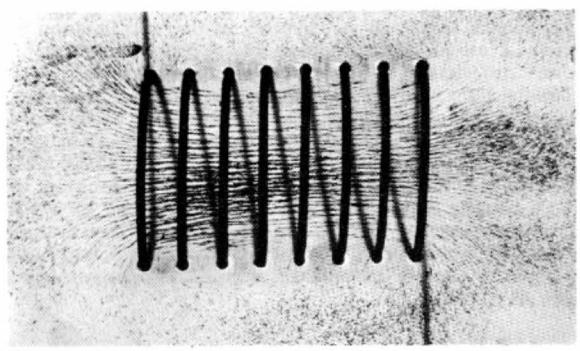


Fig. XXIII-15 — Spectre magnétique d'un solénoïde (*Palais de la Découverte*)

6. EXCITATION MAGNÉTIQUE. THÉORÈME D'AMPÈRE

Les formules précédentes montrent clairement que l'induction $\vec{B}$ en un point dépend, d'une part, du milieu (caractérisé par sa perméabilité), et d'autre part, d'une autre grandeur, appelée l'*excitation magnétique* (V. t. 1, Magnétisme, chap. 1), cause du champ magnétique. Il s'agit d'une grandeur vectorielle dont l'intensité est égale à $\frac{B}{\mu_0}$ dans le vide, c'est-à-dire à :

$H = \frac{I}{2\pi a}$ dans le cas d'un fil rectiligne indéfini ;

$H = \frac{NI}{D}$ dans le cas d'une bobine plate ;

$H = \frac{NI}{l}$ dans le cas d'un solénoïde.

Cette grandeur est homogène au quotient d'un courant et d'une longueur; cela explique le nom retenu dans le système international pour désigner l'unité: ampère par mètre (symbole: A/m), au lieu de l'ancienne appellation: ampère-tours par mètre. Dans le cas général, l'excitation magnétique dépend à la fois de l'intensité du courant et du nombre de spires du circuit électrique qui la produit. Plus précisément, la circulation du vecteur excitation magnétique $\vec{H}$ le long d'une ligne de force donnée est égale au produit de l'intensité I du courant par le nombre N de spires traversées par la ligne d'induction, ce que traduit la relation suivante:

$$\boxed{\int \vec{H}.\vec{dl} = N\,I}$$ (théorème d'Ampère)

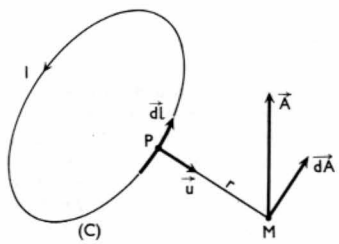
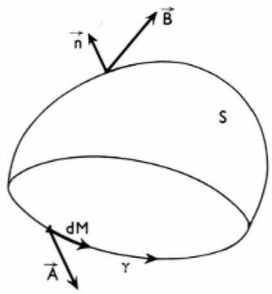


Fig. XXIII-16

Potentiel vecteur du vecteur induction



$$\iint_S (\vec{B}.\vec{n})\,dS = \int_\gamma \vec{A}\,\vec{dM}$$

7. POTENTIEL VECTEUR DU VECTEUR INDUCTION

Nous allons établir un certain nombre de propriétés du vecteur induction $\vec{B}$ à l'aide des résultats de l'analyse vectorielle (V. t. 1, Mathématiques, chap. 21).

Soit un circuit électrique C parcouru par un courant I (fig. XXIII-16). Soit $\vec{dl}$ un élément du circuit au point P de C. Considérons le champ de vecteurs $\vec{dA}$ dont la valeur en un point M de l'espace est donnée par la relation suivante:

$$\vec{dA} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\vec{dl}}{r}$$

r désignant la distance PM.

Si nous calculons le rotationnel de ce vecteur, nous obtenons la relation:

$$\overset{\smile}{\text{rot}}\,\vec{dA} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\vec{dl}\wedge\vec{u}}{r^2}$$

$\vec{u}$ étant le vecteur unitaire du support PM orienté de P vers M.

Considérons alors le vecteur $\vec{A}$ obtenu en intégrant $\vec{dA}$ le long du circuit C:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_C \frac{\vec{dl}}{r}$$

Le rotationnel de ce vecteur est égal à:

$$\overset{\smile}{\text{rot}}\,\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_C \frac{\vec{dl}\wedge\vec{u}}{r^2}$$

et par conséquent:

$$\overset{\smile}{\text{rot}}\,\vec{A} = \vec{B}$$

$\vec{B}$, vecteur induction créé par le courant I, dérive donc du *potentiel vecteur* $\vec{A}$. Une conséquence de cette relation est que $\vec{B}$ est un champ de vecteurs à flux conservatif:

$$\text{div}\,\vec{B} = 0$$

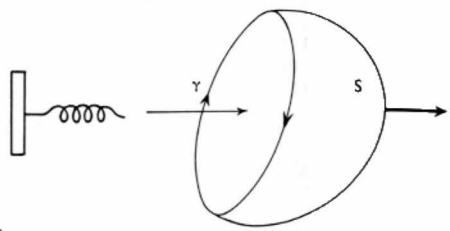


Fig. XXIII-17

Théorème d'Ampère-Stokes

Fig. XXIII-18

Orientation d'une surface s'appuyant sur un contour

La circulation d'un vecteur le long d'un contour fermé est égale au flux de son rotationnel à travers toute surface s'appuyant sur le contour (théorème d'Ampère-Stokes). Dans le cas présent, si S est une surface s'appuyant sur un contour γ (fig XXIII-17) nous aurons la relation suivante

$$\int_\gamma \vec{A}.\vec{dM} = \iint_S \overset{\smile}{\text{rot}}\,\vec{A}.\vec{dS} = \iint_S \vec{B}.\vec{dS}$$

Le **flux propre du circuit** ***C*** *est le flux du vecteur induction $\vec{B}$ à travers une surface S s'appuyant sur C.* La formule précédente montre que *ce flux est égal à la circulation du vecteur $\vec{A}$ le long du circuit C.*

Comme le flux de $\vec{B}$ est conservatif, ce flux Φ ne dépend pas de la surface S considérée; il est proportionnel à l'intensité du courant à travers le circuit. Si nous orientons la surface S par la règle du tire-bouchon (fig. XXIII-18), c'est-à-dire de façon que le tire-bouchon tournant dans le sens du courant s'enfonce dans S (direction de la normale positive), nous voyons que le flux propre du circuit est toujours positif (par la suite, nous choisirons toujours cette orientation).

CHAPITRE XXIV

LOI DE LAPLACE ET LOI DE MAXWELL

Au chapitre 22, à partir de la formule d'Ampère, nous avons déduit:

— la *loi de Biot et Laplace* qui donne l'induction magnétique créée par un élément de courant,

— la *loi de Laplace* qui donne l'expression de la force s'exerçant sur un circuit électrique placé dans un champ magnétique.

1. LOI DE LAPLACE

1.1. Étude théorique. — La force qui s'exerce sur un élément de circuit $\vec{dl}$, parcouru par le courant I et plongé dans le champ magnétique d'induction $\vec{B}$, est donnée par la relation suivante (fig. XXIV-1):

$$\vec{dF} = I\,\vec{dl}\wedge\vec{B}$$

Cette force est perpendiculaire au plan défini par le vecteur induction $\vec{B}$ et par l'élément de courant $\vec{dl}$ et est dirigée vers la gauche de l'observateur d'Ampère regardant fuir les lignes d'induction. Son intensité, déduite de la formule précédente, est égale à:

$$dF = I\,dl\,B\sin\theta$$

θ désignant l'angle compris entre les vecteurs $\vec{dl}$ et $\vec{B}$;

F est exprimé en newtons, I en ampères, l en mètres, B en teslas.

Les différentes forces $\overrightarrow{dF}$ qui s'exercent sur un conducteur de dimensions finies admettent en général une résultante qui produit un déplacement si les liaisons mécaniques le permettent. Dans le cas particulier d'un conducteur de longueur l se trouvant dans un champ magnétique uniforme où l'induction a une valeur B, l'intensité de la force F est égale à :

$$F = BIl \sin \theta$$

La force de Laplace représente la résultante des forces s'exerçant sur les électrons qui constituent le courant. Chacun d'eux, en effet, se trouve soumis à une force $\overrightarrow{f} = e\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$ (V. t. 1, Électronique, chap. 2), et celle-ci est transmise à la matière par l'électron qui ne peut sortir du réseau cristallin ($e = -1{,}6.10^{-19}$ C).

Cette force est nulle lorsque le vecteur induction est parallèle à l'élément de circuit considéré. Pour une induction $\overrightarrow{B}$ et un courant I donnés, elle est maximale lorsque $\overrightarrow{B}$ est perpendiculaire à l'élément du circuit ($\theta = 90°$ et $\sin \theta = 1$).

La formule traduisant la loi de Laplace est utilisée pour définir l'unité d'induction : le *tesla*. Dans un champ d'induction uniforme d'un tesla, sur une portion rectiligne de 1 m de long d'un conducteur placé perpendiculairement au vecteur induction et traversé par un courant de 1 A, s'exerce une force de 1 N.

Remarque : Pour déterminer le sens de la force électromagnétique, nous pouvons employer aussi la *règle des trois doigts*. Il faut placer les trois premiers doigts de la *main droite* suivant les trois axes d'un trièdre trirectangle : le pouce indique la direction de la force, si l'index est dirigé selon celle du courant et le majeur selon celle de l'induction magnétique. Le moyen mnémotechnique suivant peut être utilisé : Main Droite, mot commençant par un D, comme Déplacement (effet produit en général par la force étudiée) ; **Pou**ce donne **Pou**sse (comme la force) ; **In**dex donne **In**tensité ; **Ma**jeur donne **Ma**gnétique.

1.2. Vérification expérimentale. — Quelques dispositifs permettent de vérifier expérimentalement la loi de Laplace.

Le conducteur-pendule a déjà été utilisé au chapitre 1 pour mettre en évidence les effets magnétiques du courant (fig. XXIV-2). Le circuit électrique comprend notamment un conducteur rectiligne AO suspendu par sa partie supérieure O, tandis que la partie inférieure plonge dans un bain de mercure qui assure la continuité du circuit sans s'opposer au déplacement du conducteur AO. Cette partie mobile du circuit électrique est placée dans l'entrefer d'un aimant en fer à cheval. Si un courant traverse le circuit, une force s'exerce sur la partie du conducteur placée dans le champ magnétique ; la tige AO étant rigide, elle se déplace dans un plan perpendiculaire aux lignes d'induction (sur la figure XXIV-2, ce déplacement s'effectue vers la gauche si le courant circule de A vers O, vers la droite dans le cas contraire).

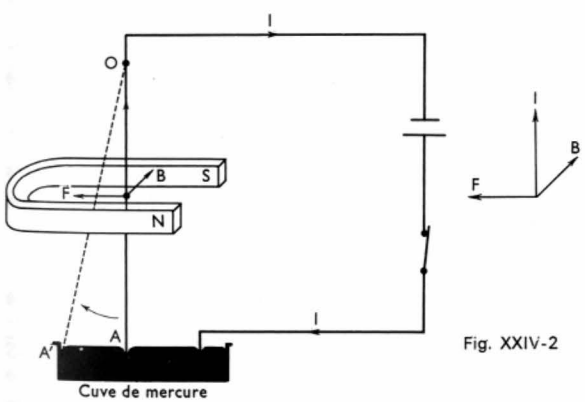


Fig. XXIV-2

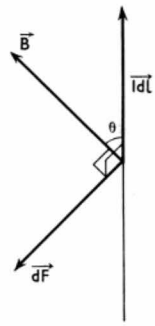


Fig. XXIV-1

$$\overrightarrow{dF} = \overrightarrow{Idl} \wedge \overrightarrow{B}$$
$$dF = \overrightarrow{Idl}\, B \sin \theta$$

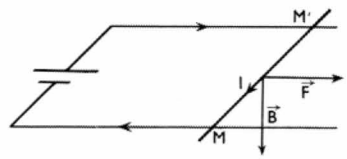


Fig. XXIV-3

Ce dispositif permet de vérifier qualitativement la loi de Laplace, mais il se prête mal à une étude quantitative rigoureuse : l'induction magnétique créée par l'aimant est uniforme dans l'entrefer de l'aimant, mais il n'en est pas de même dans le voisinage de celui-ci et il est très difficile de déterminer précisément la force qui s'exerce sur le conducteur.

Le dispositif de la figure XXIV-3 permet d'effectuer plus facilement des mesures. Il se compose de deux conducteurs fixes et parallèles, situés dans un même plan horizontal, sur lesquels peut rouler un conducteur mobile MM' perpendiculaire aux précédents. Ce conducteur mobile est situé tout entier dans l'entrefer d'un aimant en fer à cheval, et l'induction est donc uniforme tout le long de MM'. Si nous relions les deux conducteurs fixes aux deux pôles d'un générateur électrique, nous constatons que le conducteur mobile est soumis à une force que nous pouvons mesurer. Comme par ailleurs l'intensité de cette force peut être déduite des valeurs de l'induction magnétique $\overrightarrow{B}$, de l'intensité I du courant et de la longueur l de MM' ($F = BIl$, car $\overrightarrow{B}$ est perpendiculaire à MM'), nous pouvons ainsi vérifier expérimentalement la loi de Laplace.

2. APPLICATIONS DE LA LOI DE LAPLACE

2.1. Balance de Cotton. — La balance de Cotton est un appareil qui permet de mesurer de façon précise une induction magnétique en appliquant la loi de Laplace. Cette balance comporte un fléau en métal non ferromagnétique (laiton, par exemple) portant un plateau à une de ses extrémités tandis qu'à l'autre extrémité est disposé un conducteur de forme appropriée (fig. XXIV-4 a). O est le centre autour duquel tourne le fléau de la balance ; les portions de conducteur AB et CD sont des arcs de cercle de centre O et la partie BC est portée par une droite passant par O. Les arcs AB et CD sont suffisamment longs pour que les parties OA et OD soient hors du champ magnétique à mesurer (fig. XXIV-4 b).

Fig. XXIV-4 a

(*A.O.J.P.*)

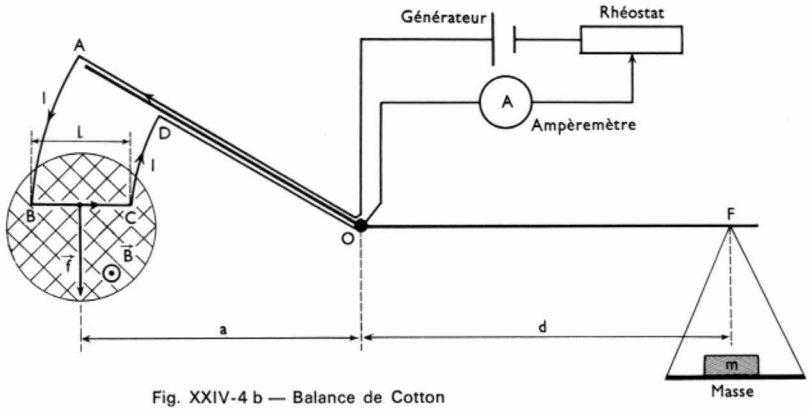


Fig. XXIV-4 b — Balance de Cotton

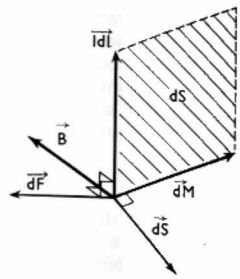


Fig. XXIV-6
Loi de Maxwell

Les forces qui s'exercent sur chaque élément des arcs *AB* et *CD* sont en tout point perpendiculaires à l'élément de circuit considéré. Le support de ces forces passe donc par l'axe *O* et leur moment par rapport à cet axe est donc nul. La rotation du fléau est uniquement due aux forces qui s'exercent sur *BC*. Si le long de *BC* l'induction magnétique est uniforme et a pour module *B*, les forces électromagnétiques se réduisent à une force unique $\vec{F}$ appliquée au milieu de *BC* ; son intensité est égale à (*BIl*) si nous représentons par *I* l'intensité du courant traversant *BC* et par *l* la longueur *BC*; *a* désignant la distance qui sépare *O* du milieu de *BC*, le moment des forces électromagnétiques par rapport à l'axe *O* est égal à (*BIla*). Pour rétablir l'équilibre, une masse marquée *m* est placée dans le plateau de la balance. Appelons *d* la distance de *O* au point *F* où est suspendu le plateau portant la masse marquée ; par rapport à l'axe *O*, le moment de la force de pesanteur qui s'exerce sur cette masse marquée est égal à (*mgd*), *g* étant l'accélération de la pesanteur.

À l'équilibre, ces moments sont égaux :

$$BIla = mgd$$

Nous pouvons donc facilement déduire *B* :

$$B = \frac{mgd}{Ila}$$

La mesure de *B* se déduit donc des mesures d'intensité de courant, de longueur et de masse.

Remarque : L'équilibre est obtenu soit en choisissant une masse *m* convenable, soit en faisant varier (à l'aide d'un rhéostat) l'intensité du courant qui traverse le circuit. Dans la pratique, une masse *m* est placée sur le plateau de la balance de façon à obtenir approximativement l'équilibre et celui-ci est ensuite réalisé précisément à l'aide d'un rhéostat.

2.2. Roue de Barlow. — La roue de Barlow est une application attrayante de la loi de Laplace. C'est une roue en métal conducteur, souvent en cuivre. La partie inférieure est en contact avec du mercure ; l'axe de la roue d'une part, le mercure d'autre part, sont reliés aux pôles d'un générateur électrique par l'intermédiaire de conducteurs (fig. XXIV-5). La roue est placée dans un champ magnétique uniforme (obtenu au moyen de bobines de Helmholtz, ou bien à l'aide d'un aimant en fer à cheval) ; en tout point de ce champ, l'induction est parallèle à l'axe de la roue. Lorsque nous faisons passer un courant dans le circuit, la roue tourne. Pour interpréter ce résultat, supposons la roue composée de rayons et disposée de façon qu'un seul rayon puisse se trouver dans le mercure, c'est-à-dire puisse faire partie du circuit électrique. Si nous désignons par *R* le rayon de la roue, par *I* l'intensité du courant et par *B* l'induction magnétique, la force $\vec{F}$ qui s'exerce sur ce rayon a une intensité égale à $F = BIR$; comme le champ est uniforme, la force sera appliquée au milieu du rayon, et son moment par rapport à l'axe de la roue est égal à $\frac{BIR^2}{2}$. La roue est ainsi animée d'un mouvement de rotation continu.

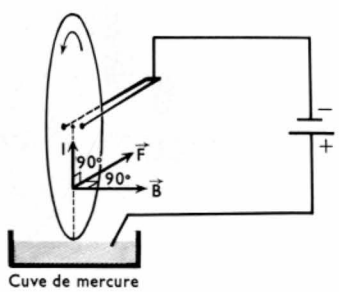


Fig. XXIV-5
Roue de Barlow

Ce résultat s'applique également à une roue pleine. Le moment de la force motrice ne dépend pas des lignes de courant à l'intérieur de la roue et est le même si la roue n'est pas tout à fait homogène et si son épaisseur n'est pas constante.

3. LOI DE MAXWELL : TRAVAIL DES FORCES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

3.1. Cas d'un élément de circuit. — Considérons un élément de circuit $\vec{dl}$, parcouru par un courant *I* et placé dans un champ d'induction $\vec{B}$. D'après la loi de Laplace, il est soumis à une force électromagnétique $\vec{dF}$ donnée par la formule :

$$\vec{dF} = I\,\vec{dl} \wedge \vec{B}$$

Si cet élément de circuit effectue un déplacement élémentaire défini par le vecteur $\vec{dM}$ (fig. XXIV-6) le travail de la force électromagnétique sera égal à :

$$dW = \vec{dF}.\vec{dM} = (I\,\vec{dl} \wedge \vec{B}).\vec{dM} = I\,(\vec{dl}, \vec{B}, \vec{dM})$$

Utilisant les propriétés du produit mixte des trois vecteurs $\vec{dl}$, $\vec{B}$ et $\vec{dM}$ nous pouvons écrire (V. t. 1, Mécanique des solides, chap. 1) :

$$dW = I\,\vec{B}.(\vec{dM} \wedge \vec{dl}) = I\,\vec{B}.\vec{dS}$$

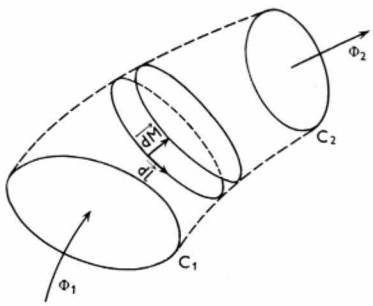
$\vec{dS}$ étant le vecteur $(\vec{dM} \wedge \vec{dl})$ dont le module est égal à l'aire de la surface balayée par l'élément de circuit de longueur *dl* pendant le déplacement $\vec{dM}$; le support de $\vec{dS}$ est perpendiculaire à la surface et son sens détermine l'orientation de la surface. Le produit $\vec{B}.\vec{dS}$ représente le flux d'induction $d\Phi$ à travers la surface *dS*.

$$\boxed{dW = I\,d\Phi}$$

Le travail des forces électromagnétiques qui s'exercent sur l'élément de circuit $\vec{dl}$ pendant le déplacement $\vec{dM}$ est donc égal au produit de l'intensité du courant et du flux du vecteur induction magnétique à travers la surface balayée par l'élément de circuit pendant le déplacement. Ce flux porte le nom de *flux coupé* par l'élément de circuit $\vec{dl}$.

3.2. Cas d'un circuit indéformable. — Considérons maintenant un circuit linéaire rigide parcouru par un courant d'intensité I (fig. XXIV-7). Nous pouvons décomposer le circuit en éléments de longueur $|\overrightarrow{dl}|$ et le déplacement effectué en déplacements élémentaires $\overrightarrow{dM}$. Ainsi, en utilisant le résultat précédent, nous sommes en mesure de déterminer les travaux élémentaires effectués par les forces électromagnétiques. Le travail total correspondant est donné par la **loi de Maxwell.**

Fig. XXIV-7



Le travail des forces électromagnétiques appliquées à un circuit linéaire rigide plongé dans un champ magnétique est égal au produit de l'intensité du courant traversant le circuit et du flux coupé par le circuit au cours de son déplacement (c'est-à-dire du flux du vecteur induction magnétique à travers la surface balayée par le circuit).

Le flux d'induction étant conservatif, le flux de $\vec{B}$ à travers la surface balayée est donc égal à la différence des flux Φ_2 et Φ_1 embrassés par le circuit après et avant le déplacement.

Le travail des forces électromagnétiques au cours d'un déplacement est égal au produit de l'intensité du courant dans le circuit par la variation du flux du vecteur induction à travers le circuit (autre énoncé de la loi de Maxwell) :

$$W = I(\Phi_2 - \Phi_1)$$

Φ_1 et Φ_2 désignant le flux du vecteur $\vec{B}$ à travers le circuit respectivement dans sa position initiale et dans sa position finale.

4. RÈGLE DU FLUX MAXIMAL

Le travail des forces électromagnétiques $dW = I\,d\Phi$ est positif si le flux du vecteur induction à travers le circuit augmente au cours du déplacement : $d\Phi > 0 \Rightarrow dW > 0$. Les forces électromagnétiques qui sont à l'origine du déplacement d'un circuit tendent donc à faire augmenter le flux à travers celui-ci. Une position d'équilibre stable est atteinte lorsque le flux est maximal comme l'indique la règle suivante :

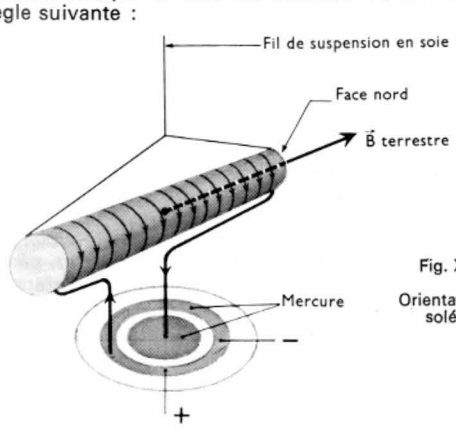


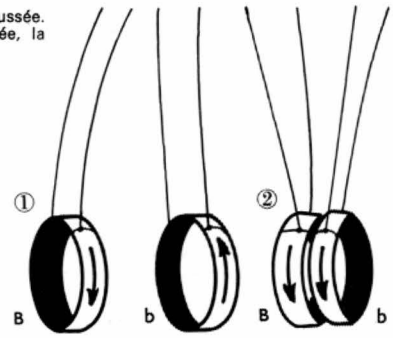
Fig. XXIV-8

Orientation d'un solénoïde

Un circuit linéaire rigide soumis à un certain nombre de liaisons et placé dans un champ magnétique est en position d'équilibre stable dans toute position où le flux d'induction magnétique qui le traverse est maximal, compte tenu des liaisons auxquelles le circuit est soumis.

Fig. XXIV-9

1. La bobine est repoussée.
2. Après s'être retournée, la bobine est attirée



Nous pouvons vérifier cette règle au moyen d'un solénoïde fixe parcouru par un courant constant et suspendu à un fil sans torsion. Dans le champ terrestre, il s'oriente suivant la direction du champ terrestre, tout comme un aimant (fig. XXIV-8).

Une bobine mobile *b* peut être également placée en face d'une bobine fixe *B*, ces bobines étant parcourues par des courants électriques de telle façon que le flux du vecteur induction créé par *B* à travers *b* soit négatif (fig. XXIV-9). La bobine *b* est d'abord repoussée (le flux diminue en valeur absolue, donc augmente s'il est compté algébriquement), puis elle se retourne et est ensuite à nouveau attirée (le flux devient positif et augmente). Elle s'immobilise lorsqu'elle occupe une position telle que le flux qui la traverse est maximal, compte tenu des liaisons.

5. APPLICATION DE LA LOI DE MAXWELL. CALCUL DES FORCES S'EXERÇANT SUR UN CIRCUIT

La loi de Maxwell permet de calculer la *résultante générale* et le *moment total* des forces qui s'exercent sur un circuit électrique C parcouru par un courant d'intensité I et plongé dans un champ d'induction $\vec{B}$ connu. Nous utilisons pour cela une méthode analogue à la méthode des travaux virtuels (V. chap. 18 § 4).

5.1. Résultante générale des forces électromagnétiques. — Au cours d'une translation définie par le vecteur $\overrightarrow{dM}$, le flux d'induction à travers le circuit varie d'une quantité $d\Phi$ et le travail effectué est égal à dW.

$$dW = I\,d\Phi$$

Or le travail d'une force $\vec{F}$ pendant un déplacement $\overrightarrow{dM}$ est égal à $\vec{F}.\overrightarrow{dM}$; nous pouvons donc écrire :

$$\vec{F}.\overrightarrow{dM} = I\,d\Phi$$

La force électromagnétique qui s'exerce sur le circuit a donc des composantes égales à :

$$\begin{cases} F_x = I\dfrac{\partial\Phi}{\partial x} \\ F_y = I\dfrac{\partial\Phi}{\partial y} \\ F_z = I\dfrac{\partial\Phi}{\partial z} \end{cases}$$

Nous pouvons traduire ce résultat en écrivant :

$$\vec{F} = I\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi$$

5.2. Moment des forces s'exerçant sur un circuit. — Au cours d'une petite rotation d'angle $d\alpha$ autour d'un axe, le travail effectué est égal à :

$$dW = T.d\alpha$$

T étant le moment cherché. Comme $dW = I\,d\Phi$, nous déduisons :

$$I\,d\Phi = I\frac{d\Phi}{d\alpha}d\alpha = T\,d\alpha$$

et :

$$T = I\frac{d\Phi}{d\alpha}$$

5.3. Cas particulier : circuit plongé dans un champ magnétique uniforme. — Lorsque le champ magnétique est uniforme (c'est-à-dire lorsque le vecteur induction $\vec{B}$ est le même en tout point de l'espace), le flux de $\vec{B}$ à travers le circuit ne varie pas au cours d'une translation et la résultante générale des forces électromagnétiques qui s'exercent sur le circuit est nulle. Il n'en est pas de même du moment résultant et nous pouvons dire que *les forces électromagnétiques appliquées à un circuit rigide, placé dans un champ magnétique uniforme, sont équivalentes à un couple.*

Le calcul montre que le moment de ce couple est égal au produit vectoriel du moment magnétique du circuit ($\vec{\mathcal{M}} = I \iint_S \vec{n}\, dS = I\vec{S}$) et du vecteur induction $\vec{B}$. Nous allons établir ce résultat dans le cas où le circuit est une spire rectangulaire mobile autour d'un axe.

5.4. Moment magnétique d'une spire. — Une spire rectangulaire, mobile autour d'un axe vertical et placée dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ où l'induction a une direction horizontale, est soumise à un couple (fig. XXIV-10).

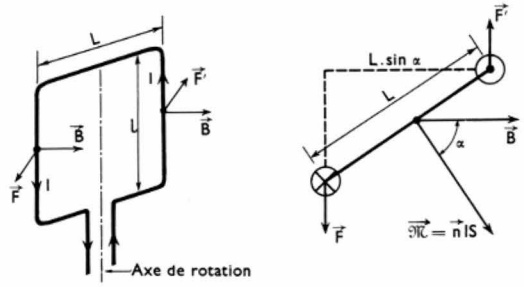


Fig. XXIV-10 — Moment magnétique d'une spire

En effet, sur les conducteurs verticaux de longueur l s'exercent deux forces $\vec{F}$ et $\vec{F'}$, données par la loi de Laplace, de même amplitude $F = BIl$, mais de sens contraires. Si nous désignons par L la largeur de la spire et par α l'angle compris entre le vecteur $\vec{B}$ et le vecteur unitaire $\vec{n}$, normal au plan de la spire et dirigé vers la gauche de l'observateur d'Ampère placé en un point quelconque sur le conducteur, le moment du couple T est donné par la relation suivante :

$$T = FL \sin \alpha$$

En tenant compte de la loi de Laplace, nous obtenons :

$$T = BIlL \sin \alpha = BIS \sin \alpha$$

Les caractéristiques du vecteur moment sont donc données par la relation :

$$\vec{T} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$$

où $\vec{\mathcal{M}}$ représente le moment magnétique du circuit, vecteur colinéaire au vecteur $\vec{n}$ et de module égal au produit IS dans le cas d'une spire, ou NIS, s'il s'agit d'une bobine comportant N spires.

À noter que sous l'action de ce couple, si la bobine peut pivoter librement, elle s'oriente de façon que le module T du moment soit nul, condition réalisée pour $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi$ rad. La première position seule est stable ; nous pouvons constater qu'elle correspond bien à celle donnée par la règle du flux maximal.

6. DÉFINITION LÉGALE DE L'AMPÈRE

Considérons deux conducteurs rectilignes parallèles parcourus par des courants de même intensité et de même sens

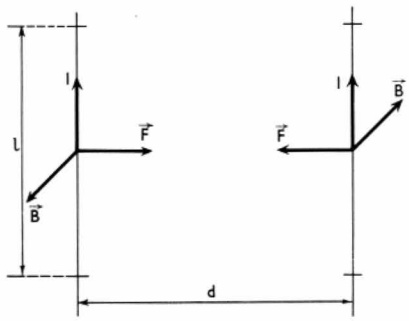


Fig. XXIV-11

(fig. XXIV-11). Soit d la distance des conducteurs. En tout point occupé par un conducteur, l'autre conducteur produit une induction $\vec{B}$ dont le module est égal à :

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{d}$$

Les conducteurs sont soumis à des forces et ils s'attirent. L'intensité de la force qui s'exerce sur chaque portion de conducteur de longueur unité (1 m, par exemple) est donnée par la loi de Laplace :

$$F = BIl = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I^2}{d} \quad (l = 1 \text{ m})$$

Cette relation est utilisée pour définir l'ampère :

$$I^2 = \frac{2\pi}{\mu_0} Fd$$

$\frac{\mu_0}{2\pi} = 2.10^{-7}$ H/m, $d = 1$ m, $I = 1$ A si $F = 2.10^{-7}$ N.

L'ampère est l'intensité d'un courant constant qui, maintenu dans deux conducteurs rectilignes, parallèles, de longueur infinie, de section négligeable et placés dans le vide à une distance d'un mètre l'un de l'autre, produit entre ces conducteurs une force de 2.10^{-7} newton par unité de longueur.

CHAPITRE XXV

INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE

1. ÉTUDE QUALITATIVE DES PHÉNOMÈNES D'INDUCTION

L'induction électromagnétique, qu'il ne faut pas confondre, avec l'induction magnétique (V. t. 1, Magnétisme, chap. 1), est un phénomène qui accompagne toute variation de flux dans un circuit et qui se traduit par la production d'une f.é.m. d'induction dans celui-ci.

Ainsi, lorsqu'un aimant est approché d'un solénoïde dont les extrémités sont reliées à un voltmètre très sensible (fig. XXV-1) nous mettons en évidence une d.d.p. aux bornes de la bobine. Cette d.d.p. est nulle lorsque l'aimant est immobile et que le flux à travers le solénoïde est constant.

Une f.é.m. induite donne naissance à un *courant induit* lorsque le circuit soumis à la variation de flux (*circuit induit*) est fermé. Tout se passe comme s'il y avait un générateur dans le circuit. Le sens du courant induit dépend du sens de la variation de flux ; dans l'expérience précédente, le sens du courant n'est pas le même lorsque nous approchons le pôle Nord ou lorsque nous le retirons. Le courant induit produit à travers le circuit fermé un flux qui s'oppose

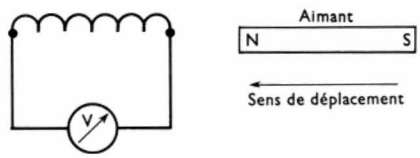


Fig. XXV-1

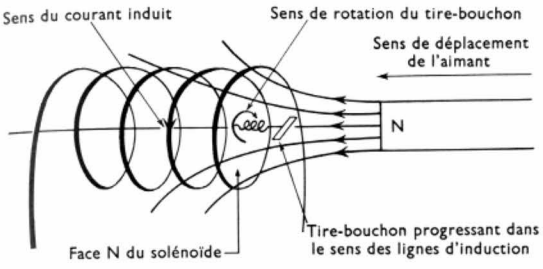


Fig. XXV-2 — Sens du courant induit

à la variation de flux inducteur (*loi de Lenz*). Par conséquent, le flux du courant induit se retranche du flux inducteur si celui-ci croît, et s'ajoute à lui s'il diminue. Le sens du courant induit est donné par la règle du tire-bouchon de Maxwell : si un tire-bouchon progresse dans le sens des lignes d'induction, le courant induit a le sens contraire du mouvement du tire-bouchon si le flux croît et le même sens si le flux décroît (fig. XXV-2).

Nous pouvons constater que le solénoïde présente à l'aimant :

— une *face nord* pendant l'*approche d'un pôle Nord* (ou pendant le *retrait d'un pôle Sud*)

— une *face sud* pendant *le retrait d'un pôle Nord* (ou pendant *l'approche d'un pôle Sud*).

L'aimant peut être remplacé par un autre solénoïde relié à un générateur électrique (fig. XXV-3). Ce circuit porte le nom de circuit *inducteur*. Lorsqu'il est parcouru par un courant, il produit un champ magnétique dans l'espace qui l'entoure. Cet ensemble est équivalent à un aimant et les

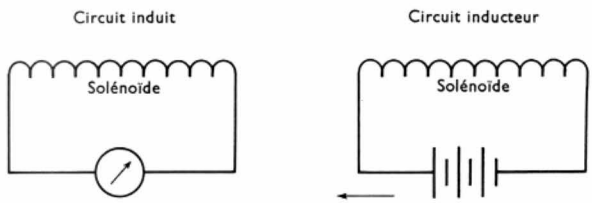


Fig. XXV-3 — Courant induit par déplacement relatif des circuits inducteur et induit

phénomènes observés sont les mêmes que précédemment : le circuit induit est parcouru par un courant chaque fois que le circuit inducteur est déplacé (nous supposons pour l'instant que le circuit inducteur est parcouru par un courant constant).

Pendant le déplacement, les deux circuits sont parcourus par des courants électriques et les forces électromagnétiques qui s'exercent entre ces deux circuits s'opposent au déplacement : elles sont répulsives lorsque les circuits se rapprochent l'un de l'autre et attractives dans le cas contraire. Pour effectuer un déplacement, l'opérateur est obligé de fournir un certain travail. La loi de Lenz apparaît comme une simple conséquence du principe de conservation de l'énergie.

La variation du flux peut aussi être produite en modifiant l'intensité du courant inducteur. Le circuit inducteur est fixe mais le solénoïde est placé en série avec un rhéostat (fig. XXV-4). Nous constatons encore que lorsque nous augmentons l'intensité du courant dans le circuit inducteur, il apparaît un courant induit, créant un champ magnétique de sens contraire au champ magnétique du circuit inducteur. Au contraire, si nous diminuons l'intensité du courant inducteur, le courant induit change de sens et produit un champ magnétique de même sens que le champ inducteur. Nous retrouvons donc la **loi de Lenz :** dans tous les cas, *le courant induit a un sens tel que le flux d'induction magnétique qu'il produit s'oppose à la variation du flux inducteur.*

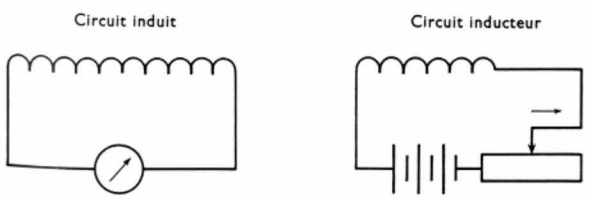


Fig. XXV-4 — Courant induit par variation de l'induction magnétique

2. FORCE ÉLECTROMOTRICE D'INDUCTION

La variation $d\Phi$ du flux d'induction magnétique Φ à travers un circuit électrique entraîne l'apparition d'une f.é.m. et d'un courant induits (si le circuit est fermé). La valeur e de la f.é.m. d'induction représente la f.é.m. du générateur qui créerait le même courant s'il était introduit dans le circuit induit. Cette valeur est donnée par la formule fondamentale suivante :

$$\boxed{e = -\frac{d\Phi}{dt}} \quad \text{(formule de Faraday)}$$

Le signe moins de la formule résulte des conventions utilisées habituellement : l'orientation d'une surface s'appuyant sur un circuit orienté est donnée par la règle du tire-bouchon. Pour cette orientation, si le flux augmente en valeur algébrique, la force électromotrice d'induction est négative ; si le flux diminue, la force électromotrice est positive.

Remarquons que dans le cas de la seconde expérience (fig. XXV-3) la formule $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ ne fait que traduire le principe de la conservation de l'énergie ; elle signifie que la somme du travail fourni par les forces électromagnétiques appliquées aux deux circuits, au cours du déplacement $\left(\int_{\Phi_1}^{\Phi_2} i\, d\Phi\right)$ et de l'énergie électrique fournie par la force électromotrice d'induction $\left(\int_{t_1}^{t_2} ei\, dt\right)$ est nulle. Si le flux est constant, la dérivée $\frac{d\Phi}{dt}$ est nulle ainsi que la f.é.m. d'induction (comme nous l'avons constaté).

3. F.É.M. D'INDUCTION DUE À UN « FLUX COUPÉ »

Lorsqu'un conducteur mobile est déplacé sur deux rails conducteurs reliés à un galvanomètre (fig. XXV-5), alors que l'ensemble est placé dans un champ magnétique, un courant induit (mis en évidence par le galvanomètre) circule dans le circuit. *Le courant induit est dû à la variation de flux à travers le circuit,* elle-même conséquence de la déformation imposée par l'expérimentateur. La f.é.m. induite est encore donnée par la formule $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ et Φ représente alors le « *flux coupé* » par le conducteur mobile pendant le temps dt.

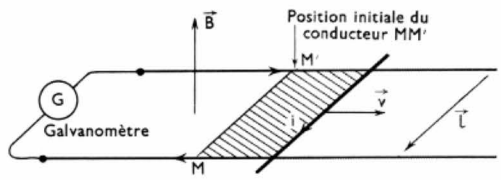


Fig. XXV-5

La même f.é.m. est induite dans le conducteur lorsqu'il effectue un déplacement analogue *sans faire partie d'un circuit électrique*. La valeur de la f.é.m. ne dépend que du « flux coupé ».

La formule précédente peut être utilisée pour calculer la force électromotrice élémentaire (de) induite dans un élément de circuit dl déplacé d'une longueur élémentaire $\overrightarrow{dM}$, pendant le temps dt. Cette portion de circuit est dé-

placée avec la vitesse $\vec{v} = \frac{\overrightarrow{dM}}{dt}$ et, pendant l'intervalle de temps dt, elle coupe un flux $d\Phi$ égal à : $\vec{B} . (\overrightarrow{dM} \wedge \vec{dl})$

$$de = \frac{-\vec{B} . (\overrightarrow{dM} \wedge dl)}{dt} = -\vec{B} . (\vec{v} \wedge \vec{dl}) = \vec{dl} . (\vec{v} \wedge B)$$

$$de = (\vec{B}, \vec{dl}, \vec{v})$$

Lorsqu'un conducteur coupe un flux, la force électromotrice totale s'obtient alors en faisant la somme des forces électromotrices élémentaires. Dans le cas d'un conducteur rectiligne de longueur l, se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$, dans un champ d'induction $\vec{B}$ constant, la f.é.m. induite est égale à : $e = (\vec{B}, \vec{l}, \vec{v}) = \vec{B} . (\vec{l} \wedge \vec{v})$

La f.é.m. e est donc positive si nous orientons $\vec{l}$ de telle sorte que le trièdre $(\vec{B}, \vec{l}, \vec{v})$ soit direct.

Pour connaître quelle extrémité doit être considérée comme la borne positive de ce générateur, nous pouvons également utiliser la règle des *trois doigts de la main gauche* (gauche commence par un G comme générateur). Les trois premiers doigts, placés suivant les trois axes d'un trièdre trirectangle, sont dirigés, le pouce comme le vecteur vitesse, l'index vers le pôle positif du générateur, le majeur comme le vecteur induction.

Lorsque $\vec{v}$ et $\vec{B}$ sont orthogonaux (cas de l'expérience précédente) le courant induit a le même sens que le vecteur $\vec{v} \wedge \vec{B}$, (fig. XXV-6) la f.é.m. est égale à :

$$e = Blv$$

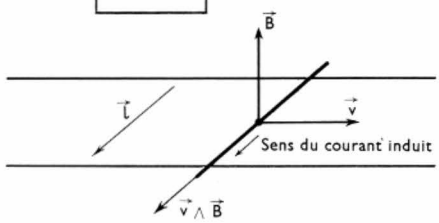


Fig. XXV-6

Ce cas particulier permet de bien comprendre le phénomène d'induction électromagnétique. En effet, lorsque la tige conductrice est déplacée, chaque électron libre entraîné dans le mouvement est soumis à une force $\vec{F}$ donnée par la loi de Laplace. Sous l'action de cette dernière, il se produit une accumulation d'électrons à une extrémité du conducteur et la f.é.m. d'induction représente la d.d.p. qui apparaît entre les extrémités de la tige.

Il faut retenir qu'*il se produit une force électromotrice d'induction lorsqu'un circuit se trouve dans un champ magnétique variable ou lorsqu'un courant ou un conducteur se déplace dans un champ magnétique* (constant ou variable). Dans tous les cas où un courant induit peut circuler, ses effets s'opposent aux causes qui l'ont produit.

La circulation d'un courant induit dans un circuit fermé correspond au passage d'une quantité d'électricité Q, donnée par la formule suivante :

$$Q = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{R}$$

où nous désignons par Φ_1 et Φ_2 le flux traversant le circuit avant et après le déplacement, et par R la résistance de celui-là ; Q est exprimé en coulombs, Φ_1 et Φ_2 en webers, R en ohms.

Le phénomène d'induction a de nombreuses applications en électrotechnique (générateurs électromécaniques, transformateurs, bobines d'induction, moteurs à champ tournant, etc.). Il est aussi la cause des courants de Foucault.

4. COURANTS DE FOUCAULT. APPLICATIONS

Des courants peuvent être induits dans des masses conductrices mobiles dans un champ magnétique ou placées dans un champ magnétique variable. Ils ont reçu le nom de *courants de Foucault*.

Dans les deux cas, la variation de flux engendre des courants circulant dans la masse conductrice, dans un plan perpendiculaire aux lignes d'induction et selon un parcours souvent mal déterminé. Cependant, dans tous les cas, ils s'opposent aux causes qui leur donnent naissance. Ces courants représentent un grave inconvénient dans la plupart des machines (transformateurs, moteurs et générateurs électromécaniques, etc.) car ils entraînent un *échauffement* des masses métalliques par effet Joule, ou un *freinage* des pièces qui se déplacent, donc une *perte d'énergie*. Pour limiter leurs effets, il faut réduire l'intensité de ces courants en remplaçant les masses métalliques compactes par un empilement de tôles en matériau convenable (tôles au silicium), les tôles étant disposées parallèlement aux lignes d'induction et isolées les unes des autres. En revanche ces courants ont des applications très importantes dans le *chauffage par induction* (V. t. 2, Électrothermie, chap. 4) et dans certains dispositifs de *freinage*.

Pour le freinage, la partie en mouvement comporte une pièce métallique, souvent un disque, qui passe dans une zone où il est possible de produire un champ magnétique à l'aide d'un aimant permanent ou d'un circuit électrique au moment désiré. Ce freinage par courants de Foucault peut être mis en évidence à l'aide d'un disque de cuivre mis en mouvement au moyen d'un corps pesant accroché à un fil enroulé autour d'un axe de rotation (fig. XXV-7). Le disque est disposé entre les branches d'un électroaimant produisant une induction magnétique importante. En l'absence de champ magnétique, le corps descend avec une vitesse qui n'est limitée que par les frottements mécaniques. Au contraire le corps tombe très lentement lorsque l'électroaimant est alimenté. Les courants de Foucault qui apparaissent dans le disque de cuivre produisent des forces électromagnétiques qui s'opposent au déplacement. Le corps atteint très rapidement une vitesse limite lorsque le moment du couple moteur (dû à la force de la pesanteur s'exerçant sur le corps) est égal au moment des forces électromagnétiques (qui sont proportionnelles aux courants induits, donc à la vitesse de rotation). Lorsque les frottements mécaniques sont négligeables, le travail moteur du poids du corps est égal à l'énergie dégagée par effet Joule par les courants de Foucault.

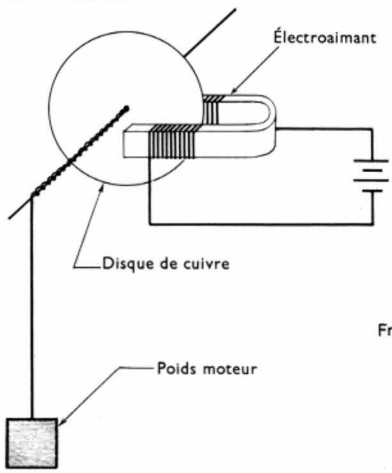


Fig. XXV-7

Freinage par courants de Foucault

En conclusion, le freinage résulte de la transformation en énergie électrique, puis en chaleur dans la pièce elle-même, d'une partie de l'énergie mécanique possédée par la pièce en mouvement. Le freinage est d'autant plus énergique que la pièce se déplace avec une vitesse élevée. L'efficacité diminue avec la vitesse, ce qui impose l'emploi d'un système de freinage supplémentaire pour obtenir l'arrêt complet d'un mouvement. Pour cette raison ce dispositif est appelé *ralentisseur électrique* plutôt que frein de Foucault, notamment sur les véhicules de transport en commun et sur les camions de fort tonnage.

Les courants de Foucault sont aussi utilisés pour porter une masse métallique à très haute température en la chauffant dans la masse. C'est le *chauffage par induction*. Pour obtenir un champ inducteur variable, on emploie des courants alternatifs de fréquence plus ou moins élevée selon les utilisations. Les courants de Foucault induits produisent par effet Joule le dégagement de chaleur recherché.

CHAPITRE XXVI

AUTO-INDUCTION

1. DÉFINITION

Il y a auto-induction lorsque le phénomène d'induction électromagnétique qui se produit dans un circuit est dû à une variation du flux produit par le *circuit lui-même* (par exemple, à la suite d'une variation de l'intensité du courant dans celui-ci).

On caractérise cette propriété de tout un circuit de produire un flux à travers lui-même, par un *coefficient d'auto-induction* ou *inductance*. Ce coefficient est égal au quotient de la variation de flux $d\Phi$ et de la variation di de l'intensité du courant qui la produit. Il est représenté par la lettre L :

$$L = \frac{d\Phi}{di}$$

$d\Phi$ est exprimé en webers, di en ampères, L en henrys.

Si le circuit se trouve dans un milieu non ferromagnétique, ou si aucun matériau de ce type ne se trouve dans son voisinage, le flux qu'il engendre est proportionnel à l'intensité i du courant. L'inductance du circuit est alors également donnée par la relation suivante :

$$L = \frac{\Phi}{i}$$

L'inductance L est constante. Cette formule montre qu'un henry représente l'inductance d'une bobine sans fer traversée par un flux de 1 Wb lorsqu'un courant de 1 A la parcourt.

La f.é.m. induite se détermine à l'aide de la relation utilisée dans le cas général. Elle tend à s'opposer au passage du courant si l'intensité de ce dernier croît, ou elle ralentit sa décroissance dans le cas contraire. Avec les notations précédentes, sa valeur est donnée par les relations suivantes :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

Autrement dit, dans un circuit linéaire, rigide, parcouru par un courant variable, apparaît une force électromotrice si l'intensité du courant est décroissante, contre-électromotrice si celle-ci est croissante ; elle est proportionnelle à la dérivée de l'intensité du courant par rapport au temps et le coefficient de proportionnalité est le coefficient d'auto-induction du circuit.

Cette f.é.m. peut être mise en évidence au moyen de l'expérience de Faraday (fig. XXVI-1). Un générateur alimente un solénoïde à noyau de fer (comme nous l'expliquerons ci-après, grâce à ce noyau l'inductance est très élevée), en série avec un rhéostat qui permet de faire varier l'intensité du courant dans le circuit. Celle-ci est mesurée à l'aide d'un ampèremètre. D'autre part un voltmètre est branché aux bornes du solénoïde. Lorsque nous fermons l'interrupteur K, nous constatons que l'intensité du courant dans le circuit augmente lentement jusqu'à atteindre sa valeur de régime permanent I_0 (fig. XXVI-2) ; en revanche le voltmètre montre que la tension décroît d'une valeur E égale à la f.é.m. du générateur jusqu'à une limite rI_0 égale à la chute ohmique en régime permanent (fig. XXVI-3). À l'ouverture de l'interrupteur, l'intensité s'annule pratiquement instantanément tandis que, pendant un court instant, l'aiguille du voltmètre dévie en sens contraire du sens précédent.

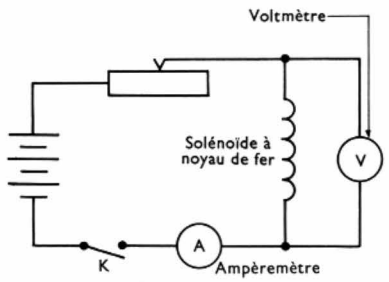


Fig. XXVI-1

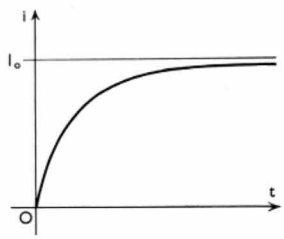


Fig. XXVI-2

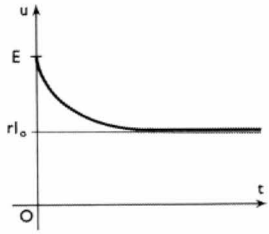


Fig. XXVI-3

Ces phénomènes s'expliquent aisément en tenant compte de la f.é.m. d'auto-induction qui prend naissance dans le solénoïde. À la fermeture de l'interrupteur, la f.é.m. d'auto-induction joue le rôle d'une f.c.é.m. et elle s'oppose au passage du courant ; celui-ci n'augmente que lentement. La d.d.p. aux bornes du solénoïde est égale à la f.é.m. E du générateur diminuée de la chute ohmique (Ri) dans le rhéostat. À l'instant initial, lorsque l'intensité du courant est très faible (et pour cette raison) le voltmètre indique une tension sensiblement égale à la f.é.m. du générateur ; par la suite cette tension diminue car l'intensité du courant croît. À l'ouverture de l'interrupteur, la f.é.m. d'auto-induction s'oppose à la diminution du courant : elle est mise en évidence par la déviation du voltmètre en sens inverse du sens précédent.

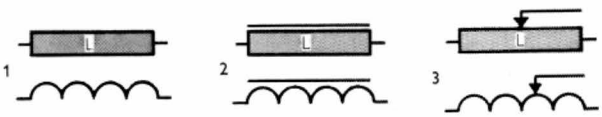


Fig. XXVI-4 — Représentations schématiques d'une inductance
1. Fixe et sans noyau de fer. — 2. Fixe avec noyau de fer. — 3. Variable

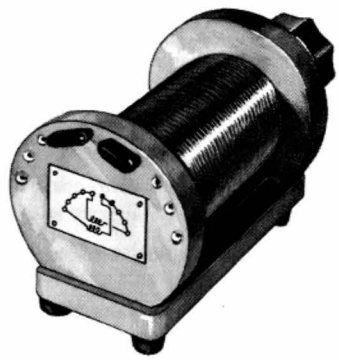


Fig. XXVI-5
Inductance

2. UNITÉ D'AUTO-INDUCTION DU SYSTÈME INTERNATIONAL

$$L = \left| \frac{e}{\frac{di}{dt}} \right|$$

L'unité d'auto-induction est le *henry* (symbole : H), dont la définition légale est la suivante : *le henry est le coefficient d'auto-induction d'un circuit fermé dans lequel est produite une f.é.m. d'un volt lorsque le courant qui le traverse varie uniformément à raison d'un ampère par seconde.*

3. INDUCTANCE D'UN SOLÉNOÏDE

Le calcul précis de l'inductance d'un circuit donné est très compliqué car il nécessite la connaissance du vecteur induction $\vec{B}$ en tout point d'une surface s'appuyant sur le circuit. Pour un solénoïde long comprenant un grand nombre de spires, une valeur approximative peut être obte-

nue en supposant que l'induction magnétique a même intensité en tout point situé à l'intérieur du solénoïde. Nous savons qu'elle est égale à $B = \mu_0 \frac{NI}{l}$ (V. chap. 23) si N et l représentent respectivement le nombre de spires et la longueur du solénoïde. Le flux Φ à travers le solénoïde est N fois plus grand que celui à travers une spire. Si nous appelons a le rayon d'une spire :

$$\Phi = N(B\,\pi\,a^2)$$

et nous tirons :

$$L = \frac{\Phi}{I} = \mu . \frac{N^2}{l}\,\pi\,a^2$$

Dans un milieu de perméabilité relative μ_r, la valeur précédente doit être multipliée par μ_r. En plaçant la bobine autour d'un noyau de fer, l'inductance est fortement augmentée (μ_r peut atteindre 2 000) ; μ_r dépendant de l'intensité du courant dans la bobine (V. t. 1, Magnétisme, chap. 2), il en est de même de L.

Il faut prendre garde au fait que les inductances des deux portions de circuit en série ne s'ajoutent pas toujours. Une inductance est toujours positive mais deux bobines mises en série peuvent avoir une inductance différente de la somme des inductances si l'une d'elles produit un champ magnétique dont le flux à travers l'autre n'est pas nul. Les inductances ne s'ajoutent que si les deux bobines sont suffisamment éloignées l'une de l'autre afin que pour chacune d'elles le flux propre soit bien supérieur au flux dû à l'autre bobine.

4. ÉTABLISSEMENT D'UN RÉGIME PERMANENT DANS UN CIRCUIT INDUCTIF

Dans un circuit inductif, le phénomène d'auto-induction n'est pas négligeable. Nous désignons respectivement par R et L la résistance et l'inductance d'un circuit alimenté par un générateur de f.é.m. E (fig. XXVI-6) ; L représente pratiquement l'inductance de la bobine tandis que R représente la somme des résistances du générateur, de la bobine et des différents conducteurs formant le circuit. Appliquons à ce circuit la loi de Pouillet. À l'instant t, si i est l'intensité du courant, la f.é.m. d'auto-induction est égale à : $e = -L\frac{di}{dt}$ et nous pouvons écrire l'équation suivante :

$$E + e = Ri$$

soit :

$$E - L\frac{di}{dt} = Ri$$

ou :

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E$$

L'intensité i est donc donnée par une équation différentielle linéaire du premier ordre, à coefficients constants et à second membre constant.

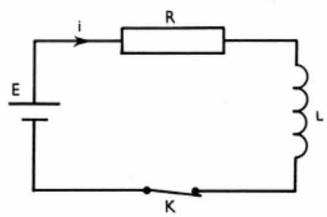


Fig. XXVI-6

Supposons que le circuit soit primitivement ouvert, et que nous fermions l'interrupteur à l'instant $t = 0$. Le flux magnétique à travers le circuit est continu ; comme il est nul avant la fermeture de l'interrupteur K, il reste nul immédiatement après et le courant à l'instant $t = 0$ est également nul.

L'intensité du courant à l'instant t est donc la solution de l'équation différentielle précédente dont la valeur est nulle à l'instant $t = 0$. Cette solution est (V. t. 1, Mathématiques, chap. 22) :

$$i = \frac{E}{R}\left(1 - \mathbf{e}^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

($\mathbf{e}$ = base des logarithmes népériens).

La courbe représentative de l'intensité i en fonction du temps (fig. XXVI-7) montre que i tend *asymptotiquement* vers une valeur $I = \frac{E}{R}$, intensité du courant en régime permanent. $\tau = \frac{L}{R}$ est homogène à un temps ; c'est la *constante de temps* du circuit.

$$i = I\left(1 - \mathbf{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

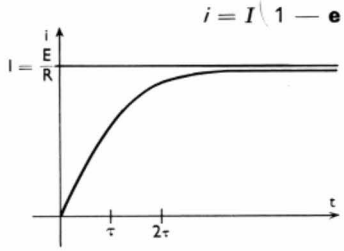


Fig. XXVI-7

Au bout d'un temps égal à la constante de temps τ, l'intensité i diffère de $\frac{1}{\mathbf{e}}$ en valeur relative de l'intensité en régime permanent. Au bout d'un temps égal à 2,3 τ, elle atteint les neuf dixièmes de la valeur I en régime permanent ($\ln 10 = 2{,}3$).

t	0	τ	2,3 τ	4,6 τ	6,9 τ	∞
i	0	$\left(1-\frac{1}{\mathbf{e}}\right)I$	$\frac{9\,I}{10}$	$\frac{99\,I}{100}$	$\frac{999\,I}{1000}$	I

En pratique la constante de temps est faible. Pour une inductance de 0,1 H et une résistance de 100 Ω, $\tau = 0{,}001$ *s;* l'intensité du courant sera égale à I, à 10^{-4} près, au bout d'un temps inférieur à un centième de seconde. Bien qu'en théorie, il faille un temps infini pour atteindre la valeur correspondant au régime permanent, pratiquement, celle-ci est atteinte au bout d'un temps très bref.

Pendant l'établissement du régime permanent, la bobine joue le rôle d'un récepteur de f.c.é.m. $e' = L\frac{di}{dt}$; elle transforme de l'énergie électrique en une forme autre que de la chaleur.

À l'instant t, le courant a une intensité $i = \frac{E}{R}\left(1 - \mathbf{e}^{-\frac{R}{L}t}\right)$ et l'énergie p transformée autrement qu'en chaleur, à cet instant est égale à :

$$p = e'i = L\frac{di}{dt}i$$

La valeur de l'énergie correspondante transformée au cours de l'établissement du régime permanent est obtenue par intégration mathématique :

$$W = \int_0^{\infty} p\,dt = \int_0^{I} Li\,di = \frac{1}{2}L\,I^2$$

Le circuit inductif, d'inductance L, parcouru par un courant I, a emmagasiné une énergie électromagnétique égale à :

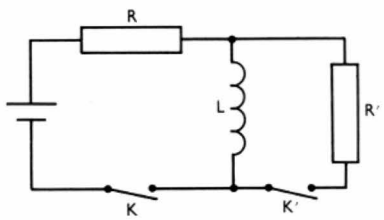
$$\boxed{W = \frac{1}{2}L\,I^2}$$

Cette énergie est localisée dans l'espace tout entier et en tout point où l'induction est $\vec{B}$, la densité volumique d'énergie est : $\frac{1}{2}\left(\frac{B^2}{\mu_0}\right)$. Des calculs précis montrent que l'intégrale de cette densité d'énergie étendue à tout l'espace est bien égale à $\frac{1}{2}L\,I^2$. Cette énergie peut être récupérée sous forme d'énergie électrique lors de la diminution de l'intensité du courant dans le circuit.

5. RUPTURE DE COURANT DANS UN CIRCUIT INDUCTIF

L'énergie magnétique emmagasinée par un circuit inductif peut être reconvertie en énergie électrique. Ajoutons aux bornes de la bobine du circuit précédent une résistance R' et un interrupteur K' (fig. XXVI-8). K étant fermé

Fig. XXVI-8



et K' ouvert, un régime permanent s'établit dans le circuit et celui-ci est traversé par un courant I. À un instant que nous prenons pour origine, simultanément fermons K' et ouvrons K. Le flux à travers la bobine ne peut varier de façon discontinue (sinon la f.é.m. serait infinie) et à l'instant pris pour origine des temps, un courant d'intensité I traverse le circuit bobine-résistance R'. À l'instant t, l'intensité du courant est i et dans le circuit, la seule f.é.m. à considérer est alors la f.é.m. d'auto-induction : $e = -L\dfrac{di}{dt}$

Si nous supposons que la résistance de la bobine est négligeable (sinon il faut l'ajouter à R'), nous pouvons appliquer la loi d'Ohm au circuit ; nous obtenons la relation suivante :

$$e = -L\frac{di}{dt} = R'i \quad \text{soit :} \quad \frac{di}{dt} = -\frac{R'}{L}i$$

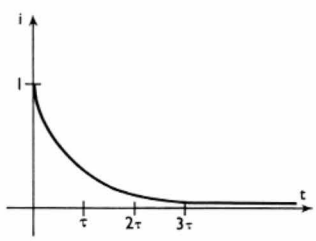
L'intensité i est donc la solution de cette équation différentielle dont la valeur est I au temps $t = 0$; elle a pour expression (V. t. 1, Mathématiques, chap. 22)

$$i = I\mathbf{e}^{-\frac{R'}{L}t}$$

La courbe de variation de l'intensité i en fonction du temps (fig. XXVI-9) montre que cette intensité tend

Fig. XXVI-9

$i = Ie^{-t/\tau}$



asymptotiquement vers la valeur 0 lorsque le temps augmente indéfiniment. La constante de temps du circuit est la quantité $\tau = \dfrac{L}{R'}$. La valeur initiale du courant est divisée par $\mathbf{e}$ au bout d'un temps égal à la constante de temps τ, par 10 au bout de 2,3 τ, par 100 au bout de 4,6 τ, par 1 000 au bout de 6,9 τ, etc.

t	0	τ	2,3 τ	4,6 τ	6,9 τ	∞
i	I	$\dfrac{I}{\mathbf{e}}$	$\dfrac{I}{10}$	$\dfrac{I}{100}$	$\dfrac{I}{1000}$	0

La puissance p dissipée par effet Joule à l'instant t est égale à $p = R'i^2$ et l'énergie totale W transformée en chaleur dans R' est obtenue par intégration mathématique :

$$W = \int_0^{\infty} p\,dt = R'I^2\int_0^{\infty} \mathbf{e}^{-2\frac{R'}{L}t}\,dt = \frac{1}{2}LI^2$$

car :

$$\int \mathbf{e}^{at}\,dt = \frac{\mathbf{e}^{at}}{a}$$

L'énergie électromagnétique emmagasinée par la bobine est donc intégralement restituée sous forme d'énergie électrique et elle est transformée en chaleur, par effet Joule, dans les résistances du circuit.

Remarque : La forme d'énergie que nous appelons *énergie électromagnétique* est localisée dans l'espace et la densité volumique d'énergie est égale à $\dfrac{1}{2}\dfrac{B^2}{\mu_0}$. Par l'intermédiaire de la f.é.m. d'induction s'effectuent des échanges entre l'énergie électrique d'un circuit et l'énergie magnétique de l'espace. Lorsque cette f.é.m. est positive, il y a transformation d'énergie électromagnétique en énergie électrique. Lorsque cette f.é.m. est négative, le circuit inductif joue le rôle d'un récepteur et il y a transformation d'énergie électrique en énergie électromagnétique.

6. DÉCHARGE D'UN CONDENSATEUR À TRAVERS UN CIRCUIT INDUCTIF

6.1. Étude mathématique. — Un condensateur de capacité C est branché, par l'intermédiaire d'un interrupteur K, aux extrémités d'une bobine d'inductance L (fig. XXVI-10). Nous désignons par R la résistance totale du circuit (résistance de la bobine, des fils de connexion, et éventuellement résistance supplémentaire intercalée en série dans le circuit). L'interrupteur étant préalablement ouvert,

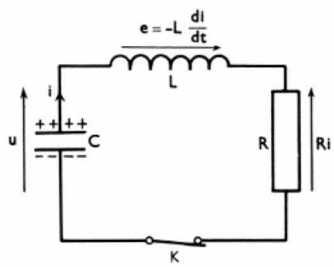


Fig. XXVI-10

nous le fermons à un instant que nous prenons pour origine des temps. Désignons par Q la charge initiale du condensateur. À l'instant t, cette charge est représentée par q ; la d.d.p. aux bornes du condensateur est alors égale à $u = \dfrac{q}{C}$ et l'intensité du courant circulant dans le circuit est i ($i = -\dfrac{dq}{dt}$, car avec les conventions de la figure XXVI-10, i a le sens choisi et est positif pendant la décharge de C, c'est-à-dire lorsque dq est négatif). La f.é.m. induite dans la bobine est égale à $-L\dfrac{di}{dt}$. En appliquant la loi d'Ohm à la portion de circuit constituée par la bobine et la résistance, nous déduisons l'expression de la d.d.p. aux bornes de cet ensemble :

$$u = L\frac{di}{dt} + Ri$$

Par la suite, nous pouvons écrire :

$$u = L\frac{di}{dt} + Ri = \frac{q}{C}$$

ou

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

La charge q du condensateur est représentée par une fonction qui est la solution de l'équation différentielle vérifiant les conditions initiales suivantes : à l'instant $t = 0$, $q = Q$ et $i = -\dfrac{dq}{dt} = 0$

C'est une équation différentielle du second ordre, à coefficients constants, sans second membre (V. t. 1, Mathématiques, chap. 22) ; la solution dépend du signe du discriminant $\left(\Delta = R^2 - 4\dfrac{L}{C}\right)$ de l'équation caractéristique suivante :

$$Lx^2 + Rx + \frac{1}{C} = 0$$

6.1.1. Δ est positif ou nul : décharge apériodique. — Lorsque la résistance du circuit est suffisamment grande $\left(R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}\right)$ le discriminant de l'équation précédente est positif. Les deux racines de l'équation caractéristique sont réelles. Soit r_1 et r_2 ces racines, l'intégrale générale peut s'écrire :

$$q = Ae^{-r_1 t} + Be^{-r_2 t}$$

et les conditions initiales permettent de calculer les constantes d'intégration A et B.

$t = 0$: $\quad q = Q = A + B$

$$\frac{dq}{dt} = 0 = -r_1 A - r_2 B$$

D'où nous tirons :

$$A = \frac{r_2}{r_2 - r_1} Q \qquad B = \frac{-r_1}{r_2 - r_1} Q$$

La charge q du condensateur et l'intensité i à l'instant t sont donc représentées par les fonctions suivantes (fig. XXVI-11) :

$$q = \frac{Q}{r_2 - r_1}\left(r_2 e^{-r_1 t} - r_1 e^{-r_2 t}\right)$$

$$i = -\frac{dq}{dt} = Q\frac{r_2 r_1}{r_2 - r_1}\left(e^{-r_1 t} - e^{-r_2 t}\right)$$

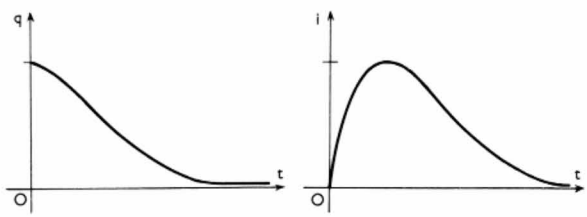


Fig. XXVI-11 — Décharge apériodique

Une telle décharge est appelée *décharge apériodique*. La valeur de la résistance pour laquelle le discriminant est nul est appelée *résistance critique* : $R_C = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Dans le cas particulier où la résistance du circuit a exactement la valeur de la résistance critique, l'équation caractéristique admet une racine double $r_1 = r_2 = -\frac{R}{2L}$ et la solution générale de l'équation différentielle est alors : $q = (At + B)\, e^{-\frac{Rt}{2L}}$. Un calcul analogue au calcul précédent permet de déterminer A et B en fonction des données initiales. La charge q et l'intensité i sont alors représentées par les fonctions suivantes :

$$q = Q\left(1 - \frac{Rt}{2L}\right) e^{-\frac{Rt}{2L}}$$

$$i = Q\frac{R^2 t}{4L^2} e^{-\frac{Rt}{2L}}$$

La résistance critique est celle pour laquelle la charge q du condensateur et l'intensité i du courant tendent le plus rapidement vers zéro. Le régime de décharge est appelé régime critique ; la courbe représentative de q pour $R = R_C$ est au-dessous de la courbe représentative de q pour $R > R_C$

6.1.2. Δ est négatif : décharge oscillatoire amortie. — Lorsque la résistance du circuit est inférieure à la résistance critique, le discriminant est négatif. Les racines r_1 et r_2 sont alors imaginaires conjuguées.

$r_1 = (a + j\omega)$ $\qquad$ $r_2 = (a - j\omega)$

avec $\quad a = -\frac{R}{2L}$ et $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - a^2}$

Les calculs des constantes A et B effectués précédemment restent valables. Les résultats sont souvent simplifiés grâce à l'introduction de la fonction suivante :

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$$

$$q = \frac{Q}{r_2 - r_1}\left(r_2 e^{-r_1 t} - r_1 e^{-r_2 t}\right)$$

$$= \frac{Q}{-2j\omega}\left[(a - j\omega)\, e^{-(a + j\omega)t} - (a + j\omega) e^{-(a - j\omega)t}\right]$$

Après simplification nous obtenons les résultats suivants :

$$q = Qe^{-at}\left(\cos\omega t + \frac{a}{\omega}\sin\omega t\right)$$

$$i = Q\frac{a^2 + \omega^2}{\omega} e^{-at}\sin\omega t$$

La charge et l'intensité sont des fonctions sinusoïdales amorties du temps t (fig. XXVI-12). Le nombre $|a|$ caractérise l'*amortissement*. Son inverse $\tau = \frac{2L}{R}$ est appelé *constante de temps du circuit*. L'amortissement est d'autant plus rapide que la constante de temps est petite, donc que $|a|$ est grand.

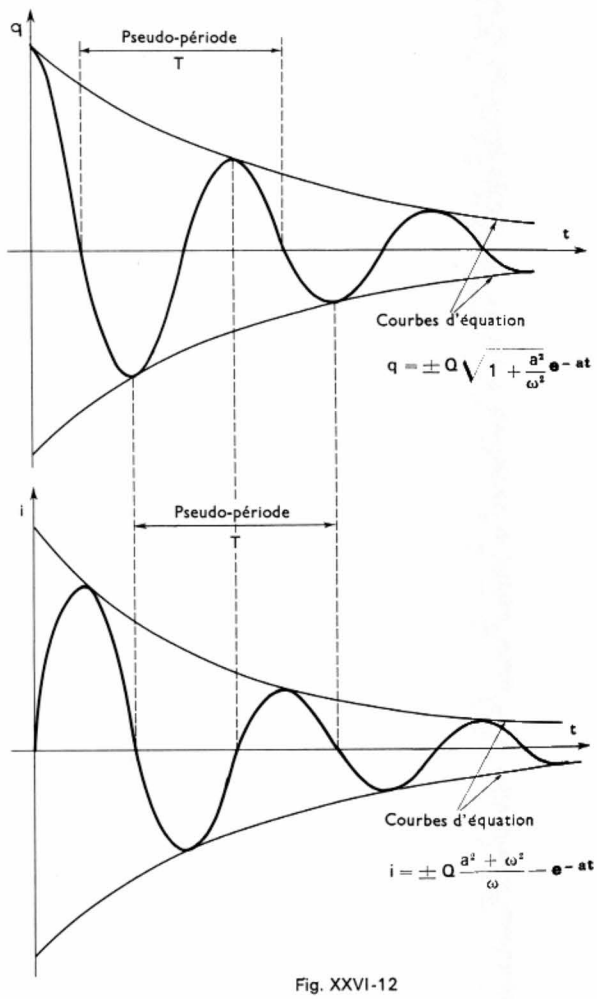
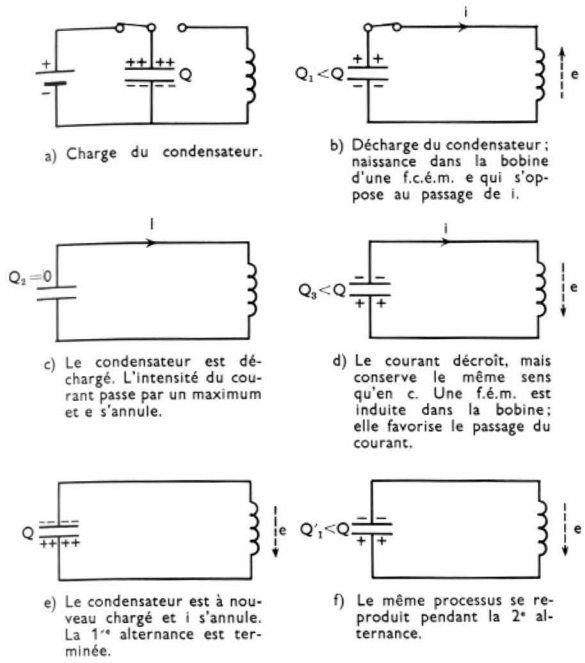


Fig. XXVI-12

Le nombre $T = \frac{2\pi}{\omega}$ est appelé *pseudo-période du circuit*. C'est le double de l'intervalle de temps qui sépare deux zéros successifs de l'intensité du courant ou de la charge du condensateur.

Lorsque l'amortissement est faible, c'est-à-dire lorsque $|a|$ est petit devant ω (les arguments des nombres r_1 et r_2 sont voisins de $+\frac{\pi}{2}$ et de $-\frac{\pi}{2}$), T est très voisin de $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ qui est appelé *période propre du circuit*. Les



a) Charge du condensateur.

b) Décharge du condensateur ; naissance dans la bobine d'une f.c.é.m. e qui s'oppose au passage de i.

c) Le condensateur est déchargé. L'intensité du courant passe par un maximum et e s'annule.

d) Le courant décroît, mais conserve le même sens qu'en c. Une f.é.m. est induite dans la bobine ; elle favorise le passage du courant.

e) Le condensateur est à nouveau chargé et i s'annule. La 1re alternance est terminée.

f) Le même processus se reproduit pendant la 2e alternance.

Fig. XXVI-13 — Obtention d'oscillations électriques amorties

courbes représentatives de q et de i peuvent alors être assimilées à des sinusoïdes. Il en est rigoureusement ainsi dans le cas particulier (physiquement irréalisable) où la résistance du circuit est nulle ; les solutions précédentes se simplifient et deviennent :

$$\begin{cases} q = Q\cos\omega_0 t = Q\cos 2\pi\dfrac{t}{T_0} \\ i = Q\,\omega_0 \sin\omega_0 t = \dfrac{2\pi}{T_0} Q \sin 2\pi\dfrac{t}{T_0} \text{ avec } \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \end{cases}$$

La période d'oscillation est alors la période propre du circuit.

Lorsque l'amortissement augmente, la pseudo-période T augmente également jusqu'à devenir infinie dans le cas de l'amortissement critique.

6.2. Échange d'énergie au cours de la décharge du condensateur. — Initialement l'énergie est accumulée sous forme d'énergie électrostatique dans le condensateur. Pendant la première décharge de cet appareil, cette énergie est convertie en énergie électrique qui est en partie dissipée par effet Joule dans les résistances du circuit, et en partie emmagasinée par la bobine sous forme d'énergie électromagnétique. Dans le cas de la décharge oscillatoire amortie, lorsque la charge du condensateur devient nulle, l'énergie se trouve uniquement sous forme d'énergie électromagnétique ; celle-ci se transforme ensuite en énergie électrique et un courant circule à nouveau dans le circuit. Le condensateur se recharge mais l'armature initialement positive prend une charge négative et inversement. Lorsque la charge q atteint son extremum, il ne circule plus aucun courant dans le circuit : toute l'énergie électrique restante est sous forme d'énergie électrostatique dans le condensateur. Ces transformations ne se reproduisent pas indéfiniment car au cours de chaque échange d'énergie (qui se fait par l'intermédiaire du courant électrique), il y a des pertes par effet Joule et cela explique l'amortissement des oscillations. Celui-ci est d'autant plus important que la résistance R du circuit est grande c'est-à-dire que les pertes d'énergie par effet Joule sont élevées. Si la résistance du circuit était nulle, il n'y aurait aucune perte d'énergie ; l'énergie électrique passerait du condensateur dans la bobine et réciproquement et la décharge serait sinusoïdale (fig. XXVI-13).

Remarque : À l'instant t, la charge du condensateur est q, et le courant dans le circuit est égal à $i = -\dfrac{dq}{dt}$. L'énergie W du système se trouve sous forme électrostatique dans le condensateur $\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right)$ et sous forme électromagnétique dans la bobine $\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$

$$W = \frac{1}{2}\left(\frac{q^2}{C} + Li^2\right)$$

Si nous dérivons cette équation par rapport au temps, nous obtenons l'égalité suivante :

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{C} q\frac{dq}{dt} + Li\frac{di}{dt}$$

comme : $\quad i = -\dfrac{dq}{dt}$ et $\dfrac{di}{dt} = -\dfrac{d^2q}{dt^2}$

nous avons :

$$\frac{dW}{dt} = -i\left(\frac{q}{C} + L\frac{d^2q}{dt^2}\right) = -i\left(-R\frac{dq}{dt}\right) = -Ri^2$$

(en utilisant l'équation différentielle donnant q).

Nous voyons que pendant un intervalle de temps dt, la variation d'énergie est égale à $dW = -R.i^2.dt$, ce qui est normal puisque les seules pertes d'énergie se produisent par effet Joule.

7. OUVERTURE D'UN CIRCUIT INDUCTIF

A l'ouverture d'un circuit, la f.é.m. d'auto-induction est d'autant plus importante que la coupure se produit en un temps plus court. Sa valeur est en général suffisante pour ioniser l'air qui se trouve entre les deux pôles au moment où ils sont séparés. Un courant peut ainsi passer de l'un à l'autre, engendrant un arc d'extra-rupture. Un important dégagement de chaleur en résulte, ainsi qu'une destruction des contacts. Ce phénomène pose de délicats problèmes pour la réalisation des appareils de coupure de courant (interrupteurs, contacteurs, disjoncteurs, etc.). (V. t. 2, Transport et distribution de l'énergie électrique, chap. 6).

CHAPITRE XXVII
INDUCTANCE MUTUELLE

1. DÉFINITION

Considérons deux circuits linéaires rigides C_1 et C_2, parcourus par des courants I_1 et I_2 (fig. XXVII-1). Le flux Φ_1 du vecteur induction magnétique à travers le circuit C_1 est la somme de son flux propre Φ_{11} (égal au produit $L_1 I_1$, par définition de l'inductance L_1) et du flux Φ_{12} dû à la présence de C_2. Ce flux Φ_{12} est proportionnel à l'intensité du courant dans C_2 : $\Phi_{12} = MI_2$; M est le *coefficient d'inductance mutuelle* de C_2 sur C_1

$$\Phi_1 = L_1 I_1 + MI_2$$

De même le flux Φ_2 à travers C_2 est la somme du flux propre $\Phi_{22} = L_2 I_2$ et du flux envoyé par C_1 (fig. XXVII-2). Ce dernier flux est proportionnel à l'intensité I_1 du courant

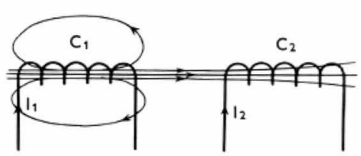


Fig. XXVII-1

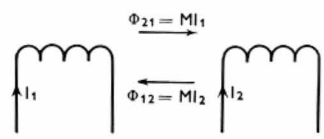


Fig. XXVII-2

dans C_1 et le coefficient de proportionnalité est encore M ($\Phi_{21} = MI_1$)

$$\Phi_2 = L_2 I_2 + MI_1$$

(M, quotient d'un flux d'induction et de l'intensité d'un courant, s'exprime en *henrys* comme une inductance).

L'inductance mutuelle M dépend de la *forme* et des *positions respectives* des deux circuits C_1 et C_2. Ce coefficient peut être *positif* ou *négatif* alors que l'inductance propre est toujours positive.

Lorsque deux circuits électriques sont placés de telle façon que leur inductance mutuelle n'est pas nulle, ils sont dits *couplés par induction*. Toute variation de courant dans l'un des circuits provoque une variation de flux dans l'autre et il en résulte la naissance d'une f.é.m. d'induction.

2. CALCUL DE L'INDUCTANCE MUTUELLE DE DEUX CIRCUITS

L'inductance mutuelle M de C_1 et C_2 peut se déduire du calcul du flux du vecteur induction magnétique $\vec{B_1}$ créé par C_1 à travers C_2 (fig. XXVII-3). Le flux du vecteur

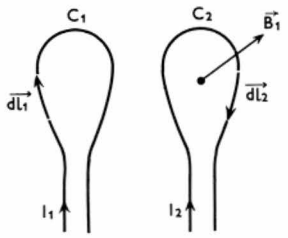


Fig. XXVII-3

$\vec{B_1}$ à travers une surface limitée par le contour C_2 est égal à la circulation du potentiel vecteur $\vec{A_1}$ le long de C_2 (V. chap. 23, § 7).

$$MI_1 = \int_{C_2} \vec{A_1} \cdot \vec{dl_2}$$

avec

$$\vec{A_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \int_{C_1} \frac{\vec{dl_1}}{r}$$

r désignant la distance entre $\vec{dl_1}$ et $\vec{dl_2}$. D'où nous déduisons la formule suivante :

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C_1} \int_{C_2} \frac{\vec{dl_1} \cdot \vec{dl_2}}{r} \quad \text{(formule de Neumann)}$$

Les deux circuits jouent des rôles symétriques : le coefficient d'inductance mutuelle de C_1 sur C_2 est le même que celui de C_2 sur C_1.

3. APPLICATION DE L'INDUCTANCE MUTUELLE : CALCUL DES FORCES S'EXERÇANT ENTRE DEUX CIRCUITS ÉLECTRIQUES

La méthode des travaux virtuels (V. chap. 18, § 4) permet de calculer les forces s'exerçant entre C_1 et C_2.

Supposons C_1 fixe et C_2 susceptible de se déplacer. Le travail des forces électromagnétiques est égal au produit de I_2 (supposé constant) et de la variation de flux $d(MI_1)$ embrassé par le circuit :

$$dW = I_2 d(MI_1) = I_1 I_2 dM$$

Dans le cas d'une translation, la résultante des forces qui s'exercent sur C_2 sera égale à :

$$\vec{F} = I_1 I_2 \overrightarrow{\text{grad}}\, M$$

Ses composantes selon trois axes orthonormés ont donc les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} F_x = I_1 I_2 \dfrac{\partial M}{\partial x} \\ F_y = I_1 I_2 \dfrac{\partial M}{\partial y} \\ F_z = I_1 I_2 \dfrac{\partial M}{\partial z} \end{cases}$$

Si C_2 est susceptible de se déplacer uniquement par rotation autour d'un axe Ox, la composante T_x sur Ox du moment résultant est donnée par la relation suivante :

$$T_x = I_1 I_2 \frac{\partial M}{\partial \alpha}$$

α désignant l'angle utilisé pour définir la rotation autour de Ox.

4. PASSAGE D'ÉNERGIE D'UN CIRCUIT À UN AUTRE

Considérons deux circuits couplés par induction : l'un d'eux C_1 est traversé par un courant d'intensité i_1 variable, l'autre C_2 est fermé sur une résistance R (fig. XXVII-4).

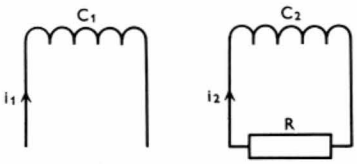


Fig. XXVII-4

Lorsque i_1 varie, il apparaît alors un courant induit i_2 dans le circuit C_2. La f.é.m. induite, qui est l'opposé de la dérivée du flux ($Mi_1 + L_2 i_2$) par rapport au temps est égale à :

$$e = -\left(M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}\right)$$

Si nous appliquons la loi d'Ohm à ce circuit, nous obtenons la relation suivante :

$$e = Ri_2$$

ou :

$$M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} + Ri_2 = 0$$

En multipliant les deux membres de l'égalité par $i_2\, dt$ nous déduisons une relation comprenant trois termes correspondant chacun à une variation d'énergie :

$$Mi_2\, di_1 + L_2 i_2\, di_2 + Ri_2^2\, dt = 0$$

Les deux premiers termes correspondent à l'*énergie reçue par* C_2 pendant un intervalle de temps dt, tandis que ($Ri_2^2\, dt$) représente l'*énergie électrique dissipée dans le circuit sous forme de chaleur* pendant le même temps.

Evidemment, puisque le circuit C_2 est parcouru par un courant i_2, du fait du couplage par mutuelle inductance, une f.é.m. égale à $-M \dfrac{di_2}{dt}$ est induite dans C_1. De la même façon, à cause de cette f.é.m. induite, C_1 joue le rôle d'un récepteur. En conclusion, de l'énergie électrique est transformée en énergie magnétique dans C_1 et celle-ci est ensuite transformée à nouveau en énergie électrique dans C_2.

5. APPLICATIONS : BOBINE D'INDUCTION ET BOBINE DE RUHMKORFF

Le *transformateur* constitue une application très importante des circuits couplés par mutuelle induction ; il est étudié en détail en électrotechnique (V. t. 1, Électrotechnique, chap. 5).

Une *bobine d'induction* est un transformateur dont l'enroulement primaire est parcouru par un courant périodiquement interrompu. Il est composé de deux enroulements superposés sur un même noyau ferromagnétique. Le premier, appelé *primaire* ou *inducteur*, est relié à un générateur de faible force électromotrice, par exemple une batterie d'accumulateurs. L'autre, appelé secondaire ou *induit*, est constitué par un conducteur plus long et plus fin et relié à deux bornes a et b (fig. XXVII-5). Un interrupteur permet d'ouvrir et de refermer le circuit primaire. Le secondaire étant en circuit ouvert, la différence de potentiel u entre les bornes a et b est égale à la f.é.m. induite dans le secondaire soit $-M \dfrac{di}{dt}$, M désignant le coefficient d'inductance mutuelle des deux enroulements et i le courant à travers le primaire.

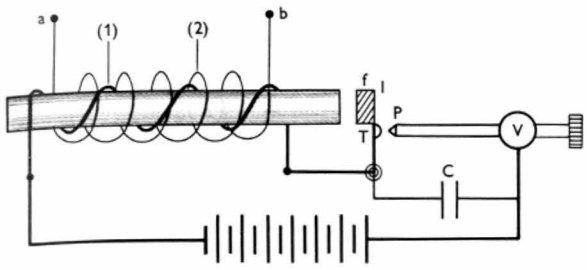


Fig. XXVII-5

La tension u est donc d'autant plus élevée que la variation d'intensité dans le circuit primaire est brusque et que M est grand. Si les bornes a et b sont à faible distance l'une de l'autre, une étincelle jaillit. En fait, cela ne se produit qu'à la rupture car dans ce cas l'intensité passe très brusquement de sa valeur de régime à zéro $\left(\frac{di}{dt} \text{ grand}\right)$, alors qu'à la fermeture de l'interrupteur, les phénomènes d'auto-induction dans le primaire empêchent une variation trop brusque de l'intensité. Pour augmenter la valeur du coefficient M, la bobine comporte un noyau de fer de grande perméabilité magnétique et l'enroulement secondaire est formé d'un grand nombre de spires. Certaines bobines d'induction puissantes permettent d'atteindre des d.d.p. suffisantes pour produire des étincelles de plusieurs dizaines de centimètres de longueur (bobines de Ruhmkorff ; fig. XXVII-6).

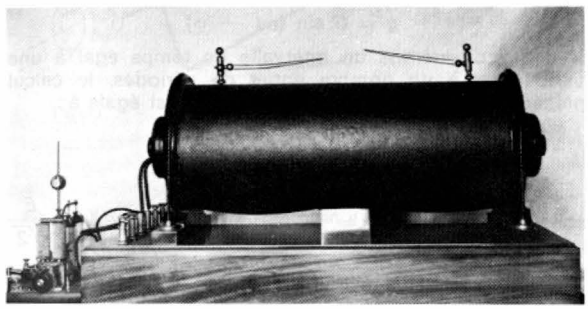


Fig. XXVII-6 — Bobine de Ruhmkorff (*C.N.A.M.*)

Pour obtenir des coupures brusques du circuit primaire, l'interrupteur est constitué par une vis réglable V et un trembleur T, qui est une lame vibrante portant une pièce de fer doux f. Dès que le courant passe dans l'enroulement primaire, le noyau de la bobine attire la pièce de fer doux f et, ce faisant, empêche le contact électrique entre la vis V et le trembleur T. La bobine n'étant plus alimentée et la lame faisant ressort, T revient à sa position initiale et le contact avec la vis V est rétabli : le courant passe à nouveau. Le circuit primaire est ainsi ouvert et fermé plusieurs fois par seconde, au rythme des vibrations du trembleur. Ce rythme peut être légèrement modifié en agissant sur la vis V.

Un condensateur C de 1 μ F environ empêche la formation d'une étincelle de rupture dans le circuit primaire, étincelle qui détériorerait rapidement les contacts électriques entre la vis V et la lame vibrante.

6. INDUCTANCE ÉQUIVALENTE À DEUX INDUCTANCES EN SÉRIE

Les inductances de deux portions d'un circuit ne s'ajoutent pas, car l'inductance totale dépend de l'influence des deux portions de circuit l'une sur l'autre. Considérons, par exemple, deux bobines d'inductances L_1 et L_2 branchées en série et couplées par induction, leur inductance mutuelle étant M (fig. XXVII-7). Lorsque ces bobines sont parcourues

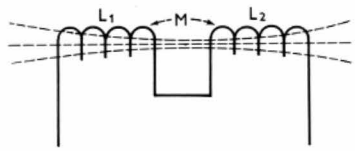


Fig. XXVII-7

par un courant variable i, il apparaît dans la première une f.é.m. $-(L_1 + M)\frac{di}{dt}$ car le flux qui la traverse est égal à : $(L_1 i + Mi)$. De la même façon, nous aurons dans la seconde une f.é.m. égale à $-(L_2 + M)\frac{di}{dt}$. Au total, la f.é.m. induite dans le circuit est égale à

$$-(L_1 + L_2 + 2M)\frac{di}{dt}$$

L'ensemble des deux bobines en série est donc équivalent à une bobine unique d'inductance :

$$L = L_1 + L_2 + 2M$$

Le signe de M dépend des sens des courants dans chaque bobine ; en inversant le sens du courant dans une seule bobine, M change de signe, alors qu'en l'inversant dans les deux bobines, M ne change pas de signe.

COURANTS ALTERNATIFS

CHAPITRE XXVIII

GÉNÉRALITÉS

1. DÉFINITIONS

Le courant induit dans une bobine soumise au flux variable d'un aimant animé d'un mouvement de va-et-vient (fig. XXVIII-1) change de sens chaque fois que le mouvement de l'aimant change de sens. Si le cycle de déplacement de l'aimant se répète régulièrement, le flux et le courant sont des grandeurs périodiques. Nous sommes donc amenés à définir divers types de courants et nous appelons :

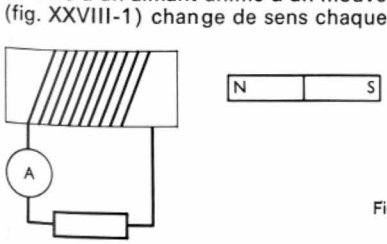


Fig. XXVIII-1

1° *Courant continu*, un courant de sens invariable et d'intensité constante. La courbe représentative de l'intensité en fonction du temps est une droite parallèle à l'axe des abscisses (fig. XXVIII-2).

2° *Courant unidirectionnel* un courant de sens invariable (fig. XXVIII-3).

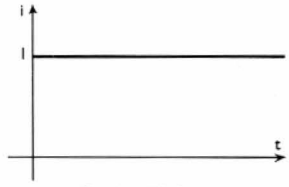


Fig. XXVIII-2

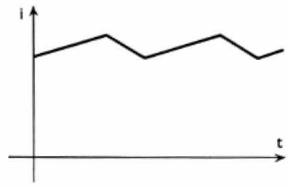
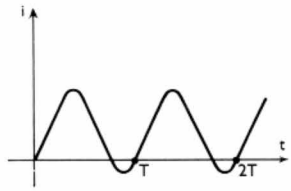


Fig. XXVIII-3

3° *Courant périodique*, un courant dont l'intensité reprend des valeurs égales à des intervalles de temps égaux, la durée de chacun de ces intervalles représentant la période du courant (fig. XXVIII-4). Elle est souvent désignée par la lettre T. La fréquence f d'un courant périodique est égale au nombre de périodes contenues

Fig. XXVIII-4

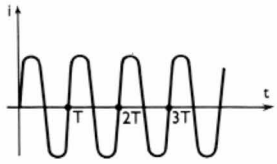


dans une seconde. Elle est donc égale à l'inverse de la période T :

$$f = \frac{1}{T}$$

Elle s'exprime en *hertz* (symbole Hz). Pour le courant fourni par le réseau de distribution la période est égale à $\frac{1}{50}$ s (soit 20 ms), et la fréquence à 50 Hz.

Fig. XXVIII-5



Un courant périodique est sinusoïdal si la courbe représentative de l'intensité i en fonction du temps est une sinusoïde (fig. XXVIII-5).

2. APPROXIMATION DES ÉTATS QUASI STATIONNAIRES

Lorsque l'intensité du courant est la même en tout point du circuit électrique, nous admettrons que toutes les lois de l'électrostatique, de l'électrocinétique et de l'électromagnétisme sont applicables *à chaque instant t*. Cela est réalisé pour un courant sinusoïdal, lorsque sa fréquence est faible et que les dimensions du circuit électrique sont très inférieures à la longueur d'onde du courant (elle est égale au produit c_0T de la vitesse c_0 de la lumière dans le vide et de la période T du courant). Pratiquement cela est réalisé facilement pour le courant industriel (de fréquence 50 Hz) dont la longueur d'onde est 6 000 km ; il n'en est pas de même pour les courants utilisés en électroacoustique (fréquences inférieures à 20 000 Hz) car leurs longueurs d'ondes peuvent être proches de quelques dizaines de kilomètres.

3. DIFFÉRENTES CARACTÉRISTIQUES D'UNE GRANDEUR VARIANT EN FONCTION DU TEMPS

La **valeur instantanée** d'une grandeur est celle qui peut la caractériser à un instant donné. Elle est souvent représentée par une lettre minuscule : i pour l'intensité d'un courant, u pour une d.d.p. et e pour une f.é.m.

La **valeur maximale** ou **valeur de crête** correspond à la plus grande valeur atteinte par la grandeur. Elle est généralement représentée par une lettre surmontée d'un accent circonflexe ($\widehat{I}$, $\widehat{U}$, ...) et parfois par une lettre majuscule suivie de max en indice (I_{max}, U_{max}, ...).

La **valeur moyenne** pendant un certain intervalle de temps représente la moyenne des valeurs prises par la grandeur pendant ce temps. Elle est souvent désignée par une lettre majuscule suivie de l'abréviation : moy. Ainsi I_{moy}, U_{moy}, E_{moy} représentent les valeurs moyennes d'une intensité, d'une d.d.p., d'une f.é.m.

La valeur moyenne G_{moy} entre deux instants t_1 et t_2 d'une grandeur dont la valeur instantanée est g se calcule à l'aide de la relation suivante :

$$G_{moy} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} g\,dt$$

Ainsi l'intensité moyenne I_{moy} d'un courant périodique de valeur instantanée i, pendant un intervalle de temps égal à une période T, a pour expression :

$$I_{moy} = \frac{1}{T} \int_0^T i\,dt$$

Nous pouvons constater que l'intensité moyenne d'un courant périodique est égale à l'intensité d'un courant continu qui transporterait la même quantité d'électricité que lui pendant le même temps. Dans le cas d'un courant sinusoïdal l'intensité moyenne pendant une période a une valeur nulle. Cela résulte du fait que la même quantité d'électricité traverse une section donnée dans un sens pendant la première demi-période, dans l'autre sens pendant la deuxième demi-période, et globalement tout se passe comme s'il n'y avait pas eu transport d'électricité.

La **valeur efficace** d'une grandeur g entre deux instants t_1 et t_2 (représentée en général par une majuscule suivie de l'indice eff : I_{eff}, U_{eff}, E_{eff} pour les valeurs efficaces d'une intensité, d'une d.d.p., d'une f.é.m.) est donnée par la relation générale suivante :

$$G^2_{eff} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} g^2\,dt$$

(g désigne la valeur instantanée de la grandeur considérée).

L'intensité efficace d'un courant est égale à l'intensité d'un courant continu produisant le même dégagement de chaleur que lui en passant dans la même résistance pendant le même temps.

Dans le cas d'une grandeur sinusoïdale donnée par l'expression :

$$g = \widehat{G} \sin(\omega t - \varphi)$$

si nous considérons un intervalle de temps égal à une période ou à un nombre entier de périodes, le calcul précédent montre que la valeur efficace est égale à :

$$G_{eff} = \frac{\widehat{G}}{\sqrt{2}}$$

soit, pour une d.d.p. $U_{eff} = \frac{\widehat{U}}{\sqrt{2}}$, pour une f.é.m. $E_{eff} = \frac{\widehat{E}}{\sqrt{2}}$

et pour une intensité de courant $I_{eff} = \frac{\widehat{I}}{\sqrt{2}}$.

Le temps de fonctionnement d'un récepteur étant toujours égal, ou sensiblement égal, à un nombre entier de périodes, l'intensité efficace est une grandeur qui permet de très bien caractériser un courant sinusoïdal dans tous les cas.

En conclusion, il faut retenir que nous comparons toujours un courant quelconque à un courant continu. Selon que nous considérons la quantité d'électricité transportée ou l'effet Joule, il est défini par son intensité moyenne ou par son intensité efficace. Pour un courant sinusoïdal la première étant nulle, *seule la seconde est utilisée*, si bien que le plus souvent nous parlons d'*intensité d'un courant sinusoïdal sans ajouter le qualificatif* **efficace** car cette précision paraît superflue. Il en est d'ailleurs de même pour une d.d.p. ou pour une f.é.m.

4. GRANDEUR PÉRIODIQUE ET GRANDEUR ALTERNATIVE

Toute fonction $f(t)$ périodique, de période T, peut se mettre sous la forme suivante (V. t. 1, Mathématiques, chap. 23) :

$$f(t) = A_0 + \widehat{A}_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_1\right) + \widehat{A}_2 \cos\left(\frac{4\pi t}{T} + \varphi_2\right) + \ldots + \widehat{A}_n \cos\left(\frac{2n\,\pi t}{T} + \varphi_n\right) + \ldots$$

Elle est décomposée en *série de Fourier*, le coefficient A_0 est la **valeur moyenne de la fonction,** la fonction $\left[\widehat{A}_1 \cos\left(\frac{2\,\pi t}{T} + \varphi_1\right)\right]$ est le **fondamental** et les autres

fonctions sont les **harmoniques.** Le coefficient $\widehat{A}_n$ est appelé *amplitude du $n^{ième}$ harmonique* et l'angle φ_n (défini modulo 2π) est sa phase initiale (phase à l'instant $t = 0$).

Une grandeur périodique est **alternative** si sa *valeur* **moyenne A_0 est nulle.** C'est le cas d'une *grandeur sinusoïdale.*

Toute grandeur périodique est donc la somme de grandeurs sinusoïdales et éventuellement d'une constante (si la grandeur n'est pas alternative).

Dans ce qui suit, nous considérons (sauf indication contraire) uniquement des grandeurs sinusoïdales car les tensions employées pratiquement sont sinusoïdales. Cependant les résultats obtenus sont très généraux. En effet, la plupart des lois de l'électricité étant linéaires, les appliquer à une grandeur périodique quelconque *revient à les appliquer à chaque harmonique* (qui est une grandeur sinusoïdale) *et à faire la somme des résultats obtenus.* En revanche des précautions doivent être prises lorsque les lois ne sont pas linéaires.

CHAPITRE XXIX
LES EFFETS D'UN COURANT ALTERNATIF

1. OBTENTION D'UN COURANT SINUSOÏDAL

Dans un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B}$, une spire tourne avec une vitesse angulaire constante (fig. XXIX-1). Le flux Φ qui la traverse est proportionnel

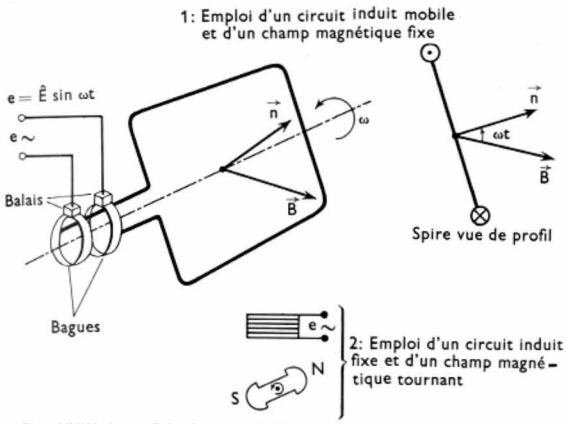


Fig. XXIX-1 — Principe de l'obtention d'une force électromotrice sinusoïdale

au cosinus de l'angle ωt de la normale au plan de la spire et du vecteur $\vec{B}$.

$$\Phi = BS \cos \omega t$$

La f.é.m. induite dans la spire est donc égale à :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = BS\omega \sin \omega t$$

ou :

$$e = \widehat{E} \sin \omega t$$

$\widehat{E}$ est la valeur maximale de la f.é.m. (amplitude de la sinusoïde). Par ce moyen nous obtenons bien une tension sinusoïdale aux bornes de la spire et un courant sinusoïdal si celle-ci est reliée à un circuit (un système de bagues et de balais permet cette liaison). Si les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{B}$ ne sont pas confondus à l'instant $t = 0$ (comme nous l'avons supposé puisque nous avons posé $(\vec{B}, \vec{n}) = \omega t$), la f.é.m. est donnée par l'expression suivante :

$$e = \widehat{E} \sin (\omega t + \varphi)$$

ω est la **pulsation** de la f.é.m., $(\omega t + \varphi)$ la **phase** à l'instant t, φ est la phase à l'instant initial.

La période de cette grandeur sinusoïdale est égale à $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ et sa fréquence est $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$ (fig. XXIX-2).

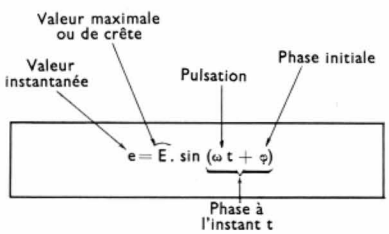


Fig. XXIX-2

La fréquence du courant utilisé est de 50 Hz pour les pays d'Europe et de 60 Hz pour la plupart des pays du continent américain. Le courant s'annule donc et change de signe 100 fois par seconde (120 fois en Amérique) ; sa période est $T = \dfrac{1}{50}$ s dans le premier cas et $\dfrac{1}{60}$ s dans le second (fig. XXIX-3). Une période comprend deux **alternances.**

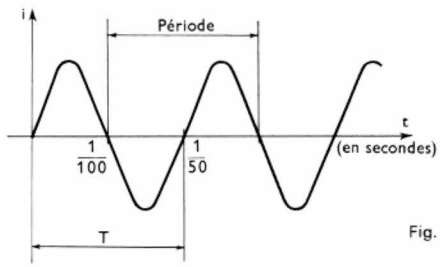


Fig. XXIX-3

Une alternance est le temps qui sépare deux zéros, ou deux extremums successifs.

Remarque : Le choix de l'instant pris pour origine des temps étant *arbitraire* nous pouvons représenter une grandeur sinusoïdale indifféremment par les fonctions sin ωt, sin $(\omega t \pm \varphi)$, cos ωt, cos $(\omega t \pm \varphi)$.

2. EFFETS DU COURANT ALTERNATIF

2.1. Effets magnétiques. — À chaque instant, les lois de l'électromagnétisme s'appliquent à condition de considérer *l'intensité instantanée du courant.* Les effets particuliers du courant alternatif sont donc dus au fait que le courant change de sens à chaque alternance (fig. XXIX-4).

Vérifions, par exemple, la loi de Laplace. Prenons comme conducteur un fil d'acier (corde à piano) tendu entre deux points A et B, parcouru par un courant alternatif et placé

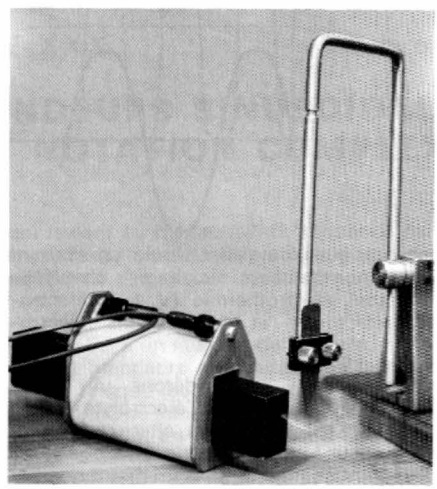


Fig. XXIX-4

La lame de fer vibre car le champ magnétique produit au moyen de la bobine est alternatif (*Goldner*)

dans le champ magnétique d'un aimant en fer à cheval (fig. XXIX-5). Chaque période, le conducteur est attiré dans un sens pendant la première alternance, dans l'autre pendant la seconde. Il vibre à la fréquence du courant alternatif qui le traverse.

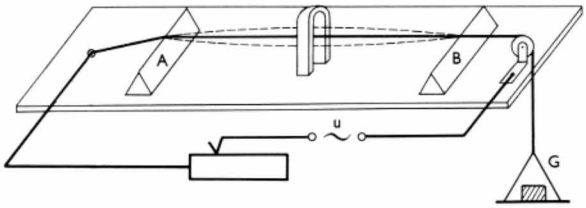


Fig. XXIX-5

Le même fil tendu peut être utilisé pour une autre expérience ; il ne fait plus partie d'un circuit électrique et dans son voisinage est placé un électroaimant alimenté par un courant alternatif (fig. XXIX-6). À chaque alternance, le fil est attiré par l'électroaimant (l'attraction d'un corps ferromagnétique ne dépend pas du sens de l'induction produite) : il se met donc à vibrer à une fréquence double de la fréquence du courant.

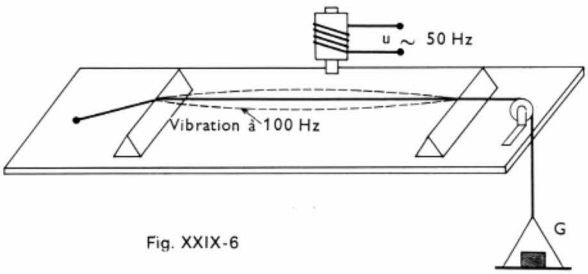
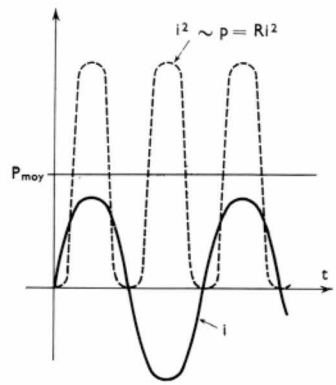


Fig. XXIX-6

2.2. Effets thermiques. — L'effet thermique se produit de façon semblable en courant continu et en courant alternatif. En courant continu, la chaleur dégagée dans un circuit par effet Joule est indépendante du sens du courant et est proportionnelle au carré de l'intensité de ce courant. Avec un courant alternatif, à chaque instant, la puissance dissipée par effet Joule est proportionnelle au carré de l'intensité instantanée du courant. Elle présente un maximum à chaque alternance (fig. XXIX-7). Sa fréquence est donc double de la fréquence du courant. Cette puissance admet une valeur moyenne qui nous a servi à définir l'intensité efficace du courant.

Fig. XXIX-7

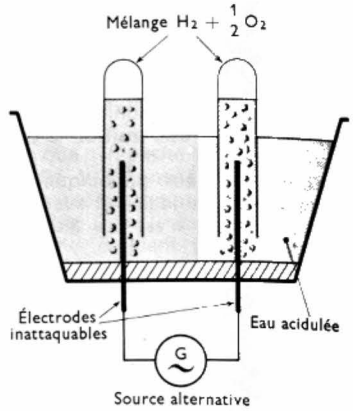


Les applications pratiques de l'effet Joule en courant alternatif sont très nombreuses : éclairage, chauffage domestique et industriel, électrothermie (V. t. 2, Électrothermie, Éclairage électrique et Applications électrodomestiques).

2.3. Effets chimiques. — Considérons un voltamètre à électrodes inattaquables dont l'électrolyte est de l'eau acidulée (fig. XXIX-8). À chaque alternance, il se dégage de l'oxygène sur une électrode et de l'hydrogène sur l'autre. Comme le courant change de sens un grand nombre

Fig. XXIX-8

Électrolyse en courant alternatif



de fois par seconde, dans chaque tube à essai, nous recueillons un mélange d'hydrogène et d'oxygène. Avec le courant alternatif se produit bien une décomposition de l'électrolyte mais les produits formés ne sont pas séparés.

Cet effet chimique peut cependant être utilisé pour déterminer la fréquence d'un courant alternatif. Posons sur une plaque métallique, en aluminium par exemple, une feuille

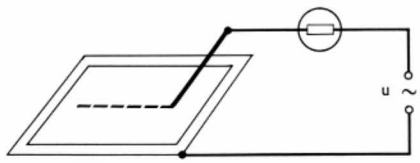


Fig. XXIX-9

Mesure chimique de la fréquence d'un courant alternatif

de papier buvard imbibée d'une solution de ferrocyanure de potassium et de chlorure de sodium (fig. XXIX-9). Une pointe de fer reliée à l'un des pôles de la source est appuyée sur le papier, tandis que l'autre pôle est relié à la plaque métallique. Pendant l'alternance où la pointe de fer joue le rôle d'anode, elle est attaquée, et il se produit du ferrocyanure ferrique (ou bleu de Prusse) qui laisse une trace bleue sur la feuille de papier buvard ; pendant l'autre alternance, les produits formés n'apparaissent pas. En déplaçant la pointe, nous obtenons un trait pointillé bleu et, connaissant la vitesse de déplacement et le nombre de pointillés, nous pouvons déduire la fréquence du courant.

2.4. Effets inductifs du courant alternatif. — Considérons deux circuits inductifs couplés par induction ; le premier est branché aux bornes d'une source de courant alternatif et le second est relié à un oscillographe (fig. XXIX-10). Lorsque le premier circuit est alimenté, il apparaît dans le second circuit une f.é.m. alternative proportionnelle à tout instant à la dérivée de l'intensité du courant dans le premier circuit, conformément aux lois générales sur l'induction.

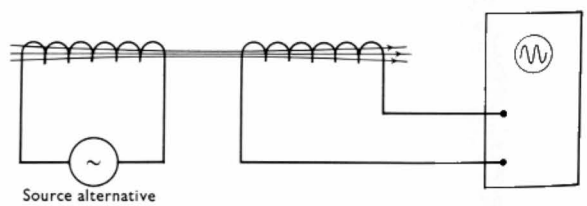


Fig. XXIX-10 — Effets inductifs du courant alternatif

Cet effet inductif peut être illustré au moyen de l'expérience suivante qui n'a pas d'équivalent en courant continu. Une grosse bobine à noyau de fer porte à une de ses extrémités un anneau métallique ; il est simplement posé et n'est pas relié électriquement à la bobine (fig. XXIX-11). Au moment où nous faisons passer du courant alternatif dans la bobine, nous voyons que l'anneau est fortement repoussé (il peut être projeté à plusieurs mètres de hauteur) et il s'échauffe vivement. Cela résulte du fait que la f.é.m.

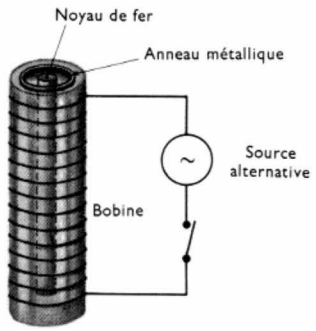


Fig. XXIX-11

induite dans l'anneau de métal donne naissance à un courant très grand (car la résistance de l'anneau est très faible), de sens contraire au courant dans la bobine et des forces de répulsion très intenses prennent naissance (en même temps que se produit un dégagement de chaleur important).

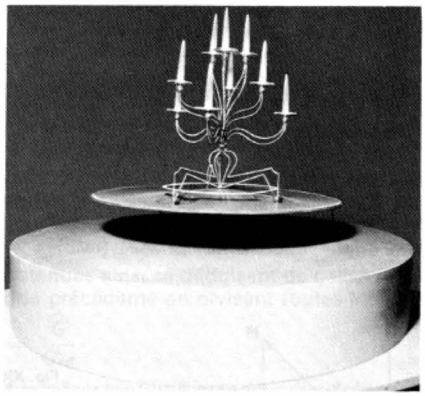


Fig. XXIX-12

Le plateau supportant le chandelier est repoussé comme l'anneau métallique dans l'expérience précédente (*Goldner*)

3. CALCUL DE LA VALEUR EFFICACE D'UNE GRANDEUR SINUSOÏDALE

À chaque instant, l'énergie dissipée par effet Joule dans une résistance est proportionnelle au carré de l'intensité du courant. L'intensité efficace du courant I_{eff} est égale à *l'intensité I du courant continu qui produit dans les mêmes conditions le même dégagement thermique (par effet Joule) que le courant alternatif considéré.*

À un instant t le courant alternatif d'intensité i produit en passant dans une résistance R un *dégagement de chaleur égal à* : Ri^2

Pendant une période T l'énergie W dissipée de cette façon a pour valeur :

$$W = \int_0^T Ri^2\,dt$$

Un courant continu d'intensité I produit le même dégagement de chaleur pendant le même temps T si nous avons :

$$W = R\,I^2\,T = \int_0^T Ri^2\,dt$$

ou :
$$I^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2\,dt$$

Par conséquent l'intensité efficace du courant i est telle que :

$$I^2_{\text{eff}} = \frac{1}{T}\int_0^T i^2\,dt$$

Nous retrouvons bien le résultat donné au chapitre 28 (§ 3).

Si $i = \widehat{I}\cos(\omega t + \varphi)$ nous pouvons écrire :

$$I^2_{\text{eff}} = \frac{1}{T}\int_0^T \widehat{I}^2\cos^2(\omega t + \varphi)\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \widehat{I}^2\,\frac{1 + \cos 2(\omega t + \varphi)}{2}\,dt$$

et :
$$I_{\text{eff}} = \frac{\widehat{I}}{\sqrt{2}}$$

La valeur efficace d'une grandeur sinusoïdale est donc, égale au quotient de sa valeur maximale et de $\sqrt{2}$.

Remarque : Le carré de la valeur efficace d'une grandeur alternative est égal à la valeur moyenne du carré de la grandeur considérée.

Conventions de notations

	Courant	Tension	f.é.m.	Grandeur sinusoïdale
Valeur instantanée	i	u	e	g
Valeur efficace	I_{eff}	U_{eff}	E_{eff}	G_{eff}
Valeur de crête (ou maximale)	ou $\widehat{I}$ $I_{\max}$	ou $\widehat{U}$ $U_{\max}$	ou $\widehat{E}$ $E_{\max}$	ou $\widehat{G}$ $G_{\max}$
Valeur moyenne	I_{moy}	U_{moy}	E_{moy}	G_{moy}

CHAPITRE XXX

REPRÉSENTATION DES GRANDEURS SINUSOÏDALES VECTEURS DE FRESNEL ET NOTATION COMPLEXE

1. DÉPHASAGE ENTRE DEUX GRANDEURS SINUSOÏDALES

Considérons deux grandeurs sinusoïdales (par exemple des courants ou des tensions...) :

$g_1 = \widehat{G}_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ et $g_2 = \widehat{G}_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$

Elles sont déphasées l'une par rapport à l'autre ; *le déphasage* φ *de* g_2 *par rapport à* g_1 *est égal à la différence des phases de* g_2 *et de* g_1 *:*

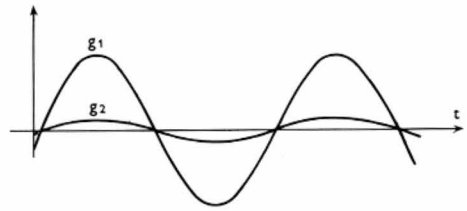
$$\varphi = (\omega_2 t + \varphi_2) - (\omega_1 t + \varphi_1) = (\omega_2 - \omega_1)t + (\varphi_2 - \varphi_1)$$

Lorsque les deux grandeurs ont même pulsation (ou ce qui revient au même, même fréquence ou même période), *le déphasage* φ est indépendant du temps et *est égal à la différence des phases initiales :*

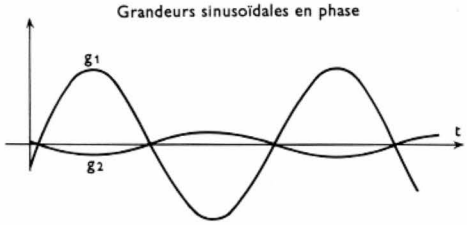
$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

φ est défini à un multiple de 2π près.

Deux grandeurs sinusoïdales de même période sont **en phase** lorsque leur déphasage φ est nul ; elles s'annulent alors en même temps et elles ont constamment le même signe. Elles sont **en opposition de phase** lorsque leur déphasage est π radians ; elles sont alors constamment de signe opposé et elles s'annulent en même temps. Elles sont



Grandeurs sinusoïdales en phase



Grandeurs sinusoïdales en opposition de phase

Grandeurs sinusoïdales en quadrature

Fig. XXX-1

en quadrature lorsque leur déphasage est $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ rad ; dans ce cas, chacune d'elles est nulle lorsque l'autre est extrémale (fig. XXX-1).

Remarque : Le déphasage entre deux grandeurs $g_1 = \widehat{G}_1 \cos \omega t$ et $g_2 = \widehat{G}_2 \sin \omega t$ peut être facilement mis en évidence en transformant l'expression donnant g_2 : $\sin \omega t = \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ et par suite : $g_2 = \widehat{G}_2 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$; nous voyons que le déphasage de g_2 par rapport à g_1 est égal à $-\frac{\pi}{2}$ rad. Nous pouvons également dire que la fonction sin ωt reproduit les variations de la fonction cos ωt avec un retard ou un *décalage arrière* t_0 tel que $\omega t_0 = \frac{\pi}{2}$ ou $t_0 = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{T}{2\pi} = \frac{T}{4}$. *Un décalage s'exprime en secondes tandis qu'un déphasage s'exprime en degrés ou en radians.*

2. ADDITION DE DEUX GRANDEURS SINUSOÏDALES

2.1. Méthode algébrique. — Nous nous proposons de déterminer la somme algébrique g de deux grandeurs sinusoïdales de même pulsation :

$$g_1 = \widehat{G}_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \text{ et } g_2 = \widehat{G}_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

$$g_1 = \widehat{G}_1 [\cos \varphi_1 \sin \omega t + \sin \varphi_1 \cos \omega t]$$

$$g_2 = \widehat{G}_2 [\cos \varphi_2 \sin \omega t + \sin \varphi_2 \cos \omega t]$$

$$g_1 + g_2 = \sin \omega t \, [\widehat{G}_1 \cos \varphi_1 + \widehat{G}_2 \cos \varphi_2] + \cos \omega t \, [\widehat{G}_1 \sin \varphi_1 + \widehat{G}_2 \sin \varphi_2]$$

Cette expression se met sous la forme suivante :

$$g = \widehat{G} \sin(\omega t + \varphi)$$

avec :

$$\widehat{G} = \sqrt{(\widehat{G}_1 \cos \varphi_1 + \widehat{G}_2 \cos \varphi_2)^2 + (\widehat{G}_1 \sin \varphi_1 + \widehat{G}_2 \sin \varphi_2)^2}$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{\widehat{G}_1 \sin \varphi_1 + \widehat{G}_2 \sin \varphi_2}{\widehat{G}_1 \cos \varphi_1 + \widehat{G}_2 \cos \varphi_2}$$

Une représentation graphique de la somme peut être obtenue en traçant la courbe représentative de chaque grandeur et en sommant point par point (fig. XXX-2). La construction de Fresnel que nous allons exposer permet de construire cette somme beaucoup plus aisément.

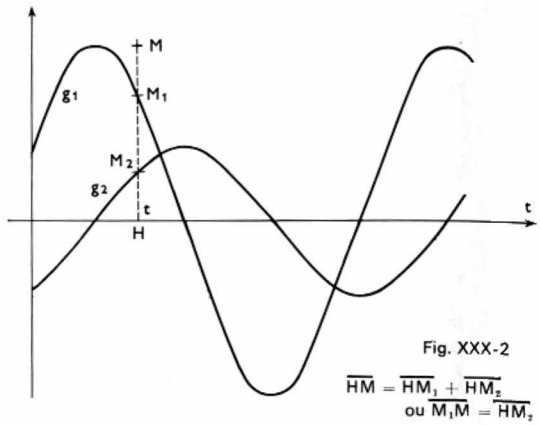


Fig. XXX-2

$\overline{HM} = \overline{HM_1} + \overline{HM_2}$
ou $\overline{M_1M} = \overline{HM_2}$

Somme de deux grandeurs sinusoïdales

2.2. Emploi de la représentation de Fresnel. — Considérons la grandeur sinusoïdale $g = \widehat{G} \cos(\omega t + \varphi)$. Dans un plan muni d'un repère orthonormé, construisons le vecteur $\overrightarrow{OM}$ de longueur $k\widehat{G}$ (k désignant l'échelle choisie arbitrairement, exprimée en centimètres par volt, 0,1 cm/V, par exemple) faisant avec l'axe des abscisses un angle égal à la phase $(\omega t + \varphi)$ (fig. XXX-3).

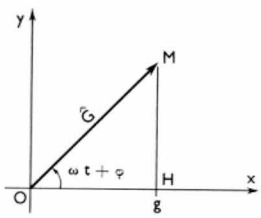


Fig. XXX-3

Si ce vecteur tourne autour de O, avec une vitesse angulaire constante ω, à tout instant, g est proportionnelle à la longueur algébrique $\overline{OH}$ de la projection de $\overrightarrow{OM}$ sur l'axe des abscisses puisque :

$$\overline{OH} = |\overrightarrow{OM}| \cos(\omega t + \varphi) = k\widehat{G} \cos(\omega t + \varphi)$$

Cette représentation vectorielle permet d'obtenir rapidement la somme de deux grandeurs sinusoïdales g_1 et g_2 de même fréquence. En effet $(g_1 + g_2)$ correspond à la somme $(\overrightarrow{OH_1} + \overrightarrow{OH_2})$ des projections des deux vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$ associés à ces grandeurs (fig. XXX-4). Or la

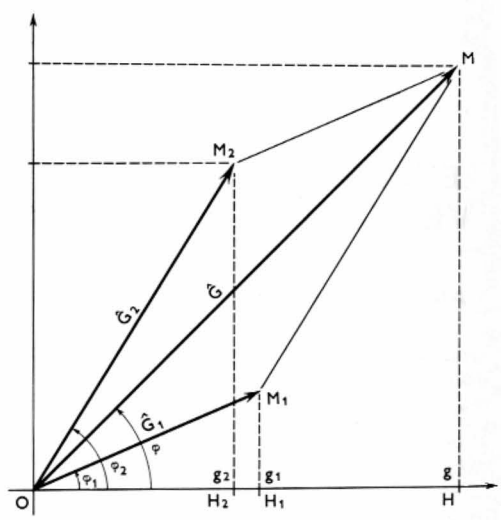


Fig. XXX-4 — Construction de Fresnel

projection $\overrightarrow{OH}$ de la somme $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ est précisément égale à la somme des projections $\overrightarrow{OH_1}$ et $\overrightarrow{OH_2}$ (V. t. 1, Mécanique des solides, chap. 1). Donc la projection $\overrightarrow{OH}$ de $\overrightarrow{OM}$ sur l'axe des x représente, à l'échelle choisie, la valeur instantanée g de la somme des deux grandeurs.

Les deux grandeurs g_1 et g_2 ayant la même fréquence, l'angle $(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2})$, égal au déphasage de g_2 par rapport à g_1, est constant. Le vecteur-somme $\overrightarrow{OM}$ a donc une longueur constante et *il tourne autour de O avec la même vitesse que les deux vecteurs composants ;* cela montre que **la somme de deux grandeurs sinusoïdales de fréquences égales est une grandeur sinusoïdale de même fréquence.**

Les résultats obtenus sont équivalents à ceux obtenus précédemment :

$$\widehat{G} = OM = \sqrt{OH^2 + HM^2}$$

$$= \sqrt{(\widehat{G}_1 \cos \varphi_1 + \widehat{G}_2 \cos \varphi_2)^2 + (\widehat{G}_1 \sin \varphi_1 + \widehat{G}_2 \sin \varphi_2)^2}$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{HM}{OH} = \frac{\widehat{G}_1 \sin \varphi_1 + \widehat{G}_2 \sin \varphi_2}{\widehat{G}_1 \cos \varphi_1 + \widehat{G}_2 \cos \varphi_2}$$

Lorsque l'ensemble tourne autour de O, les positions respectives des vecteurs ne sont pas modifiées. Pour cette raison, dans un but de simplification, les vecteurs sont représentés à l'instant $t = 0$ (à un instant quelconque t, un vecteur se déduit de celui correspondant à l'instant initial par une rotation d'angle ωt). Par ailleurs, comme ce sont les grandeurs efficaces qui sont les plus utilisées *le module du vecteur est pris proportionnel à* G_{eff} *et non pas à* $\widehat{G}$. Les figures obtenues ainsi se déduisent de celles fournies par la méthode précédente en divisant toutes les longueurs par $\sqrt{2} = \dfrac{\widehat{G}}{G_{\text{eff}}}$.

Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ *représentant une grandeur sinusoïdale g, de module* $OM = kG_{\text{eff}}$ (k étant l'échelle choisie) et *d'angle polaire* φ (angle avec l'axe $\overrightarrow{Ox}$), phase initiale de g, *est appelé* **vecteur de Fresnel.**

L'addition de deux grandeurs sinusoïdales est ainsi ramenée à la somme géométrique des vecteurs de Fresnel relatifs à chacune d'elles. *La longueur du vecteur résultant est proportionnelle à la valeur efficace de la somme* (fig. XXX-5).

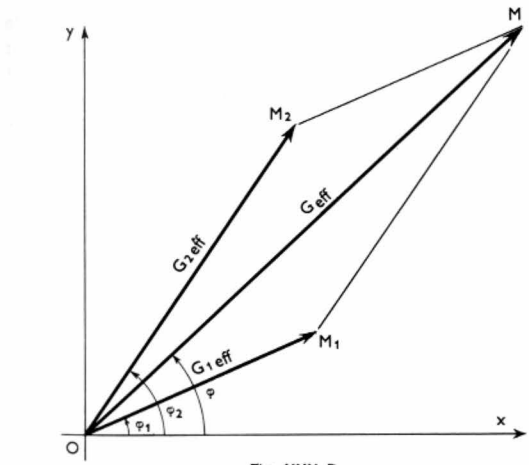


Fig. XXX-5

Pour déterminer **la différence de deux grandeurs sinusoïdales,** il suffit d'ajouter à la première, l'opposé de la seconde. La méthode à suivre est donc la même que pour la somme.

Selon le déphasage, la somme ou la différence de deux grandeurs sinusoïdales peut être soit plus petite, soit plus grande que les composantes. En fait, d'après les inégalités triangulaires, l'amplitude de la somme ou de la différence est comprise entre la différence et la somme (arithmétique) des amplitudes.

3. EXEMPLES D'APPLICATION DE LA CONSTRUCTION DE FRESNEL

3.1. Premier exemple. — Considérons un montage comprenant deux enroulements dans lesquels prennent naissance par induction deux f.é.m. sinusoïdales e_1 et e_2, de même valeur maximale $\widehat{E}_1 = \widehat{E}_2 = 14$ V, de même période, et en quadrature, e_2 étant en avance de $\dfrac{\pi}{2}$ rad sur e_1.

$$e_1 = 14 \cos \omega t$$

$$e_2 = 14 \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

3.1.1. Les enroulements sont montés en série et dans le même sens (fig. XXX-6). — La f.é.m. qui apparaît entre A et B est la somme des f.é.m. e_1 et e_2 ; elle est déterminée par la construction de Fresnel. À l'instant $t = 0$, e_1 est représenté par un vecteur $\overrightarrow{OM_1}$ dirigé selon l'axe $\overrightarrow{Ox}$.

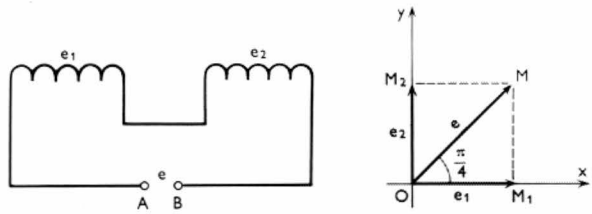


Fig. XXX-6 — Montage en série

En prenant une échelle k égale à $\dfrac{1}{8}$ cm/V, le module de $\overrightarrow{OM_1}$ est égal à :

$$kE_{1\text{eff}} = \frac{k\widehat{E}_1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{8}\frac{14}{1{,}4} = 1{,}25 \text{ cm}$$

À la tension e_2 correspond le vecteur $\overrightarrow{OM_2}$ dirigé selon l'axe Oy (de module 1,25 cm également puisque $\widehat{E}_1 = \widehat{E}_2$). Le vecteur $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ représente la somme $e = (e_1 + e_2)$; son module est égal à 1,75 cm, ce qui correspond à 14 volts. Donc la tension e a une valeur efficace E_{eff} de 14 V et elle est en avance de $\dfrac{\pi}{4}$ rad sur e_1 (et en retard de $\dfrac{\pi}{4}$ rad sur e_2) ; sa valeur maximale $\widehat{E}$ est égale au produit par $\sqrt{2}$ de sa valeur efficace soit $14\sqrt{2} \approx 20$ V.

3.1.2. Les enroulements sont montés de façon que les f.é.m. e_1 et e_2 soient en opposition (fig. XXX-7). — Entre A et B, la f.é.m. est égale à $e = (e_1 - e_2)$. La différence est obtenue à l'aide d'un diagramme de Fresnel : nous

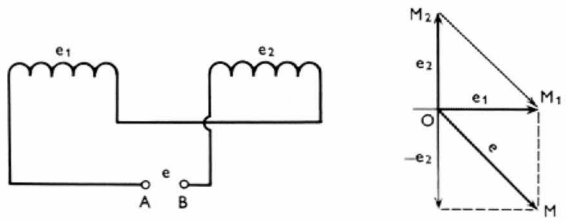


Fig. XXX-7 — Montage en opposition

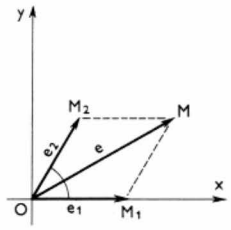
cherchons la somme $e_1 + (-e_2)$. Cela revient à trouver le vecteur $\overrightarrow{OM}$ tel que :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + (-\overrightarrow{OM_2}) = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_2O}$$

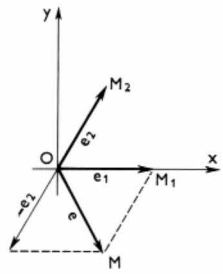
En opérant comme précédemment nous trouvons que la tension est égale à 14 V et qu'elle est alors en retard de $\dfrac{\pi}{4}$ rad sur e_1, de $\dfrac{3\pi}{4}$ rad sur e_2 ; sa valeur maximale est égale à 20 V.

3.2. Deuxième exemple. — Reprenons les montages précédents et supposons que e_2 soit en avance de $\frac{\pi}{3}$ rad (soit 60°) sur e_1, les valeurs maximales $\widehat{E_1}$ et $\widehat{E_2}$ étant toujours égales ($\widehat{E_1} = \widehat{E_2} = 14$ V).

e_1 est représenté par le même vecteur $\overrightarrow{OM_1}$ (fig. XXX-8) que dans le cas précédent ($OM_1 = 1{,}25$ cm) ; e_2 est représenté par un vecteur $\overrightarrow{OM_2}$ faisant un angle de + 60° avec $\overrightarrow{Ox}$ ($OM_2 = 1{,}25$ cm).



a) $e = e_1 + e_2$



b) $e = e_1 - e_2$

Fig. XXX-8

Dans le premier cas, $e = e_1 + e_2$ est figurée par un vecteur $\overrightarrow{OM}$ de 2,2 cm de long environ : E_{eff} est donc sensiblement égal à 17 V ; e est en avance de $\frac{\pi}{6}$ rad (30°) sur e_1 et en retard du même angle sur e_2.

Dans le second cas, $e = e_1 - e_2$ est représenté par $\overrightarrow{OM}$ de 1,25 cm de long. La tension e a une valeur efficace E_{eff} égale à 10 V et elle est en retard de $\frac{\pi}{3}$ rad sur e_1 et de $\frac{2\pi}{3}$ rad sur e_2.

4. EMPLOI DES NOMBRES COMPLEXES

Les vecteurs de Fresnel sont très pratiques pour effectuer des sommes et différences de grandeurs sinusoïdales, et pour mettre en évidence graphiquement des déphasages. Ils ont principalement l'avantage de fournir rapidement des résultats qualitatifs. *L'emploi des nombres complexes permet une étude quantitative dans tous les cas et c'est la seule méthode utilisable lorsque les montages ne sont pas extrêmement simples.*

4.1. Notations. — Nous appelons j le nombre dont le carré j^2 est égal à — 1 (le symbole i souvent employé en mathématiques est réservé en électricité à la valeur instantanée de l'intensité du courant). Un nombre complexe sera représenté au moyen d'une lettre majuscule soulignée d'un trait : $\underline{G}$, $\underline{I}$, $\underline{U}$, $\underline{Z}$. Le module du nombre complexe sera désigné par la lettre majuscule correspondante (G,I,U,Z,) ou à l'aide des symboles suivants : $|\underline{G}|$, $|\underline{I}|$, $|\underline{U}|$, $|\underline{Z}|$.

Comme en mathématiques, nous utiliserons plusieurs représentations pour un nombre complexe :

$$\underline{G} = a + jb = G\ (\cos\varphi + j \sin\varphi) = G\mathbf{e}^{j\varphi}$$

a est la *partie réelle* de $\underline{G}$; elle sera parfois notée $Re\ (\underline{G})$; b est la *partie imaginaire* de $\underline{G}$.

G est le *module* et φ est l'*argument* du nombre complexe $\underline{G}$

$$\left(\text{tg}\ \varphi = \frac{b}{a} = \frac{\text{partie imaginaire de } \underline{G}}{\text{partie réelle de } \underline{G}}\right)$$

À tout nombre complexe $\underline{G}$ nous pouvons faire correspondre un vecteur dans un plan complexe : il joint l'origine au point d'affixe $\underline{G}$. Son module est donc égal à G et son angle polaire $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$ est égal à φ (fig. XXX-9).

4.2. Nombre complexe associé à une grandeur sinusoïdale. — Considérons la grandeur sinusoïdale suivante :

$$g = \widehat{G} \cos\ (\omega t + \varphi) = G_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos\ (\omega t + \varphi)$$

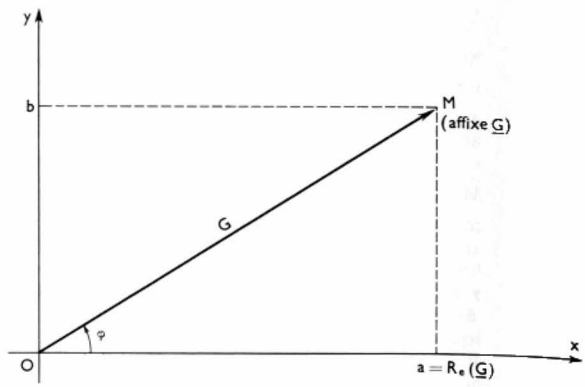


Fig. XXX-9

Elle est représentée par un vecteur de Fresnel de longueur proportionnelle à G_{eff} et d'angle polaire φ (fig. XXX-10) ; nous pouvons le considérer comme l'image dans le plan complexe d'un nombre complexe $\underline{G}$ de module $G = G_{\text{eff}}$ et d'argument φ (nombre d'affixe $\underline{G}$) :

$\underline{G} = G_{\text{eff}}\ (\cos\varphi + j \sin\varphi) = G_{\text{eff}}\ \mathbf{e}^{j\varphi}$ (avec $j^2 = -1$)

$\underline{G}$ est le nombre complexe appelé **valeur complexe de *g*** ou **nombre complexe représentant *g*.**

Il faut donc s'habituer à établir rapidement la correspondance réciproque :

$$g = \widehat{G} \cos\ (\omega t + \varphi) \Longleftrightarrow \underline{G} = G_{\text{eff}}\ \mathbf{e}^{j\varphi}$$

Exemples : $i = 15\sqrt{2} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \underline{I} = 15\ \mathbf{e}^{j\frac{\pi}{3}}$

$$\underline{I} = 10\ \mathbf{e}^{j\frac{\pi}{6}} \Rightarrow i = 10\sqrt{2} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$$

La somme ou la différence de deux grandeurs sinusoïdales est ainsi ramenée à l'addition ou à la soustraction de leurs valeurs complexes.

La somme géométrique de deux vecteurs d'un plan complexe joignant l'origine aux points d'affixes $\underline{G_1}$ et $\underline{G_2}$ est le vecteur joignant l'origine au point d'affixe $(\underline{G_1} + \underline{G_2})$

$$g_1 + g_2 = Re\,(\underline{G_1}) + Re\,(\underline{G_2}) = Re\,(\underline{G_1} + \underline{G_2})$$

Il faut bien noter cependant que *les valeurs complexes ne peuvent être utilisées que lorsque toutes les grandeurs sinusoïdales intervenant dans les calculs ont même pulsation.*

Remarque : Le nombre complexe $\underline{G}$ ainsi défini permet de résoudre la plupart des problèmes qui se posent. Cependant dans certains cas nous sommes amenés à associer à g un nombre complexe $\underline{G} = G\ \mathbf{e}^{j\,(\omega t + \varphi)}$. g est encore égal à la partie réelle du nombre complexe $\underline{G}$. Ce que nous notons de la façon suivante : $g = Re\,(\underline{G})$.

Sauf indication contraire, nous utilisons le nombre $\underline{G} = G_{\text{eff}}\ \mathbf{e}^{j\varphi}$ défini plus haut.

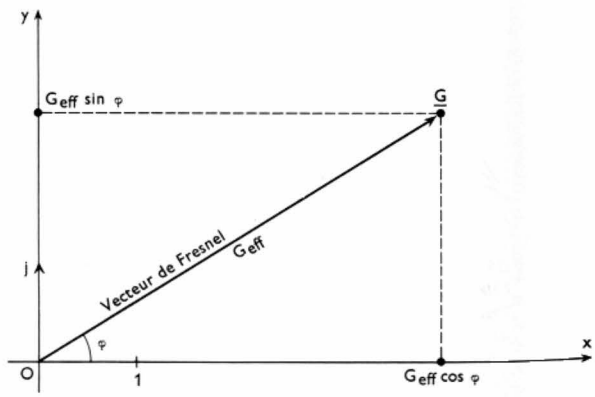


Fig. XXX-10 — À la grandeur sinusoïdale $g = G_{\text{eff}}\sqrt{2} \cos\ (\omega t + \varphi)$ nous pouvons associer : un vecteur de longueur proportionnelle à G_{eff} et d'angle polaire φ, un nombre complexe $\underline{G}$ de module G_{eff} et d'argument φ

4.3. Règles de calcul à utiliser

1° Pour calculer la somme de deux grandeurs sinusoïdales, il suffit de calculer la somme de leurs valeurs complexes.

Exemples :

$g_1 = 10\sqrt{2}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$ et $g_2 = 20\sqrt{2}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$; cherchons la somme $g = g_1 + g_2$.

À g_1 et g_2 nous associons les nombres complexes suivants :

$$\underline{G}_1 = 10\,\mathbf{e}^{j\frac{\pi}{3}} = 10\left(\cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{et } \underline{G}_2 = 20\,\mathbf{e}^{j\frac{\pi}{6}} = 20\left(\cos\frac{\pi}{6} + j\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

Le nombre complexe $\underline{G} = \underline{G}_1 + \underline{G}_2$ représente la somme :

$$\underline{G} = 10\left(\cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3}\right) + 20\left(\cos\frac{\pi}{6} + j\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\underline{G} = \left(10\cos\frac{\pi}{3} + 20\cos\frac{\pi}{6}\right) + j\left(10\sin\frac{\pi}{3} + 20\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

Le module $G = G_{\text{eff}}$ de g est donc égal à :

$$G = \sqrt{\left(10\cos\frac{\pi}{3} + 20\cos\frac{\pi}{6}\right)^2 + \left(10\sin\frac{\pi}{3} + 20\sin\frac{\pi}{6}\right)^2}$$

L'argument φ de $\underline{G}$ admet pour tangente :

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{10\sin\frac{\pi}{3} + 20\sin\frac{\pi}{6}}{10\cos\frac{\pi}{3} + 20\cos\frac{\pi}{6}}$$

2° Si une grandeur sinusoïdale g est multipliée par un nombre réel k, le module du nombre complexe correspondant est multiplié par k mais l'argument n'est pas changé.

$$g = G_{\text{eff}}\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \underline{G} = G_{\text{eff}}\,\mathbf{e}^{j\varphi}$$

$$kg = kG_{\text{eff}}\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \underline{G}' = kG_{\text{eff}}\,\mathbf{e}^{j\varphi}$$

3° Le produit de deux nombres complexes $\underline{G}_1 = G_{1\text{eff}}\,\mathbf{e}^{j\varphi_1}$ et $\underline{G}_2 = G_{2\text{eff}}\,\mathbf{e}^{j\varphi_2}$:

— a pour module le produit des modules : $(G_{1\text{eff}} . G_{2\text{eff}})$

— a pour argument la somme des arguments : $(\varphi_1 + \varphi_2)$

$$\underline{G} = \underline{G}_1 . \underline{G}_2 = G_{1\text{eff}}\,G_{2\text{eff}}\,\mathbf{e}^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

(V. t. 1, Mathématiques, chap. 15).

Exemples :

$$\underline{G}_1 = 10\mathbf{e}^{j\frac{\pi}{4}},\ \underline{G}_2 = 5\mathbf{e}^{j\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \underline{G} = 50\mathbf{e}^{j\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)} = 50\mathbf{e}^{j\frac{7\pi}{12}}$$

$$\underline{G}_1 = j = \mathbf{e}^{j\frac{\pi}{2}}\left(\text{puisque } \mathbf{e}^{j\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2} = j\right),$$

$$\underline{G}_2 = 8\mathbf{e}^{j\frac{\pi}{6}} \Rightarrow \underline{G} = j\,8\mathbf{e}^{j\frac{\pi}{6}} = 8\mathbf{e}^{j\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)} = 8\mathbf{e}^{j\frac{2\pi}{3}}$$

4° Dériver une grandeur sinusoïdale par rapport au temps revient à multiplier sa valeur complexe par $(j\omega)$

$$g = \widehat{G}\cos(\omega t + \varphi)$$

Dérivons g par rapport au temps. Nous obtenons :

$$\frac{dg}{dt} = -\omega\widehat{G}\sin(\omega t + \varphi) = \omega\widehat{G}\cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

g est la partie réelle de $\widehat{G}\mathbf{e}^{j(\omega t + \varphi)}$ et $\frac{dg}{dt}$ est la partie réelle de $\widehat{G}\omega\,\mathbf{e}^{j\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)}$. Si au nombre g nous associons $\underline{G} = G_{\text{eff}}\,\mathbf{e}^{j\varphi}\left(\text{avec } G_{\text{eff}} = \frac{\widehat{G}}{\sqrt{2}}\right)$, à $\frac{dg}{dt}$ nous devons associer :

$$\underline{G}' = \omega G_{\text{eff}}\,\mathbf{e}^{j\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)} = j\omega G_{\text{eff}}\,\mathbf{e}^{j\varphi} = j\omega\underline{G}$$

$$\left(\text{car : } \mathbf{e}^{j\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)} = \mathbf{e}^{j\varphi}\,\mathbf{e}^{j\frac{\pi}{2}} = j\mathbf{e}^{j\varphi}\right)$$

Ce résultat nous permet de ramener à de simples équations algébriques, de nombreuses équations différentielles introduites en électricité ; la recherche des solutions est ainsi grandement facilitée.

Ainsi, dans un circuit d'inductance L, un courant sinusoïdal i produit par auto-induction une f.é.m. $e = -L\frac{di}{dt}$.

Le résultat précédent permet d'écrire :

$$\underline{E} = -L\,(j\omega\underline{I}) = -jL\omega\underline{I}$$

Exemple : si : $i = I_{\text{eff}}\sqrt{2}\cos\omega t$, $\underline{I} = I_{\text{eff}}\,\mathbf{e}^{j0} = I_{\text{eff}}$. Par ailleurs $\underline{E} = L\omega\,I_{\text{eff}}\,\mathbf{e}^{-j\frac{\pi}{2}}\left(\text{car } \mathbf{e}^{-j\frac{\pi}{2}} = -j\right)$ et nous déduisons :

$E_{\text{eff}} = L\omega\,I_{\text{eff}}$, et $e = E_{\text{eff}}\sqrt{2}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$.

CHAPITRE XXXI

RÉSISTANCES, CAPACITÉS ET INDUCTANCES EN COURANT ALTERNATIF

Dans tous les cas considérés ici, les lois de l'électrocinétique, de l'électrostatique et de l'électromagnétisme sont applicables à condition de considérer les valeurs instantanées des tensions et des courants.

1. RÉSISTANCE NON INDUCTIVE

1.1. Loi d'Ohm. — Une résistance non inductive est une résistance qui présente une inductance négligeable (par exemple un conducteur rectiligne) : aucune f.é.m. ne peut y être induite lorsque l'intensité du courant varie. Si R est la résistance de cette portion de circuit, nous pouvons appliquer la loi d'Ohm, à l'instant t. L'intensité instantanée du courant dans la résistance étant i, la tension instantanée u aux bornes de la résistance (fig. XXXI-1) est donnée par la relation suivante :

$$u = Ri$$

$u = (v_A - v_B)$ est positive lorsque le courant va de A vers B (v_A et v_B sont les valeurs instantanées des potentiels respectivement en A et en B).

Si l'une des grandeurs i ou u est sinusoïdale, il en est de même de l'autre :

$$i = \widehat{I}\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow u = R\widehat{I}\cos(\omega t + \varphi)$$

La différence de potentiel aux bornes de la résistance non inductive (parfois dite *pure* ou *morte*) *est en phase avec l'intensité du courant qui la traverse.*

De la relation entre les valeurs instantanées $u = Ri$, nous déduisons les relations :

— entre les valeurs maximales : $\widehat{U} = R\widehat{I}$

— entre les valeurs efficaces : $U_{\text{eff}} = RI_{\text{eff}}$

— entre les grandeurs complexes associées $\underline{U} = R\underline{I}$

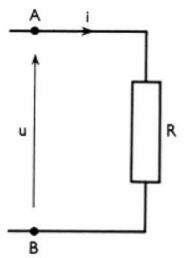


Fig. XXXI-1

1.2. Remarque : Effet pelliculaire. — En courant alternatif, le courant ne se répartit pas uniformément dans les

conducteurs. Il circule à la périphérie du conducteur, dans une zone d'autant plus mince que la fréquence du courant est élevée : c'est l'effet pelliculaire. La résistance du conducteur est donc plus importante en courant alternatif qu'en courant continu (seule la partie utile du conducteur est à considérer). Cet effet est peu sensible avec les courants alternatifs de 50 à 60 Hz utilisés industriellement. Si nous appelons R_c la résistance du conducteur en courant continu et R_a sa résistance en courant alternatif, le rapport $\frac{R_a}{R_c}$ est toujours supérieur à 1 ; cependant il peut être considéré comme égal à 1 pour les conducteurs habituels utilisés industriellement.

Le tableau qui suit donne quelques valeurs de ce rapport pour des conducteurs cylindriques traversés par des courants de fréquence égale à 50 Hz.

Diamètre en millimètres	$\frac{R_a}{R_c}$
5	1
7,1	1,000 4
14,1	1,006 8
28,3	1,107
39,4	1,312
42,4	1,391
49,5	1,584
77,8	2,353
141	4,033

Aux fréquences très élevées, cet effet devient particulièrement important ; pratiquement, le courant ne circule que dans une zone superficielle, dont l'épaisseur δ est donnée par la formule :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\omega\sigma}}$$

(μ : perméabilité magnétique du conducteur, ω : pulsation du courant, σ : conductivité du conducteur).

Le tableau ci-dessous donne quelques valeurs numériques de δ pour le cuivre.

Fréquence du courant (en hertz)	δ (en millimètres)
50	8,5
10^4	0,6
10^6	60.10^{-3}
10^8	6.10^{-3}
10^{10}	$0,6.10^{-3}$

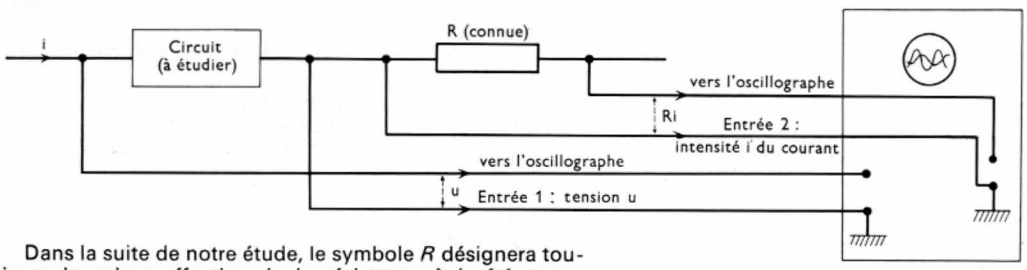


Fig. XXXI-4

Dans la suite de notre étude, le symbole R désignera toujours la valeur effective de la résistance à la fréquence considérée.

1.3. Application : Visualisation de l'intensité d'un courant alternatif. — Un oscillographe branché aux bornes d'une résistance permet de visualiser la tension u aux bornes de celle-ci. Or cette tension instantanée u est proportionnelle à l'intensité instantanée i du courant qui traverse la résistance. Sur l'écran, la courbe obtenue représente la tension u à une certaine échelle et le courant i à une autre échelle (fig. XXXI-2). Si la valeur de la résistance est

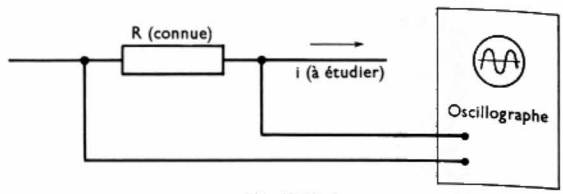
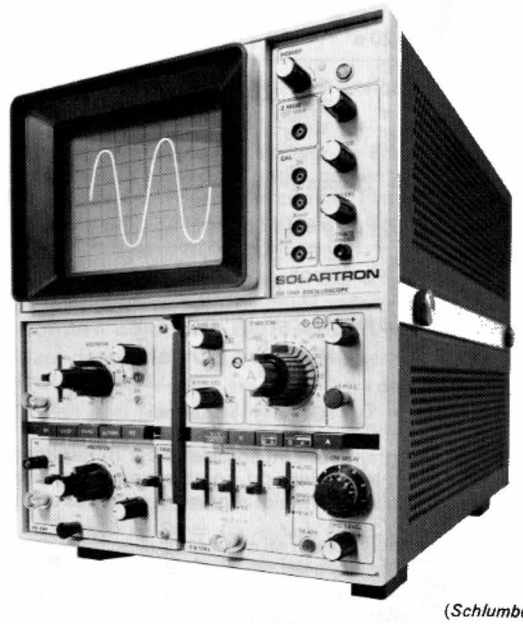


Fig. XXXI-2

connue, de la mesure de u à un instant t nous pouvons déduire la valeur de i au même instant.



(*Schlumberger*)

Fig. XXXI-3 — Oscilloscope à tiroirs interchangeables

Certains oscillographes ont deux entrées ; sur chacune d'elles peut être appliquée une tension et il est ainsi possible d'observer deux courbes sur le même écran. Un tel appareil peut donc être utilisé pour visualiser la tension aux bornes d'une portion de circuit (fig. XXXI-4) en même temps que l'intensité du courant dans cette même portion (et pour mettre en évidence le déphasage entre ces deux grandeurs).

Ce résultat est encore vrai pour les courants périodiques non sinusoïdaux si les fréquences de leurs harmoniques sont suffisamment faibles pour que l'effet pelliculaire soit négligeable et que la résistance ait même valeur pour tous les harmoniques.

2. INDUCTANCE PURE

Une *inductance pure* est une inductance dont la résistance peut être considérée comme nulle (dans la pratique, cela signifie que la chute de tension due à la résistance du circuit est absolument négligeable devant celle due à l'inductance ; cela sera précisé au paragraphe suivant).

En courant alternatif, le courant variant constamment, le phénomène d'auto-induction a une grande importance.

Si l'inductance est parcourue par un courant $i = \hat{I}\cos\omega t$, une f.é.m. est induite ; elle est égale à :

$$e = -L\frac{di}{dt} = L\omega\hat{I}\sin\omega t$$

L étant l'inductance de la portion du circuit. *Cette f.é.m. s'oppose au passage du courant* et elle peut être assimilée à une f.c.é.m. de valeur e' :

$$e' = -e = -L\omega\hat{I}\sin\omega t = L\omega\hat{I}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Aux bornes de l'inductance, la différence de potentiel est donc égale à cette f.c.é.m., puisque la résistance étant nulle, il en est de même de la chute ohmique (fig. XXXI-5).

$$\begin{cases} u = e' \\ i = \hat{I}\cos\omega t \\ u = L\omega\hat{I}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Dans une inductance pure, le courant est donc en retard de $\frac{\pi}{2}$ rad sur la tension, ou encore la tension est en avance de $\frac{\pi}{2}$ rad sur le courant (fig. XXXI-6).

Fig. XXXI-5

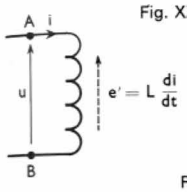
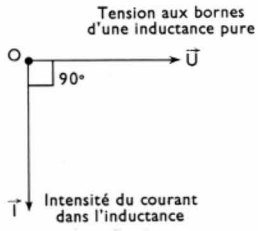


Fig. XXXI-6

Diagramme de Fresnel



Des relations précédentes nous en déduisons d'autres :

— entre les valeurs maximales : $\hat{U} = L\omega\hat{I}$

— entre les valeurs efficaces : $U_{\text{eff}} = L\omega I_{\text{eff}}$

— entre les valeurs complexes associées :

$$u = e' = L\frac{di}{dt} \Rightarrow \underline{U} = L(j\omega\underline{I}) = jL\omega\underline{I}$$

L'impédance de l'inductance est le rapport Z de la tension efficace $L\omega I_{\text{eff}}$ et du courant efficace I_{eff} (ou encore le rapport des valeurs maximales de ces grandeurs). L'impédance d'une inductance pure est donc égale à :

$$\boxed{Z = L\omega}$$

Nous pouvons également définir une impédance complexe $\underline{Z}$ pour la bobine :

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = jL\omega}$$

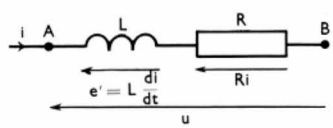
Le module Z de ce nombre complexe est égal à l'impédance de la bobine ; son argument $(+\varphi)$ *est égal au déphasage de u par rapport à i.*

3. CIRCUIT INDUCTIF QUELCONQUE

Considérons une portion de circuit d'inductance L et de résistance R traversée par un courant d'intensité $i = \hat{I}\cos\omega t$ (fig. XXXI-7). La différence de potentiel à ses bornes est égale à la somme de la chute ohmique Ri et de la f.c.é.m. $\left(L\frac{di}{dt}\right)$:

$$u = Ri + L\frac{di}{dt} = R\hat{I}\cos\omega t + L\omega\hat{I}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Fig. XXXI-7



3.1. Représentation de Fresnel. — Représentons cette différence de potentiel en utilisant les *vecteurs de Fresnel* (fig. XXXI-8).

Sur l'axe des abscisses, nous portons le vecteur $\overrightarrow{OM_1}$ représentant la chute ohmique $R\hat{I}\cos\omega t$, et sur l'axe des ordonnées le vecteur $\overrightarrow{OM_2}$ correspondant à la grandeur $L\omega\hat{I}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ appelée *chute inductive*. Le vecteur $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ représente la tension u aux bornes de la bobine ; sa valeur efficace est égale à :

$$U_{\text{eff}} = I_{\text{eff}}\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}$$

Elle est en avance sur l'intensité du courant d'un angle φ donné par la relation suivante :

$$\boxed{\text{tg}\,\varphi = \frac{L\omega}{R}}$$

L'impédance du circuit est égale à :

$$\boxed{Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$$

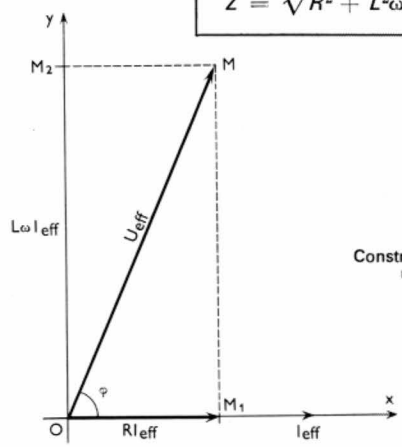


Fig. XXXI-8

Construction de Fresnel pour un circuit inductif

3.2. Emploi des nombres complexes. — Comme précédemment nous pouvons aussi établir des relations entre les valeurs complexes associées à u et i.

$$u = Ri + L\frac{di}{dt} \Rightarrow \underline{U} = R\underline{I} + jL\omega\underline{I} = (R + jL\omega)\underline{I}$$

Cette équation nous permet de retrouver les résultats précédents. Par ailleurs, nous voyons que l'impédance complexe de ce circuit est égale à :

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R + jL\omega}$$

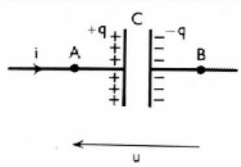
Le module de $\underline{Z}$ est égal à l'impédance Z définie ci-dessus et l'argument φ de $\underline{Z}$ $\left(\text{tel que tg}\,\varphi = \frac{L\omega}{R}\right)$ représente le déphasage de u par rapport à i. La quantité $(L\omega)$ est appelée *réactance inductive du circuit ;* elle s'exprime en ohms.

Remarque : Le circuit peut être considéré comme purement inductif si, à chaque instant, la chute ohmique est très inférieure à la chute inductive. Cela est réalisé si R est très faible devant $L\omega$.

4. CONDENSATEUR

Branchons les armatures d'un condensateur aux bornes d'une source de courant alternatif fournissant une tension $u = \hat{U}\cos\omega t$ (fig. XXXI-9).

Fig. XXXI-9



La charge du condensateur est alors $q = Cu$. Le courant de charge du condensateur est égal à : $i = \frac{dq}{dt}$

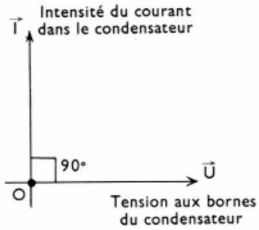
Donc : $$i = \frac{d(Cu)}{dt} = C\frac{du}{dt}$$

En tenant compte de la valeur de u nous obtenons :

$$i = -C\omega\widehat{U}\sin\omega t = C\omega\widehat{U}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Nous voyons donc que si nous intercalons un condensateur dans le circuit, tout se passe comme s'il était traversé par un courant en avance de $\frac{\pi}{2}$ rad sur la tension aux bornes du condensateur (fig. XXXI-10).

Fig. XXXI-10



Les relations précédentes permettent d'écrire les égalités suivantes :

— entre les valeurs maximales : $\widehat{U} = \frac{\widehat{I}}{C\omega}$

— entre les valeurs efficaces : $U_{\text{eff}} = \frac{I_{\text{eff}}}{C\omega}$

— entre les valeurs associées :

$$i = C\frac{du}{dt} \Rightarrow \underline{I} = C\ (j\omega\underline{U}) = jC\omega\underline{U} \text{ ou : } \underline{U} = \frac{\underline{I}}{jC\omega}$$

En multipliant numérateur et dénominateur par j, cette dernière relation devient :

$$\boxed{\underline{U} = -j\frac{\underline{I}}{C\omega}}$$

Le rapport de la tension efficace aux bornes du condensateur et de l'intensité efficace du courant dans le circuit est appelé *impédance* du condensateur :

$$\boxed{Z = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \frac{1}{C\omega}}$$

L'impédance Z est d'autant plus faible que sa capacité est grande et que la fréquence du courant est élevée. Pour un courant de très haute fréquence, le condensateur de capacité élevée se comporte comme un court-circuit.

Nous pouvons définir une impédance complexe $\underline{Z}$ pour le condensateur :

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{1}{jC\omega} = -j\frac{1}{C\omega}}$$

Le module de $\underline{Z}$ est égal à l'impédance $\frac{1}{C\omega}$ présentée par le condensateur ; son argument $\left(-\frac{\pi}{2}\text{ rad}\right)$ représente le déphasage de u par rapport à i. La quantité $\left(\frac{-1}{C\omega}\right)$ est aussi appelée *réactance capacitive* du condensateur ; elle s'exprime en ohms.

Remarque : Il ne passe en fait aucun courant dans le condensateur, mais le courant de charge et de décharge des armatures du condensateur a extérieurement les mêmes effets qu'un courant qui traverserait le condensateur. Dire qu'un condensateur arrête le courant continu et laisse passer le courant alternatif constitue un abus de langage.

5. CIRCUIT COMPRENANT EN SÉRIE UNE RÉSISTANCE, UNE INDUCTANCE ET UN CONDENSATEUR

Soit R la résistance totale du circuit, L son inductance et C sa capacité (fig. XXXI-11) ; supposons qu'il soit traversé par un courant $i = \widehat{I}\cos\omega t$ et déterminons la différence de potentiel u à ses bornes. À un instant t, la loi d'Ohm appliquée à ce circuit se traduit par la relation suivante (avec les mêmes conventions que précédemment) :

$$u = u_R + u_L + u_C$$

u_R, u_L et u_C représentant les chutes de tension dans R, L et C à l'instant t.

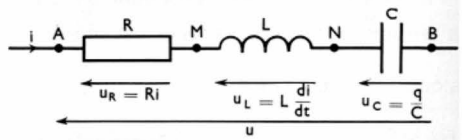


Fig. XXXI-11

Les nombres complexes associés à ces trois tensions permettent d'écrire les relations suivantes :

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C$$

avec : $\underline{U}_R = R\underline{I}$, $\underline{U}_L = jL\omega\underline{I}$, $\underline{U}_C = \frac{\underline{I}}{jC\omega}$ (V. ci-dessus § 2, 3 et 4) ;

donc : $$\underline{U} = R\underline{I} + jL\omega\underline{I} + \frac{\underline{I}}{jC\omega} = \underline{I}\left(R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}\right)$$

soit : $$\underline{U} = \underline{I}\left[R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right]$$

L'impédance complexe $\underline{Z}$ du circuit est donc égale à :

$$\underline{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

La quantité $\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$ est la *réactance totale du circuit.*

L'impédance du circuit est le module de $\underline{Z}$:

$$\boxed{Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

Le déphasage de u et de i est l'argument φ dont la tangente est égale à :

$$\boxed{\text{tg}\,\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}} \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Si $L\omega > \frac{1}{C\omega}$ (réactance du circuit positive) : φ est positif, u est déphasé en avance par rapport à i (le courant est en retard par rapport à la tension), *le circuit est inductif.*

Si $L\omega < \frac{1}{C\omega}$ (réactance du circuit négative) : φ est négatif, u est déphasé en retard par rapport à i (le courant est en avance par rapport à la tension), *le circuit est capacitif.*

Si $L\omega = \frac{1}{C\omega}$: $\varphi = 0$, u et i sont en phase. Le circuit est *purement résistant.* Il y a **résonance** (V. chap. 32). Ces résultats peuvent être être retrouvés graphiquement :

— soit en traçant, dans un plan complexe, les vecteurs associés aux points d'affixe $\underline{U}_R$, $\underline{U}_L$, $\underline{U}_C$;

— soit en réalisant le diagramme de Fresnel. La figure obtenue est évidemment la même dans les deux cas.

Dans le premier cas, nous plaçons un vecteur $\overrightarrow{OM_1}$ sur

l'axe des réels ($|\overrightarrow{OM_1}| = |\underline{U}_R| = RI_{eff}$), puis les vecteurs $\overrightarrow{OM_2}$ et $\overrightarrow{OM_3}$ sur l'axe des imaginaires ($|\overrightarrow{OM_2}| = L\omega I_{eff}$; $|\overrightarrow{OM_3}| = \frac{I_{eff}}{C\omega}$). La somme de ces trois vecteurs nous donne le vecteur $\overrightarrow{OM}$ qui joint l'origine au point d'affixe $\underline{U}$, nombre complexe associé à la tension u cherchée. Selon que $|\overrightarrow{OM_2}|$ est supérieur ou inférieur à $|\overrightarrow{OM_3}|$, c'est-à-dire selon que

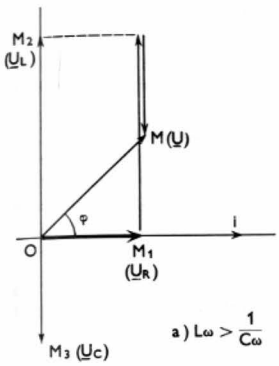


Fig. XXXI-12

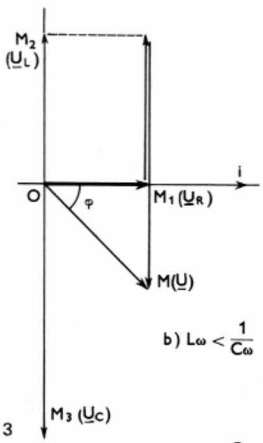


Fig. XXXI-13

$L\omega$ est plus grand ou plus petit que $\frac{1}{C\omega}$, le point M se trouve au-dessus ou au-dessous de l'axe des réels (fig. XXXI-12 et XXXI-13).

Si nous réalisons le diagramme de Fresnel, en choisissant l'axe $\overrightarrow{Ox}$ (axe des réels du plan complexe) pour définir l'origine des phases, nous devons placer les trois mêmes vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ et $\overrightarrow{OM_3}$. Ils représentent les trois tensions u_R, u_L et u_C. L'intensité i peut être figurée par un vecteur dirigé selon $\overrightarrow{Ox}$ (sa phase initiale est nulle). Les résultats obtenus aux paragraphes 2, 3 et 4 nous permettent de déduire :

— u_R et i étant en phase, $\overrightarrow{OM_1}$ est dirigé selon l'axe $\overrightarrow{Ox}$.

— u_L étant en avance de 90° par rapport à i, $\overrightarrow{OM_2}$ est dirigé suivant l'axe $\overrightarrow{Oy}$.

— u_C étant en retard de 90° par rapport à i, $\overrightarrow{OM_3}$ est dirigé dans le sens contraire à $\overrightarrow{OM_2}$.

Nous devons encore envisager deux possibilités (fig. XXXI-14).

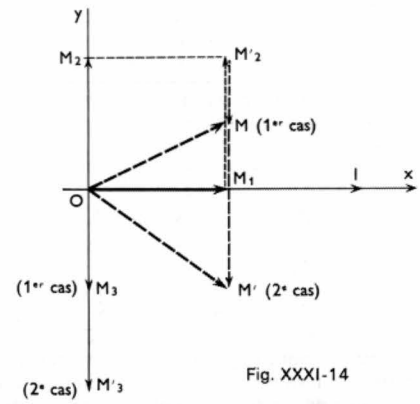


Fig. XXXI-14

Ces diverses constructions nous permettent de conclure de la même façon. Le circuit présente une impédance $Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$. Lorsque $L\omega > \frac{1}{C\omega}$, le courant est en retard sur la tension (tg $\varphi > 0$). Lorsque $L\omega < \frac{1}{C\omega}$, le courant est en avance sur la tension (tg $\varphi < 0$).

Dans le cas particulier où $L\omega = \frac{1}{C\omega}$, c'est-à-dire $LC\omega^2 = 1$, le courant est en phase avec la tension. Les effets du condensateur et de l'inductance s'annulent mutuellement et tout se passe comme si le circuit était réduit simplement à sa résistance R (résonance).

CHAPITRE XXXII

LOIS D'OHM ET DE KIRCHHOFF. RÉSONANCE

1. LOI D'OHM

La différence de potentiel complexe aux bornes d'un circuit est le produit de l'impédance complexe du circuit par l'intensité complexe du courant qui le traverse. Cela résulte de la définition de l'impédance complexe $\underline{Z}$.

$$\underline{U} = \underline{Z}.\underline{I} \text{ (loi d'Ohm en notation complexe)}$$

2. LOIS D'ASSOCIATION DES IMPÉDANCES

2.1. Notation. — Nous appelons R la partie réelle d'une impédance complexe et X sa partie imaginaire.

$$\underline{Z} = R + jX$$

X est appelé la *réactance*.

Lorsque des résistances, des inductances et des condensateurs sont associés en série (V. chap. 31, § 5) nous avons vu que :

$$\underline{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

R représente alors la somme des résistances du circuit. Il n'en est pas toujours ainsi lorsque le montage n'est pas aussi simple.

Dans le cas considéré, la réactance était égale à :

$$X = \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

La réactance est inductive si X est positif, capacitive si X est négatif.

$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}}$ est l'*admittance complexe*. Son module Y s'exprime en *siemens* (symbole : S) ou en *ohm à la puissance moins un* (symbole : Ω^{-1}).

2.2. Impédances en série. — Considérons un circuit formé de deux portions dont les impédances complexes sont respectivement $\underline{Z}_1$ et $\underline{Z}_2$. Nous nous proposons de déterminer l'impédance de l'ensemble de ces deux portions de circuit (fig. XXXII-1).

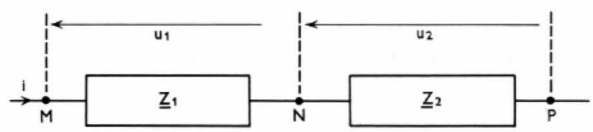


Fig. XXXII-1 — Les impédances en série s'additionnent : $\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$

À l'instant t, les deux portions sont traversées par le même courant d'intensité i. Entre leurs bornes les tensions sont respectivement u_1 et u_2. La tension u aux bornes de l'ensemble est égale à $(u_1 + u_2)$. Si nous utilisons les nom-

bres complexes associés à ces diverses grandeurs, nous pouvons écrire les relations suivantes :

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2$$
$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1\ \underline{I}$$
$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_2\ \underline{I}$$

D'où : $\underline{U} = \underline{Z}_1\ \underline{I} + \underline{Z}_2\ \underline{I} = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)\ \underline{I}$

Or, par définition, l'impédance complexe $\underline{Z}$ de l'ensemble est égale à $\frac{\underline{U}}{\underline{I}}$ donc :

$$\boxed{\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

Lorsque des circuits sont en série, l'impédance complexe de l'ensemble est égale à la somme des impédances complexes des divers circuits.

Remarque : Des impédances complexes s'ajoutent entre elles mais il n'en est pas de même de leurs modules.

Si : $\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1$ *et :* $\underline{Z}_2 = R_2 + jX_2$

$$\underline{Z} = (R_1 + R_2) + j(X_1 + X_2)$$

et : $Z = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2}$

Or : $Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_1^2}$ et : $Z_2 = \sqrt{R_2^2 + X_2^2}$

et nous avons en général : $Z \neq Z_1 + Z_2$.

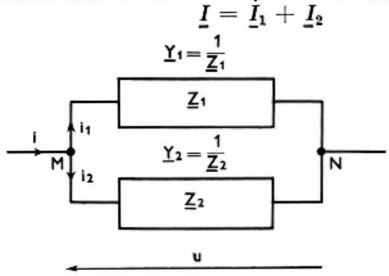
Cette remarque permet de constater que dans une association en série la résistance et la réactance de l'ensemble sont respectivement égales à la somme des résistances et à la somme des réactances.

2.3. Impédances en parallèle. — À l'instant t, l'intensité du courant i dans le circuit principal est la somme des intensités des courants i_1 et i_2 dans les dérivations (nous considérons le cas où il y a seulement deux dérivations ; fig. XXXII-2).

$$i = i_1 + i_2$$

À cette équation, nous pouvons faire correspondre une équation entre nombres complexes associés

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$$



$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2$$

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}$$

Fig. XXXII-2

Or si u est la tension aux bornes de l'ensemble, avec les notations complexes nous pouvons écrire :

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1} = \underline{Y}_1\ \underline{U}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_2} = \underline{Y}_2\ \underline{U}$$

$$\underline{I} = \underline{Y}_1\ \underline{U} + \underline{Y}_2\ \underline{U} = (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2)\ \underline{U}$$

et : $\boxed{\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}$

Les branches d'un circuit en parallèle sont équivalentes à un circuit unique d'admittance $\underline{Y}$ égale à la somme des admittances de diverses branches.

Cas particulier : **Groupement de condensateurs.** — Supposons que nous groupions des condensateurs ne présentant aucune résistance de fuite (condensateurs parfaits). Un condensateur de capacité C présente une admittance complexe : $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = jC\omega$.

Si plusieurs condensateurs de capacité C_1, C_2, C_3 sont en parallèle (fig. XXXII-3), les admittances s'additionnant nous avons donc :

$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 = jC_1\,\omega + jC_2\,\omega + jC_3\,\omega$$
$$= j\omega\,(C_1 + C_2 + C_3)$$

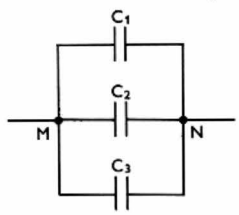


Fig. XXXII-3

Les condensateurs peuvent être remplacés par un condensateur unique de capacité C telle que :

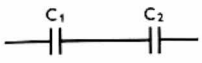
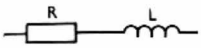
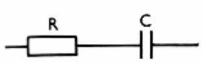
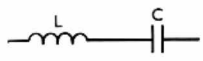
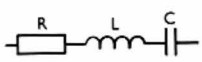
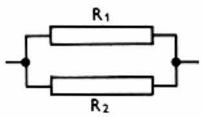
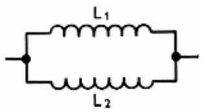
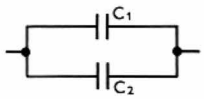
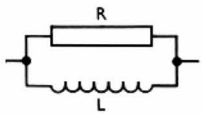
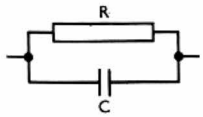
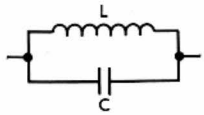
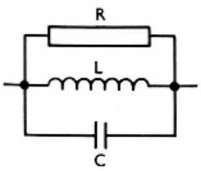
$$C = C_1 + C_2 + C_3$$

Nous vérifions à nouveau que lorsque des condensateurs sont en parallèle ils forment un ensemble présentant une capacité égale à la somme de leurs capacités. Nous pouvons démontrer de même que si des condensateurs sont en série, l'inverse de la capacité de l'ensemble qu'ils forment est égal à la somme des inverses des capacités.

Remarque : Le tableau suivant fournit l'impédance complexe et l'admittance de quelques circuits obtenus en associant de diverses manières des résistances, des inductances et des condensateurs.

Valeurs complexes de l'impédance et de l'admittance de quelques circuits

Circuit	Impédance complexe $\underline{Z}$	Module Z	Argument φ (angle de déphasage de la tension entre les bornes du circuit et du courant dans le circuit)	Admittance complexe $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$
R	R	R	0	$\frac{1}{R}$
L	$jL\,\omega$	$L\,\omega$	$+\frac{\pi}{2}$ rad	$-\frac{j}{L\,\omega}$
C	$-j\frac{1}{C\,\omega}$	$\frac{1}{C\,\omega}$	$-\frac{\pi}{2}$ rad	$jC\,\omega$
M (L_1, L_2)	$j\omega\,(L_1 + L_2 \pm 2M)$	$\omega\,(L_1 + L_2 \pm 2M)$	$+\frac{\pi}{2}$ rad	$-j\frac{1}{\omega\,(L_1 + L_2 \pm 2M)}$

Circuit	Impédance complexe $\underline{Z}$	Module Z	Argument φ (angle de déphasage de la tension entre les bornes du circuit et du courant dans le circuit)	Admittance complexe $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$
	$-j\frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)$	$\frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)$	$-\frac{\pi}{2}$ rad	$j\,\omega\,\frac{C_1\,C_2}{C_1+C_2}$
	$R + j\,L\,\omega$	$\sqrt{R^2 + L^2\,\omega^2}$	$\text{arc tg}\,\frac{L\,\omega}{R}$	$\frac{R - j\,L\,\omega}{R^2 + L^2\,\omega^2}$
	$R - j\frac{1}{C\,\omega}$	$\frac{1}{C\,\omega}\sqrt{(1 + R^2\,C^2\,\omega^2)}$	$-\text{arc tg}\,\frac{1}{R\,C\,\omega}$	$\frac{R + j\frac{1}{C\,\omega}}{R^2 + \frac{1}{C^2\,\omega^2}}$
	$j\left(L\,\omega - \frac{1}{C\,\omega}\right)$	$\left\lvert L\,\omega - \frac{1}{C\,\omega}\right\rvert$	$\pm\frac{\pi}{2}$ rad	$j\,\frac{C\,\omega}{1 - L\,C\,\omega^2}$
	$R + j\left(L\,\omega - \frac{1}{C\,\omega}\right)$	$\sqrt{R^2 + \left(L\,\omega - \frac{1}{C\,\omega}\right)^2}$	$\text{arc tg}\,\frac{L\,\omega - \frac{1}{C\,\omega}}{R}$	$\frac{R - j\left(L\,\omega - \frac{1}{C\,\omega}\right)}{R^2 + \left(L\,\omega - \frac{1}{C\,\omega}\right)^2}$
	$\frac{R_1\,R_2}{R_1 + R_2}$	$\frac{R_1\,R_2}{R_1 + R_2}$	0	$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$
	$j\omega\left(\frac{L_1\,L_2 - M^2}{L_1 + L_2 \pm 2\,M}\right)$	$\omega\,\frac{\lvert L_1\,L_2 - M^2\rvert}{L_1 + L_2 \pm 2M}$	$+\frac{\pi}{2}$ rad	$-j\frac{1}{\omega}\left(\frac{L_1 + L_2 \pm 2M}{L_1\,L_2 - M^2}\right)$
	$-j\,\frac{1}{\omega\,(C_1 + C_2)}$	$\frac{1}{\omega\,(C_1 + C_2)}$	$-\frac{\pi}{2}$ rad	$j\,\omega\,(C_1 + C_2)$
	$R\,L\,\omega\left(\frac{L\,\omega + jR}{R^2 + L^2\,\omega^2}\right)$	$\frac{R\,L\,\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\,\omega^2}}$	$\text{arc tg}\,\frac{R}{L\,\omega}$	$\frac{1}{R} - j\,\frac{1}{L\,\omega}$
	$\frac{R(1 - j\,R\,C\,\omega)}{1 + R^2\,C^2\,\omega^2}$	$\frac{R}{\sqrt{1 + R^2\,C^2\,\omega^2}}$	$\text{arc tg}\ (-R\,C\,\omega)$	$\frac{1}{R} + jC\,\omega$
	$j\,\frac{L\,\omega}{1 - L\,C\,\omega^2}$	$\frac{L\,\omega}{\lvert 1 - L\,C\,\omega^2\rvert}$	$\pm\frac{\pi}{2}$ rad	$j\left(C\,\omega - \frac{1}{L\,\omega}\right)$
	$\frac{\frac{1}{R} - j\left(C\,\omega - \frac{1}{L\,\omega}\right)}{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}$	$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(C\,\omega - \frac{1}{L\,\omega}\right)^2}}$	$\text{arc tg}\,R\left(\frac{1}{L\,\omega} - C\,\omega\right)$	$\frac{1}{R} + j\left(C\,\omega - \frac{1}{L\,\omega}\right)$

3. LOIS DE KIRCHHOFF EN COURANT ALTERNATIF

À un instant *t*, les lois de Kirchhoff peuvent être appliquées aux courants sinusoïdaux et aux tensions sinusoïdales d'un réseau maillé. Les conventions employées (V. chap. 10) demeurent utilisables. Aux relations entre les valeurs instantanées des grandeurs sinusoïdales nous faisons correspondre des relations entre les valeurs complexes associées.

Ainsi, à un nœud (fig. XXXII-4), si à un instant t nous pouvons écrire l'égalité suivante :

$$i_1 + i_2 - i_3 + i_4 + i_5 = 0$$

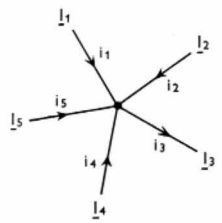


Fig. XXXII-4
Loi des nœuds

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 - \underline{I}_3 + \underline{I}_4 + \underline{I}_5 = 0$$

nous savons que l'égalité entre les valeurs complexes correspondantes est également vraie.

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 - \underline{I}_3 + \underline{I}_4 + \underline{I}_5 = 0$$

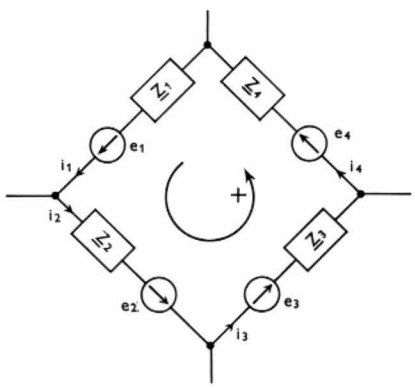


Fig. XXXII-5
Loi des mailles

$$\underline{E}_1 + \underline{E}_2 + \underline{E}_3 + \underline{E}_4 = \underline{Z}_1\,\underline{I}_1 + \underline{Z}_2\,\underline{I}_2 + \underline{Z}_3\,\underline{I}_3 + \underline{Z}_4\,\underline{I}_4$$

Le même raisonnement peut être appliqué à une relation obtenue en appliquant la loi des mailles. Nous pouvons donc énoncer les deux lois suivantes :

— *loi des nœuds : La somme des intensités complexes des courants qui arrivent à un nœud est nulle* (les courants qui se dirigent vers le nœud sont comptés positivement et les autres négativement) ;

— *loi des mailles :* $\Sigma\underline{E}$ désignant la somme des valeurs complexes des f.é.m. de la maille et $\Sigma\,\underline{Z}\,\underline{I}$ la somme des valeurs complexes des diverses chutes de tension le long de la maille (fig. XXXII-5), nous avons la relation suivante :

$$\Sigma\underline{E} = \Sigma\,\underline{Z}\,\underline{I}$$

Remarque : Toutes les grandeurs sinusoïdales considérées doivent avoir la même fréquence.

4. EXEMPLES DE PROBLÈMES TRAITÉS PAR LES NOTATIONS COMPLEXES

4.1. Montage dit « condensateur-transformateur ». — Un circuit alimenté par un générateur fournissant un courant d'intensité efficace totale I_{eff} constante comprend deux dérivations : la première est formée d'un condensateur de capacité C et la seconde d'une bobine d'inductance L et de résistance R (fig. XXXII-6). Nous allons chercher la valeur de C pour laquelle l'intensité efficace $I_{2\text{eff}}$ du courant dans la branche contenant l'inductance est maximale, les autres grandeurs restant fixes.

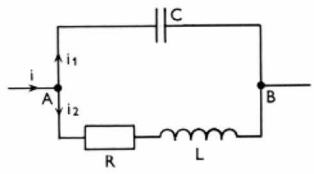


Fig. XXXII-6

L'impédance de la première branche est : $\underline{Z}_1 = -\dfrac{j}{C\omega}$

et celle de la seconde $\underline{Z}_2 = R + jL\,\omega$.

Si $\underline{I}$, $\underline{I}_1$ et $\underline{I}_2$ sont les valeurs complexes des intensités respectives des courants dans le circuit principal, dans la première et dans la seconde branche, nous pouvons écrire les relations suivantes :

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \text{ (loi des nœuds au point } A)$$

$$\underline{U}_{AB} = \underline{Z}_1\underline{I}_1 = \underline{Z}_2\underline{I}_2$$

D'où : $\underline{I}_1 = \dfrac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1}\,\underline{I}_2$, $\underline{I} = \underline{I}_2\left(1 + \dfrac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1}\right)$ et : $\underline{I}_2 = \underline{I}\,\dfrac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$

Dans cette dernière expression, remplaçons $\underline{Z}_1$ et $\underline{Z}_2$ par leur valeur :

$$\underline{I}_2 = -\frac{j}{C\omega} \cdot \frac{\underline{I}}{R + j\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)}$$

Nous voulons rendre maximal le module de $\underline{I}_2$

$$I_{2\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{C^2\omega^2}\,\frac{I^2_{\text{eff}}}{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}} = \sqrt{\frac{I^2_{\text{eff}}}{R^2C^2\omega^2 + (LC\omega^2 - 1)^2}}$$

Puisque par hypothèse I_{eff} est constant, le maximum est atteint avec la valeur de C qui annule la dérivée de $I_{2\text{ eff}}$ par rapport à C, nous trouvons :

$$C = \frac{L}{R^2 + L^2\omega^2}$$

Pour cette valeur de C, l'intensité efficace du courant dans l'inductance est égale à $I_{2\text{eff}} = I_{\text{eff}}\sqrt{\left[1 + \left(\dfrac{L\omega}{R}\right)^2\right]}$

Elle est supérieure à la valeur efficace I_{eff} du courant dans le circuit principal ; du fait de la présence du condensateur, elle est multipliée par $\sqrt{1 + \left(\dfrac{L\omega}{R}\right)^2}$. Comme avec un transformateur abaisseur (V. t. 1, Électrotechnique, chap. 5) l'intensité du courant dans le circuit d'utilisation est égale à l'intensité du courant reçu par l'appareil (courant primaire du transformateur) multipliée par un nombre supérieur à 1. Cela explique le nom donné au montage.

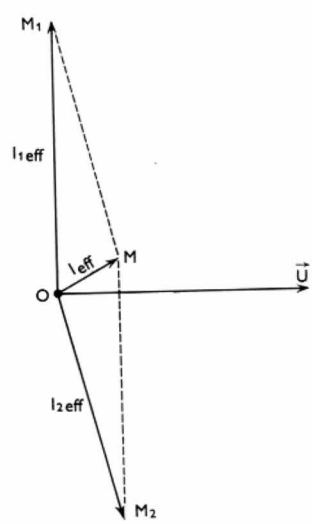
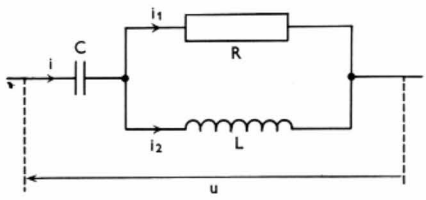


Fig. XXXII-7

Remarque : Il ne faut pas s'étonner que l'intensité du courant dans le circuit principal soit inférieure à l'intensité du courant dans une dérivation. En effet, deux courants déphasés, l'un en avance et l'autre en retard par rapport à la tension peuvent être très grands et leur somme peut être cependant très faible (fig. XXXII-7).

4.2. Montage de Boucherot à intensité constante. — Ce montage comprend un condensateur de capacité C en série avec une bobine d'inductance L, de résistance nulle, shuntée par une résistance R (fig. XXXII-8). Aux bornes de l'ensemble est appliquée une différence de potentiel alternative déterminée et nous recherchons à quelle condition l'intensité du courant dans la résistance R est indépendante de la valeur de celle-ci.

Fig. XXXII-8



Montage de Boucherot à intensité constante

Appelons $\underline{I}$ la valeur complexe de l'intensité du courant dans le condensateur, $\underline{I}_1$ et $\underline{I}_2$ celles des courants dans la résistance et dans la bobine; les impédances complexes sont égales à : $\underline{Z} = -\dfrac{j}{C\omega}$ pour le condensateur, $\underline{Z}_1 = R$ pour la résistance et $\underline{Z}_2 = jL\omega$ pour la bobine.

Nous pouvons écrire les relations suivantes :

$$\begin{cases} \underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \\ \underline{Z}_1\underline{I}_1 = \underline{Z}_2\underline{I}_2 \Rightarrow \underline{I}_2 = \dfrac{\underline{Z}_1\underline{I}_1}{\underline{Z}_2} \\ \underline{U} = \underline{Z}\underline{I} + \underline{Z}_1\underline{I}_1 \end{cases}$$

Elles permettent de déduire $\underline{I}_1$:

$$\underline{U} = \underline{Z}\,(\underline{I}_1 + \underline{I}_2) + \underline{Z}_1\underline{I}_1 = \underline{I}_1\left[\underline{Z} + \frac{\underline{Z}\,\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} + \underline{Z}_1\right]$$

D'où : $\underline{I}_1 = \dfrac{\underline{Z}_2\,\underline{U}}{\underline{Z}_1\,(\underline{Z} + \underline{Z}_2) + \underline{Z}\,\underline{Z}_2} = \dfrac{jL\omega\,\underline{U}}{jR\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right) + \dfrac{L}{C}}$

$\underline{I}_1$ est indépendant de R si $\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right) = 0$ c'est-à-dire si $L\omega = \dfrac{1}{C\omega}$; la valeur de $\underline{I}_1$ est alors :

$$\underline{I}_1 = jC\,\omega\,\underline{U}$$

ce qui implique : $I_{1\text{eff}} = C\omega U_{\text{eff}}$

L'intensité efficace du courant dans la résistance est donc constante si C et U_{eff} le sont; elle ne dépend pas de la valeur de la résistance placée dans le circuit.

4.3. Pont de Wheatstone

4.3.1. Condition d'équilibre. — Considérons quatre impédances Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 montées en pont de Wheatstone (fig. XXXII-9) et cherchons à quelle condition il ne passe aucun courant dans la branche MN.

Si aucun courant ne traverse la branche MN, les points M et N sont à tout instant au même potentiel ; Z_1 et Z_3 sont traversées par le même courant i_1, Z_2 et Z_4 par le même courant i_2. Par ailleurs, puisque la d.d.p. entre M et N est nulle, les valeurs complexes des d.d.p. entre AM et AN sont égales :

$$\underline{Z}_1\underline{I}_1 = \underline{Z}_2\underline{I}_2$$

Pour la même raison les valeurs complexes des d.d.p. entre MB et NB sont aussi égales :

$$\underline{Z}_3\underline{I}_1 = \underline{Z}_4\underline{I}_2$$

En divisant membre à membre, nous obtenons la condition d'équilibre suivante :

$$\boxed{\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_4}}$$

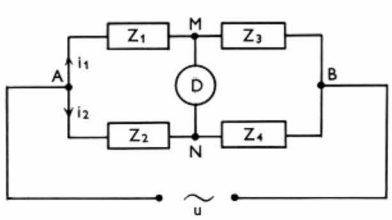
Nous pouvons aussi l'écrire sous la forme suivante :

$$\boxed{\underline{Z}_1\underline{Z}_4 = \underline{Z}_2\underline{Z}_3}$$

Dans le cas général, cette condition se traduit par deux relations distinctes exprimant l'égalité des parties réelles et l'égalité des parties imaginaires.

Fig. XXXII-9

Pont de Wheatstone



4.3.2. Applications

1° *Mesure de la capacité d'un condensateur*

Si $\underline{Z}_1 = \dfrac{-j}{C_0\omega}$, $\underline{Z}_2 = \dfrac{-j}{C\omega}$, $\underline{Z}_3 = R_1$ et $\underline{Z}_4 = R_2$ (fig. XXXII-10) la condition d'équilibre s'écrit :

$$\frac{-j}{C_0\omega}R_2 = \frac{-j}{C\omega}R_1 \Rightarrow \boxed{C = C_0\,\frac{R_1}{R_2}}$$

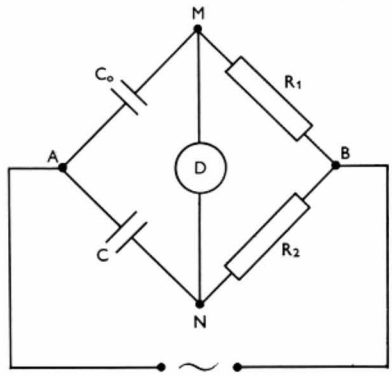


Fig. XXXII-10

Mesure de la capacité d'un condensateur

Si C_0, R_1 et R_2 sont connus, nous pouvons déduire C. Le détecteur (oscillographe, millivoltmètre amplificateur) inséré dans la branche MN permet de déterminer à quel moment, en faisant varier R_2 par exemple, nous obtenons une tension nulle entre M et N (V. t. 2, Mesures et appareils de mesure, chap. 18).

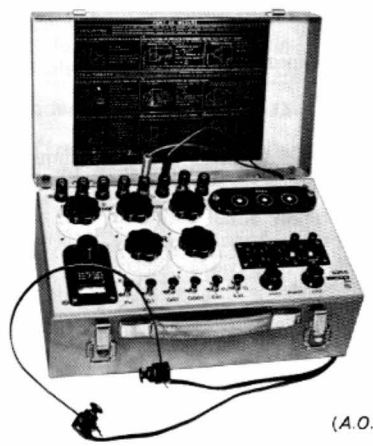


Fig. XXXII-11

Pont de mesure

(*A.O.I.P.*)

2° *Mesure de l'impédance d'un circuit inductif.* — Le montage de la figure XXXII-12 permet de déterminer

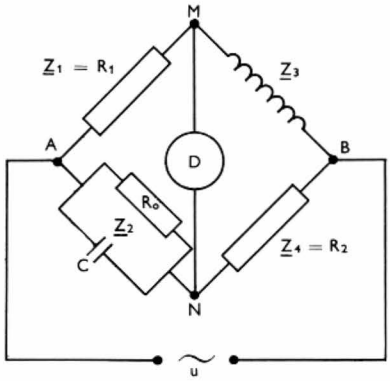


Fig. XXXII-12

Mesure de l'impédance d'un circuit inductif

simultanément l'inductance L et la résistance R d'un circuit inductif. La condition d'équilibre du pont s'écrit :

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_4}$$

soit : $$R_1\left(\frac{1}{R_0} + jC\omega\right) = \frac{R + jL\omega}{R_2}$$

Ces nombres complexes sont égaux si :

— leurs parties réelles sont égales :

$$\frac{R_1}{R_0} = \frac{R}{R_2} \Rightarrow R = \frac{R_2 R_1}{R_0}$$

— leurs parties imaginaires sont égales :

$$R_1 C\omega = \frac{L\omega}{R_2} \Rightarrow L = R_1 R_2 C$$

Dans la pratique, il est difficile d'équilibrer le pont en courant alternatif car il faut simultanément faire varier deux grandeurs (par ex. R_0 et C). Il est possible de rechercher préalablement un équilibre en courant continu : il faut alors remplacer la source alternative par une source de courant continu, et l'écouteur par un galvanomètre pour obtenir l'égalité des parties réelles : $\frac{R_1}{R_0} = \frac{R}{R_2}$.

Cette condition étant réalisée, il suffit de faire varier C pour équilibrer le pont en courant alternatif. Remarquons que l'équilibre ne dépend pas de la pulsation ω du courant (V. t. 2, Mesures et appareils de mesure, chap. 18).

5. PHÉNOMÈNES DE RÉSONANCE. CIRCUITS OSCILLANTS

5.1. Résonance série. — À la pulsation ω, un circuit composé d'une bobine d'inductance L et de résistance R, en série avec un condensateur de capacité C (fig. XXXII-13), présente une impédance complexe égale à (V. chap. 31, § 5) :

$$\underline{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

Son module est donné par l'expression suivante :

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

Si la pulsation ω varie, ce module passe par un minimum lorsque la réactance $\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$ est nulle.

$$\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = 0 \Rightarrow LC\omega^2 = 1$$

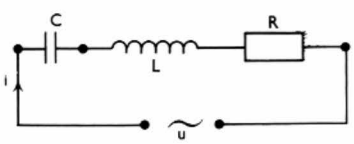


Fig. XXXII-13

La fréquence f correspondante appelée *fréquence de résonance* est égale à :

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

À la résonance, l'impédance du circuit est minimale et est égale à la résistance R (l'impédance complexe se réduit à un nombre réel : $\underline{Z} = R$)

Si U_{eff} est la tension efficace aux bornes du circuit, l'intensité efficace du courant dans celui-ci est donnée par la relation suivante :

$$I_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{eff}}}{Z} = \frac{U_{\text{eff}}}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

À la résonance elle devient égale à : $\frac{U_{\text{eff}}}{R}$

Cette intensité efficace est maximale à la fréquence de résonance ; le maximum est d'autant plus accentué que la résistance de la bobine est plus faible (fig. XXXII-14).

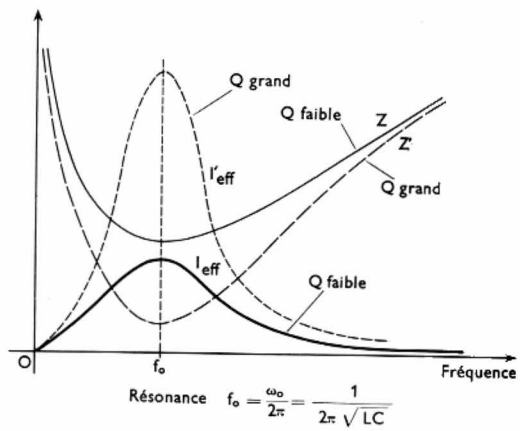


Fig. XXXII-14 — Courbes représentatives de l'impédance et de l'intensité efficace du courant dans le circuit en fonction de la fréquence

La tension u_C aux bornes du condensateur est obtenue en appliquant la loi d'Ohm (aux valeurs complexes) :

$$\underline{U}_C = \frac{\underline{I}}{jC\omega} = \frac{\underline{U}}{jC\omega\,\underline{Z}}$$

À la résonance $\underline{Z} = R$ et par conséquent :

$$U_{C\text{eff}} = \frac{1}{RC\omega} U_{\text{eff}} = \frac{L\omega}{R} U_{\text{eff}} = Q\,U_{\text{eff}}$$

Q est appelé *coefficient de surtension du circuit;* avec une bobine à noyau de fer (ainsi l'inductance est très grande) Q peut dépasser 100. La tension aux bornes du condensateur atteint souvent des valeurs très élevées (avec $Q = 100$ et $U_{\text{eff}} = 127$ V, $U_{C\text{eff}} = 12\,700$ V !) et celui-ci peut être détérioré même si la tension appliquée aux bornes du circuit est relativement faible. La tension aux bornes de la bobine est peu différente de la tension aux bornes du condensateur :

$$\underline{U}_B = (R + jL\omega)\,\underline{I} = R\,\underline{I}\ (1 + jQ)$$

et : $$U_{B\text{eff}} = U_{\text{eff}}\sqrt{1 + Q^2} \approx Q\,U_{\text{eff}}$$

si Q^2 est très supérieur à 1 ; une détérioration de la bobine est également à craindre.

Nous pouvons représenter sur un diagramme de Fresnel les tensions aux bornes des divers éléments du circuit. Le vecteur représentant l'intensité i du courant sera pris pour origine des phases. Nous représentons alors (fig. XXXII-15) :

— la chute de tension due à la résistance par un vecteur $\overrightarrow{OM_1}$ ($OM_1 \sim R\,I_{\text{eff}}$)

— la chute de tension due à l'inductance par un vecteur $\overrightarrow{OM_2}$ ($OM_2 \sim L\omega\ I_{eff}$) tel que $(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}) = +\frac{\pi}{2}$ rad. (V. chap. 31, § 5)

— la chute de tension due au condensateur par un vecteur $\overrightarrow{OM_3}$ $\left(OM_3 \sim \frac{I_{eff}}{C\omega}\right)$ tel que $(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_3}) = -\frac{\pi}{2}$ rad.

La d.d.p. aux bornes du condensateur est figurée par le vecteur $\overrightarrow{OM_3}$ et celle aux bornes de la bobine par un vecteur

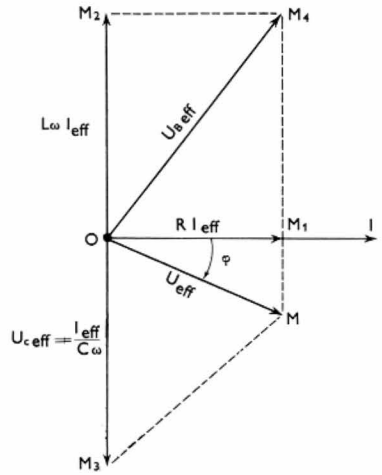


Fig. XXXII-15

$\overrightarrow{OM_4} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$. La tension aux bornes de l'ensemble, égale à la somme de ces deux d.d.p., est représentée par le vecteur $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_3} + \overrightarrow{OM_4}$. À la résonance (fig. XXXII-16), $\overrightarrow{OM_3} = -\overrightarrow{OM_2}$ $\left(\text{puisque } \frac{1}{C\omega} = L\omega\right)$ et $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1}$ ($OM \sim R\ I_{eff}$). *La tension aux bornes de l'ensemble est en phase avec le courant dans le circuit.* Graphiquement nous voyons encore que plus R est faible (c'est-à-dire plus le coefficient de surtension de la bobine est grand) et plus la tension U_{eff} à la résonance peut être réduite sans pour autant que les d.d.p. aux bornes de la bobine et du condensateur soient faibles.

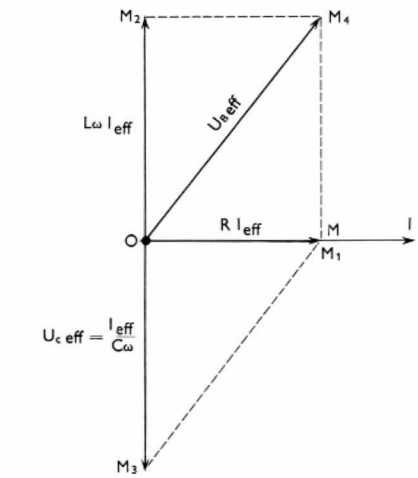


Fig. XXXII-16

5.2. Résonance parallèle. Circuit bouchon. — Un circuit bouchon comporte une bobine (de résistance R et d'inductance L) et un condensateur de capacité C associés en parallèle (fig. XXXII-17). Les admittances complexes respectives des deux branches sont :

$$\underline{Y}_C = jC\omega \quad \text{et} : \underline{Y}_B = \frac{1}{R + jL\omega}$$

et celle de l'ensemble est donc égale à :

$$\underline{Y} = jC\omega + \frac{1}{R + jL\omega} = \frac{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}{R + jL\omega}$$

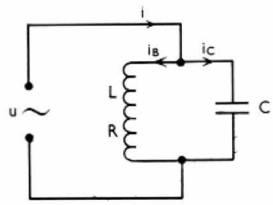


Fig. XXXII-17

Lorsque R est petit devant $L\omega$, c'est-à-dire lorsque le coefficient de surtension de la bobine $Q = \frac{L\omega}{R}$ est grand, cette expression se simplifie :

$$\underline{Y} = \frac{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}{jL\omega} = \frac{RC}{L} - j\frac{1 - LC\omega^2}{L\omega}$$

L'admittance $\underline{Y}$ du circuit (et par conséquent l'impédance $\underline{Z}$) sont réelles pour la valeur de ω vérifiant l'égalité :

$$LC\omega^2 = 1$$

Il y a *résonance*. L'admittance Y est minimale $\left(Y = \frac{RC}{L}\right)$ et l'impédance Z est maximale :

$$Z = \frac{L}{RC} = \frac{L^2\omega^2}{R} \left(\text{car } LC\,\omega^2 = 1 \text{ et } C = \frac{1}{L\omega^2}\right)$$

En introduisant le coefficient de surtension de la bobine $Q = \frac{L\omega}{R}$ nous déduisons :

$$Z = R\left(\frac{L\omega}{R}\right)^2 = R\,Q^2$$

Pour la valeur de la pulsation de résonance, l'impédance passe par un maximum d'autant plus accentué que le coefficient de surtension Q est grand (fig. XXXII-18).

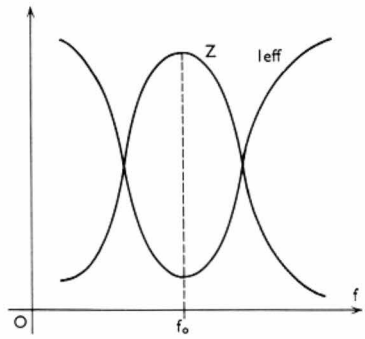


Fig. XXXII-18

Courbes représentatives de l'impédance et de l'intensité efficace du courant dans le circuit en fonction de la fréquence

À la fréquence de résonance, le circuit bouchon présente une impédance très élevée ; pratiquement il s'oppose au passage de courants ayant des fréquences égales (ou proches) de la fréquence de résonance. Pour cette raison il est appelé *circuit bouchon.*

Si le circuit bouchon est alimenté sous une tension sinusoïdale de valeur efficace U_{eff} et de fréquence égale à la fréquence de résonance $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ (nous supposons $R \ll L\omega$) nous pouvons facilement déterminer l'intensité du courant dans chaque dérivation, et l'intensité totale du courant dans le circuit. Les valeurs complexes des intensités des courants dans les dérivations sont égales à $\underline{I}_C = j\,\underline{U}C\omega$ (pour le condensateur) et :

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{U}}{R + jL\omega} \approx \frac{\underline{U}}{jL\omega} = -j\frac{\underline{U}}{L\omega}$$

pour la bobine. La valeur complexe de l'intensité totale I du courant est donnée par l'expression suivante :

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}}{R\,Q^2}$$

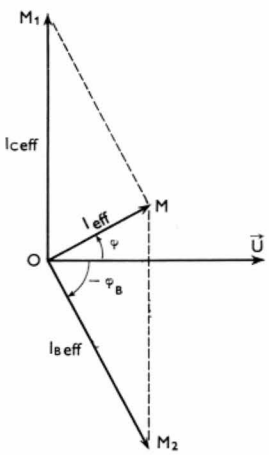


Fig. XXXII-19

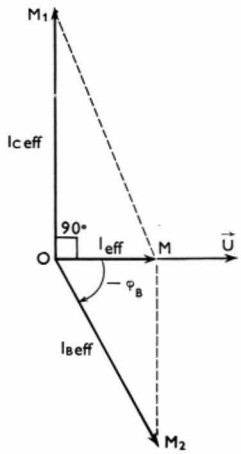


Fig. XXXII-20

Les valeurs efficaces de ces courants sont donc égales à :

$$I_{Ceff} = C\omega U_{eff};\ I_{Beff} \approx \frac{U_{eff}}{L\omega} \text{ et : } I_{eff} = \frac{U_{eff}}{R\,Q^2}$$

D'où : $$I_{Ceff} \approx I_{Beff} \approx Q\,I_{eff}$$

L'intensité efficace du courant dans chaque branche du circuit bouchon est donc Q fois plus grande que l'intensité efficace du courant dans le circuit principal. Le courant dans la bobine peut être suffisamment intense pour détériorer celle-ci alors que le courant total à travers le circuit est très faible.

Nous pouvons également placer sur un diagramme de Fresnel les vecteurs représentant les intensités i, i_C et i_B. Le vecteur figurant la tension u aux bornes de l'ensemble sera pris pour origine des phases (fig. XXXII-19). Aux courants i_C et i_B correspondent les vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$; $\overrightarrow{OM_1}$ fait un angle de $+\frac{\pi}{2}$ rad avec $\vec{U}$ (puisque le courant i_C est déphasé de 90° en avance sur la tension u), $\overrightarrow{OM_2}$ fait un angle $-\varphi_B$ avec $\vec{U}$ puisque i_B est en retard de φ_B degrés par rapport à u $\left(\text{tg } \varphi_B = \frac{L\omega}{R} = Q\right)$. Le vecteur $\left[\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}\right]$ représente l'intensité i du courant dans le circuit principal. À la résonance $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{U}$ sont colinéaires (fig. XXXII-20) puisque u et i sont en phase.

Les circuits résonnants sont très utilisés en radioélectricité (V. t. 2, Radioélectricité). Par exemple le dispositif de la figure XXXII-21 permet de sélectionner une fréquence particulière ; le circuit bouchon LC représente un *court-circuit* pour tous les courants dont la fréquence est telle que l'impédance Z du circuit est faible devant R. Pour les fréquences auxquelles l'impédance du circuit bouchon est forte devant R, nous retrouvons aux bornes de cette résistance une d.d.p. proportionnelle à la tension u. Le circuit est plus ou moins sélectif selon la valeur de la résistance R.

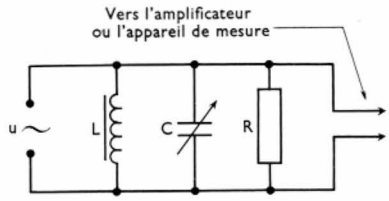


Fig. XXXII-21

Dispositif sélectif mettant en œuvre les propriétés du circuit bouchon

Remarque : La fréquence de résonance d'un circuit bouchon dont la résonance est aiguë est la même que celle d'un circuit série si les capacités et les inductances ont les mêmes valeurs dans les deux cas.

Lorsque la résistance de la bobine n'est plus négligeable devant $L\omega$, un calcul complet montre que la pulsation de résonance est égale à :

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}$$

Elle diminue donc lorsque R augmente et la résonance devient moins aiguë. Au contraire, pour un circuit série la fréquence de résonance est indépendante de la résistance du circuit.

CHAPITRE XXXIII

PUISSANCE EN COURANT ALTERNATIF

1. PUISSANCE ABSORBÉE PAR UN CIRCUIT

Considérons un circuit électrique ne comprenant que des résistances, des inductances et des condensateurs, parcouru par un courant sinusoïdal $i = \hat{I}\cos\omega t$, alors que la tension entre ses bornes est $u = \hat{U}\cos(\omega t + \varphi)$. Soit $\underline{Z}$ l'impédance complexe de ce circuit.

$$\underline{Z} = R + jX$$

R partie réelle de l'impédance complexe sera appelée *résistance du circuit* tandis que X est la *réactance*.

La d.d.p. aux bornes du circuit est donnée par la loi d'Ohm :

$$\underline{U} = \underline{Z}.\underline{I}$$

Déterminons la puissance électrique consommée par le circuit. La puissance p consommée par le circuit à l'instant t (*puissance instantanée*) est égale au produit ui (fig. XXXIII-1)

$$p = u\,i = \hat{U}\hat{I}\cos(\omega t + \varphi)\cos(\omega t)$$
$$= \frac{1}{2}\hat{U}\hat{I}\left[\cos(2\omega t + \varphi) + \cos\varphi\right]$$

La puissance moyenne P consommée par le circuit est la moyenne des valeurs instantanées de p. Si nous considérons un intervalle de temps égal à une période :

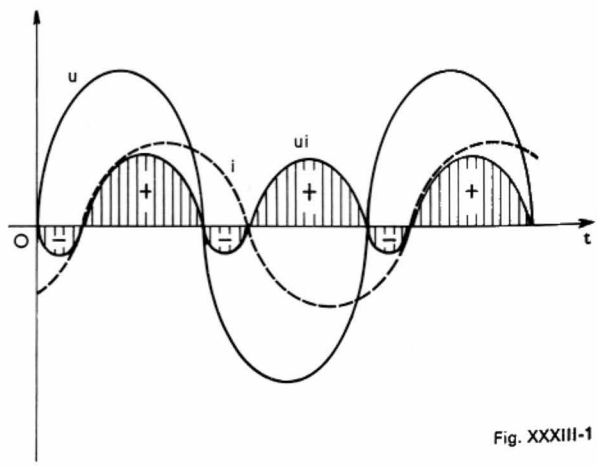


Fig. XXXIII-1

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\hat{U}\hat{I}\left[\cos(2\omega t + \varphi) + \cos\varphi\right]dt$$
$$= \frac{1}{T}\left[\int_0^T \frac{1}{2}\hat{U}\hat{I}\cos(2\omega t + \varphi)\,dt + \int_0^T \frac{1}{2}\hat{U}\hat{I}\cos\varphi\,dt\right]$$

La valeur moyenne de cos $(2\,\omega t + \varphi)$ est nulle et la puissance est donc égale à :

$$P = \frac{\widehat{U}\widehat{I}\cos\varphi}{2}$$

En introduisant les valeurs efficaces

$$U_{\text{eff}} = \frac{\widehat{U}}{\sqrt{2}} \quad I_{\text{eff}} = \frac{\widehat{I}}{\sqrt{2}}$$

nous obtenons la relation :

$$\boxed{P = U_{\text{eff}}\, I_{\text{eff}} \cos\varphi}$$

Dans un circuit électrique, *la puissance dissipée par un courant alternatif est le produit de l'intensité efficace dans le circuit, de la tension efficace aux bornes du circuit et d'un facteur égal au cosinus de l'angle φ du déphasage de la tension par rapport au courant.* Ce facteur est appelé **facteur de puissance.**

2. AUTRE EXPRESSION DE LA PUISSANCE MOYENNE

L'angle φ est également l'argument de l'impédance complexe $\underline{Z}$:

$$\underline{Z} = R + jX \quad \text{et : } \operatorname{tg}\varphi = \frac{X}{R}$$

Par suite le facteur de puissance est égal à

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \frac{R}{Z}$$

En utilisant ce résultat, l'expression de la puissance P devient :

$$P = U_{\text{eff}}\, I_{\text{eff}} \frac{R}{Z}$$

Comme, d'après la loi d'Ohm, $U_{\text{eff}} = Z\, I_{\text{eff}}$, nous déduisons :

$$P = Z\, I_{\text{eff}}^2 \frac{R}{Z} = R\, I_{\text{eff}}^2$$

Nous retrouvons la *loi de Joule :*

$$P = R\, I_{\text{eff}}^2$$

La puissance moyenne dissipée par un courant alternatif dans un circuit électrique de résistance R est le produit de la résistance du circuit et du carré de l'intensité efficace du courant.

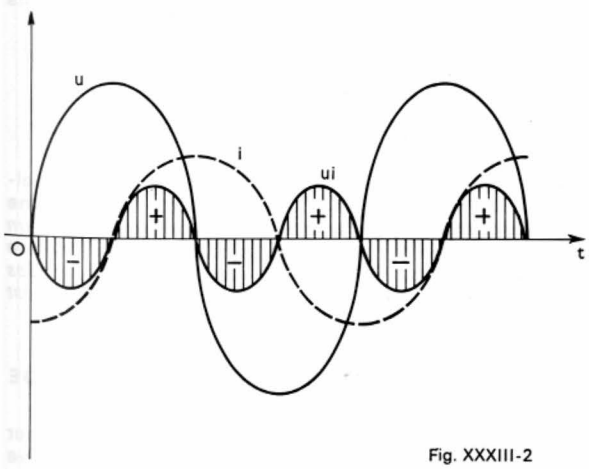


Fig. XXXIII-2

Pour une inductance pure (c'est-à-dire sans aucune résistance) la puissance moyenne est nulle (fig. XXXIII-2). Il en est de même pour un condensateur (fig. XXXIII-3) car la tension aux bornes de l'appareil est en quadrature

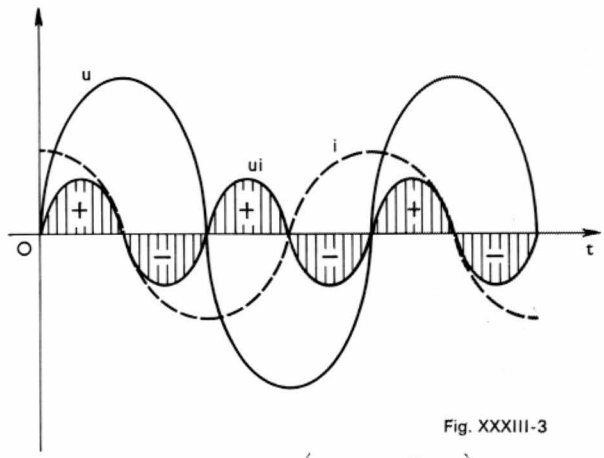


Fig. XXXIII-3

avec l'intensité du courant $\left(\varphi = -\frac{\pi}{2}\text{ rad}\right)$ et le facteur de puissance cos φ est nul.

Une inductance pure ou un condensateur ne consomment en moyenne aucune puissance.

Pour un intervalle de temps égal à une alternance, ce résultat est vrai, mais si la puissance moyenne est nulle, il n'en est pas de même de la puissance instantanée. Pour une bobine, durant la demi-alternance pendant laquelle l'intensité du courant augmente, l'inductance consomme de l'énergie électrique qu'elle stocke sous forme d'énergie électromagnétique. Lorsque le circuit inductif est traversé par un courant d'intensité $\widehat{I}$, l'énergie électromagnétique est égale à $\frac{1}{2} L\, \widehat{I}^2$. Pendant la seconde moitié de l'alternance, le courant a une intensité décroissante, et l'inductance restitue entièrement l'énergie qu'elle avait emmagasinée. Il en est de même pour un condensateur qui, pendant une demi-alternance, consomme de l'énergie électrique qu'il transforme en énergie électrostatique ; pendant l'autre demi-alternance, il restitue cette énergie. La seule énergie électrique consommée par un circuit électrique ne comportant que des résistances, des condensateurs et des inductances, l'est sous forme d'effet Joule dans les résistances.

3. PUISSANCE COMPLEXE

Pour la suite nous conviendrons de désigner par $\underline{G}$ le nombre complexe $G_{\text{eff}}\, \mathbf{e}^{j(\omega t + \varphi)}$ associé à $g = G_{\text{eff}}\sqrt{2}$ cos $(\omega t + \varphi)$ et par $\underline{G^*}$ le nombre complexe conjugué : $\underline{G^*} = G_{\text{eff}}\, \mathbf{e}^{-j(\omega t + \varphi)}$. $\underline{G}$ et $\underline{G^*}$ ont des parties réelles égales et des parties imaginaires opposées.

La puissance complexe d'un circuit parcouru par un courant d'intensité $i = \widehat{I}\cos\omega t$, et présentant entre ses bornes une tension $u = \widehat{U}\cos(\omega t + \varphi)$ est le nombre complexe donné par la relation suivante :

$$\underline{S} = \underline{U}\ \underline{I^*}$$

Or nous savons que :

$$\underline{U} = U_{\text{eff}}\, \mathbf{e}^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$\underline{I} = I_{\text{eff}}\, \mathbf{e}^{j\omega t} \quad \text{et :} \quad \underline{I^*} = I_{\text{eff}}\, \mathbf{e}^{-j\omega t}$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\underline{S} = U_{\text{eff}}\, I_{\text{eff}}\, \mathbf{e}^{j(\omega t + \varphi)}\ \mathbf{e}^{-j\omega t} = U_{\text{eff}}\, I_{\text{eff}}\, \mathbf{e}^{j\varphi}$$

Soit : $$\underline{S} = U_{\text{eff}}\, I_{\text{eff}}\, (\cos\varphi + j \sin\varphi)$$

Le module S de $\underline{S}$ est le nombre $U_{\text{eff}}\, I_{\text{eff}}$ appelé **puissance apparente** du circuit. Sa partie réelle $(U_{\text{eff}}\, I_{\text{eff}} \cos\varphi)$ est la puissance moyenne consommée par le circuit ; elle est appelée aussi **puissance active ;** elle est égale au produit de la puissance apparente et du facteur de puissance du circuit.

La partie imaginaire de $\underline{S}$ est appelée **puissance réactive.** Elle est égale au produit de la puissance apparente et de sin φ. La puissance réactive d'une inductance

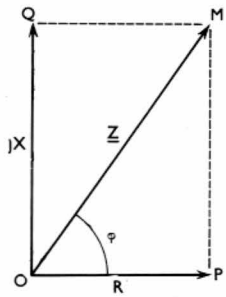
est positive ($\varphi > 0$ car u est en avance par rapport à i) et la puissance réactive d'un condensateur est négative ($\varphi < 0$ car u est en retard par rapport à i).

Dans le système international, la *puissance active* $P = U\,I\cos\varphi$ qui correspond effectivement à un échange d'énergie s'exprime en *watts*. La *puissance apparente*, $S = U_{\text{eff}}\,I_{\text{eff}}$, s'exprime en *voltampères* (symbole : VA). La *puissance réactive* $Q = U_{\text{eff}}\,I_{\text{eff}}\sin\varphi$ s'exprime en *vars* (contraction de l'ancienne désignation : voltampères réactifs).

Remarque : Si $\underline{Z} = R + jX$ nous déduisons (fig. XXXIII-4) $\cos\varphi = \dfrac{R}{Z}$ et $\sin\varphi = \dfrac{X}{Z}$. Par suite comme $U_{\text{eff}} = Z\,I_{\text{eff}}$ nous obtenons :

$$\underline{S} = Z\,I_{\text{eff}}^2\left(\frac{R}{Z} + j\frac{X}{Z}\right) = R\,I_{\text{eff}}^2 + jX\,I_{\text{eff}}^2$$

Fig. XXXIII-4

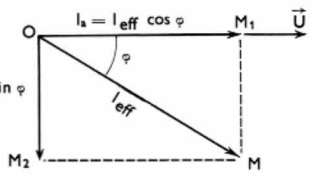


Cette relation montre que la puissance active représente la puissance perdue par effet Joule $\left(P = R\,I_{\text{eff}}^2\right)$ tandis que la puissance réactive est égale au produit de la réactance et du carré de l'intensité efficace $\left(Q = X\,I_{\text{eff}}^2\right)$. Une inductance absorbe une puissance réactive égale à $L\,\omega I_{\text{eff}}^2$; un condensateur fournit une puissance réactive dont la valeur absolue est $\dfrac{I_{\text{eff}}^2}{C\omega}$.

4. COURANT ACTIF ET COURANT RÉACTIF

Représentons sur le même diagramme le courant i et la tension u considérés précédemment (fig. XXXIII-5). L'angle compris entre les deux vecteurs est égal à φ (sur la figure, i est en retard par rapport à u). Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ qui correspond au courant peut être décomposé en deux vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$. Cela signifie que nous pouvons considérer i comme la somme de deux courants : le premier d'intensité efficace $I_a = I_{\text{eff}}\cos\varphi$ en phase avec la tension, le second d'intensité efficace $I_r = I_{\text{eff}}\sin\varphi$ est en quadrature avec la tension.

Fig. XXXIII-5



Le courant d'intensité $i_a = I_a\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$ est appelé *courant actif* ; il transporte la puissance active du circuit puisque $P = U\,I_a$. Le courant d'intensité $i_r = I_r\sqrt{2}\cos\left(\omega t + \varphi - \dfrac{\pi}{2}\right) = I_r\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi)$ est appelé *courant réactif*. La puissance moyenne transportée par ce courant est nulle ; il sert à produire des champs électromagnétiques où se trouve localisée une certaine puissance, mais celle-ci passe périodiquement de la forme électrique à la forme électromagnétique et inversement (V. ci-dessus § 2).

5. THÉORÈME DE BOUCHEROT

Lorsqu'un circuit électrique ne comporte que des *appareils en série*, l'intensité i du courant est la même en tout point du circuit. La tension u aux bornes du circuit est la somme des d.d.p. aux bornes des divers appareils (fig. XXXIII-6). La puissance complexe totale du circuit est égale à :

$$\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I^*} = (\underline{U_1} + \underline{U_2} + \underline{U_3})\,\underline{I^*} = \underline{U_1}\,\underline{I^*} + \underline{U_2}\,\underline{I^*} + \underline{U_3}\,\underline{I^*}$$

(puisque $u = (u_1 + u_2 + u_3) \Rightarrow \underline{U} = \underline{U_1} + \underline{U_2} + \underline{U_3}$)

$\underline{S}$ est donc égale à la somme des puissances complexes des divers récepteurs.

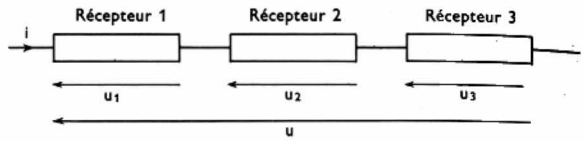


Fig. XXXIII-6

Lorsqu'un circuit ne comporte que des *appareils en parallèle*, la tension u est la même aux bornes de chaque appareil, et l'intensité i du courant dans le circuit principal est la somme des intensités des courants dans les dérivations (fig. XXXIII-7).

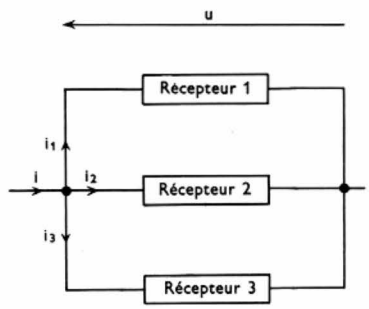


Fig. XXXIII-7

Par suite, la puissance complexe totale de l'ensemble est :

$$\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I^*} = \underline{U}\,(\underline{I_1^*} + \underline{I_2^*} + \underline{I_3^*}) = \underline{U}\,\underline{I_1^*} + \underline{U}\,\underline{I_2^*} + \underline{U}\,\underline{I_3^*}$$

(puisque $i = i_1 + i_2 + i_3 \Rightarrow \underline{I} = \underline{I_1} + \underline{I_2} + \underline{I_3}$)

Dans ce cas encore la puissance complexe du circuit est la somme des puissances complexes des divers appareils.

Ce résultat très général peut donc être traduit au moyen de l'expression suivante :

$$\underline{S} = \underline{S_1} + \underline{S_2} + \underline{S_3}$$

Appelons respectivement P et Q, P_1 et Q_1, P_2 et Q_2, P_3 et Q_3 les puissances actives et réactives de l'ensemble et celles des récepteurs 1, 2 et 3. L'égalité précédente devient :

$$P + jQ = (P_1 + jQ_1) + (P_2 + jQ_2) + (P_3 + jQ_3)$$

Elle entraîne deux autres relations :

$$P = P_1 + P_2 + P_3$$
$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

Les résultats peuvent être étendus à un nombre quelconque de récepteurs ; c'est ce qu'exprime le **théorème de Boucherot :** *la puissance active consommée par un réseau alimenté sous une tension sinusoïdale de fréquence constante est la somme des puissances actives consommées dans chaque appareil, et la puissance réactive totale est la somme algébrique des puissances réactives.*

6. IMPORTANCE PRATIQUE DU FACTEUR DE PUISSANCE

Considérons une installation électrique ayant un facteur de puissance $\cos\varphi$ et consommant une puissance active P, alimentée sous une tension U_{eff} par l'intermédiaire d'une ligne électrique de résistance R.

L'intensité du courant dans l'installation est égale à :

$$I_{\text{eff}} = \frac{P}{U_{\text{eff}}\cos\varphi}$$

Principaux résultats

Circuit	Résistance : R Réactance : X Impédance : $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ Impédance complexe : $\underline{Z} = R + jX$
Tension	Tension instantanée : $u = \hat{U} \cos(\omega t + \varphi) = U_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$ Tension efficace : $U_{\text{eff}} = \dfrac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$
Courant	Intensité instantanée : $i = \hat{I} \cos \omega t = I_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos \omega t$ Intensité efficace : $I_{\text{eff}} = \dfrac{\hat{I}}{\sqrt{2}}$ Remarque : $I_{\text{eff}} = \sqrt{(I_a)^2 + (I_r)^2}$
Déphasage	u est déphasé d'un angle φ par rapport au courant $\varphi > 0$: u est en avance par rapport à i (i est en retard par rapport à u) $\varphi < 0$: u est en retard par rapport à i (i est en avance par rapport à u)
Courant actif	Intensité instantanée : $i_a = I_a \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$ Intensité efficace : $I_a = I_{\text{eff}} \cos \varphi$ i_a est en phase avec u.
Courant réactif	Intensité instantanée : $i_r = I_r \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi)$ Intensité efficace : $I_r = I_{\text{eff}} \sin \varphi$ i_r est en quadrature avec u.
Puissance	Puissance apparente : $S = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} = Z I_{\text{eff}}^2 = \dfrac{U_{\text{eff}}}{Z}$ (en voltampères) Puissance active : $P = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi = R I_{\text{eff}}^2 = U_{\text{eff}} I_a$ (en watts) Puissance réactive : $Q = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin \varphi = X I_{\text{eff}}^2 = U_{\text{eff}} I_r$ (en vars) Puissance complexe : $\underline{S} = P + jQ = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} (\cos \varphi + j \sin \varphi)$ Remarque : $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$
Facteur de puissance	$\cos \varphi = \dfrac{P}{S} = \dfrac{R}{Z}$

et la puissance consommée par effet Joule dans la ligne a la valeur suivante :

$$P_L = R\, I_{\text{eff}}^2 = \frac{R\, P^2}{U_{\text{eff}}^2 \cos^2 \varphi}$$

La perte relative de puissance est donc égale à :

$$\frac{P_L}{P} = \frac{R\, P}{U_{\text{eff}}^2 \cos^2 \varphi}$$

Dans une installation électrique, consommant une puissance électrique donnée, *la perte relative de puissance par effet Joule dans la ligne est inversement proportionnelle au carré du facteur de puissance.*

Il faut donc que le facteur de puissance soit le plus proche possible de sa valeur maximale 1. La plupart des installations ont un déphasage φ positif (courant en retard sur la tension) car elles comprennent beaucoup d'appareils inductifs (transformateurs, moteurs électriques) ; elles consomment donc de la puissance réactive et pour un même courant actif (c'est-à-dire pour une puissance active déterminée), l'intensité efficace du courant (et la puissance perdue en ligne) est d'autant plus grande que le déphasage φ est plus important (fig. XXXIII-8). Pour remédier à ces inconvénients, des appareils (condensateurs, compensateurs synchrones) fournissant de la puissance réactive sont branchés en dérivation sur l'installation à compenser (V. t. 1, Électrotechnique, chap. 22).

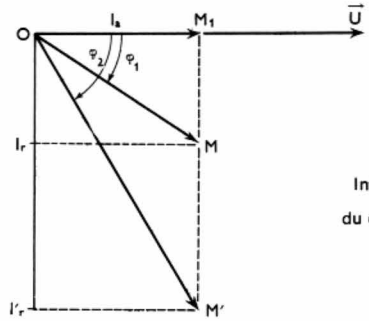


Fig. XXXIII-8

Influence du déphasage φ sur la valeur efficace du courant réactif, le courant actif étant constant

CHAPITRE XXXIV

SYSTÈMES DE COURANTS POLYPHASÉS

1. SYSTÈME POLYPHASÉ

Tous les récepteurs que nous avons considérés jusqu'à présent étaient reliés à la source qui les alimentait par l'intermédiaire de deux conducteurs. Lorsque la d.d.p. aux bornes de la source est sinusoïdale, celle-ci est dite *monophasée* pour la distinguer des sources fournissant des systèmes de tensions polyphasés comme ceux que nous allons étudier à présent. Par abus de langage, le qualificatif *monophasé* est souvent accolé (sans beaucoup de discernement) au circuit et aux éléments qui le composent (source, récepteurs...) et aux grandeurs sinusoïdales (tension monophasée, courant monophasé !).

Les systèmes polyphasés (de tension et de courant) sont employés dès que la puissance demandée devient importante. Un système polyphasé est un système de m grandeurs sinusoïdales de même fréquence, deux grandeurs consécutives (c'est-à-dire repérées par les indices n et $n + 1$) étant déphasées l'une par rapport à l'autre de $\frac{2\pi}{m}$ radians (fig. XXXIV-1). Lorsque ces m grandeurs ont même amplitude, le système est *polyphasé équilibré*.

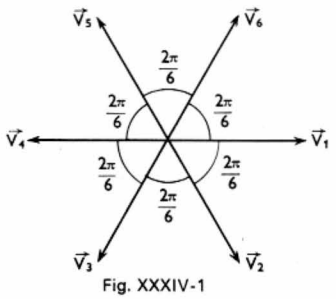


Fig. XXXIV-1

— réduction des ondulations des tensions redressées dans les montages transformant les courants alternatifs en courants continus (V. t. 1, Électronique, chap. 18). Le système le plus fréquemment utilisé est le système triphasé. Dans quelques cas particuliers nous rencontrerons les systèmes tétraphasé (ancien système de distribution) et hexaphasé (obtenu à partir d'un système triphasé et employé dans le redressement ; V. t. 1, Électronique, chap. 18).

Remarque : Les sources, les récepteurs, les circuits utilisables avec des systèmes de tensions ou de courants polyphasés sont dits *polyphasés*. Par abus de langage il en est de même des tensions et des courants des systèmes polyphasés ; les expressions *tension triphasée* et *courant triphasé* sont couramment employées pour désigner une tension sinusoïdale ou un courant sinusoïdal d'un système triphasé.

2. OBTENTION D'UN SYSTÈME DE TENSIONS POLYPHASÉ

Considérons un système de n bobines numérotées 1, 2..., n, fixées sur un bâti, et décalées entre elles de $\frac{2\pi}{n}$ rad

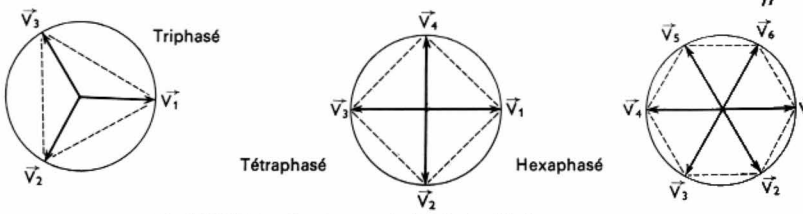


Fig. XXXIV-2 — Systèmes polyphasés équilibrés

Les vecteurs de Fresnel figurant les grandeurs formant un système polyphasé équilibré joignent l'origine aux sommets d'un polygone régulier à m côtés, inscrit dans un cercle centré à l'origine. Leur somme géométrique est donc nulle (fig. XXXIV-2).

Les principaux avantages des systèmes polyphasés sur les systèmes monophasés sont les suivants :

— transport de l'énergie dans de meilleures conditions, (V. t. 2, Transport et distribution de l'énergie électrique, chap. 1),

— possibilité d'obtenir plusieurs tensions différentes,

— possibilité de créer des champs magnétiques tournants (V. t. 1, Électrotechnique, chap. 1),

(fig. XXXIV-3). Le bâti tourne avec une vitesse angulaire ω constante dans un champ magnétique uniforme. Si nous prenons comme origine des temps une position pour laquelle le flux, à travers la bobine n° 1 est nul, les f.é.m. induites dans les bobines 1, 2, ..., n sont respectivement :

$$e_1 = \hat{E} \cos \omega t \qquad e_2 = \hat{E} \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{n} \right)$$

$$e_3 = \hat{E} \cos \left(\omega t - \frac{2 \times 2\pi}{n} \right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$e_n = \hat{E} \cos \left(\omega t - \frac{(n-1) \times 2\pi}{n} \right)$$

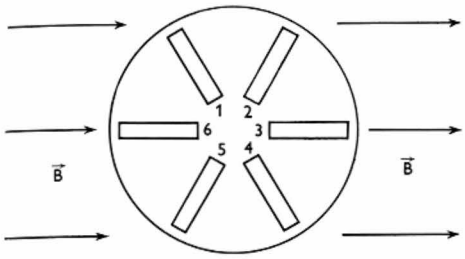


Fig. XXXIV-3 — Principe d'obtention d'un système de tensions polyphasé. Le bâti mobile porte six bobines et tourne à une vitesse constante ω dans un champ magnétique constant $\vec{B}$

En reliant l'entrée et la sortie de chaque bobine à des bagues sur lesquelles frottent des balais, nous pouvons obtenir un système polyphasé de courants.

3. RÉSEAU TRIPHASÉ À QUATRE CONDUCTEURS

Si le bâti du montage précédent porte trois bobines nous obtenons un système de tensions triphasé. Théoriquement il faut six bornes pour recueillir ces trois tensions. Pratiquement, il n'y a pas d'inconvénient à réunir une extrémité de chaque bobine à une borne commune, ce qui permet de n'utiliser que quatre bornes. Le point commun aux trois circuits est appelé le *point neutre*. Ce dispositif constitue un alternateur triphasé élémentaire, chaque bobine figurant un enroulement d'un alternateur réel. (V. t. 1, Électrotechnique, chap. 9).

Dans un réseau triphasé à quatre conducteurs, l'un d'eux appelé *conducteur neutre* est relié au point neutre de l'alternateur et les trois autres appelés conducteurs de phase, sont réunis chacun à une entrée d'enroulement. Le conducteur neutre est souvent repéré par la lettre *N* ou par la couleur *grise*, les autres conducteurs sont repérés par les couleurs *verte* (phase 1), *jaune* (phase 2), *brune* (phase 3) ou par les nombres 1, 2 et 3.

La tension efficace entre un conducteur de phase et le conducteur neutre est appelée *tension simple* (valeur efficace : U_{seff}). La tension entre deux conducteurs de phase est appelée *tension composée* (valeur efficace : U_{ceff}).

Désignons par v_1, v_2, v_3 et v_N les potentiels instantanés des conducteurs 1, 2, 3 et du neutre (fig. XXXIV-4) ; ils

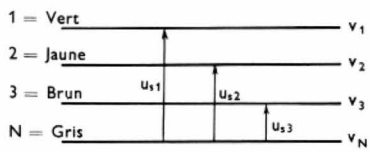


Fig. XXXIV-4

sont mesurés en prenant une référence quelconque (la terre par exemple). Les valeurs instantanées des tensions simples (fig. XXIX-5) sont égales à :

$$u_{s1} = v_1 - v_N = \hat{U} \cos \omega t$$

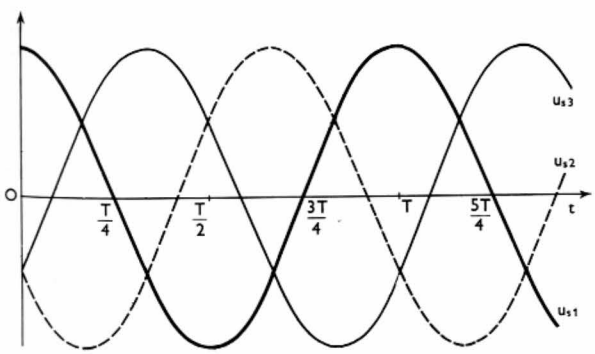


Fig. XXXIV-5 — Tensions simples d'un système triphasé. Représentation en fonction du temps

$$u_{s2} = v_2 - v_N = \hat{U} \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$u_{s3} = v_3 - v_N = \hat{U} \cos \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right)$$

Dans un diagramme de Fresnel les trois vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$, $\overrightarrow{OM_3}$ représentant respectivement u_{s1}, u_{s2} et u_{s3} déterminent un triangle équilatéral M_1, M_2, M_3 (fig. XXXIV-6).

Les valeurs instantanées des tensions composées sont données par les relations suivantes :

$$u_{c1} = v_1 - v_2 = u_{s1} - u_{s2}$$
$$u_{c2} = v_2 - v_3 = u_{s2} - u_{s3}$$
$$u_{c3} = v_3 - v_1 = u_{s3} - u_{s1}$$

La d.d.p. u_{c1} est donc représentée par un vecteur qui est la différence des vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$; c'est précisément un vecteur $\overrightarrow{OM'_1}$ équipollent à $\overrightarrow{M_2 M_1}$.

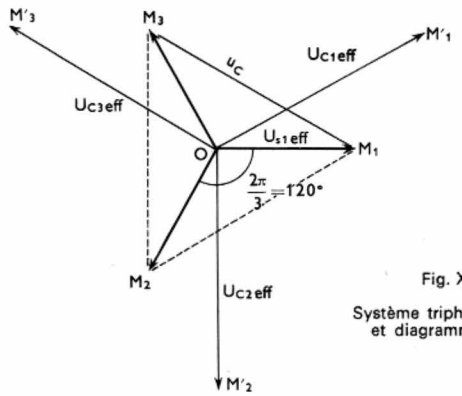


Fig. XXXIV-6
Système triphasé de tensions et diagramme de Fresnel

De même nous déduisons que u_{c2} et u_{c3} sont respectivement représentées par des vecteurs $\overrightarrow{OM'_2}$ et $\overrightarrow{OM'_3}$ équipollents à $\overrightarrow{M_3 M_2}$ et $\overrightarrow{M_1 M_3}$.

Cela nous permet de déduire une relation entre les valeurs efficaces des tensions composées et celles des tensions simples.

$$\boxed{U_{ceff} = \sqrt{3}\, U_{seff}}$$

(car le côté d'un triangle équilatéral inscrit dans un cercle de rayon a est égal à $a\sqrt{3}$).

Par exemple, si pour un réseau la tension simple est 127 V, la tension composée est $127\sqrt{3} = 220$ V (réseau dit 127/220V) ; à une tension simple de 220 V correspond une tension composée de $220\sqrt{3} = 380$ V (réseau 220/380 V).

Remarque : Deux systèmes triphasés peuvent être considérés : le système précédent appelé *système direct*, et le système formé par les trois tensions suivantes :

$$u_{s1} = \hat{U} \cos \omega t, \quad u_{s2} = \hat{U} \cos \left(\omega t + \frac{2\pi}{3} \right),$$

$$u_{s3} = \hat{U} \cos \left(\omega t + \frac{4\pi}{3} \right)$$

appelé *système inverse* (fig. XXXIV-7).

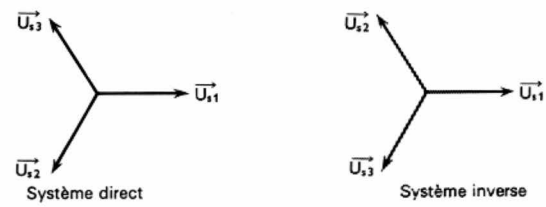


Fig. XXXIV-7

4. MONTAGE ÉTOILE. MONTAGE TRIANGLE

4.1. Montage étoile. — Ce montage comprend trois récepteurs qui sont disposés parfois à la manière des branches d'une étoile (fig. XXXIV-8). Chaque appareil est placé

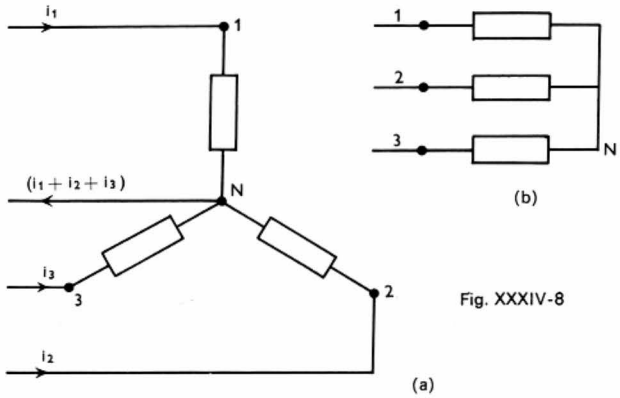


Fig. XXXIV-8

Deux représentations d'un montage étoile : a - avec fil neutre ; b - sans fil neutre

entre un conducteur de phase et le conducteur neutre et par conséquent est alimenté sous une d.d.p. égale à la tension simple du réseau. L'intensité du courant dans chaque récepteur est égale à celle qui circule dans le conducteur correspondant. Dans le conducteur neutre, au contraire, l'intensité i_N du courant est la somme des trois intensités $(i_1 + i_2 + i_3)$ du fait des conventions de signes choisies (fig. XXXIV-9). Pour la déterminer, il faut chercher la

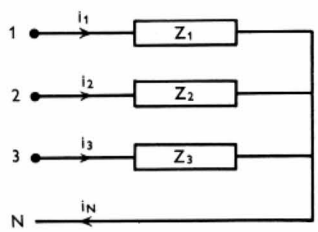


Fig. XXXIV-9

somme des trois vecteurs correspondants. Dans un montage équilibré les récepteurs sont identiques (leurs impédances sont égales) ou les conditions de fonctionnement sont les mêmes ; il en est de même des intensités efficaces des courants $I_{1\text{eff}}$, $I_{2\text{eff}}$ et $I_{3\text{eff}}$ et des déphasages φ_1, φ_2, φ_3 des tensions simples et des courants correspondants (fig. XXXIV-10). Comme les tensions forment un système polyphasé équilibré, les intensités des courants dans les conducteurs de phase forment également un système triphasé équilibré. Par suite, leur somme est nulle, c'est-à-

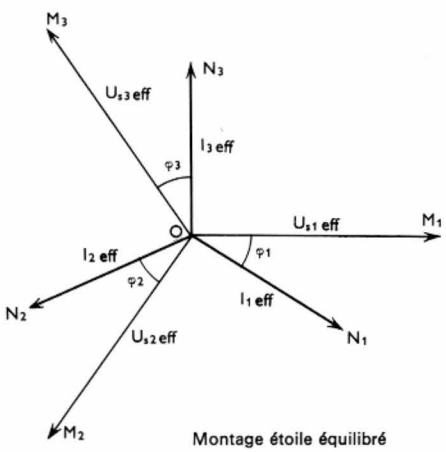


Fig. XXXIV-10

Montage étoile équilibré

$\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$, $\overrightarrow{OM_3}$: vecteurs associés aux tensions simples U_{s1}, U_{s2} et U_{s3}. — $\overrightarrow{ON_1}$, $\overrightarrow{ON_2}$, $\overrightarrow{ON_3}$: vecteurs associés aux courants i_1, i_2, i_3

dire que l'intensité du courant dans le conducteur neutre est nulle : *celui-ci peut être supprimé*. Lorsqu'il en est ainsi, l'intensité du courant dans chaque conducteur est l'opposé de la somme des intensités des courants dans les deux autres conducteurs et tout se passe comme si chaque conducteur servait de fil de retour aux deux autres.

Si le montage n'est pas équilibré, le fil neutre n'est pas indispensable mais il est préférable de le conserver : il permet d'appliquer aux bornes de l'ensemble un système de tensions triphasé équilibré. Les courants i_1, i_2 et i_3 ne forment pas un système triphasé équilibré : un courant circule dans le conducteur neutre.

4.2. Montage triangle. — Dans ce montage, les trois récepteurs sont disposés les uns à la suite des autres, et ils figurent parfois un triangle. Équilibré ou non, ce montage ne nécessite que trois conducteurs d'alimentation (fig. XXXIV-11). Aux bornes de chaque récepteur, on relève une tension composée. Dans le cas d'un montage équilibré, les intensités efficaces des courants dans les trois récepteurs sont égales et déphasées de 120° les unes par rapport aux autres (les courants sont comptés positivement lorsqu'ils circulent dans les sens indiqués sur la figure XXXIV-11).

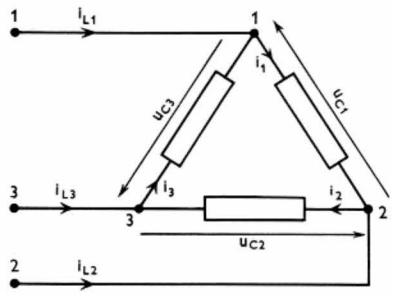


Fig. XXXIV-11

Désignons par φ_1, φ_2 et φ_3 les déphasages respectifs de i_1 par rapport à u_{c1}, i_2 par rapport à u_{c2} et de i_3 par rapport à u_{c3}. Les récepteurs présentant la même impédance, ces trois angles de déphasage sont égaux et les trois courants forment bien, comme les trois tensions, un système triphasé équilibré. Si nous représentons ces tensions et ces courants sur un même diagramme de Fresnel, nous pouvons déduire les intensités des courants dans les conducteurs du réseau.

Avec les conventions choisies nous pouvons écrire :

intensité du courant dans la ligne n° 1 : $i_{L1} = i_1 - i_3$

intensité du courant dans la ligne n° 2 : $i_{L2} = i_2 - i_1$

intensité du courant dans la ligne n° 3 : $i_{L3} = i_3 - i_2$

Il en résulte que l'intensité i_{L1} est représentée par le vecteur $\overrightarrow{OP_1}$ (fig. XXXIV-12) égal à la différence de $\overrightarrow{ON_1}$ et $\overrightarrow{ON_3}$ (qui correspondent à i_1 et i_3) ; $\overrightarrow{OP_1}$ est équipollent à $\overrightarrow{N_3N_1}$. Nous déduisons de même que i_{L2} et i_{L3} sont représentés par des vecteurs $\overrightarrow{OP_2}$ et $\overrightarrow{OP_3}$ respectivement équipollents à $\overrightarrow{N_1N_2}$ et $\overrightarrow{N_2N_3}$. Le module du vecteur $\overrightarrow{OP_1}$ est $\sqrt{3}$ fois plus grand que celui du vecteur $\overrightarrow{ON_1}$ (dans ON_1P_1, $OP_1 = 2\,ON_1 \cos 30° = \sqrt{3}\,ON_1$) et par suite un courant i_L en ligne a une intensité efficace $\sqrt{3}$ fois plus grande qu'un courant i dans un récepteur.

$$I_{L\text{eff}} = \sqrt{3}\, I_{\text{eff}}$$

5. PUISSANCES EN TRIPHASÉ

Pour chaque récepteur nous pouvons définir :

— la puissance active (puissance absorbée) P

— la puissance réactive Q

— la puissance apparente S

5.1. Montage étoile équilibré. — Dans le cas d'un montage étoile **équilibré,** le récepteur n° 1 est placé

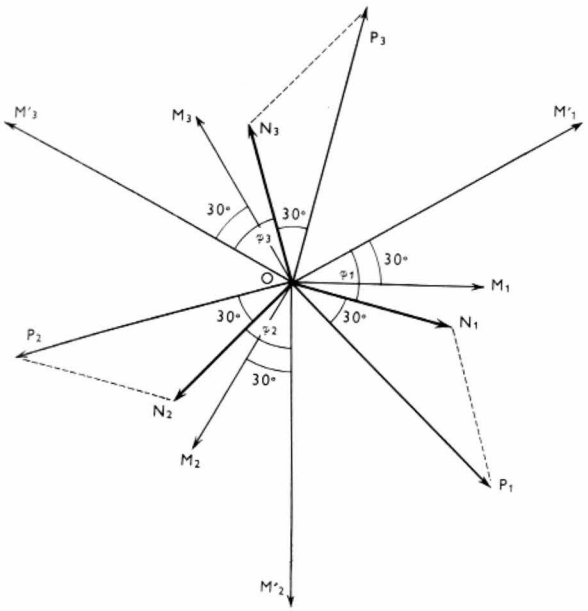


Fig. XXXIV-12 — Montage triangle équilibré

Représentation de Fresnel : $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$, $\overrightarrow{OM_3}$, vecteurs représentant les tensions simples u_{s1}, u_{s2}, u_{s3} ; $\overrightarrow{OM'_1}$, $\overrightarrow{OM'_2}$, $\overrightarrow{OM'_3}$, vecteurs représentant les tensions composées u_{c1}, u_{c2}, u_{c3} ; $\overrightarrow{ON_1}$, $\overrightarrow{ON_2}$, $\overrightarrow{ON_3}$, vecteurs représentant les courants dans les récepteurs ; $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$, $\overrightarrow{OP_3}$, vecteurs représentant les courants dans les lignes d'alimentation

sous une tension simple u_{s1} et est traversé par un courant i_1 déphasé d'un angle φ_1 par rapport à u_{s1} (V. ci-dessus).

$$P_1 = U_{s1\text{eff}} \cdot I_{1\text{eff}} \cdot \cos \varphi_1$$
$$Q_1 = U_{s1\text{eff}} \cdot I_{1\text{eff}} \cdot \sin \varphi_1$$
$$S_1 = U_{s1\text{eff}} \cdot I_{1\text{eff}} = \sqrt{P_1^2 + Q_1^2}$$

Puisque le montage est équilibré :

$$U_{s1\text{eff}} = U_{s2\text{eff}} = U_{s3\text{eff}} = U_{s\text{eff}}$$
$$I_{1\text{eff}} = I_{2\text{eff}} = I_{3\text{eff}} = I_{\text{eff}}$$
$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi$$

Les puissances actives et réactives s'additionnant, le montage triphasé absorbe donc

— une puissance active :

$$P = 3\,P_1 = 3\,U_{s\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cos \varphi = \sqrt{3}\,U_{c\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cos \varphi$$

— une puissance réactive :

$$Q = 3\,Q_1 = 3\,U_{s\text{eff}}\,I_{\text{eff}} \sin \varphi = \sqrt{3}\,U_{c\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \sin \varphi$$

La puissance apparente du montage est encore donnée par l'expression :

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

En tenant compte des valeurs de P et de Q nous déduisons :

$$S = \sqrt{\left(\sqrt{3}\,U_{c\text{eff}}\,I_{\text{eff}} \cos \varphi\right)^2 + \left(\sqrt{3}\,U_{c\text{eff}}\,I_{\text{eff}} \sin \varphi\right)^2}$$
$$= \sqrt{3}\,U_{c\text{eff}}\,I_{\text{eff}}$$

5.2. Montage triangle équilibré. — Dans le cas d'un montage triangle **équilibré,** avec les mêmes conventions que précédemment, et si nous posons de plus :

$$U_{c1\text{eff}} = U_{c2\text{eff}} = U_{c3\text{eff}} = U_{c\text{eff}}$$
$$I_{L1\text{eff}} = I_{L2\text{eff}} = I_{L3\text{eff}} = I_{L\text{eff}} = \sqrt{3}\,I_{\text{eff}}$$

nous trouvons :

— pour le récepteur n° 1 :

$$P_1 = U_{c1\text{eff}} \cdot I_{1\text{eff}} \cos \varphi_1 = U_{c\text{eff}} \cdot \frac{I_{L\text{eff}}}{\sqrt{3}} \cos \varphi$$

$$Q_1 = U_{c1\text{eff}} \cdot I_{1\text{eff}} \sin \varphi_1 = U_{c\text{eff}} \cdot \frac{I_{L\text{eff}}}{\sqrt{3}} \sin \varphi$$

$$S_1 = U_{c1\text{eff}} \cdot I_{1\text{eff}} = \sqrt{P_1^2 + Q_1^2}$$

— pour l'ensemble du montage :

$$P = 3\,P_1 = \sqrt{3}\,U_{c\text{eff}} \cdot I_{L\text{eff}} \cdot \cos \varphi$$
$$Q = 3\,Q_1 = \sqrt{3}\,U_{c\text{eff}} \cdot I_{L\text{eff}} \cdot \sin \varphi$$
$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{3}\,U_{c\text{eff}} \cdot I_{L\text{eff}}$$

5.3. Conclusion. — Les résultats prennent les mêmes formes dans les deux cas :

$P = \sqrt{3} \times$ [valeur efficace de la tension composée] $\times$ [valeur efficace de l'intensité du courant en ligne] $\times$ [facteur de puissance du récepteur]

$Q = \sqrt{3} \times$ [valeur efficace de la tension composée] $\times$ [valeur efficace de l'intensité du courant en ligne] $\times$ [sinus de l'angle φ dont le cosinus est le facteur de puissance du récepteur]

$S = \sqrt{3} \times$ [valeur efficace de la tension composée] $\times$ [valeur efficace de l'intensité du courant en ligne]

6. SYSTÈME TÉTRAPHASÉ

Quatre bobines identiques faisant entre elles un angle de 90° et tournant avec une vitesse angulaire ω constante, dans un champ magnétique d'induction $\vec{B}$ constante, permettent d'obtenir quatre f.é.m. déphasées l'une par rapport à l'autre de 90° (elles sont donc deux à deux opposées).

Il faudrait théoriquement huit conducteurs pour connecter ces bobines à des circuits d'utilisation, mais ce nombre peut être réduit à quatre par des montages en étoile ou

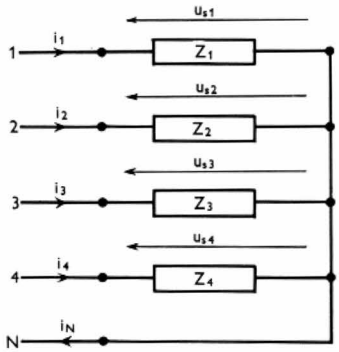


Fig. XXXIV-13

Montage étoile avec un système tétraphasé

en polygone (équivalent du triangle en triphasé). Un montage en étoile avec conducteur neutre est appelé couramment *montage diphasé cinq fils* (fig. XXXIV-13). Chaque récepteur est alimenté sous une tension simple du système polyphasé (fig. XXXIV-14). Le montage en poly-

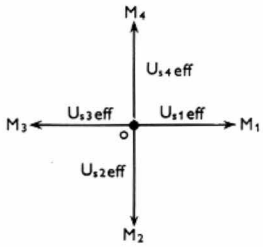
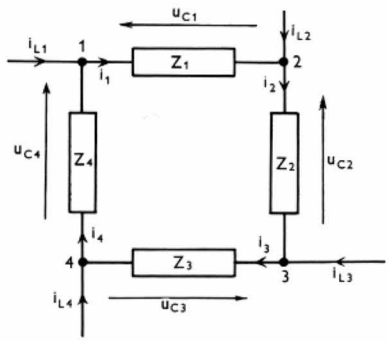


Fig. XXXIV-14

gone se fait en réunissant en série les quatre récepteurs. Ce montage est appelé *montage diphasé carré* (fig. XXXIV-15). Chaque récepteur est alimenté sous une

Fig. XXXIV-15



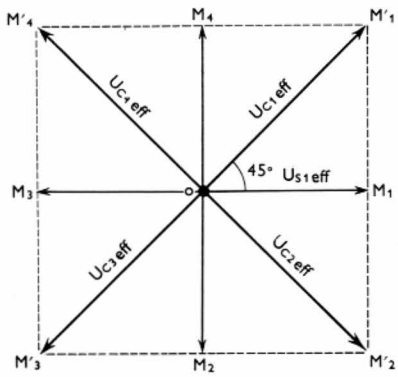
Montage polygone avec un système tétraphasé (montage diphasé carré)

tension composée. En opérant comme en triphasé (V. § 3) nous déduisons les relations suivantes :

$$u_{c1} = u_{s1} - u_{s2}$$
$$u_{c2} = u_{s2} - u_{s3}$$
$$u_{c3} = u_{s3} - u_{s4}$$
$$u_{c4} = u_{s4} - u_{s1}$$

u_{c1}, u_{c2}, u_{c3} et u_{c4} sont représentées par des vecteurs $\overrightarrow{OM'_1}$, $\overrightarrow{OM'_2}$, $\overrightarrow{OM'_3}$, $\overrightarrow{OM'_4}$ (fig. XXXIV-15) équipollents aux vecteurs $\overrightarrow{M_2M_1}$, $\overrightarrow{M_3M_2}$, $\overrightarrow{M_4M_3}$, $\overrightarrow{M_1M_4}$ si $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$, $\overrightarrow{OM_3}$ et $\overrightarrow{OM_4}$ figurent les 4 tensions simples. Si les tensions simples forment un système tétraphasé équilibré, il en est de même des 4 tensions composées.

Fig. XXXIV-16



En considérant le triangle $OM_1M'_1$ nous voyons que $OM'_1 = \sqrt{2}\ OM_1$ ce qui signifie que la valeur efficace de la tension composée U_{ceff} est $\sqrt{2}$ fois plus grande que la valeur efficace de la tension simple

$$U_{ceff} = \sqrt{2}\ U_{seff}$$

Remarques :

1° *Système diphasé.* — Cette appellation s'applique (à tort) à un système formé de deux tensions sinusoïdales en quadrature. Il se déduit du système tétraphasé en utilisant les tensions obtenues entre les points 1 et 3 (u_{13}) d'une part et entre les points 2 et 4 (u_{24}) d'autre part. Sur le diagramme de Fresnel de la figure XXXIV-16 ces tensions sont représentées par les vecteurs $\overrightarrow{M_3M_1}$ et $\overrightarrow{M_4M_2}$.

Un tel système de tensions peut également être obtenu en faisant tourner dans un champ constant deux bobines dont les axes sont perpendiculaires (fig. XXXIV-17). En réunissant deux extrémités des bobines (c'est-à-dire deux extrémités des enroulements dans un alternateur) nous réalisons le principe du réseau *diphasé trois fils* (fig. XXXIV-18).

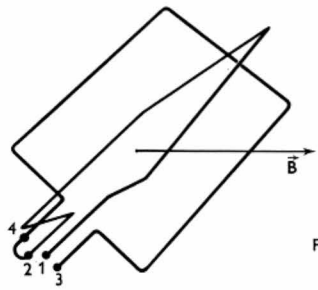


Fig. XXXIV-17

Production de deux tensions sinusoïdales en quadrature

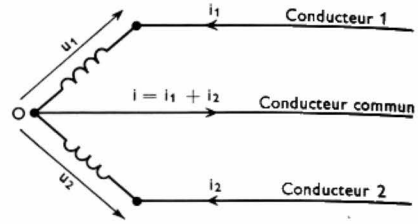


Fig. XXXIV-18

Les diagrammes de Fresnel pour les tensions et pour les courants relatifs à ce système montrent (fig. XXXIV-19) :

— que la tension efficace entre deux phases est $\sqrt{2}$ fois plus grande que la d.d.p. efficace entre phase et conducteur commun,

— que l'intensité efficace du courant dans le conducteur commun est $\sqrt{2}$ fois plus grande que l'intensité efficace du courant dans un conducteur de phase.

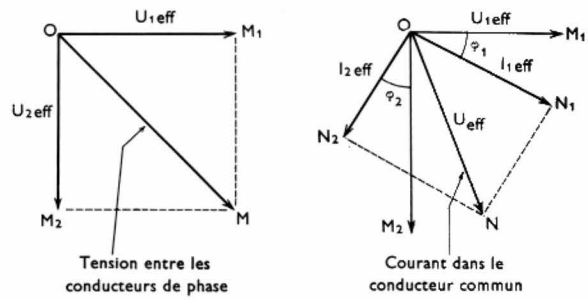


Fig. XXXIV-19 — Représentation de Fresnel. Montage diphasé trois fils : $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$ représentent les tensions simples u_1 et u_2

2° *Système biphasé.* — Il est formé de deux tensions de mêmes valeurs efficaces et déphasées de 180° (en opposition de phase). Seul ce système peut être qualifié de biphasé puisque les deux tensions sont effectivement déphasées de $\frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ rad. Il peut être obtenu en prenant une bobine avec point milieu tournant dans un champ magnétique uniforme. Il est plus commode d'utiliser un transformateur dont l'enroulement secondaire présente un point milieu (fig. XXXIV-20) (V. t. 1, Électrotechnique, chap. 5). Lorsque le primaire est alimenté, les d.d.p. $(v_A - v_O)$ et $(v_O - v_B)$ sont constamment égales et leur valeur commune est $\frac{v_A - v_B}{2}$ car les deux demi-enroulements sont identiques. Par suite les d.d.p. $(v_A - v_O$

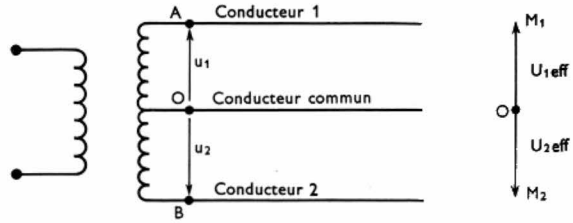


Fig. XXXIV-20 — Système biphasé obtenu à l'aide d'un transformateur à point milieu et représentation de Fresnel des tensions u_1 ($\overrightarrow{OM_1}$) et u_2 ($\overrightarrow{OM_2}$)

et $v_B - v_O$) sont de signes contraires; il faut bien voir qu'elles sont en opposition de phase parce que nous choisissons le potentiel du point milieu O comme référence pour définir les potentiels des autres points A et B. Nous relevons une tension simple entre le point milieu et chacune des extrémités; la tension entre les deux extrémités a une valeur efficace double de celle d'une tension simple.

7. SYSTÈME HEXAPHASÉ

Un système hexaphasé est formé de six tensions déphasées entre elles de $\frac{2\pi}{6}$ rad $= 60°$ (fig. XXXIV-21). La

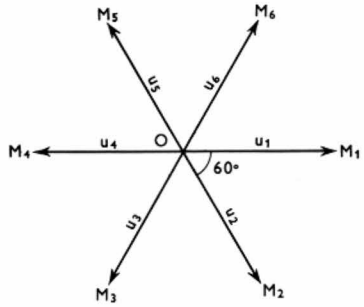


Fig. XXXIV-21

Système de tensions hexaphasé : $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ $\overrightarrow{OM_3}$, $\overrightarrow{OM_4}$, $\overrightarrow{OM_5}$ et $\overrightarrow{OM_6}$ représentent respectivement les tensions u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 et u_6

représentation de Fresnel montre que les couples de tensions u_1 et u_4, u_2 et u_5, u_3 et u_6 sont des tensions égales et de signes contraires (en opposition de phase). Un système hexaphasé est obtenu à partir d'un système de tensions triphasé. Dans le système biphasé la f.é.m. induite dans un enroulement (bobine ou secondaire de transformateur) permet d'obtenir deux tensions égales et en opposition de phase. Si nous faisons de même pour les trois enroulements secondaires d'un transformateur triphasé (V. t. 1, Électrotechnique, chap. 8) nous obtenons six tensions, 2 à 2 en opposition de phase (fig. XXXIV-22). En réunissant les

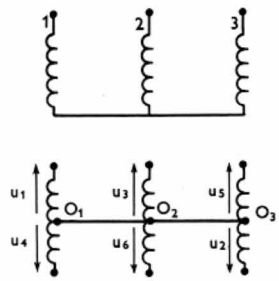


Fig. XXXIV-22

Obtention d'un système de tensions hexaphasé

trois points milieux des enroulements O_1, O_2 et O_3, nous définissons six tensions par rapport au même point de référence et ces tensions forment un système hexaphasé. À noter que les tensions u_1, u_3, u_5 forment un système triphasé direct, ainsi que les tensions u_4, u_6, u_2.

8. PUISSANCES EN SYSTÈMES POLYPHASÉS

La puissance active totale absorbée par un récepteur est la somme des puissances actives de chaque partie du circuit. De même la puissance réactive totale est la somme algébrique des puissances réactives de chaque partie du récepteur. La puissance apparente est obtenue à partir des précédentes en appliquant la relation habituelle

$$(S = \sqrt{P^2 + Q^2})$$

ÉLECTRONIQUE

L'électronique est la partie des sciences physiques qui concerne les phénomènes de conduction dans le vide, dans les gaz et dans les semiconducteurs. Dans ces milieux, le déplacement de charges électriques, c'est-à-dire le passage d'un courant électrique, peut se produire si certaines conditions sont réalisées mais il ne s'effectue jamais aussi facilement que dans un corps conducteur. Des propriétés particulières en découlent et des dispositifs comme les diodes, les transistors, etc., ont été mis au point pour utiliser l'une ou l'autre de ces propriétés. Un classement a été effectué pour grouper les nombreuses utilisations de ces dispositifs. L'**électronique industrielle** regroupe les applications ayant pour but les diverses transformations de l'énergie électrique : passage d'un courant alternatif à un courant continu et inversement, changement de fréquence, chauffage par induction à l'aide de courants de fréquence élevée, chauffage par pertes diélectriques, etc., ainsi que ce qui concerne les automatismes, les mesures et les télémesures des diverses grandeurs (tension, courant, pression, vitesse, masse, temps, etc.), et le comptage. L'électronique industrielle se sépare nettement de domaines plus spécialisés tels que les **télécommunications** (téléphonie, télégraphie, radionavigation, repérage par radar), le **téléguidage** et la **radioélectricité** (radiodiffusion, télévision). Nous pourrions définir de nombreuses autres parties mais le fait essentiel est que, dans tous les cas, ce sont des dispositifs semblables qui sont utilisés fonctionnant suivant les mêmes principes, et dont les formes, les dimensions et beaucoup plus rarement la constitution sont adaptées aux exigences particulières à chaque utilisation.

CHAPITRE PREMIER

ÉLÉMENTS DE LA PHYSIQUE DU SOLIDE

Conducteurs, isolants et semiconducteurs

1. NIVEAUX D'ÉNERGIES D'UN ATOME. ÉTAT CRISTALLIN

Dans un atome isolé, les électrons ont des énergies déterminées qui permettent de les caractériser. Ils sont répartis en niveaux désignés par les lettres *K*, *L*, *M*, *N*,... en partant du noyau (V. t. 1, Physique nucléaire, chap. 1). Il n'en est pas exactement de même dans un solide où un même électron est soumis à l'attraction de plusieurs noyaux, c'est-à-dire à des forces électrostatiques de directions et de sens très différents (qui assurent la cohésion de la matière à l'état solide).

Lorsqu'un corps n'est pas cristallisé, ou lorsque sa pureté n'est pas suffisante, chaque atome de matière se trouve dans un environnement différent de celui de ses voisins et il est difficile de prévoir le comportement électrique d'un tel agrégat. Au contraire, dans un *cristal très pur*, les atomes identiques occupent tous des positions semblables par rapport à leurs voisins et des propriétés générales particulièrement intéressantes en découlent.

Lorsque deux atomes identiques ont leurs noyaux séparés par une distance inférieure au rayon moyen de la trajectoire de leur électron le plus externe (d'énergie-W_e), l'interaction est telle que les deux électrons d'énergie-W_e semblent être placés sur la même trajectoire (fig. I-1) : ils gravitent autour de l'ensemble des deux noyaux. La liaison ainsi réalisée est dite *covalente* (en chimie, on distingue les *liaisons covalentes* ou *homopolaires* et les *liaisons hétéropolaires :* les premières résultent de la mise en commun de deux électrons appartenant à deux atomes voisins pour former un *doublet*, les secondes s'établissent entre des groupements portant des charges électriques de signe contraire). Comme dans un même cristal deux électrons ne peuvent avoir le même niveau d'énergie (principe d'exclusion de Pauli), les deux électrons ont alors des énergies très légèrement différentes $-W_{e1}$ et $-W_{e2}$: il y a dédouble-

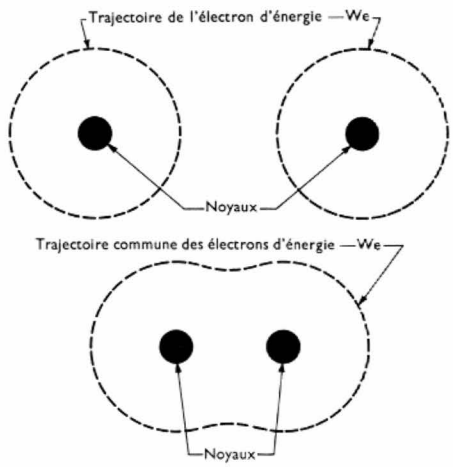


Fig. I-1

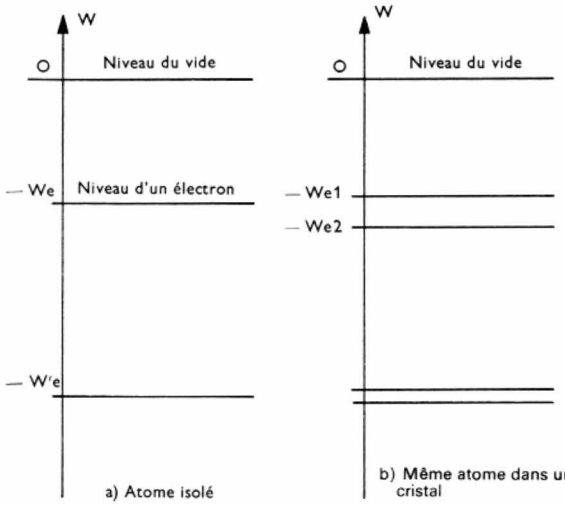


Fig. I-2 — Diagramme des énergies pour les électrons d'un atome (représentation schématique)

ment du niveau d'énergie $-W_e$ (fig. I-2). C'est un résultat un peu analogue à ce que nous obtenons en approchant deux circuits résonnants identiques (même fréquence de résonance f_0) : l'ensemble entre en résonance pour deux fréquences f_1 et f_2 voisines de f_0 (dédoublement de la fréquence de résonance) lorsque les circuits sont couplés par induction.

Dans un cristal, il y a souvent un grand nombre d'atomes pour lesquels les trajectoires les plus écartées du noyau sont mises en commun ou tout au moins perturbées par les atomes voisins. Chacun des niveaux d'énergie se trouve remplacé par un ensemble de niveaux très proches les uns des autres, correspondant à des énergies très voisines et constituant une *bande d'énergie*. Plusieurs bandes correspondant initialement à des électrons d'énergies nettement différentes peuvent même se superposer partiellement.

Dans un corps simple cristallisé, deux bandes sont particulièrement intéressantes : ce sont la *bande de valence* et la *bande de conduction* (fig. I-3). La bande de valence concerne les électrons assurant les liaisons chimiques des

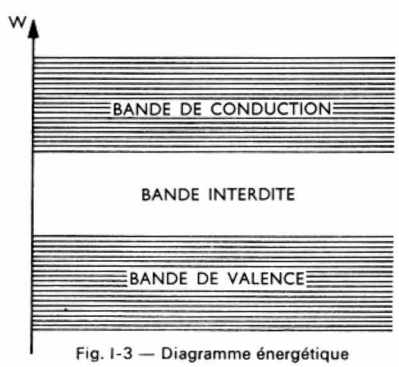


Fig. I-3 — Diagramme énergétique

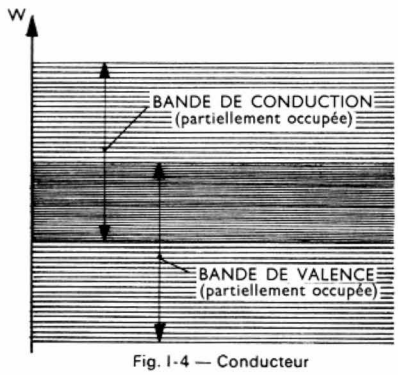


Fig. I-4 — Conducteur

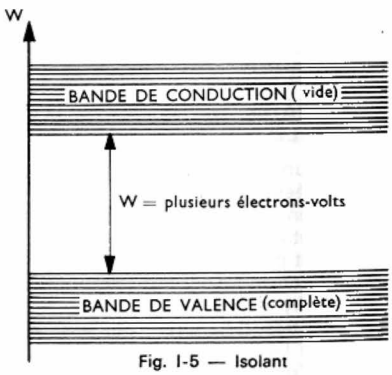


Fig. I-5 — Isolant

divers atomes entre eux. En principe, dans cette bande, tous les niveaux sont occupés : à chaque atome correspondent un électron et un niveau de la bande. Lorsqu'il en est ainsi, aucun électron supplémentaire ne peut prendre place dans cette bande (principe d'exclusion) ; au contraire, dans certains cas, quelques électrons peuvent facilement en être extraits. La bande de conduction correspond à des énergies plus proches du niveau du vide ; elle est vide ou incomplète. Elle est constituée par les niveaux d'énergie des électrons *nécessaires pour compléter* la couche périphérique généralement non saturée (les seules exceptions sont les gaz rares). Les bandes de valence et de conduction peuvent être plus ou moins séparées par une bande ne contenant aucun niveau susceptible d'être occupé par des électrons du corps simple considéré et appelée *bande interdite*. On caractérise souvent cette bande par une énergie (bande de 2 eV par exemple) qui correspond à la différence entre l'énergie du niveau inférieur de la bande de conduction et celle du niveau supérieur de la bande de valence.

2. CONDUCTEURS ET ISOLANTS

Un corps est conducteur si des électrons se déplacent à travers le cristal lorsqu'il est placé dans un champ électrique. Cela se produit très facilement si des électrons se trouvent dans la bande de conduction, c'est-à-dire s'il y a des **électrons libres** dans le corps (cas des métaux). La conduction est encore possible si le champ électrique appliqué est suffisant pour « arracher » un électron d'un niveau de la bande de valence et si des niveaux voisins du sien se trouvent libres. Dans ce cas, l'énergie fournie (par l'intermédiaire du champ électrique) permet à un électron de changer de niveau dans la bande. Il laisse ainsi un niveau inoccupé et un électron d'énergie inférieure, appartenant à un atome voisin, peut s'y placer. Ainsi, *de proche en proche se produit un déplacement d'électrons* qui se traduit par le passage d'un courant dans le corps considéré.

C'est ce qui se passe dans les conducteurs, notamment dans les métaux pour lesquels la bande de conduction non occupée et la bande de valence totalement occupée sont partiellement superposées (fig. I-4). Un électron de la bande de valence peut facilement occuper un niveau libre de la bande de conduction, très voisin du sien et, dans ces conditions, les électrons assurant la conduction sont très nombreux (au moins un par atome). Leur nombre ne dépend pas de la température ; l'augmentation de la résistivité qui accompagne un accroissement de température (V. t. 1, Électricité, chap. 2) est seulement due à l'agitation thermique des ions du réseau : à température élevée, le grand nombre de chocs que subit chaque électron freine son mouvement ordonné dans la direction du champ électrique appliqué.

Au contraire, dans le cas d'un **isolant,** la bande de conduction ne contient aucun électron libre à basse température et l'énergie d'agitation thermique est trop faible pour qu'un électron de la bande de valence traverse la bande interdite (fig. I-5). La différence entre les niveaux d'énergie correspondant au bas de la bande de conduction et au sommet de la bande de valence atteint plusieurs électrons-volts (7 eV pour le diamant) ; elle est grande devant l'énergie d'agitation thermique moyenne aux températures usuelles. Cependant, dans certains cas, un isolant peut devenir conducteur comme par exemple au moment du *claquage*. Lorsque le champ électrique appliqué est suffisamment grand, des électrons de la bande de valence passent brusquement dans la bande de conduction ; leurs vitesses sont alors très grandes et, en se déplaçant à travers le cristal, ils provoquent des chocs assez violents pour arracher d'autres électrons. Il y a ainsi *avalanche* et la quantité de chaleur dégagée est si grande que le cristal est souvent détruit. D'autres corps, comme le verre, isolants aux températures ordinaires, peuvent conduire l'électricité à très haute température car, alors, la bande interdite n'est pas très large et, grâce à l'agitation thermique, des électrons de la bande de valence passent dans la bande de conduction.

3. SEMICONDUCTEURS

Initialement, on a appelé semiconducteurs des corps dont la résistivité présente les deux caractéristiques suivantes :

1° Sa valeur est comprise entre 10^{-4} et $10^{-6}\ \Omega.m$ environ, c'est-à-dire qu'elle est intermédiaire entre les résistivités des métaux (voisines de $10^{-8}\ \Omega.m$) et celles des isolants (supérieures souvent à $10^{10}\ \Omega.m$) ;

2° Elle diminue lorsque la température du corps augmente.

Entrent dans cette catégorie des corps simples comme le germanium, le silicium, le graphite, le sélénium, et des corps composés comme le carbure de silicium, le sulfure de plomb, l'oxyde cuivreux, etc. Très rapidement, la définition précédente s'est révélée insuffisante ; en effet, la résistivité dépend en grande partie de la pureté du corps et, pour définir précisément les semiconducteurs, on a été conduit à tenir compte de leur structure atomique, notamment de la répartition des bandes d'énergie dans leur diagramme énergétique. Cela amène à distinguer les semiconducteurs *intrinsèques* qui sont soit des corps purs, soit des corps qui se comportent comme eux, et les semiconducteurs *extrinsèques* obtenus à partir des précédents par adjonction d'impuretés en proportion extrêmement faible.

3.1. Semiconducteurs intrinsèques. — Aux basses températures, les semiconducteurs intrinsèques sont des corps qui, comme les isolants, ont une bande de valence totalement occupée et une bande de conduction vide. Ils sont cependant différents des isolants par la largeur de leur bande interdite (fig. I-6) ; elle est voisine de 1 électron-volt. Lorsque la température d'un semiconducteur s'élève, l'énergie moyenne d'agitation thermique des électrons (qui est proportionnelle à la température absolue) devient vite suffisante pour qu'un certain nombre d'électrons puissent franchir la bande interdite.

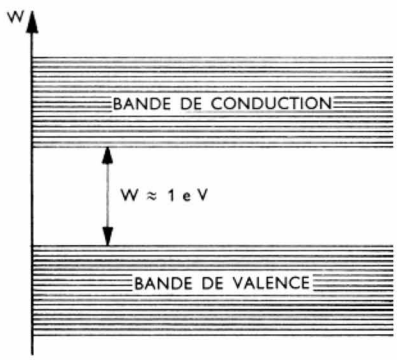


Fig. I-6
Semiconducteur intrinsèque

Tous les électrons ne possèdent pas la même énergie, mais un calcul statistique permet cependant de prévoir combien d'électrons se trouvent dans la bande de conduction à une température donnée. Ce nombre n_i croît très vite avec la température :

$$n_i^2 = AT^3\mathbf{e}^{-\Delta W/kT}$$

Si nous désignons par A une constante caractéristique du semiconducteur considéré, par k la constante de Boltzmann ($k = 1{,}38.10^{-23}$ J/K ou $8{,}62.10^{-5}$ eV/K), par ΔW la largeur de la bande interdite et par T la température absolue du corps (**e** est la base des logarithmes népériens : $\mathbf{e} = 2{,}718$).

Ainsi, un certain nombre d'électrons de la bande de valence occupent des niveaux de la bande de conduction : le corps conduit le courant mais sa résistivité est beaucoup plus grande que celle d'un métal. Lorsque la température du corps croît, le nombre de niveaux occupés dans la bande de conduction augmente et la résistivité du corps décroît. Ainsi, la théorie des bandes d'énergie permet de justifier l'apparition de la conductibilité dans les corps et de différencier, grâce à la hauteur de la bande interdite, les semiconducteurs, les conducteurs et les isolants.

Dans un semiconducteur, la conductibilité résulte donc de deux phénomènes simultanés :

1° Dans la bande de conduction il se produit un déplacement d'électrons dans le sens contraire du champ électrique ;

2° Dans la bande de valence s'effectue un autre déplacement d'électrons dû à la présence de niveaux libres par suite du départ d'électrons vers des niveaux énergétiques inférieurs. Dans ce dernier cas, un niveau inoccupé reçoit un électron d'un niveau voisin et celui-ci devient libre à son tour ; le déplacement se fait de proche en proche, par saut de place libre en place libre (fig. I-7).

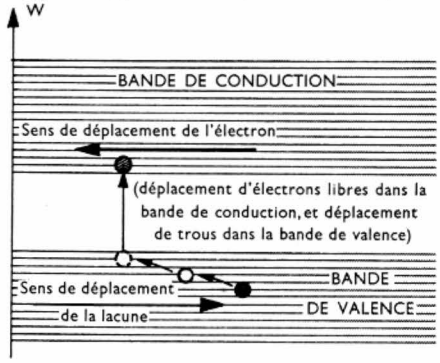


Fig. I-7

Apparition de la conductibilité dans un semiconducteur intrinsèque

Cela signifie que dans le cristal un atome perd un électron de valence et devient un ion positif ; il ne peut évidemment pas se déplacer, mais il peut capter l'électron d'un atome voisin et ainsi redevenir neutre. C'est alors l'atome voisin qui est ionisé et, de proche en proche, tout se passe comme si une *charge positive* s'était déplacée dans le cristal et avait permis le transport d'une quantité d'électricité égale en valeur absolue à celle que porte l'électron manquant. On dit aussi que le *trou* ou la *lacune* se déplace : c'est la conductibilité par trou ou par défaut ou *conductibilité lacunaire*. Il est important de noter que le mouvement des trous se fait dans le sens du champ puisque celui des électrons se fait dans le sens contraire. Cela conduit souvent à considérer le trou comme équivalent à un **positon,** c'est-à-dire à une particule portant une charge positive (opposée à celle de l'électron) que le champ électrique mettrait en mouvement. D'une façon générale, ces trous sont moins mobiles que les électrons (ils semblent se déplacer moins vite) et, bien qu'ils soient aussi nombreux, ils donnent naissance à un courant moins intense.

La théorie des bandes d'énergie permet de prévoir quels sont les corps susceptibles d'être semiconducteurs. La couche périphérique d'un atome quelconque se trouve dans un *état saturé* (ou *pseudo-saturé*) lorsqu'elle comprend huit électrons ; sa bande de valence est alors complète. L'état pseudo-saturé se rencontre avec des atomes comportant 4 électrons périphériques ; en effet, si ces 4 électrons sont mis en commun avec ceux de 4 atomes voisins fournissant chacun un électron (en réalisant 4 liaisons covalentes), chaque atome du cristal semble entouré de 8 électrons. Tous les électrons des couches périphériques entrent dans des liaisons chimiques et il n'y a aucun électron libre pour assurer la conduction. Le corps n'est pas conducteur et, si sa bande interdite a la largeur voulue ($\Delta W = 1$ eV environ), il est susceptible d'être utilisé comme semiconducteur.

3.2. Principaux semiconducteurs intrinsèques. Deux corps simples satisfont bien les conditions précédentes : le **germanium** ($\Delta W = 0{,}72$ eV) et le **silicium** ($\Delta W = 1{,}1$ eV). Ces corps appartiennent à la quatrième colonne du tableau périodique des éléments. Chaque atome comporte 4 électrons de valence. Grâce à des liaisons homopolaires, 2 atomes liés mettent en commun un électron ; tout se passe alors comme si chaque atome possédait 8 électrons de valence, ce qui explique la structure stable obtenue. Ces atomes sont répartis dans l'espace selon un schéma précis et d'une complexité assez grande :

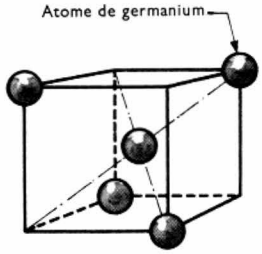


Fig. I-8

Pseudo-maille de germanium

par exemple la **maille** de germanium peut être considérée comme l'association de 4 pseudo-mailles, chacune d'elles étant représentée par un cube portant un atome en son centre et dont 4 des 8 sommets sont occupés par des atomes de germanium (fig. I-8). Mais, pour notre étude, nous pouvons utiliser une représentation plane simplifiée appelée **treillis.** Dans le cas du germanium ou du silicium, les atomes sont placés aux intersections des lignes horizontales et des lignes verticales, et sont entourés par une couche électronique portant 4 paires d'électrons, chaque paire traduisant une liaison homopolaire entre 2 atomes voisins (fig. I-9 et I-10). Des corps composés

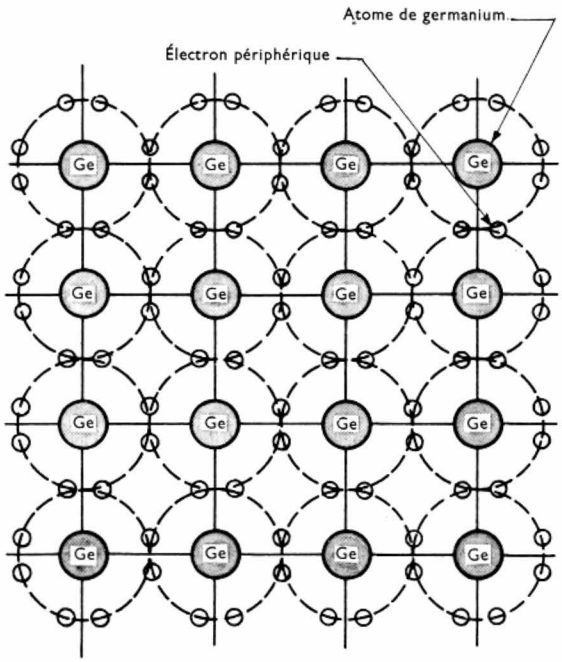


Fig. I-9 — Treillis de germanium intrinsèque

résultant de l'association de corps de la troisième et de la cinquième colonne du tableau de Mendéléev, comme, par exemple, l'arséniure de gallium (Ga As) sont également utilisés comme semiconducteurs. Le treillis obtenu ressemble à celui du germanium mais, aux points de croisement des lignes horizontales et des lignes verticales, on trouve des ions Ga^- et As^+ à la place d'atomes. Dans ces corps, les liaisons sont principalement homopolaires et partiellement ioniques.

Quelques caractéristiques du silicium et du germanium :

— Un atome de germanium possède 32 électrons :
2 sur la couche *K* (saturée),
8 sur la couche *L* (saturée),
18 sur la couche *M* (saturée),
4 sur la couche *N* (non saturée).

— 1 cm^3 de germanium contient environ 5.10^{22} atomes.

— A 23 °C il y a environ 10^{13} électrons libres par centimètre cube. Un atome sur 10^{10} seulement participe à la conduction en fournissant une paire électron-trou.

— Un atome de silicium possède 14 électrons :
2 sur la couche *K* (saturée),
8 sur la couche *L* (saturée),
4 sur la couche *M* (non saturée).

— À la température ambiante, un atome sur 10^{13} participe à la conduction. La conductivité théorique correspondante est de 2 400 $(\Omega.m)^{-1}$. La présence d'un atome d'impureté pour 2.10^{13} atomes de silicium entraîne un abaissement de cette valeur à 1 000 $(\Omega.m)^{-1}$, avec les meilleurs échantillons industriels.

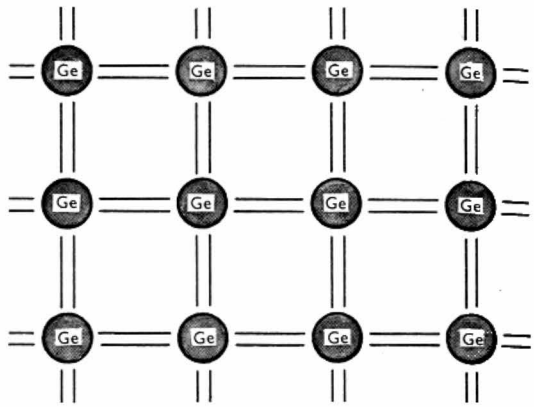


Fig. I-10 — Représentation plane simplifiée d'un cristal de germanium. Chaque double trait représente une liaison covalente (mise en commun de deux électrons appartenant à deux atomes voisins)

4. SEMICONDUCTEURS EXTRINSÈQUES DOPÉS

Les semiconducteurs intrinsèques servent essentiellement à l'obtention des semiconducteurs extrinsèques. Dans une opération qui a reçu le nom de **dopage,** on insère dans le réseau cristallin du semiconducteur :

— soit des atomes d'un corps pouvant fournir des électrons libres (atomes **donneurs**), et nous obtenons ainsi un semiconducteur extrinsèque de **type N,**

— soit des atomes d'un corps pouvant en capturer (atomes **accepteurs**), ce qui donne un semiconducteur extrinsèque de **type P.**

La conductivité d'un semiconducteur est fortement augmentée par la présence d'atomes étrangers dans le réseau cristallin (même en proportion extrêmement faible). Pour interpréter ce résultat, nous allons considérer un cristal de germanium dans lequel un atome de germanium est remplacé par un atome d'antimoine (fig. I-11) ; quatre seulement des cinq électrons périphériques de cet atome sont utilisés dans des liaisons avec les atomes voisins et il suffit alors d'une quantité d'énergie très faible (quelques centièmes d'électron-volt) pour libérer l'électron restant (c'est-à-dire pour qu'il vienne occuper un des niveaux de la bande de conduction du semiconducteur intrinsèque).

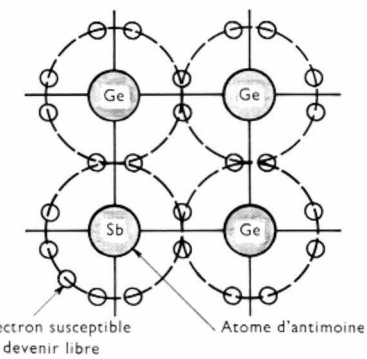


Fig. I-11

Aux températures ambiantes habituelles, sensiblement tous les atomes d'antimoine ont perdu un électron et le cristal contient un nombre important de porteurs de charges

négatives ou **porteurs N :** le semiconducteur est dit de **type N.** L'antimoine et les corps à cinq électrons périphériques (phosphore, arsenic : corps de la cinquième colonne du tableau de Mendéléev) sont des atomes donneurs pour les semiconducteurs de la quatrième colonne du tableau de Mendéléev (V. t. 1, Physique nucléaire, chap. 1).

Si l'impureté introduite est un corps à trois électrons périphériques, l'une des quatre liaisons covalentes ne peut être établie et cela équivaut à un trou (fig. I-12). Dans le cristal, si un électron libre passe à proximité de ce trou, il sera facilement capturé (ou *piégé*) par l'atome d'impureté (atome *accepteur*) pour réaliser cette liaison. Il suffit d'une énergie très faible pour qu'un électron de valence, d'un atome voisin de l'accepteur, soit ainsi capturé. L'introduction d'atomes accepteurs dans le semiconducteur intrinsèque équivaut donc à un apport de « trous », c'est-à-dire de porteurs positifs dont les énergies seraient celles des niveaux de la bande de valence. Aux températures usuelles, ces trous jouent le même rôle que les trous laissés dans un semiconducteur intrinsèque lorsque des électrons quittent la bande de valence sous l'effet de l'agitation thermique.

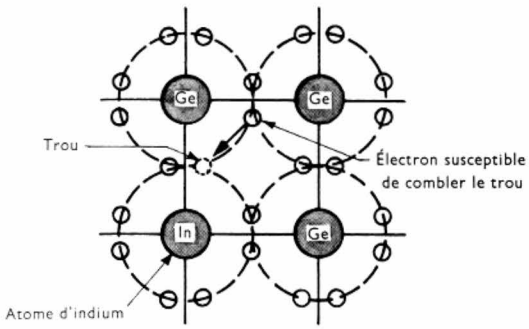


Fig. I-12 — Treillis de germanium extrinsèque de type P

Un semiconducteur, dopé avec des atomes à trois électrons périphériques, possède beaucoup plus de trous que d'électrons ; on dit que sa conductivité est de **type P.** Les principaux corps utilisés pour le dopage de type P sont le bore, le gallium, l'indium, l'aluminium (corps de la troisième colonne du tableau de Mendéléev).

Avec les corps composés obtenus en associant des corps de la troisième et de la cinquième colonne (comme l'arséniure de gallium), l'impureté introduite est un corps *hexavalent* (tellure, selenium) pour un semiconducteur de type N, ou *bivalent* (zinc, cadmium) pour un semiconducteur de type P. Les explications données à propos des semiconducteurs précédents restent valides.

Dans le diagramme des bandes d'énergie, la modification due au dopage se traduit par une possibilité d'occupation d'un certain nombre de niveaux de la bande interdite du semiconducteur intrinsèque (*niveaux intermédiaires*). Dans un semiconducteur de type N, il s'agit de niveaux voisins de la bande de conduction, et dans un semiconducteur de type P, voisins de la bande de valence.

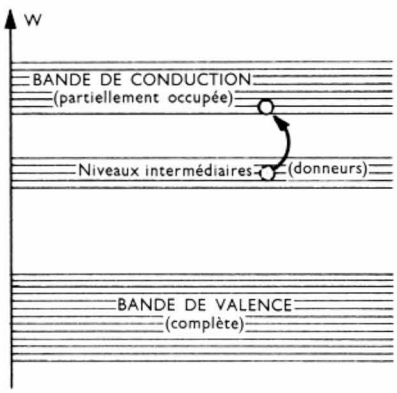


Fig. I-13

Dans le premier cas (fig. I-13) des électrons passent des niveaux intermédiaires à des niveaux de la bande de conduction sans qu'il soit nécessaire de leur fournir une grande énergie (0,01 eV souvent). Ainsi, la conductibilité apparaît même si aucun électron n'a quitté la bande de valence. Dans le second cas (fig. I-14), des électrons de la bande de valence passent facilement à des niveaux intermédiaires et apparaît une conductibilité due aux trous de la bande de valence même si la bande de conduction est vide. Par conséquent, contrairement à ce qui se passe dans un semiconducteur intrinsèque, la conduction dans un semiconducteur extrinsèque est presque exclusivement assurée par un seul type de porteurs, alors appelés *porteurs majoritaires* : électrons dans un semiconducteur de type N, trous dans un semiconducteur de type P. Le nombre de porteurs du type opposé, ou *porteurs minoritaires*, (trous dans un semiconducteur de type N, électrons dans un semiconducteur de type P) ne dépasse pas 1 pour 10^4 à 10^6 porteurs majoritaires.

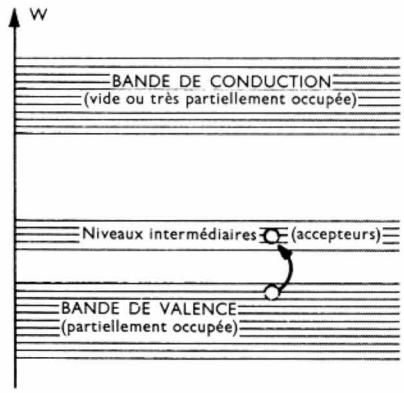


Fig. I-14

5. OBTENTION DES SEMICONDUCTEURS EXTRINSÈQUES

Pour réaliser ces semiconducteurs, il faut tout d'abord purifier le corps. La purification par voie chimique est insuffisante ; elle doit être complétée par des procédés physiques afin d'obtenir, avant le dopage, un taux d'impuretés inférieur à 10^{-10}. On emploie notamment la méthode de **fusion de zone** qui met en œuvre le chauffage par induction haute fréquence (V. t. 2, Électrothermie) : on fond un lingot sur une longueur de quelques centimètres seulement, pour que les impuretés, plus solubles dans le corps lorsque celui-ci est à l'état liquide, migrent de la zone qui se refroidit vers la zone fondue ; en déplaçant cette zone d'une extrémité à l'autre du lingot, on purifie ce dernier. Il reste ensuite à éliminer l'extrémité contenant la majeure partie des impuretés. Au lieu de renouveler cette opération plusieurs fois, au cours de la même passe, le lingot traverse cinq à six enroulements de chauffage disposés de manière adéquate.

Dans le traitement qui suit, on élimine les imperfections du réseau cristallin afin de former un *monocristal*, et, en même temps, on introduit l'impureté choisie. On obtient un arrangement d'atomes conforme au réseau théorique en produisant la cristallisation à partir d'un *germe* qui est un monocristal de petite dimension. Dans le cas du germanium, on réunit, par une méthode de fusion de zone, une parcelle de germanium contenant l'impureté désirée et le lingot. La zone fondue est ensuite déplacée lentement d'une extrémité à l'autre du lingot ; ainsi, au fur et à mesure que le refroidissement s'opère, le réseau cristallin qui se forme prolonge celui du germe. Pour le silicium, plus difficile à traiter, le germe est animé d'un mouvement de translation et de rotation.

Les semiconducteurs extrinsèques sont ensuite utilisés pour fabriquer des diodes, des transistors et de nombreux autres composants électroniques que nous verrons dans les chapitres suivants. Préalablement, il nous faut étudier l'électron libre et ses applications en électronique.

CHAPITRE II

L'ÉLECTRON LIBRE

Lorsqu'une quantité d'énergie suffisante est apportée à un corps, il émet des électrons. Dans le vide, ces électrons, ainsi libérés de la matière, se comportent comme autant de points matériels : ils obéissent aux lois de la mécanique classique tant que leurs vitesses restent petites devant celle de la lumière (300 000 km/s). De nombreux dispositifs employés en électronique mettent en œuvre les propriétés de ces électrons, notamment la possibilité d'accélérer, de ralentir, ou de dévier ces particules.

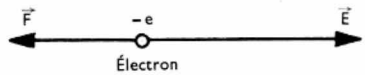
1. ACTION D'UN CHAMP ÉLECTRIQUE SUR UN ÉLECTRON

1.1. Force s'exerçant sur un électron. — En un point quelconque d'un champ électrique $\vec{E}$, la force qui s'exerce sur un électron de charge $-e$ est donnée par la relation suivante :

$$\vec{F} = -e\vec{E}$$

En effet, par définition (V. t. 1, Électricité, chap. 12), le champ électrique $\vec{E}$ représente la force qui s'exerce sur une charge de 1 C. Le sens de la force $\vec{F}$ est opposé à celui du champ $\vec{E}$ (fig. II-1). Si ce champ est uniforme, la force a même direction, même sens et même intensité en tout point du champ.

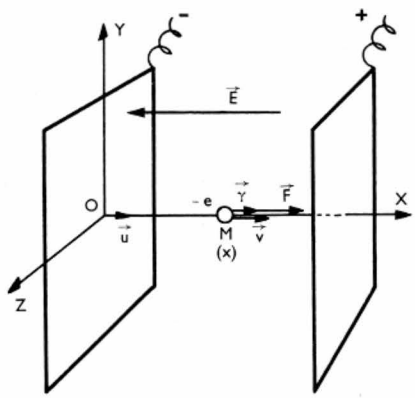
Fig. II-1



Le plus souvent, les champs électriques utilisés sont obtenus au moyen de condensateurs plans. La surface des armatures est suffisamment grande devant la distance qui les sépare et ainsi le champ électrique est uniforme. Les lignes de force sont perpendiculaires aux armatures et elles sont orientées dans le sens des potentiels décroissants (V. t. 1, Électricité, chap. 12).

1.2. Action de la force $\vec{F}$ sur un électron initialement immobile. — Considérons un électron se trouvant en un point O à l'instant $t = 0$. Appelons $\overrightarrow{OX}$ un axe passant par O, parallèle au vecteur $\vec{E}$ figurant le champ électrique et de sens contraire à ce dernier (fig. II-2).

Fig. II-2



Sous l'action de la force $\vec{F}$ l'électron se déplace. Comme en tout point de l'axe, cette force $\vec{F}$ a le même sens, l'électron décrit $\overrightarrow{OX}$. À un instant t il se trouve en un point M d'abscisse x ; nous désignons par $\vec{v}$ sa vitesse et par $\vec{\gamma}$ son accélération.

L'accélération $\vec{\gamma}$ est obtenue en appliquant la relation fondamentale de la dynamique (m désigne la masse d'un électron) :

$$\vec{\gamma} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{-e\vec{E}}{m} \iff \vec{\gamma} = \frac{-eE}{m}\vec{u}$$

(si nous posons $\vec{E} = E\vec{u}$, $\vec{u}$ désignant un vecteur unitaire porté par $\overrightarrow{OX}$; E est un nombre algébrique négatif dans le cas de la figure II-2).

$\vec{\gamma}$ est portée par l'axe $\overrightarrow{OX}$ et est orientée dans le sens contraire de $\vec{E}$. Son module est constant et est égal à $\frac{e|E|}{m}$ ($e = 0{,}16 \cdot 10^{-18}$ C). Ce résultat est important car ainsi, nous pouvons dire que le **mouvement de l'électron est uniformément accéléré.**

Les mesures algébriques de la vitesse v et de l'abscisse x sont obtenues par intégration mathématique :

$$v = \int_0^t \gamma dt = -\frac{eE}{m}t \quad (\vec{v} \text{ a même orientation que } \vec{\gamma})$$

$$x = \int_0^t v dt = -\frac{1}{2}\frac{eE}{m}t^2$$

Si à l'instant $t = 0$ l'électron se trouve en un point M_0 de l'axe $\overrightarrow{OX}$ (fig. II-3), à l'instant t, son accélération et sa vitesse sont encore données par les mêmes relations que précédemment, mais son abscisse x est alors égale à :

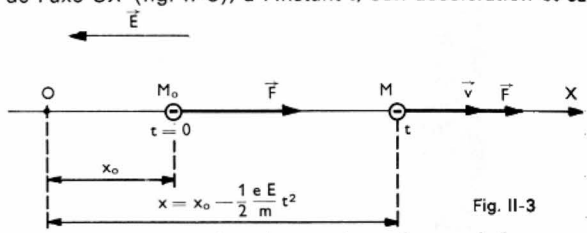


Fig. II-3

$$x = x_0 - \frac{1}{2}\frac{eE}{m}t^2$$ (x_0 étant l'abscisse de M_0 sur $\overrightarrow{OX}$).

1.3. Action de la force $\vec{F}$ sur un électron en mouvement. — *Si initialement l'électron se déplace*, l'application de la force $\vec{F}$ modifie en général son mouvement ; les changements apportés dépendent du sens de la force $\vec{F}$ par rapport à celui de la vitesse $\vec{v_0}$ de l'électron à l'instant où il rentre dans le champ (ainsi que de la configuration de ce dernier). Quelques cas particuliers vont permettre de préciser cette action ; dans ces cas nous considérons toujours un champ électrique uniforme $\vec{E}$ dans lequel l'électron pénètre, animé d'une vitesse constante $\vec{v_0}$ (mouvement rectiligne uniforme).

1.3.1. $\vec{E}$ et $\vec{v_0}$ ont des sens opposés. — La force $\vec{F} = -e\vec{E}$ qui s'exerce sur l'électron a le même sens que $\vec{v_0}$. L'accélération du mouvement $\vec{\gamma} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{-e\vec{E}}{m}$ (fig. II-4)

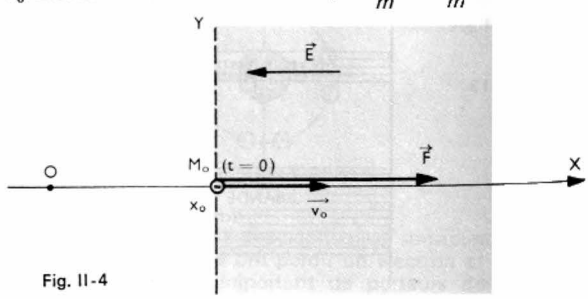


Fig. II-4

est constante et a le même sens que la vitesse $\vec{v_0}$: l'électron est alors animé d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré et la trajectoire reste l'axe $\overrightarrow{OX}$ support du vecteur figurant la vitesse initiale $\vec{v_0}$.

À l'instant t, la vitesse v et l'abscisse x sont obtenues en utilisant les mêmes équations qu'au paragraphe précédent :

$$v = \int_0^t \gamma dt = -\frac{eE}{m} t + v_0$$

$$x = \int_0^t v dt = -\frac{1}{2}\frac{eE}{m} t^2 + v_0 t + x_0$$

x_0 désignant l'abscisse du point M_0 où se trouve l'électron à l'instant pris pour origine des temps.

Volontairement, nous avons négligé la force de pesanteur qui s'exerce sur l'électron car celle-ci est toujours très inférieure aux forces électriques mises en jeu dans les applications pratiques.

1.3.2. $\vec{E}$ et $\vec{v_0}$ ont le même sens. — La force $\vec{F}$ qui s'exerce sur l'électron a un sens opposé à $\vec{v_0}$ (fig. II-5)

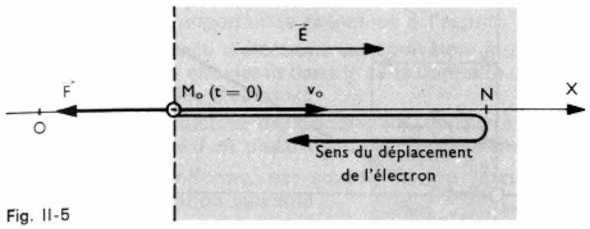


Fig. II-5

Dans une première phase, le mouvement de l'électron est rectiligne et uniformément retardé jusqu'à ce que la vitesse s'annule (point N). Dans une deuxième phase, la particule repart dans le sens opposé au sens du déplacement initial et son mouvement, également rectiligne, est uniformément accéléré jusqu'à sa sortie du champ électrique. Ensuite, l'électron décrit encore la même droite ; sa vitesse n'est alors pas égale à $\vec{v_0}$ mais à celle qu'il possédait en quittant le champ électrique.

1.3.3. $\vec{E}$ et $\vec{v_0}$ sont perpendiculaires. — La force $\vec{F} = -e\vec{E}$ est également perpendiculaire à $\vec{v_0}$, ainsi que l'accélération $\vec{\gamma} = \frac{\vec{F}}{m}$ et cela quel que soit l'instant considéré (fig. II-6). Par conséquent, l'électron ne va pas se

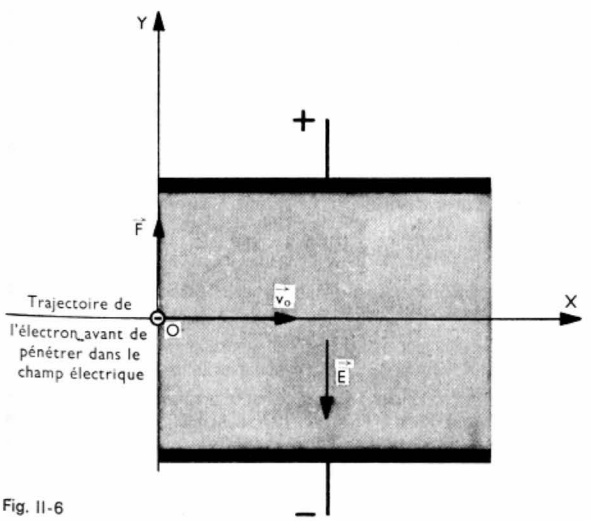


Fig. II-6

déplacer suivant une droite mais dans un plan défini par les vecteurs $\vec{v_0}$ et $\vec{E}$. Repérons la position de l'électron dans le plan à l'aide de deux axes orthogonaux $\overrightarrow{OX}$ et $\overrightarrow{OY}$ respectivement parallèles aux vecteurs $\vec{v_0}$ et $\vec{E}$.

À l'instant t l'électron se trouve en un point M de coordonnées (x, y) ; les composantes de la vitesse $\vec{v}$ sont $\vec{v_x}$ et $\vec{v_y}$ et celles de l'accélération $\vec{\gamma_x}$ et $\vec{\gamma_y}$ (fig. II-7) : Les mesures algébriques de ces composantes sont respectivement désignées par les symboles v_x, v_y, γ_x et γ_y.

$$\gamma_x = \frac{dv_x}{dt}$$

$$\gamma_y = \frac{dv_y}{dt}$$

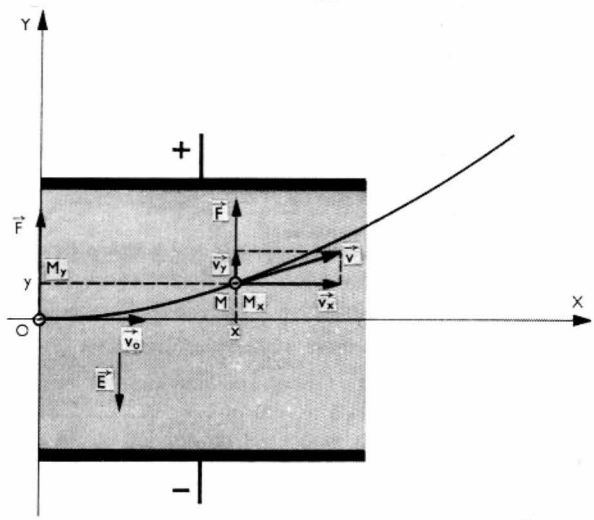


Fig. II-7

Précisons qu'à l'instant $t = 0$ l'électron se trouve au point O et les conditions initiales du mouvement sont alors les suivantes :

$$x = 0,\ y = 0,\ \vec{v_x} = \vec{v_0} \text{ et } \vec{v_y} = 0$$

En tout point du champ électrique, la seule force agissant sur l'électron est dirigée suivant une parallèle à l'axe $\overrightarrow{OY}$ et il en est de même pour l'accélération $\vec{\gamma} = \frac{\vec{F}}{m}$. Par suite, lorsque l'électron est au point M, nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} \vec{\gamma_x} = 0 \\ \vec{\gamma_y} = \dfrac{\vec{F}}{m} = \dfrac{-e\vec{E}}{m} \end{cases}$$

La composante $\vec{\gamma_x}$ de l'accélération est nulle tandis que la composante $\vec{\gamma_y}$ est constante.

La composante $\vec{v_x}$ de la vitesse ayant une dérivée nulle est donc constante et égale à $\vec{v_0}$, vitesse de l'électron à l'instant initial. Par suite, l'abscisse du point M est égale à : $x = v_0 t$. Nous pouvons dire que la projection M_x du point M sur l'axe $\overrightarrow{OX}$ est animée d'un mouvement uniforme.

La mesure algébrique v_y de la composante $\vec{v_y}$ et l'ordonnée y du point M s'obtiennent par intégration mathématique :

$$v_y = \int_0^t \gamma_y dt = -\frac{eE}{m} t$$

$$y = \int_0^t v_y dt = -\frac{1}{2}\frac{eE}{m} t^2$$

La projection M_y du point M est animée d'un mouvement uniformément accéléré.

L'équation de la trajectoire de l'électron dans le champ électrique s'obtient en éliminant le temps t dans les coordonnées du point M.

$$M \begin{cases} x = v_0 t \\ y = -\dfrac{1}{2}\dfrac{eE}{m} t^2 \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}\frac{eE}{m}\frac{x^2}{v_0^2}$$

La trajectoire de l'électron entre les plateaux du conden-

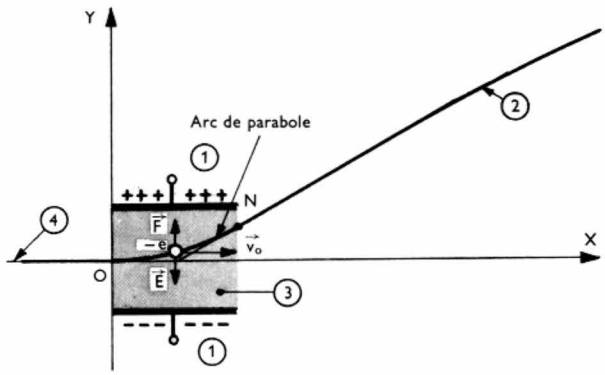
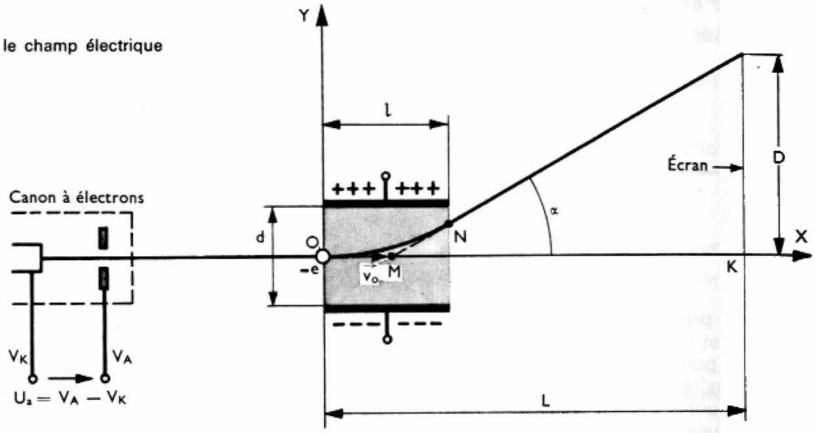


Fig. II-8 — Déviation d'un faisceau électronique à l'aide d'un champ électrique $\vec{E}$ perpendiculaire à $\vec{v_0}$

1. Plaques du condensateur plan
2. Trajectoire électronique
3. Zone où règne le champ électrique
4. Trajectoire de l'électron avant de pénétrer dans le champ électrique

Fig. II-9

Système de déviation électrostatique



sateur est une *portion de parabole* (fig. II-8). À la sortie du champ électrique, l'électron n'est plus soumis à la force $\vec{F}$ et sa trajectoire se confond avec la tangente à la parabole au point *N*.

2. APPLICATION DE L'ACTION D'UN CHAMP ÉLECTRIQUE

2.1. Accélération d'un électron. — Dans le tube cathodique d'un oscillographe (V. chap. 5) ou d'un poste de télévision, un métal chauffé émet des électrons et il est nécessaire de leur communiquer une certaine vitesse. Pour obtenir ce résultat, une d.d.p. convenable est appliquée entre l'élément qui émet les électrons (**cathode**) et une plaque métallique **(anode d'accélération).** La seconde est portée à un potentiel V_A supérieur au potentiel V_K de la première. Les électrons ont une vitesse sensiblement nulle au moment où ils sont émis; dans le champ électrique leur mouvement est uniformément accéléré. À leur arrivée au niveau de l'anode, ils sont animés d'une vitesse v_0 et leur énergie cinétique est égale à $\frac{1}{2} mv_0^2$. Cette énergie est égale au travail de la force qui s'exerce sur l'électron lorsqu'il passe du potentiel V_K au potentiel V_A.

$$\frac{1}{2} mv_0^2 = e\ (V_A - V_K)$$

En particulier si $V_K = 0$ et $V_A = U_a$ (d.d.p. accélératrice) :

$$\frac{1}{2} mv_0^2 = eU_a \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2\ eU_a}{m}}$$

Il faut exprimer v_0 en mètres par seconde, e en coulombs, U_a en volts et m en kilogrammes.

La vitesse v_0 des électrons est d'autant plus grande que la tension accélératrice U_a est élevée. Lorsque cette vitesse dépasse 50.10^6 m/s (50 000 km/s), il est nécessaire de tenir compte que la masse de l'électron n'est pas constante

$$\left(m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0^2}{c_0^2}\right)}} \text{ avec : } m_0 = 0{,}9.10^{-30}\ \text{kg} ; \quad c_0 = 0{,}3.10^9\ \text{m/s} \right)$$

2.2. Déviation d'un faisceau d'électrons. — Dans un tube cathodique, les électrons d'un faisceau animés d'une vitesse constante $\vec{v_0}$ pénètrent dans un champ électrique uniforme qui peut être défini par un vecteur $\vec{E}$ perpendiculaire à $\vec{v_0}$. Dans ce champ, les électrons décrivent une parabole; ensuite leur trajectoire est une droite tangente à cette parabole au point *N* (fig. II-9). Tout se passe donc comme si le faisceau électronique avait été dévié d'un angle α égal à celui que déterminent cette tangente et l'axe $\overrightarrow{OX}$. Cet angle a une valeur relativement faible; sa tangente est donnée par la relation suivante :

$$\text{tg}\alpha = \frac{\textit{ordonnée du point } N}{l/2} = \frac{eE}{mv_0^2}\, l$$

si l représente la distance sur laquelle s'exerce le champ, distance mesurée le long de l'axe $\overrightarrow{OX}$. Dans cette formule, e est exprimé en coulombs, E en volts par mètre, m en kilogrammes, v_0 en mètres par seconde et l en mètres.

Lorsque l'angle α est petit, sa valeur en radians se confond avec tgα. Dans ce cas la déviation obtenue est proportionnelle au champ $\vec{E}$. Si celui-ci est produit à l'aide d'un système formé de deux plaques parallèles formant un condensateur, l'intensité E de ce champ est donnée par la relation $E = \frac{U}{d}$ (U: tension entre les plaques du condensateur, d: distance séparant ces plaques) et la déviation α est alors égale à :

$$\alpha = \frac{e}{mv_0^2} \frac{U}{d}\, l$$

Les électrons étant accélérés sous la tension U_a, le module de leur vitesse $\vec{v_0}$ à l'arrivée dans le champ électrique est donc donné par la relation suivante :

$$\frac{1}{2} mv_0^2 = eU_a$$

Dans ces conditions, la déviation du faisceau électronique est égale à :

$$\alpha \approx \frac{1}{2} \frac{U}{U_a} \frac{l}{d}$$

Cette déviation α du faisceau est donc directement proportionnelle à la différence de potentiel appliquée entre les plaques du condensateur de déflexion. Le tube cathodique peut donc être utilisé comme un indicateur de différence de potentiel à graduation linéaire.

Sur un écran placé à une distance L du point O ($L \gg l$), nous observons un déplacement D du point d'impact du faisceau électronique lorsque le champ électrique $\vec{E}$ est appliqué :

$$D = L\ \text{tg}\alpha \approx L\alpha = \frac{1}{2} \frac{U}{U_a} \frac{lL}{d}$$

La sensibilité de la déviation électrostatique S_e est le rapport de ce déplacement D et de la tension U:

$$S_e = \frac{D}{U} = \frac{1}{2}\frac{1}{U_a}\frac{lL}{d}$$

Cette déviation est également indépendante de la masse de la particule. Ainsi, lorsque des ions et des électrons, *porteurs de la même charge électrique*, passent dans un champ électrique, ils subissent la même déviation bien que leurs masses soient très différentes.

La déviation électrostatique est utilisée dans les tubes cathodiques d'oscillographes pour visualiser une grandeur électrique ou pour comparer des d.d.p. (V. chap. 5). Ce type de déviation est aussi mis en œuvre dans les lentilles électrostatiques qui permettent de faire converger ou diverger un faisceau d'électrons en le faisant passer dans un champ électrique convenable.

3. ACTION D'UN CHAMP MAGNÉTIQUE SUR UN ÉLECTRON

3.1. Force s'exerçant sur un électron dans un champ magnétique. — Pour aborder cette étude, il faut avoir deux idées importantes présentes à l'esprit:

1° un faisceau d'électrons est équivalent à un courant électrique qui circulerait dans le sens contraire du sens de déplacement des électrons;

2° un conducteur de longueur dl, parcouru par un courant d'intensité I et placé dans un champ d'induction magnétique $\vec{B}$ uniforme, est soumis à une force égale donnée par la relation suivante:

$$\vec{dF} = \vec{Idl} \wedge \vec{B}$$

Son intensité est égale à:

$$dF = BI\ (dl)\ \sin\alpha$$

si nous désignons par α l'angle des vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{dl}$ (V. t. 1, Électricité, chap. 24). Cette force est perpendiculaire aux vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{dl}$ et est dirigée vers la gauche de l'observateur d'Ampère qui regarde fuir les lignes d'induction du champ (fig. II-10). La première remarque explique

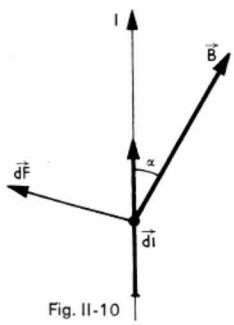


Fig. II-10

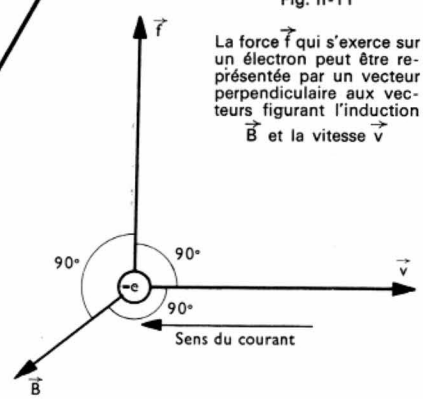


Fig. II-11

La force $\vec{f}$ qui s'exerce sur un électron peut être représentée par un vecteur perpendiculaire aux vecteurs figurant l'induction $\vec{B}$ et la vitesse $\vec{v}$

qu'*un champ magnétique ne permette de dévier que des électrons en mouvement;* un électron immobile n'est pas assimilable à un courant électrique. La seconde remarque permet de comprendre que la force s'exerçant sur un électron est perpendiculaire aux vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{v}$ (si ce dernier représente la vitesse de la particule) et que cette force n'existe que si ces vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires (c'est-à-dire si α n'est pas nul; fig. II-11).

Considérons alors un conducteur cylindrique contenant n électrons mobiles par unité de volume et appelons $\vec{v}$ la vitesse moyenne de ces électrons (fig. II-12). Entre les instants 0 et t, les électrons pouvant traverser la section S sont ceux qui à l'instant initial se trouvent à une distance

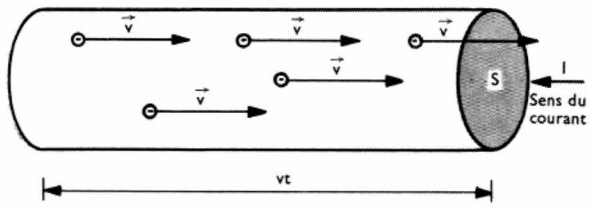


Fig. II-12

inférieure à vt mètres. Par conséquent, le nombre de ces électrons est égal à $n\,Svt$, n étant le nombre d'électrons mobiles par unité de volume et $S\,vt$ représentant le volume dans lequel sont répartis les électrons (cylindre de base S et de longueur vt). L'intensité I du courant dans le conducteur, qui est égale à la quantité d'électricité traversant la section S en une seconde, peut donc être facilement déterminée:

$$I = \frac{n\,S\,vt\,e}{t} = n\,S\,v\,e$$

La force $\vec{dF}$ s'exerçant sur une portion $\vec{dl}$ de ce conducteur a une intensité dF donnée par la loi de Laplace. En supposant l'induction $\vec{B}$ perpendiculaire au conducteur ($\alpha = \frac{\pi}{2}$ rad dans la formule donnée précédemment et $\sin\alpha = 1$) nous pouvons écrire :

$$dF = I\ dl\ B = n\ S\ v\ e\ dl\ B$$

Or, dans le volume de base S et de longueur dl, il y a $nS\ dl$ électrons et nous voyons donc que la force qui s'exerce sur chacun de ceux-ci (fig. II-13) a une intensité égale à :

$$f = \frac{dF}{n\,S\,dl} = ve\,B$$

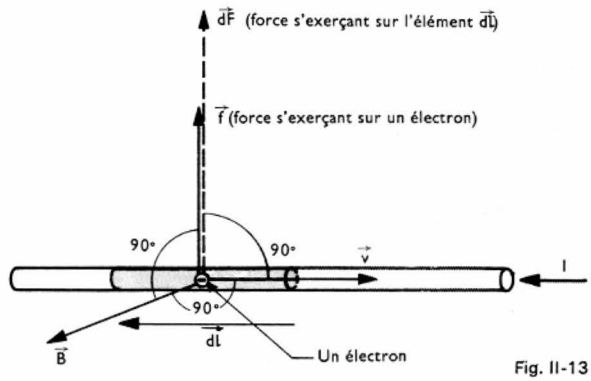


Fig. II-13

Comme la force $\vec{f}$, la vitesse $\vec{v}$ et l'induction $\vec{B}$ sont des grandeurs vectorielles, nous définissons parfaitement $\vec{f}$ en grandeur et en sens au moyen du produit vectoriel suivant (V. t. 1, Mécanique des solides, chap. 1) :

$$\vec{f} = -\,e\vec{v} \wedge \vec{B}\quad (e = 0{,}16.10^{-18}\ \text{C})$$

Cette relation est générale et nous retrouvons bien les résultats énoncés précédemment :

— si l'électron est immobile ($v = 0$) la force $\vec{f}$ est nulle.

— si $\vec{v}$ et $\vec{B}$ sont colinéaires, le produit vectoriel $\vec{v} \wedge \vec{B}$ est nul, ainsi que $\vec{f}$.

3.2. Mouvement d'un électron dans un champ magnétique. — Ce mouvement dépend de la vitesse $\vec{v}$ de l'électron lorsqu'il pénètre dans le champ et du champ lui-même. Pour simplifier, dans la suite nous considérons seulement un *champ magnétique uniforme*. Un électron qui pénètre dans ce champ magnétique, où l'induction est $\vec{B}$, avec une vitesse initiale $\vec{v}$ parallèle aux lignes d'induction, continue son mouvement suivant une trajectoire rectiligne comme si le champ n'existait pas. En effet, nous sommes dans le cas où le produit $\vec{v} \wedge \vec{B}$ est nul; aucune force ne

s'exerce sur l'électron et son mouvement n'est pas modifié.

3.2.1. $\vec{B}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaires. — Considérons maintenant un électron qui entre dans un champ uniforme d'intensité B, avec une vitesse initiale $\vec{v}$, en se déplaçant perpendiculairement aux lignes d'induction du champ (fig. II-14). La force $\vec{f}$ appliquée à l'électron est constam-

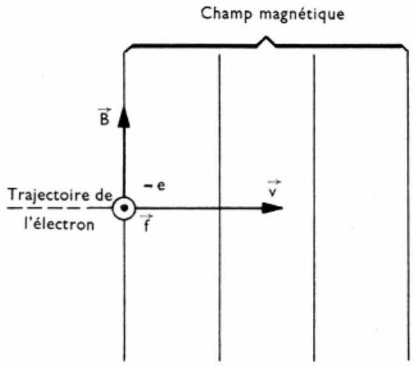


Fig. II-14

$\vec{f}$ est perpendiculaire à $\vec{v}$ et à $\vec{B}$ et est dirigé vers l'arrière de la figure

ment perpendiculaire à la vitesse. Par conséquent, l'accélération subie par la particule *ne comporte qu'une composante normale à la trajectoire*, de module égal à $\gamma_n = \frac{f}{m} = \frac{evB}{m}$. La composante tangentielle $\gamma_t = \frac{dv}{dt}$ étant nulle, nous pouvons affirmer que la vitesse de l'électron est constante. Elle conserve la valeur qu'elle a au moment où l'électron pénètre dans le champ, mais sa direction change en même temps que la position de la particule sur la trajectoire. Par suite l'intensité de la force $f = e\,v\,B$ et la composante normale de l'accélération $\gamma_n = \frac{f}{m}$ sont également constantes. Comme, en un point de la trajectoire où le rayon de courbure est égal à R, cette composante normale a pour valeur $\frac{v^2}{R}$, nous pouvons dire que ce rayon R est constant. La trajectoire est donc un cercle de rayon $R = \frac{m\,v}{e\,B}$ dont le centre se trouve sur la normale à la trajectoire passant par le point O (fig. II-15).

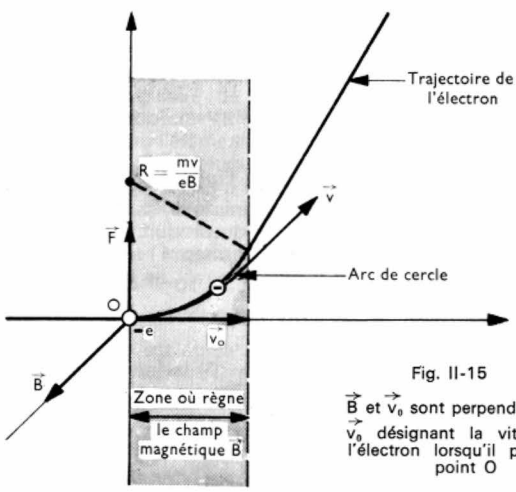


Fig. II-15

$\vec{B}$ et $\vec{v_0}$ sont perpendiculaires, $\vec{v_0}$ désignant la vitesse de l'électron lorsqu'il passe au point O

Le temps T que met l'électron pour décrire un cercle complet est la période de mouvement : $T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{eB}$. Cette période $\left(\text{ainsi que la vitesse angulaire } \omega = \frac{v}{R} = \frac{eB}{m}\right)$ est indépendante de la vitesse initiale de l'électron et du rayon du cercle décrit. Ce résultat très important a reçu de nombreuses applications : focalisation des électrons dans les tubes amplificateurs hyperfréquences, accélération de particules dans le cyclotron (V. t. 1, Physique nucléaire, chap. 3).

3.2.2. $\vec{B}$ et $\vec{v}$ ne sont pas perpendiculaires. — Nous pouvons toujours décomposer le vecteur vitesse $\vec{v}$ en deux composantes, l'une $\vec{v_x}$ colinéaire à $\vec{B}$, l'autre $\vec{v_y}$ perpendiculaire à $\vec{B}$. Si $\vec{v_y}$ existait seule, nous retrouverions le cas précédent : l'électron décrirait un cercle contenu dans le plan YOZ. À cause de $\vec{v_x}$, l'électron se déplace également selon une direction parallèle à OX. Il décrit une hélice dont l'axe est parallèle à cette direction (fig. II-16).

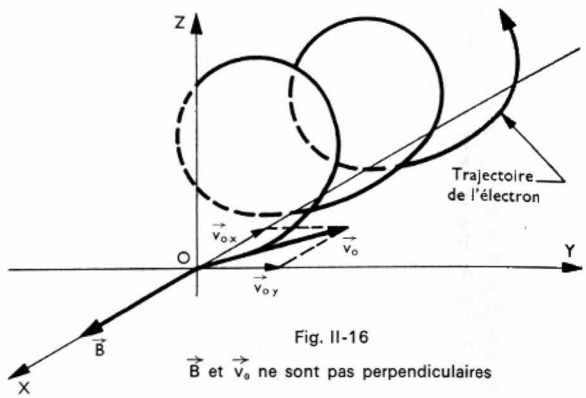


Fig. II-16

$\vec{B}$ et $\vec{v_0}$ ne sont pas perpendiculaires

4. APPLICATION : DÉVIATION MAGNÉTIQUE D'UN FAISCEAU D'ÉLECTRONS

Imaginons qu'à la sortie d'un canon à électrons, un faisceau électronique traverse un champ uniforme (fig. II-17)

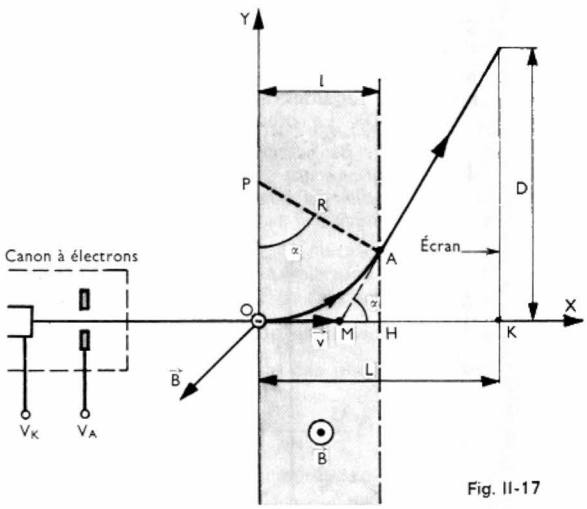


Fig. II-17

que nous supposerons limité par deux plans perpendiculaires à XOY et passant par les points d'abscisse $x = 0$ et $x = l$. Dans la région où le champ existe, la portion OA de la trajectoire est un arc de cercle dont le rayon est égal à $R = \frac{m\,v}{eB}$. Le centre de ce cercle se trouve en P sur $\overrightarrow{OY}$ à la distance R du point O. L'angle $(\overrightarrow{PO}, \overrightarrow{PA})$ est aussi l'angle que fait la tangente à la trajectoire en A avec la direction initiale des électrons $(\overrightarrow{OX})$. Lorsque cet angle est petit, OA est peu différent de l et :

$$\alpha = \frac{OA}{R} \approx \frac{l}{R} = \frac{eBl}{mv}$$

Sur un écran placé à une distance L ($L \gg l$) du point O, nous observons un déplacement D du point d'impact du faisceau électronique lorsque le champ magnétique est appliqué :

$$D \approx L\,\alpha = \frac{Le\,Bl}{mv}$$

La sensibilité de la déviation magnétique S_m est le rapport de ce déplacement D et de l'induction B :

$$S_m = \frac{D}{B} = \frac{e}{m} \cdot \frac{Ll}{v}$$

Elle est indépendante de B.

Ce mode de déflexion est utilisé dans les tubes de télévision (fig. II-18) car il permet d'obtenir des déviations angulaires beaucoup plus grandes que celles fournies par une déviation électrostatique (V. t. 2, Radioélectricité).

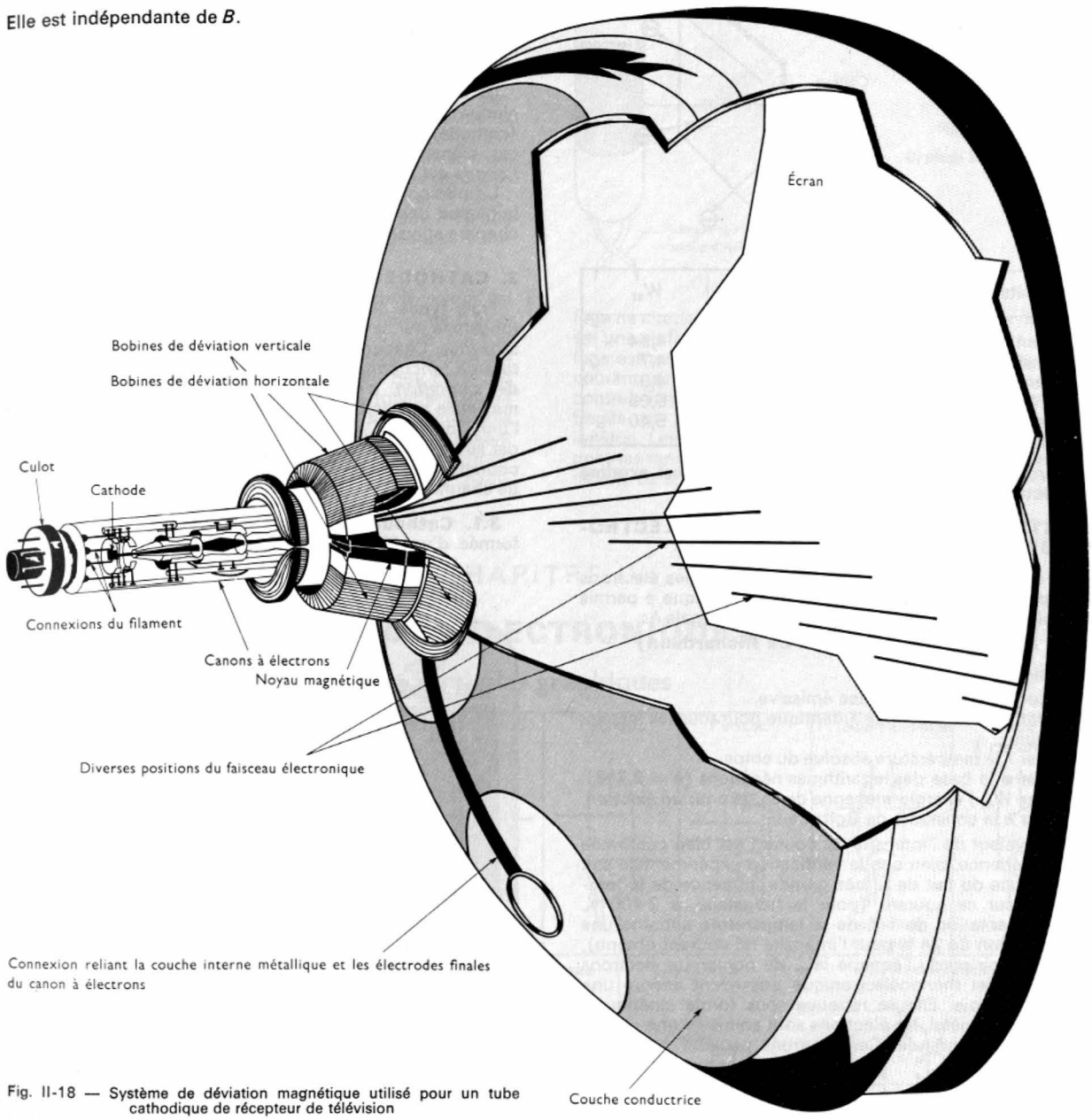


Fig. II-18 — Système de déviation magnétique utilisé pour un tube cathodique de récepteur de télévision

CHAPITRE III

ÉMISSION THERMOÉLECTRONIQUE

Cathodes thermoémissives

1. ÉNERGIE DE SORTIE ET ÉMISSION THERMOÉLECTRONIQUE

Même aux plus basses températures, la bande de conduction d'un métal contient des électrons. Pour extraire l'un de ces électrons, il faut lui fournir une certaine énergie. À une température de zéro kelvin, cette énergie a une valeur W_{s0} appelée **énergie de sortie** ou **travail de sortie** du métal ; c'est une grandeur caractéristique du corps.

Cette énergie peut être fournie en chauffant le corps. L'énergie d'agitation thermique de chaque électron de la bande de conduction croît lorsque la température du métal augmente ; pour certains d'entre eux, elle peut devenir

supérieure à W_{s0} et ils peuvent quitter le métal : c'est l'**émission thermoélectronique** ou **thermoélectrique** (fig. III-1).

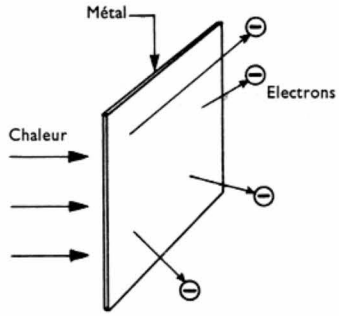


Fig. III-1

Métal	W_{s0}	Métal	W_{s0}
Césium	1,8	Tungstène	4,54
Potassium	2,2	Argent	4,7
Baryum	2,4	Or	4,9
Aluminium	3,0	Nickel	5,05
Molybdène	4,4	Platine	5,40

Énergie de sortie de quelques métaux. W_{s0} est exprimé en électrons-volts (1 eV = $0{,}16.10^{-18}$ J).

2. INTENSITÉ DU COURANT THERMOÉLECTRONIQUE

Un courant peut être obtenu en recueillant les électrons émis par un corps chauffé. Une étude statistique a permis d'établir que l'intensité I_{th} de ce courant est égale à :

$$I_{th} = SA_0\, T^2\, \mathbf{e}^{-W_{s0}/kT}$$ **(loi de Richardson)**

en désignant :

— par S l'aire de la surface émissive,
— par A_0 une constante (identique pour tous les métaux purs),
— par T la température absolue du corps,
— par $\mathbf{e}$ la base des logarithmes népériens ($\mathbf{e} = 2{,}718$),
— par W_{s0} l'énergie moyenne de sortie pour un électron,
— par k la constante de Boltzmann.

Cette valeur de l'intensité du courant est bien confirmée par l'expérience, bien que la vérification expérimentale soit très délicate du fait de la très grande influence de la température sur ce courant (pour le tungstène, à 2 400 K, une augmentation de 1 % de la température entraîne une augmentation de 24 % pour l'intensité du courant obtenu).

Après avoir perdu l'énergie W_{s0}, de nombreux électrons émis par effet thermoélectronique possèdent encore une certaine énergie. Elle se retrouve sous forme cinétique : en sortant du métal, les électrons sont animés d'une vitesse plus ou moins grande. Ces électrons peuvent n'être que partiellement collectés si, dans le voisinage du métal émissif règne un champ électrique qui s'oppose à leur départ. Si le champ a une intensité suffisante, il provoque le retour de tous les électrons vers le métal (champ retardateur) et aucun courant ne peut être obtenu. Au contraire, si le champ est accélérateur, le courant recueilli a une intensité égale à I_{th} ; au-delà d'une certaine valeur, le champ facilite l'extraction des électrons et l'intensité du courant peut dépasser I_{th} (effet Schottky).

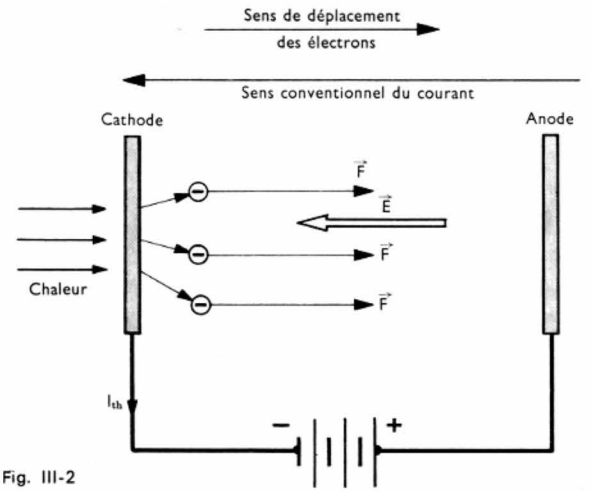


Fig. III-2

Ce champ électrique est souvent obtenu en plaçant une plaque métallique (anode) en face de la surface émissive (cathode) et en appliquant une d.d.p. convenable entre ces éléments. Le champ est accélérateur seulement si *l'anode est positive par rapport à la cathode* (fig. III-2).

L'émission thermoélectronique est mise en œuvre dans la plupart des tubes à vide, comme nous le verrons dans le chapitre suivant.

3. CATHODES THERMOÉMISSIVES

Trois types de cathodes sont utilisés : la cathode de tungstène pur, la cathode de tungstène thorié et la cathode à oxydes. Chacune d'elles est caractérisée : par sa *température de fonctionnement optimal;* par sa *densité de courant de saturation,* c'est-à-dire par la quantité d'électricité maximale qu'elle peut fournir par unité de surface pendant l'unité de temps, à cette température de fonctionnement ; par son *efficacité* qui est égale au quotient de l'intensité du courant d'émission et de la puissance fournie par le circuit de chauffage.

3.1. Cathode de tungstène. — Cette cathode est formée d'un fil ou d'un ruban de tungstène (fig. III-3).

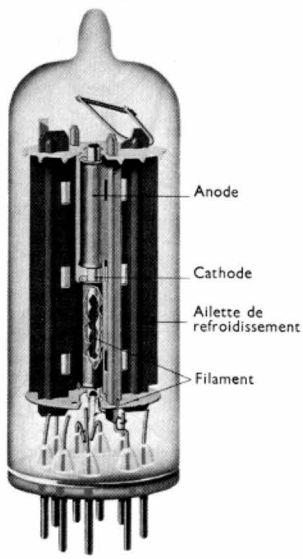


Fig. III-3

Double diode (*R.T.C.*)

Lorsqu'un courant traverse le conducteur qui forme cette cathode, elle est chauffée par effet Joule (*cathode à chauffage direct*). Elle est extrêmement robuste et bien qu'elle nécessite une grande puissance de chauffage, elle est encore employée dans tous les tubes où le champ accélérateur est obtenu au moyen de très grandes tensions (tubes émetteurs de rayons X, par exemple ; V. t. 1, Physique nucléaire, chap. 4).

Dans ces tubes, les électrons possèdent une énergie cinétique considérable et certains d'entre eux peuvent extraire des ions positifs des diverses électrodes du tube ; cela constitue un inconvénient grave car les ions sont attirés par la cathode et ils lui transmettent toute leur énergie cinétique qui peut être très grande. La cathode serait vite détruite si elle n'était pas constituée d'une masse importante d'un métal pur.

L'efficacité de ces cathodes est d'autant plus grande qu'elles sont portées à des températures plus élevées. Malheureusement, la durée de vie est limitée par l'évaporation du filament ; celle-ci augmente rapidement lorsque la température de fonctionnement se rapproche de la tempé-

rature de fusion (3 650 K) ; un bon compromis entre efficacité et durée de vie est obtenu pour une température de fonctionnement de 2 400 K. La durée de vie est alors proche de 2 000 heures.

3.2. Cathode de tungstène thorié. — Cette cathode se présente sous la même forme que la précédente mais, dans ce cas, le tungstène est revêtu d'une mince couche d'oxyde de thorium. C'est également une cathode à chauffage direct : le corps émissif est encore directement parcouru par le courant destiné à le chauffer. Le travail de sortie est plus faible que pour une cathode de tungstène (W_{s0} = 2,6 eV) ; l'augmentation de pouvoir émissif qui en résulte permet de choisir une température de fonctionnement nettement plus basse (1 900 K) que pour le tungstène pur et la durée de vie est plus grande (5 000 à 10 000 heures). De nombreux tubes pour hyperfréquences comportent une cathode de ce type.

3.3. Cathode à oxydes. — Une cathode à oxydes est constituée d'un tube de nickel revêtu d'un mélange d'oxydes de baryum et de strontium (fig. III-4). Le pouvoir émissif de ce type de cathode (nombre d'électrons émis par unité de surface) est beaucoup plus grand que celui des cathodes précédentes. La température de fonctionnement peut ainsi être abaissée jusque vers 1 000 K ; il est possible de chauffer une cathode à oxydes au moyen d'un filament spiralé logé à l'intérieur du tube revêtu de la couche émissive (*cathode à chauffage indirect*). Le courant de chauffage ne circule plus dans le métal émissif et ainsi, la cathode est une surface équipotentielle. De plus, le circuit de chauffage est totalement indépendant et il peut être alimenté en courant alternatif. Ces avantages sont malheureusement contrebalancés par le fait que la couche émissive est très fragile et particulièrement sensible au bombardement ionique. Les emplois de ces cathodes sont limités aux tubes dont les tensions de fonctionnement sont modérées ; néanmoins, ce sont les cathodes les plus utilisées.

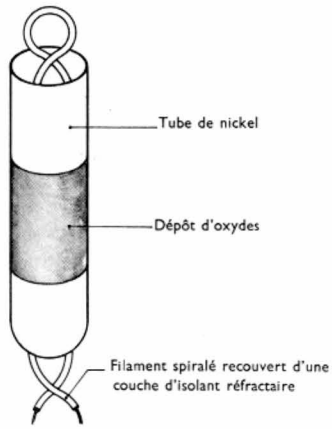
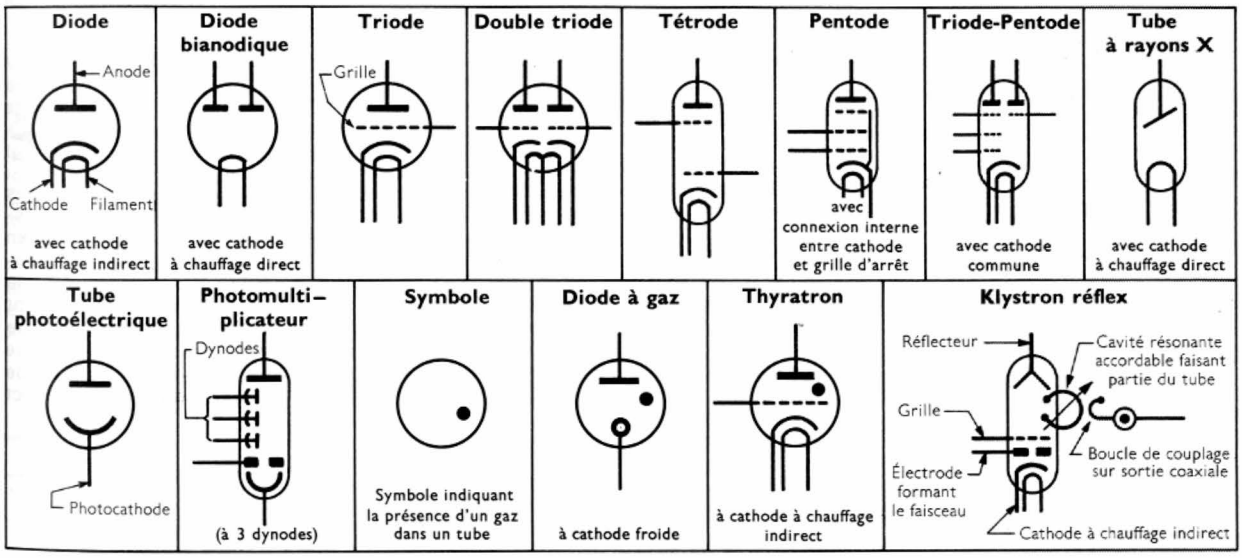


Fig. III-4
Cathode à oxydes

CHAPITRE IV

TUBES ÉLECTRONIQUES

Symboles graphiques



TUBES ÉLECTRONIQUES À VIDE

Les tubes électroniques sont de moins en moins utilisés car ils présentent un certain nombre d'inconvénients. Outre leur relative fragilité et leur encombrement, ils ne permettent pas une miniaturisation poussée des équipements dans lesquels ils sont employés. Cette dernière particularité résulte autant de leurs dimensions, qui ne peuvent être réduites indéfiniment, que de la nécessité d'employer des tensions relativement élevées pour les faire fonctionner ; cela impose l'utilisation de composants suffisamment isolés, donc volumineux, et de sources de courant assez puissantes et encombrantes, rarement portatives.

Un tube électronique se présente souvent sous la forme d'une ampoule, en verre ou en métal, parfaitement étanche aux gaz, contenant des électrodes métalliques réunies à des broches qui permettent de le placer sur un culot approprié et de l'insérer dans un circuit électrique.

Avant d'aborder l'étude de ces tubes, il faut avoir présent à l'esprit, qu'en général, un tube seul ne peut pas remplir une fonction, quelle qu'elle soit : il doit être incorporé dans un montage approprié qui détermine cette fonction.

1. DIODE À VIDE

1.1. Description. — C'est un tube électronique qui comporte seulement deux électrodes : une cathode ther-

moémissive et une anode (fig. IV-1). Cette dernière, portée à un potentiel positif par rapport à la cathode, permet de collecter les électrons émis par celle-ci.

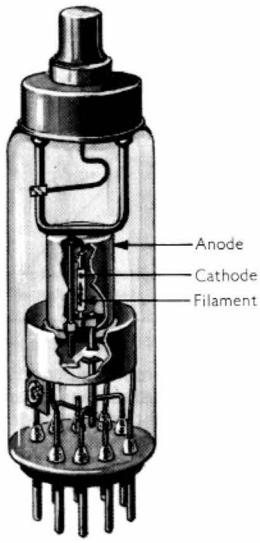


Fig. IV-1

Tube diode à une cathode à chauffage indirect. Il est utilisé pour le redressement de tensions alternatives (*R.T.C.*)

1.2. Fonctionnement. — Dès qu'une tension U_{AK} est appliquée entre la cathode et l'anode d'un tube de façon à rendre cette dernière positive (*tube sous tension directe*), un courant I_A traverse la diode (fig. IV-2). Ce courant, appelé *courant direct*, n'a cependant pas la valeur I_{th} donnée par la loi de Richardson ; au contraire, il dépend essentiellement de la tension U_{AK}. Ce résultat est dû à la présence d'électrons entre les deux électrodes : ils constituent une *charge d'espace* négative qui repousse les électrons vers la cathode. Dans les tubes à vide utilisés, l'intensité du courant est toujours bien inférieure à I_{th} ; les électrons émis en excès entourent la cathode et ce n'est pas l'émission électronique qui limite l'intensité du courant anodique.

L'intensité I_A de ce courant est donnée en fonction de la tension U_{AK} par la relation suivante :

$$I_A = p\, U_{AK}^{3/2} \quad \text{(équation de Child-Langmuir)}$$

Le coefficient p, appelé **pervéance du tube,** est une constante qui ne dépend que de la géométrie de celui-ci.

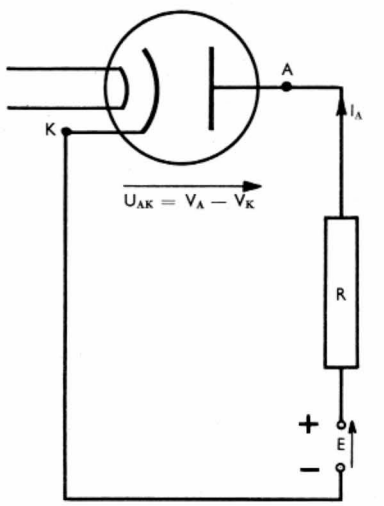


Fig. IV-2

Lorsque la tension U_{AK} *est négative* (c'est-à-dire lorsque la cathode est positive par rapport à l'anode (*tube sous tension inverse*), aucun courant ne traverse le tube ($I_A = 0$). En effet, les électrons sont rappelés vers la cathode dès qu'ils sont émis et aucun d'eux ne peut atteindre l'anode.

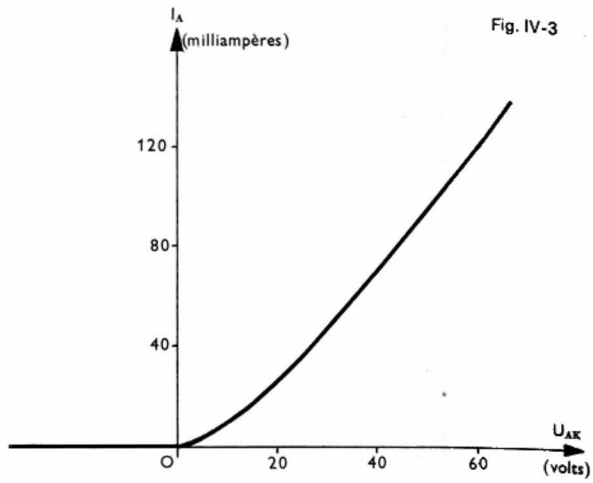


Fig. IV-3

1.3. Caractéristique du tube (fig. IV-3). — La caractéristique d'une diode est la courbe représentative de la fonction : $I_A = f\,(U_{AK})$.

La loi de Child-Langmuir traduit assez bien la caractéristique obtenue expérimentalement lorsque la d.d.p. U_{AK} est positive, sauf toutefois lorsque cette tension est très faible car les vitesses initiales des électrons ne sont plus négligeables. Par ailleurs, même si la tension U_{AK} est nulle, un courant I_A traverse le tube (fig. IV-4).

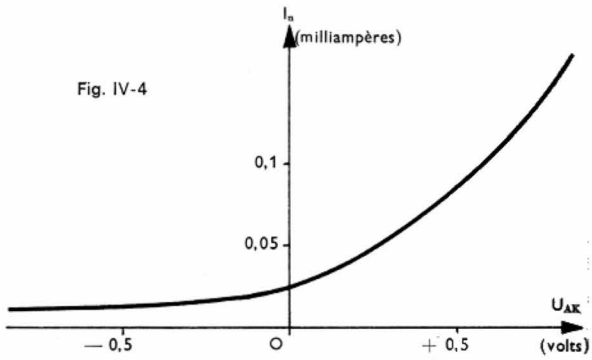


Fig. IV-4

La caractéristique d'une diode est limitée du côté des courants directs et du côté des tensions inverses. La puissance absorbée par le tube ($U_{AK}\, I_A$) est transformée en chaleur au niveau de l'anode (en effet, c'est sur cette électrode que l'énergie cinétique des électrons se transforme en énergie calorifique) ; il ne faut pas que l'échauffement produit soit trop important, car cette électrode peut se déformer ou libérer des gaz occlus. La puissance admissible est indiquée par le constructeur ($P_{A\,max}$) et il est facile de déduire l'intensité maximale $I_{A\,max}$ du courant direct

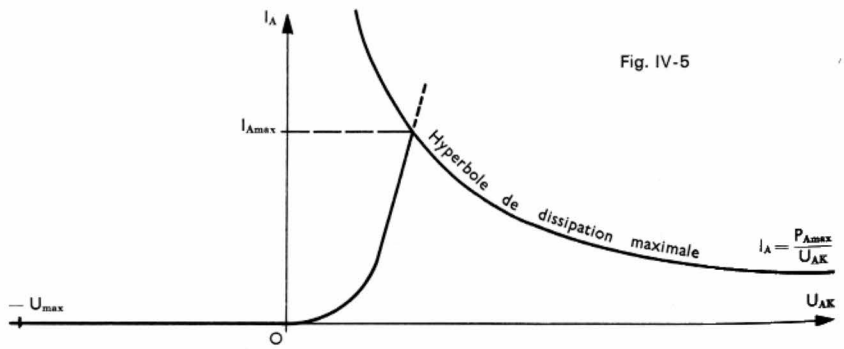


Fig. IV-5

(fig. IV-5). Cette limite dépend essentiellement du tube.

Dans les diodes de petites puissances (quelques watts), les anodes ont des surfaces de plusieurs centimètres carrés et elles sont souvent noircies pour améliorer leur pouvoir de radiation thermique. Dans les tubes de grande puissance

($P_{A\ max}$ de plusieurs centaines de watts), les anodes sont refroidies par ventilation de radiateurs reliés à l'anode, par circulation d'eau dans la masse même de l'anode, et par vaporisation d'eau contenue dans une cavité anodique ($P_{A\ max}$ peut alors atteindre plusieurs kilowatts).

En inverse; il faut limiter la tension U_{AK} à une valeur assez basse pour qu'il n'y ait aucun risque d'arc ni dans le tube, ni à l'extérieur (le long des connexions). Les tubes employés dans les circuits de réception supportent des tensions inverses de plusieurs centaines de volts; certains tubes employés pour le redressement de très hautes tensions peuvent supporter deux cents kilovolts.

1.4. Utilisation de la diode. — Lorsqu'une diode est insérée dans un circuit, le courant ne passe que dans un seul sens: de l'anode vers la cathode (puisque les électrons ne peuvent circuler que dans le sens contraire).

Pour connaître le courant traversant un circuit contenant une diode, nous pouvons utiliser des méthodes graphiques. Considérons par exemple le montage de la figure IV-2 et supposons connues : la tension continue *E* appliquée au circuit, la caractéristique de la diode et la valeur *R*

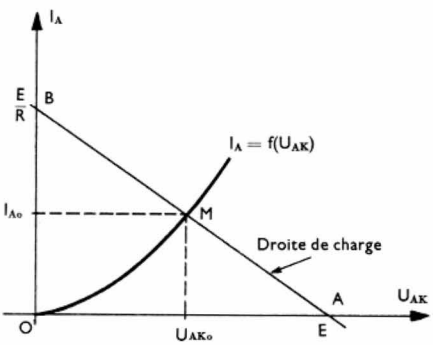


Fig. IV-6

de la résistance placée dans le circuit. Si nous appliquons la loi d'Ohm à ce circuit, nous obtenons la relation suivante :

$$U_{AK} = E - R.I_A$$

À cette relation correspond une droite (*D*) sur le graphique représentant la caractéristique du tube (fig. IV-6). Elle joint les points *A* ($I_A = 0, U_{AK} = E$) et *B* ($U_{AK} = 0, I_A = E/R$) ; elle est appelée *droite de charge* de la diode. L'intersection de cette droite avec la caractéristique de la diode est le *point de fonctionnement;* ses coordonnées U_{AK_0} et I_{A_0} correspondent à la tension aux bornes du tube et au courant dans le circuit (et dans la diode).

Si la tension appliquée au circuit varie, la droite de charge se déplace parallèlement à elle-même. Si le générateur *G* fournit une tension alternative (fig. IV-7) dont les valeurs extrêmes sont $+ E$ et $- E$, cette droite se déplace entre les deux positions extrêmes (*D*) et (*D'*) (fig.

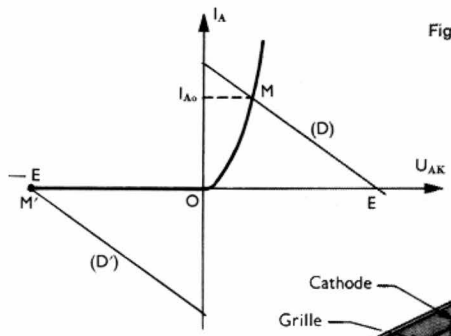


Fig. IV-8

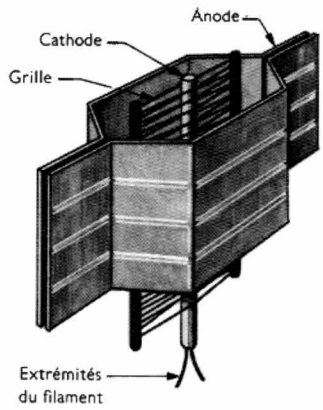


Fig. IV-9
Triode

IV-8). Nous constatons graphiquement que l'intensité du courant varie entre I_{A_0} et une valeur nulle, c'est-à-dire que le courant est unidirectionnel (V. t. 1, Électricité, chap. 28, § 1). La diode peut donc être utilisée pour obtenir des courants dits redressés. Dans de nombreux cas cependant, elles sont souvent remplacées par les diodes à jonction que nous étudierons plus loin (V. chap. 7). Le tube diode reste seul utilisable dans les redresseurs haute tension.

2. TRIODE

2.1. Description. — Le courant anodique d'un tube dépend surtout du champ électrique au voisinage de la cathode. Pour commander ce courant, une électrode supplémentaire, appelée **grille,** a été placée entre la cathode et l'anode (fig. IV-9). Le tube ainsi obtenu possède trois électrodes et est appelé **triode.** La grille, ne devant pas intercepter le flux d'électrons, est faite d'un fil métallique enroulé en spirale.

2.2. Fonctionnement. — La grille est portée à un potentiel V_G plus ou moins négatif afin que le nombre d'électrons qui la traversent soit plus ou moins petit (fig. IV-10). Elle permet donc de régler facilement l'intensité du courant I_A. Dans la région du tube où elle est placée, la

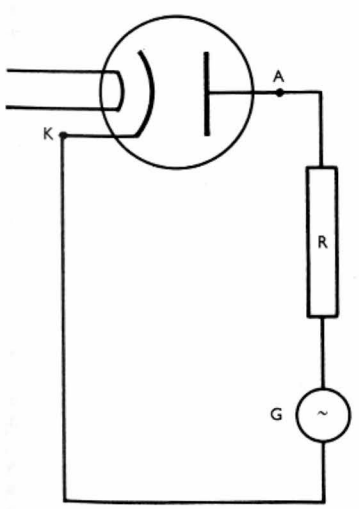


Fig. IV-7

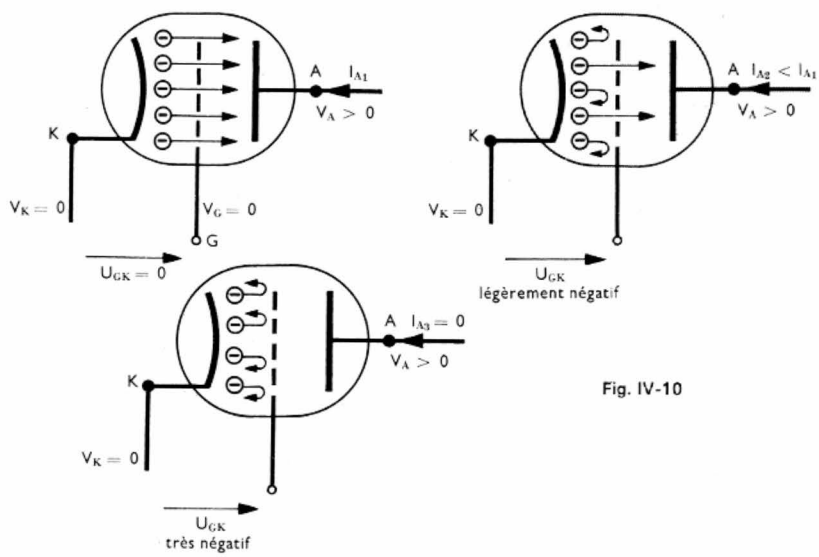


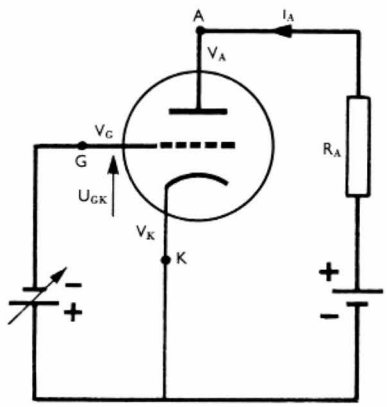
Fig. IV-10

vitesse des électrons étant encore très faible, il est facile de les ralentir ; une tension $U_{GK} = V_G - V_K$ de valeur absolue beaucoup plus petite que la tension anodique suffit pour bloquer toute conduction.

En fonctionnement normal, la grille est portée à un potentiel négatif et elle ne capte que très peu d'électrons : le courant passant par cette électrode est donc extrêmement faible et la puissance nécessaire pour commander l'intensité du faisceau électronique est pratiquement nulle (courant très petit, tension faible). La triode est donc un relais très sensible et très rapide.

2.3. Caractéristiques. — Dans une triode, le courant anodique I_A est fonction à la fois de la tension anode-cathode U_{AK} et de la tension grille-cathode U_{GK} (fig. IV-11). Le courant grille est normalement très faible et il est négligeable devant le courant I_A entrant par l'anode ; le courant sortant par la cathode est donc égal à I_A.

Fig. IV-11



Aucune loi mathématique simple ne traduit les variations du courant anodique $I_A = f\ (U_{AK},\ U_{GK})$; il faut avoir recours à une représentation graphique de cette relation. Afin de se limiter à des représentations planes, deux réseaux de courbes sont utilisés : le *réseau de transfert* qui comprend les courbes $I_A = f\ (U_{GK})$ à U_{AK} constant (fig. IV-12) et le *réseau de Kellog* qui est formé des courbes $I_A = f\ (U_{AK})$ à U_{GK} constant (fig. IV-13). Le fonctionnement d'une triode peut être étudié à l'aide de l'un ou l'autre de ces réseaux.

Fig. IV-12

Réseau de transfert d'une triode. Il permet de définir une caractéristique importante du tube : sa pente S. En un point déterminé elle est égale à :

$$S = \frac{dI_A}{dU_{GK}}$$

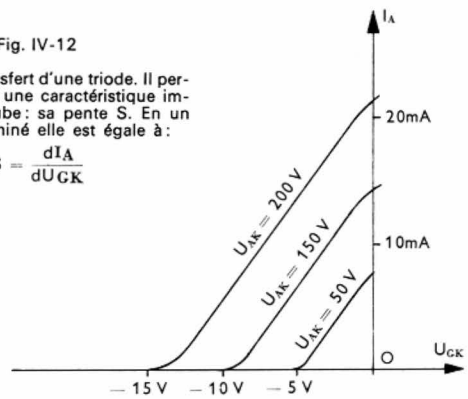
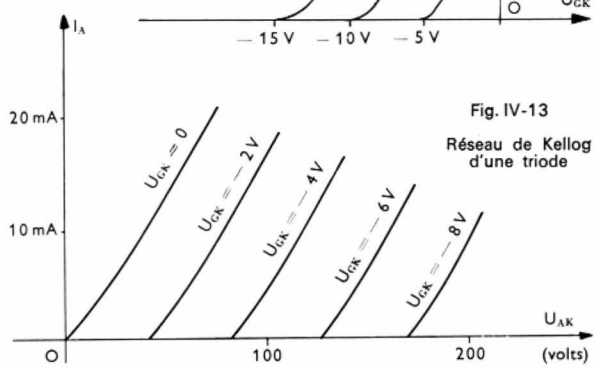


Fig. IV-13

Réseau de Kellog d'une triode



La triode est utilisée pour l'amplification de signaux et pour l'obtention d'oscillations, notamment dans les émetteurs puissants (V. t. 2, Radioélectricité, chap. 4).

3. TÉTRODE

3.1. Description. — Pour améliorer les performances de la triode, notamment pour éviter que les variations du potentiel ne se répercutent sur le potentiel de la grille de commande (parce que cette grille et l'anode forment les armatures d'un condensateur dont l'espace grille-anode constitue le diélectrique), ces deux électrodes ont été séparées par un écran électrique. Dans ce but, on a interposé entre elles une *grille-écran* constituée souvent par un fil métallique enroulé en spirale et maintenu à un potentiel constant pour jouer son rôle d'écran (fig. IV-14).

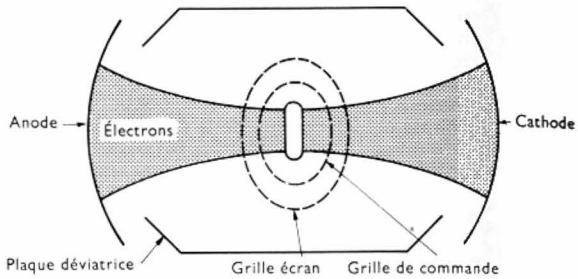


Fig. IV-14 — Tétrode à faisceaux dirigés

3.2. Fonctionnement. — La grille-écran étant portée à un potentiel déterminé (un peu inférieur au potentiel de l'anode), la tétrode a alors un fonctionnement analogue à celui d'une triode : la grille de commande joue le rôle d'une vanne pour les électrons émis par la cathode et attirés par l'anode.

3.3. Caractéristiques. — Les caractéristiques $I_A\ (U_{AK})$ de la tétrode (I_A intensité du courant anodique, U_{AK} : d.d.p. anode-cathode) ont des formes très différentes de celles d'une triode. Lorsque la tension U_{AK} augmente en partant d'une valeur nulle, nous pouvons observer (fig. IV-15) :

— dans un premier temps : une augmentation régulière de l'intensité I_A ;

— dans un deuxième temps : une diminution brutale de l'intensité I_A ; l'anode qui est bombardée par des électrons émet des électrons dits *secondaires* qui sont attirés par la grille-écran. Le courant qui résulte du déplacement de ces électrons se retranche du courant dû aux électrons primaires **(effet dynatron)**. Lorsque la tension U_{AK} continue à croître, l'intensité du courant I_A, après être passée par un minimum, croît à nouveau ;

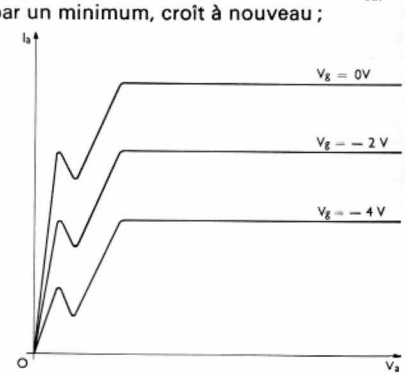


Fig. IV-15 — Caractéristiques d'une tétrode

— dans un troisième temps : une très légère croissance de l'intensité du courant, bien que la tension U_{AK} augmente dans de grandes proportions. C'est dans cette partie des caractéristiques que le point de fonctionnement de la tétrode doit être placé.

Les effets de l'émission secondaire ont pu être réduits dans les tétrodes à faisceaux dirigés ; elles comportent des électrodes qui concentrent les électrons dans des zones

déterminées où ils forment une charge d'espace qui s'oppose au retour des électrons vers la grille-écran (fig. IV-16).

Les tétrodes sont employées essentiellement dans des montages émetteurs d'ondes radioélectriques.

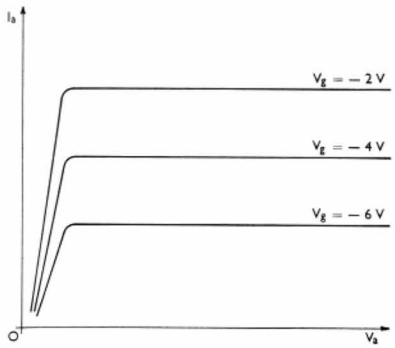


Fig. IV-16 — Caractéristiques d'une tétrode à faisceaux dirigés

4. PENTODE

4.1. Description. — Pour éviter que le courant anodique diminue à la suite de l'émission secondaire qui se produit dans un tube lorsque l'anode est bombardée par des électrons, on a été amené à placer une grille, appelée **grille d'arrêt** ou **grille suppresseuse,** entre la grille-écran et l'anode. Le tube ainsi constitué est appelé **pentode.** La grille d'arrêt est formée par un fil enroulé en hélice à pas relativement grand (V. tableau ci-contre).

4.2. Fonctionnement. — La grille suppresseuse est reliée à la cathode du tube. Ainsi, les électrons secondaires émis par l'anode sont repoussés vers elle par le champ électrique créé entre l'anode et la grille suppresseuse. Pour comprendre le rôle de cette grille, on peut comparer l'électron à une balle : celle-ci, abandonnée *sans vitesse initiale*, ne peut rebondir jusqu'au niveau qu'elle occupait avant d'être lâchée ; de même l'électron venant de l'anode ne peut atteindre une électrode qui se trouve portée au potentiel de la cathode.

La grille suppresseuse étant au même potentiel que la cathode et la d.d.p. grille-écran-cathode étant constante, le fonctionnement de la pentode se ramène à celui de la triode. Le courant anodique I_A dépend essentiellement de la tension U_{G_1K} entre la grille de commande et la cathode.

4.3. Caractéristiques. — Chaque caractéristique I_A (U_{AK}) (I_A : intensité du courant anodique ; U_{AK} : d.d.p. anode-cathode), présente deux parties très différentes (fig. IV-17). Pour des tensions U_{AK} très faibles, l'intensité I_A croît en même temps que la tension. Pour des valeurs suffisamment élevées de U_{AK}, l'intensité I_A est indépendante de cette dernière et la caractéristique est alors une droite parallèle à l'axe des abscisses.

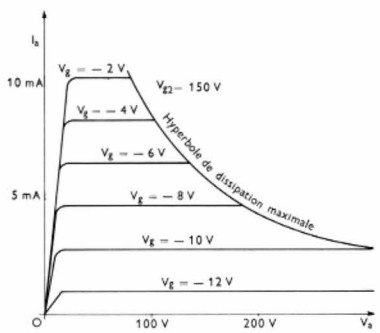
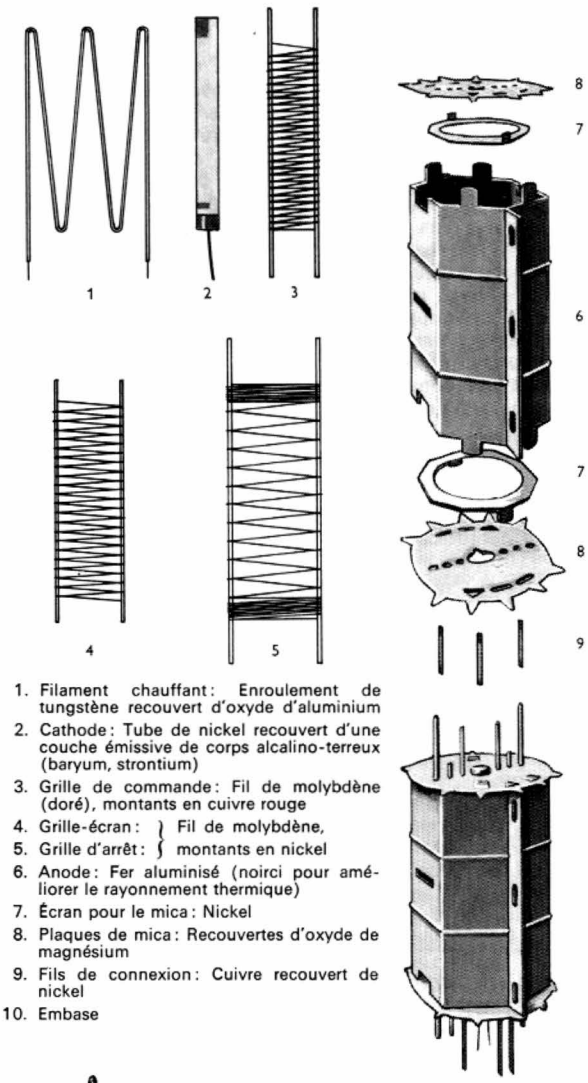


Fig. IV-17
Caractéristiques d'une pentode

Un réseau de Kellog (V. ci-dessus § 2) est établi pour un potentiel déterminé de la grille-écran. Toute augmentation de ce potentiel entraîne une augmentation de l'intensité I_A ; la valeur de cette intensité dépend davantage du potentiel de la grille-écran que de celui de l'anode, celle-ci étant beaucoup plus éloignée de la cathode que la grille.



1. Filament chauffant : Enroulement de tungstène recouvert d'oxyde d'aluminium
2. Cathode : Tube de nickel recouvert d'une couche émissive de corps alcalino-terreux (baryum, strontium)
3. Grille de commande : Fil de molybdène (doré), montants en cuivre rouge
4. Grille-écran : } Fil de molybdène,
5. Grille d'arrêt : } montants en nickel
6. Anode : Fer aluminisé (noirci pour améliorer le rayonnement thermique)
7. Écran pour le mica : Nickel
8. Plaques de mica : Recouvertes d'oxyde de magnésium
9. Fils de connexion : Cuivre recouvert de nickel
10. Embase

Pentode — Structure d'un tube

Les applications du tube pentode sont sensiblement les mêmes que celles de la triode : constitution de montages amplificateurs et de montages oscillateurs.

5. AUTRES TUBES. DÉSIGNATION (CODE EUROPÉEN)

Afin d'obtenir des montages plus compacts, les électrodes correspondant à plusieurs tubes électroniques élémentaires comme ceux décrits ci-dessus, ont été placés dans la même ampoule. C'est ainsi qu'ont été réalisés des tubes diode-triode, diode-pentode, etc. Pour certaines fonctions particulières (changement de fréquence, détection multiplicative en modulation de fréquence) des tubes comportant plus de six électrodes ont été mis au point; ils ont reçu les noms d'**hexodes,** d'**heptodes,** etc., selon le nombre de leurs électrodes. Nous ne les étudierons pas car ils ne sont pratiquement plus utilisés.

Les tubes sont repérés à l'aide de deux lettres suivies d'un nombre. La *première* lettre indique la *tension* ou l'*intensité du courant de chauffage du filament* et la *seconde*, le *type de tube* comme l'indique le tableau suivant; le nombre correspond à un numéro de fabrication.

Première lettre	Deuxième lettre
A : 4 V courant alternatif	A : Diode
B : Courant continu : 180 mA	B : Double diode
C : Tous courants 200 mA	C : Triode
	CH : Triode-hexode
D : 1,4 V	D : Triode de puissance
E : 6,3 V	E : Tétrode
F : 13 V	F : Pentode
G : 5 V	
H : 4 V (ou 0,15 A). Courant continu	H : Hexode
K : 2 V. Courant continu	K : Octode
	L : Pentode ou tétrode de puissance
P : 0,3 A	M : Indicateur visuel d'accord
U : 0,1 A	
X : 0,6 A	Y : Redresseur
	Z : Redresseur double

Exemple : ECC83 : tension de chauffage : 6,3 V ; double triode (CC).

Pour certains tubes à usage professionnel, un autre code est utilisé. Chaque tube est encore désigné par un ensemble de lettres et de chiffres dont la signification est donnée dans le tableau suivant.

Première lettre	Deuxième lettre
	A : Diode
	D : Triode de puissance
	G : Divers
	H : Tubes à ondes progressives
	J : Magnétron
	K : Klystron
	L : Pentode ou tétrode de puissance
	M : Tube à cathode froide
	P : Compteur de radiations. Photomultiplicateur
	Q : Caméra
	T : Thyratron
X : Tubes photosensibles	X : Ignitron et amplificateur d'image
Y : Tubes émetteurs de micro-ondes	Y : Redresseur
Z : Tubes à gaz	Z : Tube stabilisateur de tension

TUBES ÉLECTRONIQUES À GAZ

L'introduction d'un gaz dans un tube électronique permet d'augmenter dans de fortes proportions l'intensité du courant qui peut le traverser, tout en employant des d.d.p. moins élevées que pour les tubes à vide. Cet accroissement de l'intensité du courant est rendu possible par l'ionisation du gaz contenu dans le tube. Quand la tension anode-cathode est assez élevée, tout électron émis par la cathode est accéléré et sa vitesse devient rapidement très grande. S'il heurte alors un atome du gaz contenu dans le tube, il peut arracher un électron de la couche périphérique de l'atome; ce deuxième électron libre est à son tour accéléré et peut également heurter d'autres atomes : c'est le phénomène cumulatif *d'ionisation par choc*. Rapidement il y a un grand nombre d'électrons et un courant intense traverse le tube. La présence du gaz ionisé offre un autre avantage : la charge d'espace négative (qui s'oppose au passage des électrons et les freine dans un tube à vide) se trouve remplacée par un milieu particulier, appelé *plasma*, dans le tube à gaz. C'est un milieu neutre par compensation car les ions positifs et les électrons sont en nombre égal. Le passage des électrons est alors facilité et une faible tension anode-cathode suffit pour l'entretenir; de plus, l'émission électronique est favorisée : les électrons dont la vitesse de sortie est faible ne sont pas renvoyés vers la cathode.

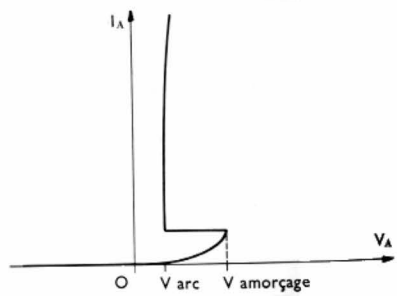
Ces avantages ont permis l'emploi des tubes dans des dispositifs fournissant de grandes puissances électriques.

Nous distinguerons les tubes à cathode chaude, les tubes à cathode froide et les tubes à cathode liquide.

6. TUBES À GAZ À CATHODE CHAUDE

6.1. Diode à gaz ou phanotron. — Comme la diode à vide, ce tube comprend une anode et une cathode chauffée directement ou indirectement. Sous une faible tension le phanotron se comporte comme un tube à vide, mais lorsque la d.d.p. entre l'anode et la cathode atteint une valeur suffisante appelée *tension d'amorçage*, l'ionisation du gaz se produit et le courant augmente brusquement; son intensité dépend alors beaucoup plus des éléments du circuit extérieur que du tube lui-même. En même temps se produit une chute de tension brutale aux bornes du tube et celui-ci s'illumine par suite des recombinaisons des ions et des électrons; cette recombinaison est toujours accompagnée d'une émission de photons de longueur d'onde caractéristique du gaz. La caractéristique I_A (V_A) (fig. IV-18) montre que la tension V_A est sensiblement constante et indépendante de l'intensité du courant I_A après l'amorçage; cette tension appelée *tension d'arc* dépend de la nature et de la pression du gaz.

Fig. IV-18



Le phanotron permet de redresser des courants très intenses mais il n'est plus guère employé car il est remplacé par les diodes à jonction.

6.2. Thyratron-triode et thyratron-tétrode. — Le thyratron-triode est une triode à gaz qui contient généralement de l'hélium ou de l'argon (fig. IV-19) ; sa grille est souvent une plaque métallique percée de petites ouvertures. Lorsque la grille est très négative par rapport à la cathode, elle empêche l'amorçage du tube car les électrons émis sont repoussés par la grille. À partir d'une certaine valeur V_G de ce potentiel, l'amorçage peut se produire si la tension V_A entre l'anode et la cathode atteint une valeur suffisante. La *caractéristique d'amorçage* (fig. IV-20) fournit la valeur de cette tension V_A pour chacune des valeurs V_G du potentiel de grille. Lorsque le thyratron est amorcé, la grille perd tout pouvoir de commande. Ce dispositif se comporte donc de la même manière qu'un thyristor (V. chap. 11); leurs caractéristiques ont des formes sem-

blables (fig. IV-21). Les applications du thyratron sont aussi les mêmes que celles du thyristor. Il faut toutefois noter que ce dernier doit être commandé par un courant alors que le thyratron ne peut être commandé que par une tension.

On fabrique également des *thyratrons-tétrodes* qui comportent une grille supplémentaire entre leur grille de commande et leur anode. En général, elle est reliée à la cathode et joue le rôle d'écran électrique (V. ci-dessus, § 3).

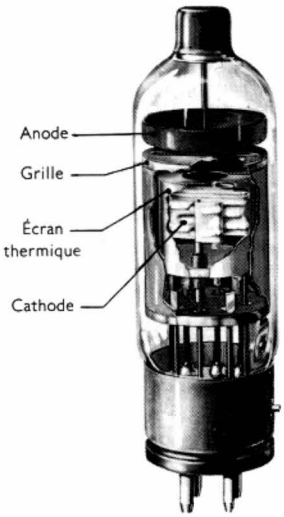


Fig. IV-19

Thyratron-triode à gaz
L'écran thermique limite les pertes calorifiques et permet de réduire la puissance de chauffage (*R.T.C.*)

7. TUBES À GAZ À CATHODE FROIDE

Ces tubes se présentent sous les mêmes formes que les tubes précédents à cathode chaude mais ne possèdent pas de filament de chauffage. L'amorçage de ces tubes repose sur la présence d'un certain nombre d'électrons libres qui proviennent d'atomes de gaz ionisés par des radiations cosmiques (et ils s'en trouvent dans l'ampoule à tout moment). Dès qu'une tension suffisante est appliquée entre l'anode et la cathode, ces électrons sont accélérés et produisent une ionisation par choc. Les électrons se dirigent vers l'anode et les ions positifs se déplacent dans le sens contraire et vont heurter violemment la cathode. Sous l'action de ce bombardement, la cathode émet des *électrons secondaires* qui permettent le fonctionnement normal du tube (cette émission remplace l'émission thermoélectronique utilisée dans les tubes à cathode chaude).

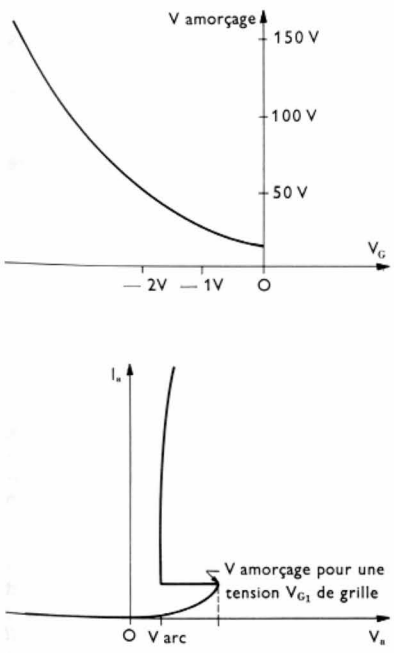


Fig. IV-20

Fig. IV-21

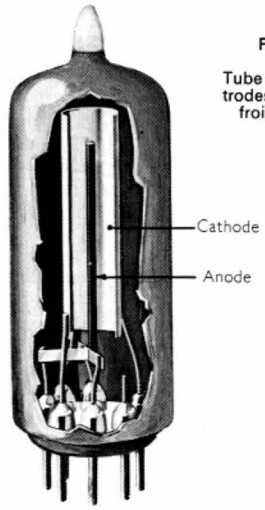


Fig. IV-22

Tube à deux électrodes à cathode froide (*R.T.C.*)

Fig. IV-23

Thyratron à cathode froide (*R.T.C.*)

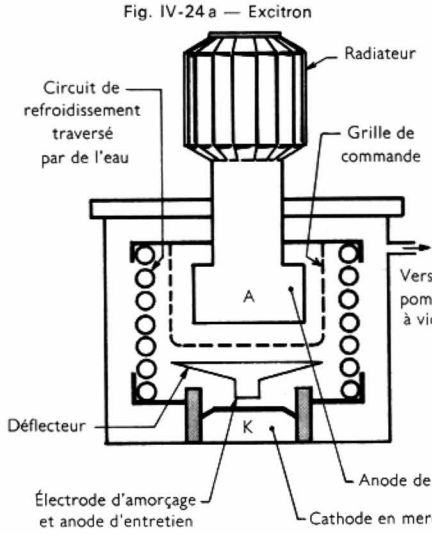
Divers tubes mettent en œuvre ce principe. Les *diodes à cathode froide* ont été employées comme *tubes stabilisateurs de tension* (fig. IV-22). En effet, la tension continue entre leurs bornes est constante quelle que soit l'intensité du courant qui les traverse ; leurs utilisations sont semblables à celles des diodes Zener (V. chap. 7). Les *tubes compteurs de radiations* sont souvent des tubes à cathode froide de forme particulière (compteurs Geiger par exemple) ; le passage du courant résulte de l'ionisation produite par les radiations à détecter. Le *thyratron à cathode froide* (fig. IV-23) a un fonctionnement analogue à celui du thyratron à cathode chaude. Il entrait dans la constitution de compteurs d'impulsions mais il est maintenant remplacé par le thyristor. Un certain nombre de *compteurs décimaux* sont des tubes à cathode froide : ils sont formés d'une anode centrale entourée de dix cathodes ; des électrodes dites de *transfert* sont insérées entre les cathodes. À chaque cathode correspond un chiffre compris entre 0 et 9 ; une décharge lumineuse entre l'anode et la cathode associée à un chiffre éclaire la zone correspondant à ce chiffre.

8. TUBES À CATHODE LIQUIDE

Ces tubes comportent une cathode formée par un liquide conducteur, en général du mercure ; le gaz qu'ils contiennent est alors de la vapeur de mercure. Lorsque ces tubes fonctionnent, le courant les traverse de l'anode vers une petite tache de la cathode appelée *tache cathodique*. C'est au niveau de cette tache que se produit l'émission des électrons. Les principaux tubes à cathode liquide sont les *mutateurs* et les *ignitrons*.

Les **mutateurs** (fig. IV-24 et IV-25) sont des tubes

Fig. IV-24 a — Excitron



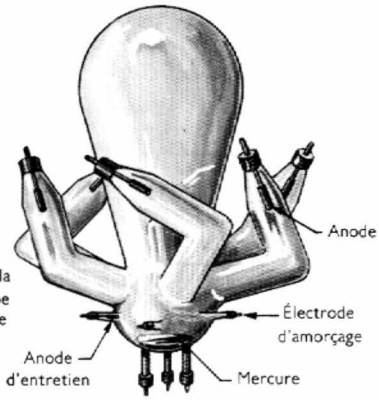


Fig. IV-24 b

Mutateur à ampoule de verre

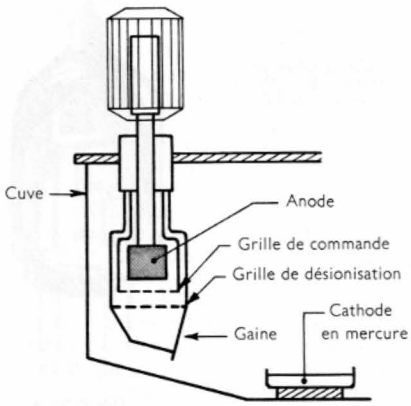


Fig. IV-25 a — Anode principale

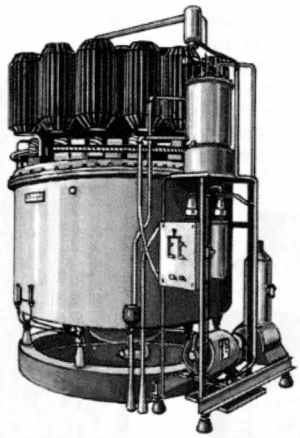


Fig. IV-25 b — Mutateur polyanodique à cuve métallique

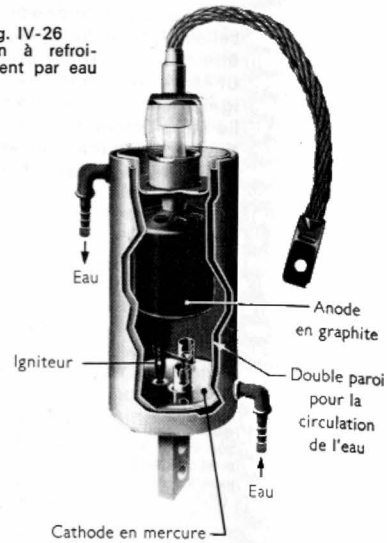


Fig. IV-26
Ignitron à refroidissement par eau

munis de grilles de commande et ils sont assimilables à des thyratrons; ils peuvent comporter plusieurs anodes convenablement isolées les unes des autres et protégées des projections de mercure par des chicanes ou des gaines. À partir de l'instant où ils sont amorcés, les mutateurs fonctionnent comme les tubes à gaz à cathode chaude. L'amorçage s'effectue à l'aide d'une électrode placée relativement près de la surface du mercure et appelée *anode d'amorçage*.

Les **ignitrons** (fig. IV-26) sont des redresseurs monoanodiques à cathode liquide dans lesquels l'amorçage est renouvelé à chaque période par une électrode spéciale appelée *igniteur* ou *igniter*. Cette électrode réalisée en matériau semiconducteur (carbure de silicium ou carbure de bore) est partiellement immergée dans le mercure. L'anode, volumineux cylindre de graphite, est souvent entourée par une grille de désionisation; un déflecteur la protège contre les jets de mercure. La cuve en acier peut être refroidie par un courant d'eau; à l'intérieur y règne un vide poussé.

L'amorçage est produit par l'application d'une impulsion de tension entre la cathode et l'igniteur. Au contact entre le semiconducteur et le mercure, le champ électrique atteint des valeurs très élevées et il se produit une *émission électronique* (*effet de champ*). En effet, des électrons se trouvent alors soumis à des forces très intenses et ils peuvent être arrachés à la cathode. Si durant l'impulsion, la tension anode-cathode a une valeur suffisante, une ionisation générale se produit.

L'ignitron se comporte comme un thyratron et s'emploie encore comme élément redresseur dans de grandes installations, ou dans des équipements de soudage (commande du courant primaire de transformateurs), ou dans des équipements haute tension.

Voici, à titre d'exemple, les caractéristiques d'un ignitron P L 5553 B :

Tension d'alimentation de l'anode	:	250 V
Courant anodique moyen	:	355 A
Puissance demandée	:	2 400 kVA

Mutateurs et ignitrons ont perdu de leur intérêt depuis l'emploi des semiconducteurs (diodes et thyristors). Cependant des ignitrons sont encore utilisés dans certains dispositifs fonctionnant sous des tensions de plusieurs milliers de volts.

CHAPITRE V

TUBE CATHODIQUE-OSCILLOGRAPHE

1. DESCRIPTION

Un *tube à rayons cathodiques* ou *tube cathodique* permet d'utiliser un faisceau d'électrons pour obtenir une image sur un écran (comme par exemple dans un récepteur de télévision).

Dans l'ampoule de verre qui contient les divers éléments du tube cathodique, nous pouvons distinguer :

1° *un canon à électrons* contenu dans la partie cylindrique du tube (le col); ce dispositif fournit des électrons et les concentre en un faisceau étroit;

2° *un système de déviation* placé dans la partie conique de l'ampoule à la sortie du canon à électrons;

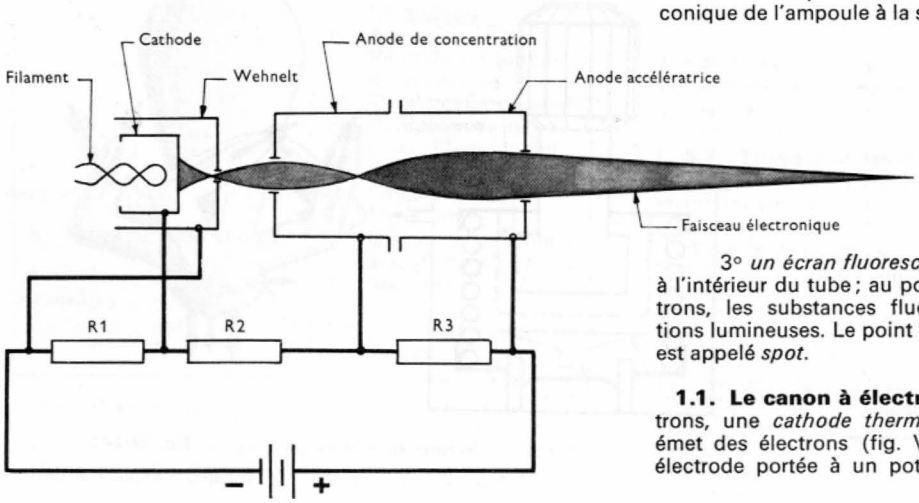


Fig. V-1
Principe du canon à électrons

3° *un écran fluorescent* déposé sur la base du cône, à l'intérieur du tube; au point d'impact du faisceau d'électrons, les substances fluorescentes émettent des radiations lumineuses. Le point lumineux qui apparaît sur l'écran est appelé *spot*.

1.1. Le canon à électrons. — Dans un canon à électrons, une *cathode thermoémissive* à chauffage indirect émet des électrons (fig. V-1). Elle est entourée par une électrode portée à un potentiel négatif appelée *wehnelt*

(du nom du savant allemand qui imagina ce dispositif). Cette électrode est percée d'un mince trou par lequel passent les électrons émis à une distance assez faible de l'axe de l'ouverture et possédant une énergie suffisante. En réglant la valeur du potentiel de cette électrode, on peut modifier le nombre d'électrons qui constituent le faisceau et par conséquent la *luminosité du spot*. À la suite du wehnelt se trouve une anode cylindrique, l'*anode de concentration*, portée à un potentiel positif. L'ensemble de ces deux dernières électrodes constitue une lentille électrostatique qui permet de faire converger les électrons à l'intérieur de l'anode en un point dont on peut régler la position en agissant sur le potentiel de celle-ci. Une seconde anode cylindrique, l'*anode principale* ou *anode d'accélération*, de même axe que la première termine le canon à électrons. Elle est portée à un potentiel positif par rapport à la précédente et de la valeur de ce potentiel dépend la vitesse des électrons à la sortie du canon. Les deux anodes forment également une lentille électrostatique destinée à faire converger le faisceau électronique en un point sur l'écran. Dans certains tubes cathodiques, le canon à électrons comprend deux anodes accélératrices, l'une dans la position précédemment décrite, l'autre placée entre le wehnelt et l'anode de concentration, afin de rendre les réglages de luminosité et de concentration totalement indépendants (fig. V-2).

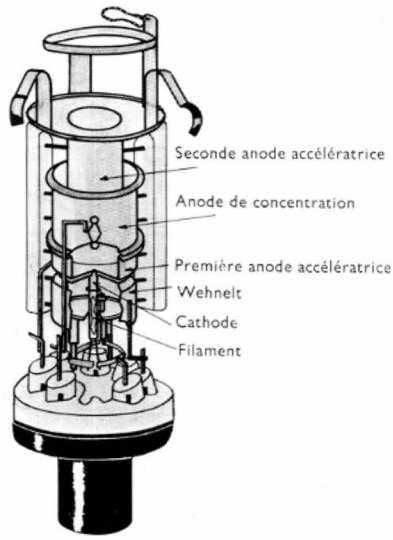


Fig. V-2

Canon électronique d'un tube cathodique (*R.T.C.*)

1.2. Le système de déviation. — Il est constitué par des plaques métalliques ou des bobines selon qu'il met en œuvre la déviation électrostatique ou la déviation magnétique. Il faut dévier le faisceau électronique selon deux axes perpendiculaires, l'un vertical, l'autre horizontal. Dans le cas de la déviation électrostatique deux paires de plaques sont nécessaires (fig. V-3) ; la plus proche de la sortie du canon à électrons fournit le champ électrique qui provoque la déviation verticale, la plus éloignée celui qui produit la déviation horizontale. Ce système s'utilise particulièrement dans les oscillographes cathodiques. Dans les récepteurs de télévision (V. t. 2, Radioélectricité), la déviation magnétique est préférée ; elle est obtenue à l'aide de deux bobines disposées à l'extérieur du tube, appliquées contre l'enveloppe de verre à la jonction du col et du cône (V. fig. V-2).

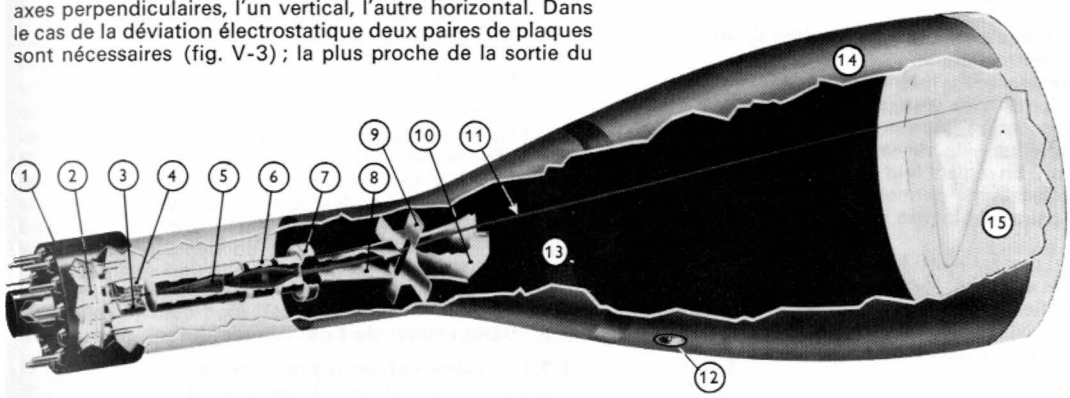
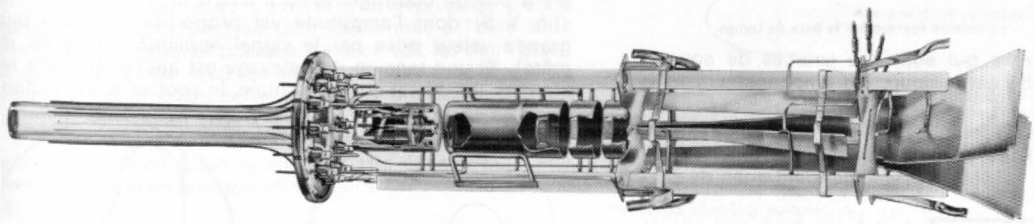


Fig. V-3

Tube cathodique (*R.T.C.*)

1. Culot muni des broches de contact des électrodes
2. Embase en verre du tube avec des fils des connexions et le tube de verre (queusot) servant au pompage (vide)
3. Cathode à chauffage indirect et filament
4. Électrode de commande (wehnelt)
5. Première électrode accélératrice munie d'un diaphragme
6. Électrode de concentration
7. Seconde électrode accélératrice munie d'un diaphragme
8. Paire de plaques pour la déviation verticale du faisceau électronique
9. Blindage entre les deux paires de plaques de dérivation
10. Paire de plaques pour la déviation horizontale du faisceau électronique
11. Faisceau électronique
12. Connexion de l'électrode post-accélératrice. Cette électrode est constituée par un dépôt conducteur sur les parois internes de l'ampoule, jusqu'au voisinage de l'écran
13. Anneau d'isolement entre l'électrode post-accélératrice et la couche conductrice interne dans la direction de l'embase
14. Ampoule de verre
15. Écran, enduit d'une matière fluorescente



Détail du canon électronique avec les paires de plaques de déviation du faisceau (*R.T.C.*)

1.3. L'écran. — Il est constitué par une couche fluorescente qui s'illumine au point d'impact des électrons ; le spot a une couleur qui dépend de la substance fluorescente employée : verte avec le silicate de zinc, bleue avec le tungstate de sodium, etc. La persistance de l'image obtenue dépend de la constitution de la couche fluorescente. Certains écrans présentent une grande rémanence et ils permettent l'observation des phénomènes non périodiques, en médecine et en biologie par exemple.

Une couche conductrice de graphite recouvre intérieurement l'écran et une grande partie de la face interne du cône de l'enveloppe. Elle est reliée électriquement à l'anode d'accélération et reçoit la plupart des électrons dus à l'émission secondaire de l'écran (émission qui se produit lorsque ce dernier est bombardé par le faisceau électronique). L'anode d'accélération en reçoit une autre partie et ainsi, le courant électrique fourni par l'alimentation du tube revient à cette dernière grâce à cette émission secondaire.

2. APPLICATION : L'OSCILLOGRAPHE CATHODIQUE

2.1. Constitution d'un oscillographe. — Un oscillographe comprend (fig. V-4) :

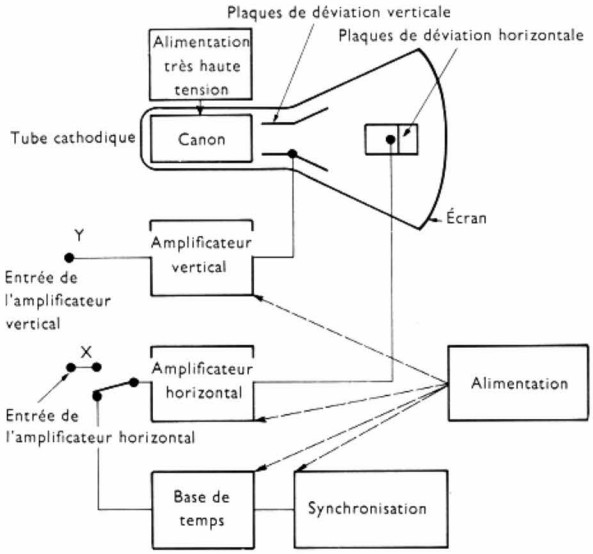


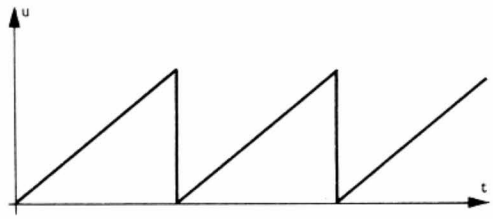
Fig. V-4 — Schéma d'un oscillographe cathodique

— *un tube cathodique* comportant, en général, un système de déviation électrostatique.

— *deux amplificateurs* au moins, fournissant chacun une tension. L'un est relié aux plaques de déviation verticale (d'où l'appellation impropre d'amplificateur vertical), l'autre aux plaques de déviation horizontale (amplificateur horizontal). En réglant leur gain à une valeur convenable, ces amplificateurs permettent d'appliquer aux bornes de chaque paire de plaques de déviation la tension la mieux adaptée.

— *une base de temps*, c'est-à-dire un *générateur de signaux en dents de scie* (fig. V-5) qui peut être raccordé à l'entrée de l'amplificateur relié aux plaques de déviation horizontale et à un dispositif de synchronisation dont l'utilisation sera expliquée plus loin.

Fig. V-5



u : tension fournie par la base de temps

— *des alimentations* qui sont des sources de courant continu pour le tube cathodique, les amplificateurs et la base de temps.

Dans certains oscillographes, afin d'observer simultanément deux grandeurs, le tube cathodique comporte deux canons à électrons et deux ensembles identiques de plaques de déviation, un pour chacun des faisceaux fournis. Le même résultat est obtenu en incorporant un *commutateur électronique* dans un oscillographe ne comportant qu'un seul canon électronique. Ce dispositif permet d'appliquer aux plaques de déviation une tension, puis l'autre (fig. V-6). Les courbes correspondant aux deux tensions s'inscrivent point par point sur l'écran (fig. V-7) ; cependant les tracés paraissent continus car le commutateur électronique fonctionne à une fréquence relativement grande et chaque figure formée sur l'écran comprend des milliers de points très proches les uns des autres. Une tension continue est appliquée en même temps que la tension à visualiser pour imposer au spot un déplacement vertical supplémentaire : ainsi, les deux courbes sont mieux séparées sur l'écran (fig. V-8).

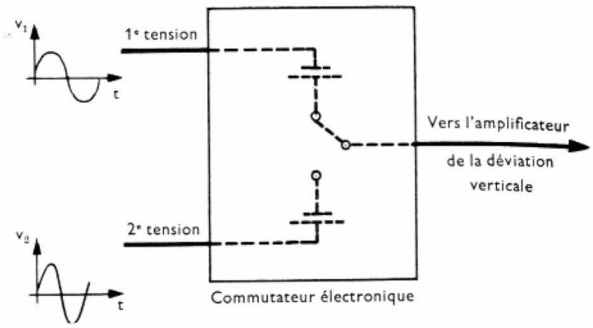


Fig. V-6 — Représentation schématique permettant d'illustrer le fonctionnement d'un commutateur électronique

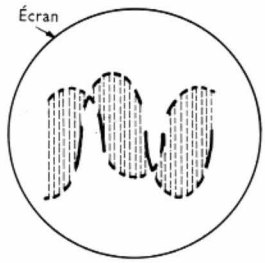


Fig. V-7

2.2. Utilisations de l'oscillographe

2.2.1. Visualisation d'une tension variable. — La tension $v(t)$ à visualiser est appliquée à l'entrée de l'amplificateur de déviation verticale et celui-ci délivre une d.d.p. proportionnelle à $v(t)$ entre les plaques de déviation reliées à ses bornes de sortie. La déviation verticale du faisceau électronique est donc proportionnelle à $v(t)$. L'inertie des électrons étant pratiquement nulle, cette déviation varie avec la tension ; ainsi des tensions périodiques ayant des fréquences de plusieurs dizaines de mégahertz peuvent être visualisées avec certains oscillographes. S'il n'y a pas de balayage, le spot décrit un segment vertical (fig. V-9) dont l'amplitude est proportionnelle à la plus grande valeur prise par le signal appliqué (la valeur de crête). Si une tension de balayage est appliquée entre les plaques de déviation horizontale, le spot se déplace dans

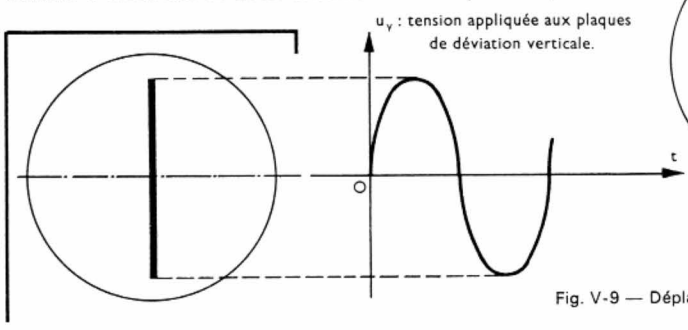


Fig. V-9 — Déplacement du spot si aucune tension n'est appliquée entre les plaques de déviation horizontale ($u_x = 0$)

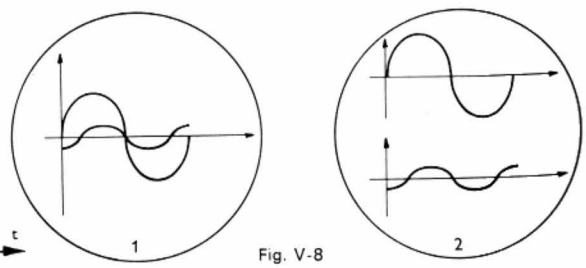


Fig. V-8

Application des tensions à visualiser
1. sans appliquer les tensions continues pour séparer les courbes
2. avec application de composantes continues

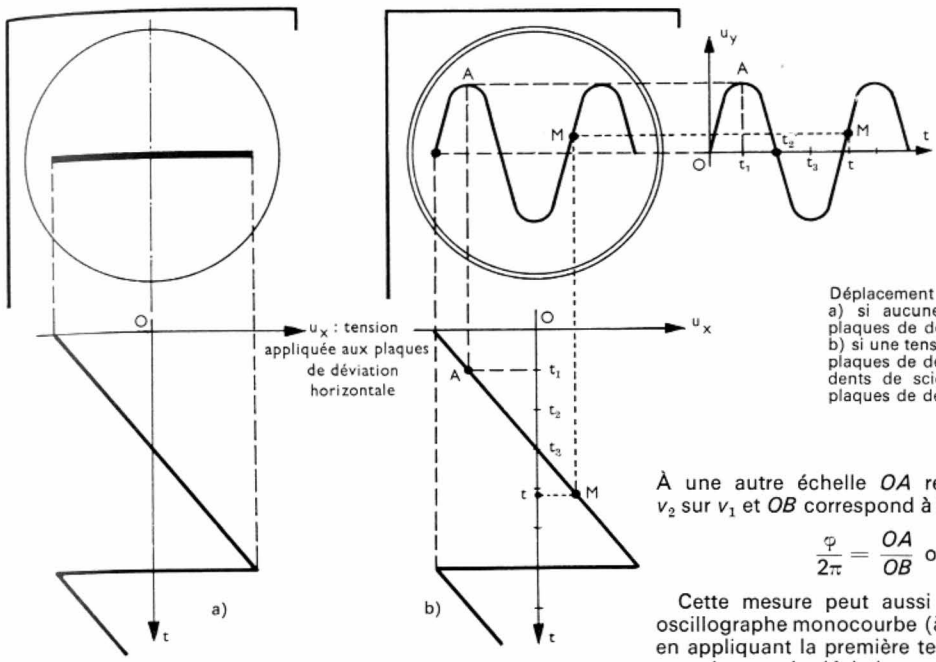


Fig. V-10

Déplacement du spot :
a) si aucune tension n'est appliquée entre les plaques de déviation verticale ($u_y = 0$)
b) si une tension sinusoïdale est appliquée entre les plaques de déviation verticale et si une tension en dents de scie ($u_x = kt$) est appliquée entre les plaques de déviation horizontale

le plan de l'écran et non plus selon un axe (fig. V-10) ; à un instant t (nous prenons pour origine des temps le moment où commence le déplacement du spot), la déviation verticale est proportionnelle à la tension v et la déviation horizontale au temps t ; ainsi la courbe décrite par le spot reproduit bien la courbe représentative de la fonction $v(t)$. La tension de balayage, qui est une fonction linéaire du temps pendant la durée du balayage, s'annule périodiquement pour que le spot reprenne sa position initiale.

Lorsque la tension analysée est périodique et de fréquence f, il faut que la fréquence de la tension de balayage soit égale à f ou en soit un sous-multiple pour obtenir un oscillogramme stable (c'est-à-dire pour que le spot repasse au cours de chaque tracé aux mêmes endroits sur l'écran). Un dispositif incorporé dans l'appareil assure cette synchronisation indispensable ; il asservit la fréquence de balayage à la fréquence du phénomène à observer. Ce mode de balayage, dit *balayage relaxé*, convient très bien pour l'observation de grandeurs périodiques. Pour la visualisation de phénomènes non périodiques, de durée brève, il est préférable d'employer un *balayage déclenché*, qui se produit à partir du moment où la tension à observer prend naissance.

2.2.2. Mesure du déphasage entre deux grandeurs sinusoïdales.

— Considérons deux tensions $v_1 = \widehat{V}_1 \cos \omega t$ et $v_2 = \widehat{V}_2 \cos(\omega t - \varphi)$. La mesure du déphasage φ entre ces deux tensions peut se faire facilement à l'aide d'un oscillographe bicourbe puisque, dans ce cas, les deux grandeurs peuvent être inscrites simultanément sur l'écran. La mesure du déphasage se ramène alors à la mesure d'une longueur sur l'écran (fig. V-11).

En effet, à une échelle déterminée, le segment OA représente le retard t_0 de v_2 sur v_1. Cette échelle peut être obtenue aisément puisque le segment OB représente une période T.

$$\frac{t_0}{T} = \frac{OA}{OB}$$

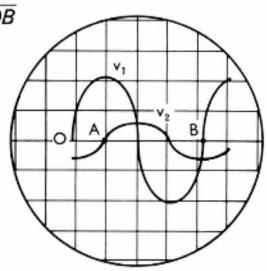


Fig. V-11

À une autre échelle OA représente le déphasage φ de v_2 sur v_1 et OB correspond à 2π rad

$$\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{OA}{OB} \text{ ou } \varphi = 2\pi \frac{OA}{OB}$$

Cette mesure peut aussi être réalisée au moyen d'un oscillographe monocourbe (à un seul faisceau électronique) en appliquant la première tension à l'entrée correspondant aux plaques de déviation verticale par exemple, et la deuxième tension à l'entrée correspondant aux plaques de déviation horizontale. Une ellipse s'inscrit sur l'écran car à un instant donné les coordonnées du spot sont :
$X = k \cos(\omega t - \varphi)$ et $Y = k' \cos \omega t$ (k et k' étant deux constantes dépendant des gains des amplificateurs). Ces coordonnées correspondent aux équations paramétriques d'une ellipse. Ce résultat peut d'ailleurs être retrouvé au moyen d'une construction graphique simple (fig. V-12).

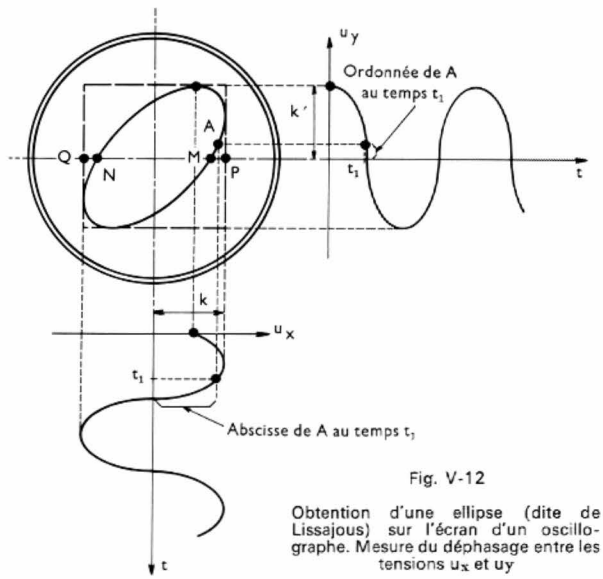


Fig. V-12

Obtention d'une ellipse (dite de Lissajous) sur l'écran d'un oscillographe. Mesure du déphasage entre les tensions u_x et u_y

L'ellipse est inscrite dans un rectangle ayant des côtés proportionnels à $2k$ et $2k'$. Elle coupe l'axe des abscisses lorsque $\cos \omega t = 0$, soit aux points des coordonnées $+ k \sin \varphi$ et $- k \sin \varphi$. D'où : $\sin \varphi = \frac{MN}{PQ}$.

L'oscillographe permet l'étude de grandeur électriques, mécaniques, acoustiques, etc., la visualisation des grandeurs périodiques ou éphémères. Cet appareil sert aux géologues pour l'étude des sols, aux biologistes pour l'étude du fonctionnement de certains organes, pour la réalisation d'électrocardiogrammes, d'encéphalogrammes, etc., aux médecins pour la surveillance des malades, aux radioélectriciens et aux électroniciens pour la maintenance et le dépannage d'appareils divers, etc.

CHAPITRE VI

VARISTANCES - SONDES À EFFET HALL THERMOCOUPLES

Les propriétés des semiconducteurs sont mises en œuvre dans un certain nombre de composants. Ce chapitre concerne quelques-uns d'entre eux, moins importants que les diodes et les transistors que nous étudierons en détail par la suite.

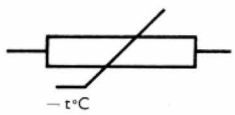
Les varistances sont des éléments dont la résistance varie dans de très grandes proportions (par exemple, de 1 à 10 000) lorsque leur température, ou la tension appliquée à leurs bornes, est modifiée. Elles sont aussi appelées *résistances non linéaires* (en abrégé R.N.L.).

Nous distinguerons : les **thermistances,** éléments dont la résistance dépend essentiellement de la température ; les **résistances dépendant de la tension** ou V.D.R. (de l'anglais *Voltage Dependent Resistor*, résistance dépendant de la tension) ; les **magnétorésistances,** résistances variant avec l'intensité du champ magnétique dans lequel elles sont placées ; les **photorésistances,** éléments dont la résistance est essentiellement fonction de l'éclairement (elles seront étudiées avec les dispositifs photoélectriques ; V. chap. 17).

1. THERMISTANCES À COEFFICIENT DE TEMPÉRATURE NÉGATIF

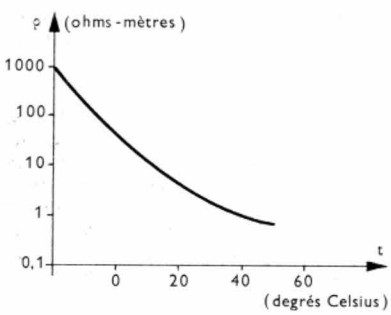
Les thermistances à coefficient de température négatif sont des résistances thermosensibles caractérisées par un coefficient de température négatif, de valeur absolue relativement grande (V. t. 1, Électricité, chap. 2). Elles sont aussi appelées C.T.N. (initiales de coefficient de température négatif) mais il semble plus correct de les désigner par l'expression thermistances à C.T.N. Elles sont constituées d'oxydes métalliques (oxydes de magnésium, de manganèse, de titane, de fer, de cobalt, de nickel, de zinc, etc.) dont la résistivité diminue rapidement quand la température augmente. Les oxydes sont réduits en poudre et mélangés dans des proportions convenables ; ils sont ensuite frittés pour obtenir un corps solide de composition homogène. Les thermistances à C.T.N. se présentent sous forme de disques, d'anneaux, de bâtonnets ou de perles. Dans les schémas, elles sont représentées par le symbole de la résistance complété par un signe conventionnel rappelant que la résistance varie et que son coefficient de température est négatif (fig. VI-1).

Fig. VI-1



1.1. Coefficient de température. — La résistivité des semiconducteurs employés varie en fonction de la température selon une loi exponentielle : $\rho = \rho_0\, \mathbf{e}^{k/T}$ si nous appelons ρ, la résistivité à la température absolue T ; ρ_0 et k sont des constantes dépendant du matériau utilisé et **e** est la base des logarithmes népériens ($\mathbf{e} \simeq 2{,}718$).

Fig. VI-2



En coordonnées semi-logarithmiques, c'est-à-dire en portant $\ln\rho$ en ordonnées $\left(\ln\rho = \ln\rho_0\, \mathbf{e}^{k/T} = \ln\rho_0 + \frac{k}{T}\right)$, la courbe représentative est une branche d'hyperbole (fig. VI-2). Le quotient de la variation relative de résistivité $\frac{d\rho}{\rho}$ et de la variation de température correspondante dT est appelé **coefficient de température :** $\alpha = \dfrac{\frac{d\rho}{\rho}}{dT}$

Pour une température déterminée :

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dT} = -\frac{k}{T^2}\,\frac{\rho_0\, \mathbf{e}^{k/T}}{\rho} = -\frac{k}{T^2}$$

k étant positif, α est négatif ; ce coefficient est généralement compris entre — 0,01 et — 0,05 K^{-1} alors que pour les métaux, il est voisin de 10^{-3} ou 10^{-4} K^{-1}.

1.2. Caractéristique courant-tension d'une thermistance à C.T.N. — La résistance d'une thermistance à C.T.N. dépendant de sa température, c'est-à-dire notamment de la puissance apportée par le courant, la courbe représentant les variations de la tension aux bornes de la thermistance, en fonction de l'intensité du courant qui la parcourt, n'est pas une droite (comme pour une résistance métallique, fig. VI-3).

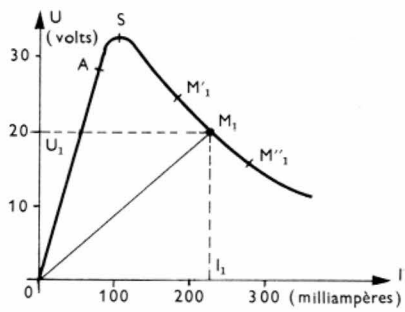


Fig. VI-3

Nous pouvons constater que :

— Lorsque le point de fonctionnement est placé entre *O* et *A*, le courant étant faible, l'échauffement dû à l'effet Joule est négligeable et la thermistance à C.T.N. se comporte, dans un domaine très limité, comme une résistance métallique : la portion courbe entre *O* et *A* est un segment de droite.

— Lorsque ce point se trouve au-delà de *S*, le courant est important et l'effet Joule aussi : la thermistance s'échauffant, le nombre des porteurs libres croît rapidement et la résistance diminue. Le point *S* est appelé **point de basculement.**

La loi d'Ohm est applicable à une thermistance à C.T.N. après le basculement si les conditions de fonctionnement restent constantes. La thermistance peut alors être caractérisée par sa **résistance statique** R_s ; au point M_1 (fig. VI-3), c'est le quotient de la tension U_1 et du courant I_1 correspondant : $R_s = \dfrac{U_1}{I_1}$.

Si les conditions de fonctionnement sont telles que le point de fonctionnement décrit un segment $M'_1\,M''_1$ (dont

C.T.N. de 3 A, 2 W (*Roger Perrin*)

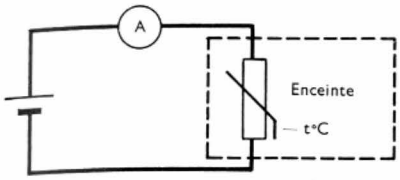


Fig. VI-4

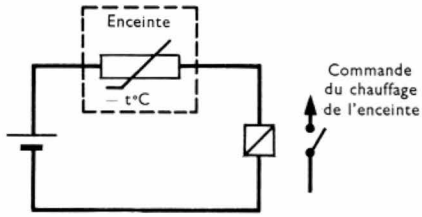


Fig. VI-5

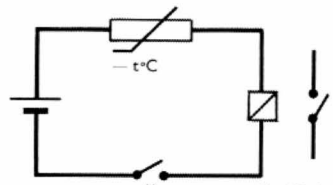


Fig. VI-6

M_1 est le milieu), la thermistance peut être caractérisée par sa **résistance dynamique,** quotient d'une petite variation dU de tension et de la variation de courant correspondante dI : $R_d = \frac{dU}{dI}$. Elle est négative après le basculement, au-delà de S.

1.3. Emplois des thermistances à C.T.N. — Une thermistance à C.T.N. peut être utilisée comme capteur de température mais alors *son échauffement propre doit être négligeable;* le courant qui peut la traverser ne doit pas provoquer d'échauffement notable par effet Joule afin que la température de la thermistance soit bien celle du milieu ambiant.

Une thermistance à C.T.N., placée en série avec une pile et un ampèremètre, constitue un thermomètre (fig. VI-4). La résistance de la thermistance, et par suite le courant dans le circuit, sont fonctions de la température; il est donc possible d'étalonner le système et de l'utiliser ensuite pour mesurer des températures. Une thermistance peut commander un dispositif de mise en route, ou d'arrêt, d'une installation de chauffage (fig. VI-5). Elle est également employée pour la *compensation de dérives thermiques.* Lorsque la température croît, la résistance des éléments métalliques d'un circuit augmente, tandis que celle d'une thermistance à coefficient de température négatif diminue; la croissance d'une résistance peut donc être compensée par la diminution d'une thermistance à C.T.N., cela dans un domaine déterminé de température.

C.T.P.
de 1 A, 1 W
(*Roger Perrin*)

Pour d'autres applications, l'échauffement progressif, dû au courant passant dans la thermistance à coefficient de température négatif, et le basculement sont utilisés pour obtenir une croissance progressive (ou limitée) du courant dans le circuit. Ainsi, lorsqu'une thermistance à C.T.N. est en série avec un relais (fig. VI-6), il est facile d'obtenir un **retard à l'enclenchement,** c'est-à-dire une **temporisation.** En effet, il faut un temps plus ou moins long pour que la résistance présentée par la thermistance soit suffisamment faible, et que le courant atteigne la valeur qui permet la fermeture du relais (ce temps peut être compris entre quelques secondes et quelques minutes).

Une thermistance à C.T.N. peut aussi être utilisée pour la *protection contre les surintensités;* si elle est placée en série avec un appareil à protéger (par exemple, une lampe de projection), la thermistance évite la surintensité lors de la mise sous tension, car lorsqu'elle est froide, sa résistance est grande. Ensuite, au fur et à mesure qu'elle s'échauffe, sa résistance décroît : le courant s'établit dans le circuit sans passer par un maximum dangereux pour le matériel (fig. VI-7).

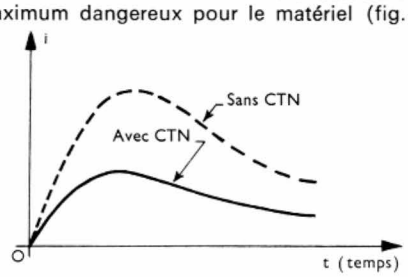


Fig. VI-7

2. THERMISTANCES À COEFFICIENT DE TEMPÉRATURE POSITIF

Les thermistances à coefficient de température positif sont des résistances thermosensibles présentant un coefficient de température élevé dans une zone de température très limitée (fig. VI-8).

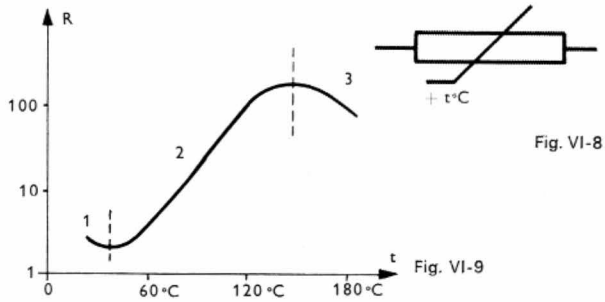


Fig. VI-8

Fig. VI-9

Elles sont constituées de titanate de baryum additionné de sels et d'oxydes métalliques. La variation de la résistance en fonction de la température traduite par la caractéristique $R = f(t)$ conduit à distinguer trois domaines (fig. VI-9).

— *Premier domaine* (zone 1 de la caractéristique) : le coefficient de température est négatif mais sa valeur absolue est faible.

— *Second domaine* (zone 2) : le coefficient de température est positif et très grand.

— *Troisième domaine* (zone 3) : le coefficient de température est négatif de nouveau.

La thermistance présente donc effectivement un coefficient de température positif dans le second domaine seulement. Sa résistance augmente beaucoup (d'où l'emploi d'une échelle logarithmique en ordonnées) et cela dans un intervalle de température assez restreint (quelques dizaines de degrés). Cette modification brutale est due à une transformation allotropique du titanate de baryum (changement de réseau cristallin).

La caractéristique courant-tension d'une thermistance à C.T.P. n'est pas une droite (fig. VI-10), et nous pourrions

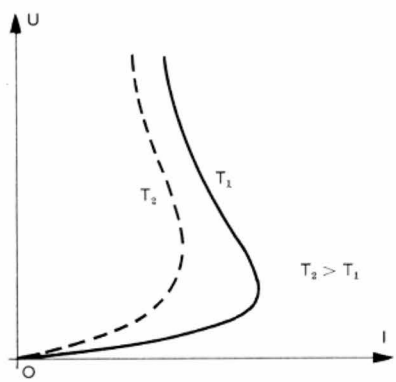


Fig. VI-10

T_1 et T_2 : températures ambiantes

définir une résistance statique et une résistance dynamique selon le régime de fonctionnement (V. § 1.2). Cette caractéristique dépend également de la température ambiante.

Les thermistances à C.T.P. sont employées dans des dispositifs de *protection thermique, pour des moteurs électriques* par exemple; elles sont alors placées au contact des enroulements (fig. VI-11) : si la température de l'un de ceux-ci augmente brusquement, la résistance de la thermistance à C.T.P. correspondante croît, le courant dans le relais dé-

croît et celui-ci n'est plus excité. Ainsi, se trouve assurée la protection contre une surcharge, contre un arrêt de la ventilation, etc.

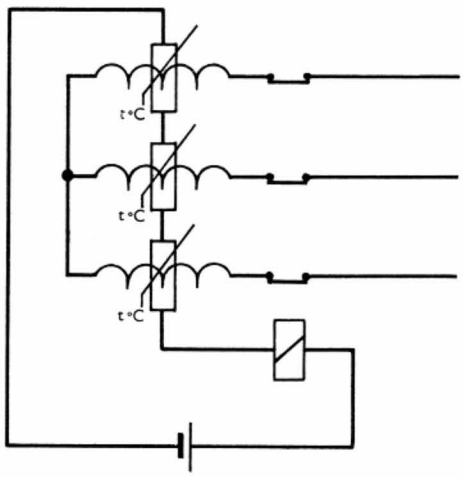


Fig. VI-11

3. LES RÉSISTANCES DÉPENDANT DE LA TENSION OU V.D.R.

Les V.D.R. sont des résistances variant avec la tension appliquée entre leurs bornes. Elles sont constituées principalement de carbure de silicium mélangé avec un liant, et portées à haute température. La caractéristique U (I) d'une V.D.R. (fig. VI-12) montre que pour les faibles courants

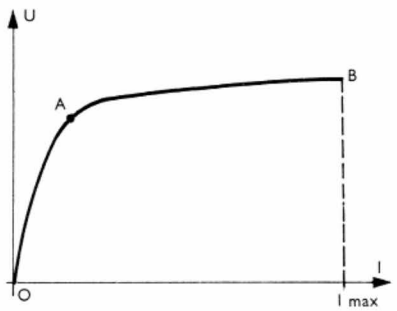


Fig. VI-12

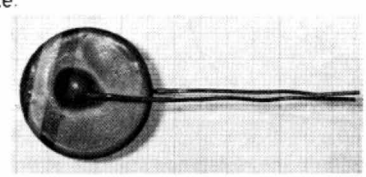
(point de fonctionnement entre O et A), elle est équivalente à une grande résistance ; lorsque ce point se trouve entre A et B, l'intensité I du courant augmente notablement sans que la tension aux bornes de la V.D.R. augmente ; elle est alors équivalente à une résistance beaucoup plus faible.

L'équation de cette caractéristique peut s'écrire :

$$U = C\,I^{\beta}$$

si nous désignons par U la tension aux bornes de la V.D.R. et par I, l'intensité du courant dans la V.D.R. ; C et β sont deux termes constants dépendant de la V.D.R. considérée, β étant un exposant assez faible (0,2 par exemple).

Le coefficient de température de la résistance est négatif, mais il est assez faible, il est compris entre — 0,0014 et — 0,0020 K^{-1} pour les circuits à intensité constante et entre — 0,005 et — 0,008 K^{-1} pour les circuits placés sous tension constante.



V.D.R. de 100 V, 1 W (*Roger Perrin*)

Les V.D.R. sont surtout utilisées comme éléments de protection contre les surtensions : tout appareil, ou composant, placé en parallèle avec une V.D.R. est soumis à la même d.d.p. que celle-ci, et la caractéristique U (I) montre bien qu'elle atteint rapidement une limite (fig. VI-12). Toute surtension dans le circuit entraîne une augmentation de l'intensité du courant dans la V.D.R. tandis que la tension aux bornes de celle-ci croît très légèrement seulement.

4. SONDES À EFFET HALL — MAGNÉTORÉSISTANCES

4.1. Effet Hall. — Si une plaque mince de semiconducteur est parcourue par un courant I (fig. VI-13), nous

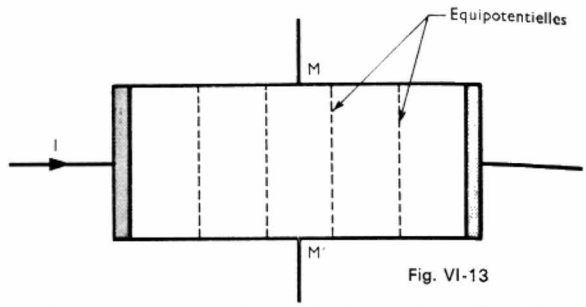


Fig. VI-13

ne relevons aucune tension entre deux points M et M' situés à la même distance des électrodes (les surfaces équipotentielles sont des plans parallèles aux électrodes). En revanche, si nous disposons maintenant la plaque perpendiculairement à un champ magnétique (fig. VI-14), les porteurs allant d'une électrode à l'autre sont déviés ; les équipotentielles sont inclinées par rapport aux électrodes, et nous pouvons relever *une tension U_H entre les points M* et M', c'est-à-dire dans une direction perpendiculaire à la fois au courant et au champ magnétique.

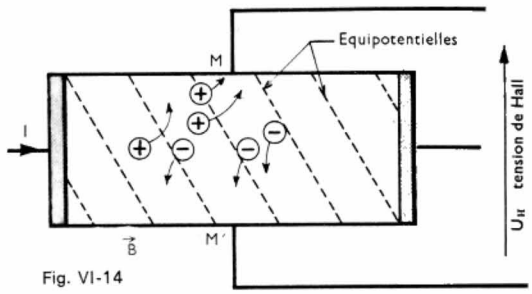


Fig. VI-14

Ce phénomène porte le nom d'**effet Hall ;** U_H est la tension de Hall. Elle est proportionnelle au courant et à l'intensité B de l'induction magnétique (fig. VI-15) et inversement proportionnelle à l'épaisseur d de la plaque.

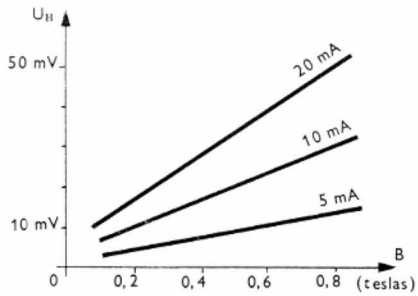


Fig. VI-15

Tension de Hall en fonction de l'intensité du champ magnétique pour des courants de commande : I de 5, 10 et 15 mA

$U_H = \dfrac{R_H}{d}\,I\,B$; R_H est la constante de Hall, elle dépend légèrement de la température (fig. VI-16). Cet effet est mis en

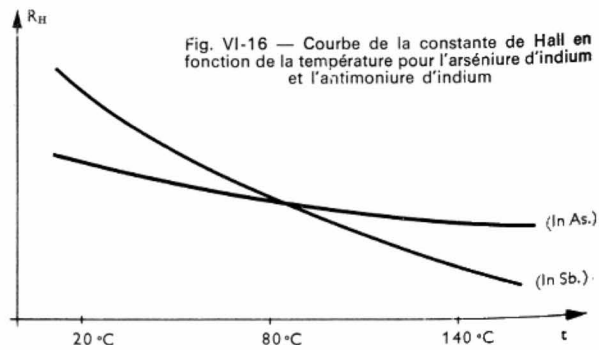


Fig. VI-16 — Courbe de la constante de Hall en fonction de la température pour l'arséniure d'indium et l'antimoniure d'indium

œuvre dans les *sondes à effet Hall;* avec du germanium d'assez grande pureté, la mobilité des porteurs de charge et la résistivité sont assez grandes, et l'effet Hall est important. Après étalonnage, la sonde rend très facile la mesure d'un champ magnétique : celle-ci se ramène à la mesure d'un courant et d'une tension. Le cristal constituant la sonde pouvant être très petit, il est possible de déterminer pratiquement le champ en un point (topographie des champs, exploration d'entrefer, etc.). Des sondes de grande sensibilité sont réalisées avec des cristaux d'antimoniure d'indium ou d'arséniure d'indium; la précision peut atteindre 0,05 %.

4.2. Magnétorésistances. — La déviation des porteurs par le champ magnétique se traduit par une diminution de leur mobilité *dans la direction du champ électrique* (obtenu en appliquant une tension entre les électrodes disposées sur le semiconducteur). L'accroissement de la résistivité, qui en résulte, est proportionnel à B^2, pour les champs faibles, à B pour les champs intenses.

Les magnétorésistances représentent une application intéressante de cette propriété. Elles sont utilisées pour la mesure des champs magnétiques, et chaque fois qu'il faut obtenir une variation de résistance sans déplacement d'un contact. Avec une magnétorésistance, l'action à distance au moyen d'un aimant suffit pour réaliser la variation désirée.

5. BATTERIES À EFFET PELTIER — THERMOCOUPLES

Les batteries à effet Peltier et les couples thermoélectriques sont des dispositifs qui permettent de réaliser directement la transformation de l'énergie thermique en énergie électrique. Deux effets sont mis en œuvre : l'*effet Peltier* et l'*effet Thomson*.

5.1. Effet Peltier. — Lorsque deux métaux à la même température sont en contact, nous pouvons mesurer une d.d.p. de quelques millivolts entre eux.

Métaux en contact	Métal au potentiel le plus élevé	d.d.p. de contact à 0 °C
Bismuth-cuivre	bismuth	21 mV
Fer-cuivre	fer	3 mV
Cuivre-zinc	cuivre	3 mV

Si les deux métaux en contact sont traversés par un courant I, il peut se produire un dégagement ou une absorption de chaleur. Par exemple, considérons le couple bismuth-cuivre : si le courant va du bismuth vers le cuivre, la d.d.p. de contact u joue le rôle d'une f.c.é.m. $e' = u$ (fig. VI-17)

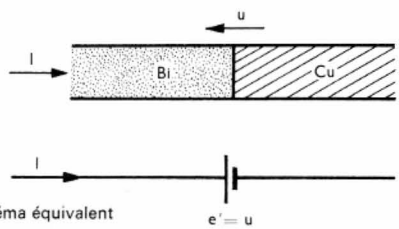


Fig. VI-17

et une énergie électrique égale à uI est absorbée au niveau du contact ; elle est transformée en énergie thermique et ce dégagement de chaleur s'ajoute à l'effet Joule. Si le courant passe du cuivre vers le bismuth (fig. VI-18), la d.d.p. de

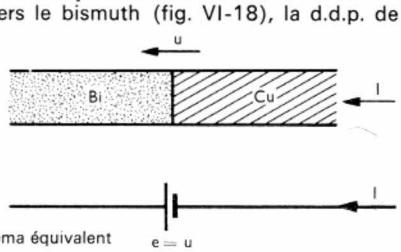


Fig. VI-18

contact joue le rôle d'une f.é.m. $e = u$: il y a production d'une énergie électrique (égale à uI) et *absorption d'énergie thermique*. Si le dégagement de chaleur dû à l'effet Joule est suffisamment faible devant l'énergie calorifique absorbée, la température des métaux s'abaisse.

Les semiconducteurs se sont révélés plus intéressants que les métaux car, pour certains d'entre eux, les d.d.p. de contact sont relativement élevées et, par ailleurs, ils conduisent mal la chaleur (du fait de cette mauvaise conductibilité thermique, la différence de température entre les extrémités d'une portion de semiconducteur peut être assez grande).

Le tellurure de bismuth de type P associé au tellurure de bismuth de type N est un couple très fréquemment employé. Ce semiconducteur est utilisé dans des batteries de réfrigération appelées *batteries à effet Peltier;* les deux parties P et N d'un élément sont réunies par une plaque en cuivre (fig. VI-19). Le cuivre, excellent conduc-

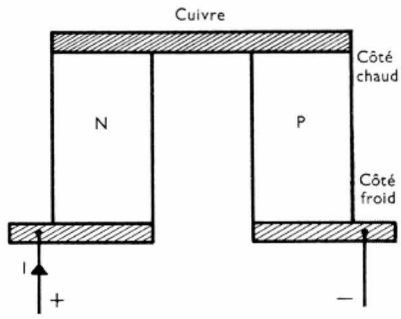


Fig. VI-19

Élément de batterie à effet Peltier

teur de la chaleur et de l'électricité, assure les liaisons entre éléments sans modifier le phénomène ; en effet, l'expérience montre que, dans une chaîne de métaux à *température uniforme* (ou de métaux et de semiconducteurs d'une batterie à effet Peltier), la d.d.p. de contact entre les conducteurs extrêmes est la même que s'ils étaient directement en contact (loi de Volta).

Une batterie comporte un grand nombre d'éléments associés en série (fig. VI-20) pour former un module de

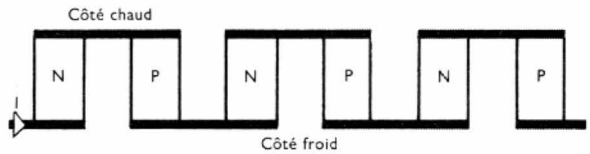


Fig. VI-20 — Batterie à effet Peltier

dimensions réduites. Une face du module est en contact avec les couples au niveau desquels se produit un abaissement de température (« face froide ») et l'autre face (« face chaude ») reçoit la chaleur dégagée par les autres couples. Avec un courant de quelques ampères, une différence de températures de plusieurs dizaines de degrés entre « face chaude » et « face froide » peut facilement être obtenue ; la « face chaude » peut être refroidie extérieurement (par un courant d'eau par exemple) pour éviter que de la chaleur soit apportée à la « face froide » par conduction thermique.

Exemple de caractéristiques. — Tension d'alimentation : 3 V, intensité maximale du courant continu : 7 A ; température de la « face chaude » : 100 °C ; température de la « face froide » : 20 °C. Avec le même élément, il est possible d'obtenir une température de — 30 °C environ pour une température de « face chaude » de 30 °C.

Ces batteries équipent des enceintes réfrigérantes de laboratoire ou des dispositifs portatifs.

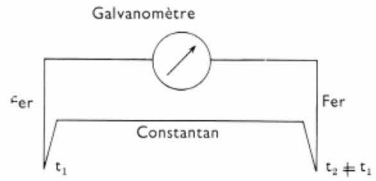
5.2. Effet Thomson. — Une d.d.p. apparaît entre les extrémités d'un conducteur métallique lorsque ces extrémités sont portées à des températures différentes (la mobilité des électrons est différente). Cette d.d.p. est très faible : + 2,2 μV/K pour le cuivre, — 8,4 μV/K pour le fer. Dans un circuit formé d'un même métal et dont deux points sont à des températures différentes, aucun courant ne circule.

L'effet Thomson est dit *positif* pour certains métaux (cuivre, zinc) car le métal se refroidit quand le courant circule dans le sens des températures croissantes (il se

réchauffe dans le cas contraire). Il est *négatif* avec d'autres (fer, aluminium) : le métal s'échauffe quand le courant circule dans le sens des températures croissantes (et se refroidit dans le cas contraire). Cet effet se manifeste de la même façon avec les semiconducteurs.

5.3. Couples thermoélectriques ou thermocouples. — Nous n'obtenons aucun courant si nous associons deux conducteurs de nature différente mais à la même température ou si nous réalisons un circuit avec un seul conducteur de température non uniforme. En revanche, avec deux conducteurs de nature différente, dont les contacts sont portés à des températures différentes, il est possible d'obtenir un courant dans le circuit ainsi formé (fig. VI-21).

Fig. VI-21



En effet, les d.d.p. de contact sont différentes (les contacts sont à des températures différentes) ainsi que les d.d.p. dues à l'effet Thomson ; la d.d.p. résultante n'est pas nulle et l'ensemble est équivalent à un générateur. La juxtaposition des effets Peltier et Thomson (*effet Seebeck*) permet donc d'obtenir de l'énergie électrique par transformation directe de l'énergie calorifique.

L'ensemble obtenu en associant deux conducteurs ou deux semiconducteurs de nature différente est appelé *couple thermoélectrique*. La f.é.m. du couple ne dépend que de la différence des températures des deux contacts. En particulier, cette f.é.m. n'est pas modifiée si nous intercalons un métal intermédiaire maintenu à une température uniforme (loi de Volta) ; il est donc possible de souder les deux corps formant le couple (la soudure est un métal intermédiaire dont la température est uniforme) ou d'insérer un appareil de mesure (dont la température est uniforme) dans le circuit du couple thermoélectrique.

Alors qu'avec les métaux, les f.é.m. ne dépassent pas quelques dizaines de microvolts par kelvin (fer-constantan à 1 000 K : 60 μV/K, fer-cuivre à 300 K : 13 μV/K), avec les semiconducteurs elles peuvent atteindre 200 μV/K. Les plus utilisés sont les séléniure et tellurure de bismuth et ceux d'antimoine. Associés en série, ils constituent des générateurs électriques ou *thermopiles* (V. t. 1, Autres sources d'énergie électrique).

Les thermocouples à semiconducteurs peuvent être employés pour des mesures de températures. Ils constituent de bons détecteurs de rayonnements infrarouges et d'ondes hertziennes de très hautes fréquences.

CHAPITRE VII

JONCTION P-N
DIODES SEMICONDUCTRICES

SYMBOLES

Semiconducteurs				Transistor à effet de champ	**Convertisseurs statiques**	
	Diode à semiconducteur		Transistor NPN avec collecteur relié à l'enveloppe	*À porte non isolée* (P : porte ; D : drain ; S : source)		**(= semiconducteurs)**
	Diode à capacité variable		Transistor unijonction avec base du type P	à canal N		Équipement redresseur symbole général
	Diode tunnel		Transistor unijonction avec base du type N	à canal P		Équipement redresseur à semiconducteurs
	Diode à semiconducteur régulatrice de tension Diode Zener		Cellule photoconductrice à conductibilité symétrique	*À porte isolée* (G : grille ; D : drain ; S : source)		Équipement redresseur à thyristor
	Thyristor		Cellule photoconductrice à conductibilité asymétrique Photodiode	à canal N		Onduleur
	Thyristor bidirectionnel Triac		Cellule photovoltaïque Photopile	à canal P		Onduleur réversible
	Transistor PNP		Générateur de Hall avec quatre connexions	Triac		Convertisseur statique de courant continu

Les propriétés des dispositifs réalisés à partir des semiconducteurs résultent, dans la plupart des cas, de la présence, dans le *même monocristal*, de domaines voisins ayant des conductibilités différentes. Dans ce cas, entre un semiconducteur de type P et un semiconducteur de type N, se forme une zone de transition appelée une jonction P-N, dont le comportement particulier explique les propriétés de la plupart des éléments mettant en œuvre les semiconducteurs. Cette jonction P-N est une zone de faible épaisseur dans laquelle la conductibilité passe graduellement du type P au type N.

1. OBTENTION D'UNE JONCTION P-N

La nécessité de trouver les deux types de conductibilité dans le même monocristal exclut la possibilité d'obtenir une jonction en accolant simplement deux cristaux de conductibilité différente. En général, il faut introduire une impureté convenable en un point d'un cristal de conductibilité déterminée ; apparaît alors une conductibilité de type opposé à la précédente dans un volume limité du monocristal. Cela peut être réalisé par alliage ou par diffusion gazeuse. Par exemple, lorsqu'une bille d'indium est fondue sur une plaquette de germanium de type N, il se forme dans la zone de contact un alliage d'indium et de germanium qui constitue un semiconducteur de type P. Lors du refroidissement, il cristallise en continuité avec le réseau initial et ainsi, dans le même monocristal, nous trouvons bien du germanium de type N et du germanium de type P. Un résultat semblable est obtenu en plaçant la plaquette de germanium de type N dans une enceinte où circule un gaz à base d'indium ; à température élevée, les atomes d'indium diffusent dans le germanium N à une profondeur facilement réglable en modifiant la durée du traitement ou la température à laquelle on l'effectue. Ce dernier procédé est fréquemment employé à cause de sa grande souplesse qui permet une production très homogène (V. ci-après, § 5.4).

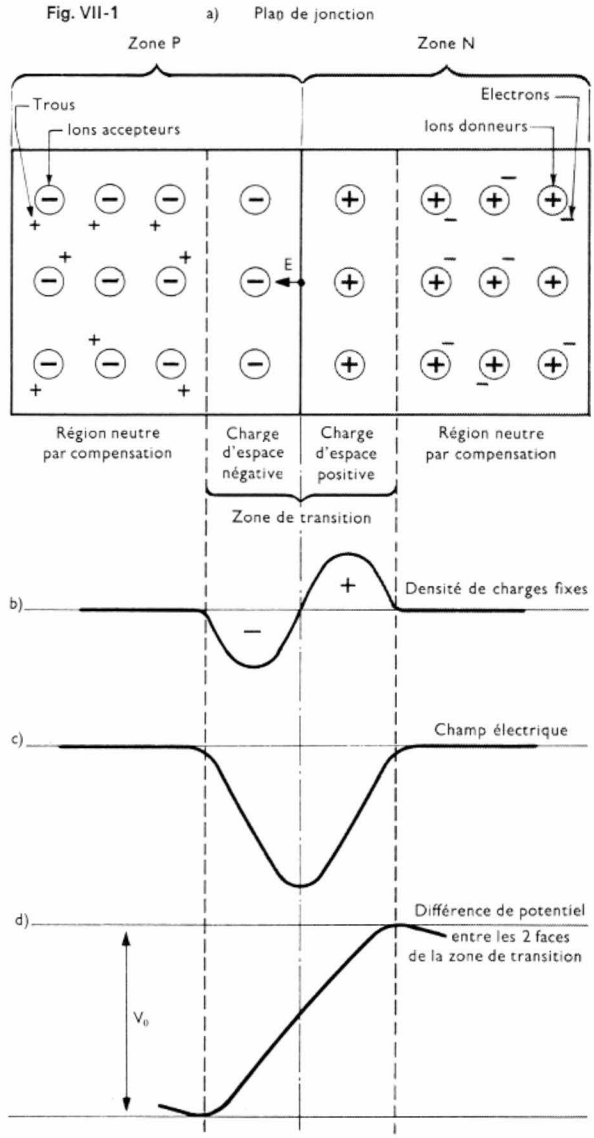
2. ÉTUDE DE LA JONCTION P-N

Lorsque les deux types de semiconducteurs sont formés dans le même monocristal, deux domaines, portant des charges électriques de signe contraire, se trouvent près l'un de l'autre (fig. VII-1).

Dans la région N, dès la température ordinaire, la plupart des atomes donneurs ont perdu un électron et sont devenus des ions positifs (fig. VII-1a) ; dans cette région se trouve donc un grand nombre d'électrons libres. On dit que dans un semiconducteur de type N les électrons sont des **porteurs majoritaires** et les trous des **porteurs minoritaires.** Dans la région P, parce que des atomes accepteurs ont capturé un électron et sont devenus des ions négatifs, les trous sont des porteurs majoritaires et les électrons des porteurs minoritaires.

Chacune de ces régions est cependant globalement neutre puisque, dans l'une comme dans l'autre, la charge des porteurs mobiles est compensée par celle des ions qui peuvent être considérés comme fixes. Mais cette apparente neutralité ne suffit pas pour que s'établisse un équilibre. Parce que les concentrations des porteurs mobiles ne sont pas les mêmes dans les deux régions du monocristal, il se produit une double diffusion : d'électrons de la région N vers la région P, de trous dans le sens contraire. Cette diffusion des porteurs majoritaires de chaque région entraîne des recombinaisons et la presque totale disparition des porteurs libres sur une certaine épaisseur. Ainsi, une charge d'espace négative se forme dans la région P (centres accepteurs ionisés), une charge d'espace positive apparaît dans la région N (centres donneurs ionisés) et une zone neutre les sépare. Cette double charge spatiale (fig. VII-1 b) qui constitue une jonction P-N, produit dans celle-ci un champ électrique interne (fig. VII-1 c) qui s'oppose à la diffusion des porteurs majoritaires de chaque région et limite l'élargissement de la zone de transition. À ce champ électrique qui joue le rôle d'une barrière pour les porteurs majoritaires, on fait correspondre une d.d.p., appelée *barrière de potentiel* de la jonction (fig. VII-1d) ; cette d.d.p. serait appliquée en deux points situés de part et d'autre de la jonction. Mais si ce champ

Fig. VII-1



électrique s'oppose au passage des porteurs majoritaires de chaque région, il facilite celui des porteurs minoritaires : les trous de N vont vers P et les électrons de P vers N. Un équilibre s'établit et à tout instant des courants dus aux porteurs majoritaires et ceux dus aux porteurs minoritaires s'annulent.

3. COURANT DANS UNE JONCTION POLARISÉE

3.1. Courant direct et courant inverse. — L'équilibre précédent est rompu lorsque la jonction, maintenue entre deux électrodes convenablement disposées, est insérée dans un circuit comprenant une source de courant continu. Si la zone P est portée à un potentiel positif par rapport à la zone N, l'action du champ électrique interne est contrariée par celle d'un champ de sens contraire et le passage des porteurs majoritaires s'effectue

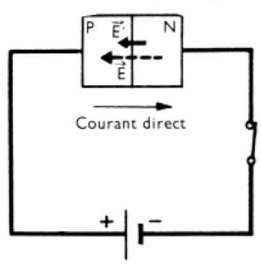


Fig. VII-2

Jonction sous tension directe ; $\vec{E}$ et $\vec{E}'$ représentent les champs internes respectivement avant et après fermeture du circuit

plus facilement à travers la jonction (fig. VII-2). La jonction est traversée par un courant qui circule de la zone P vers la zone N. Si la zone P est portée à un potentiel négatif par rapport à la zone N, le champ externe renforce l'action du champ interne et seuls quelques porteurs minoritaires, *engendrés par l'agitation thermique*, traversent la jonction (fig. VII-3). Un courant extrêmement

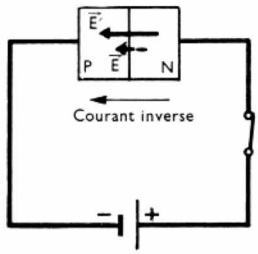


Fig. VII-3

Jonction sous tension inverse ; $\vec{E}$ et $\vec{E'}$ représentent les champs internes respectivement avant et après la fermeture du circuit

faible circule en traversant la jonction de la zone N vers la zone P : dans de larges limites il est indépendant de la d.d.p. appliquée entre les deux zones. Le premier est appelé *courant direct*, le second *courant inverse* et dans le premier cas la jonction est dite sous *tension directe*, tandis que dans le second elle est dite sous *tension inverse*.

3.2. Intensité du courant. — L'intensité I du courant dans la jonction est donnée par la relation :

$$I = I_s \ (\mathbf{e}^{qV/\eta kT} - 1)$$

où nous désignons :

— par I_s la valeur absolue de l'intensité du courant inverse,

— par **e** la base des logarithmes népériens ($\mathbf{e} = 2{,}718$),

— par q la charge d'un électron ($q = 0{,}16 \cdot 10^{-18}$ C),

— par V la d.d.p. appliquée entre les deux zones,

— par η un coefficient compris entre 1 et 2 permettant de tenir compte des recombinaisons dans la zone de transition ($\eta = 1$ pour le germanium, $\eta = 2$ pour le silicium aux faibles courants),

— par k la constante de Boltzmann ($k = 13{,}8 \cdot 10^{-24}$ J/K),

— par T la température absolue de la jonction.

Cette intensité est représentée en fonction de la tension V par une courbe (fig. VII-4) qui montre clairement

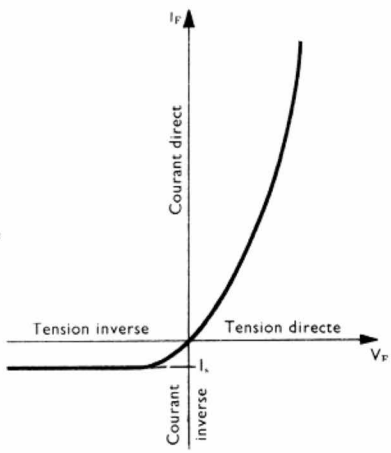


Fig. VII-4

Caractéristique d'une jonction

l'importante différence entre les valeurs des intensités des courants direct et inverse : pratiquement *la jonction n'est conductrice que dans un seul sens, de P vers N, en considérant le sens conventionnel du courant.*

Cette équation montre également que l'intensité du courant dépend de la température ; pour le silicium, l'intensité de courant inverse double pour une élévation de température de 6 °C.

4. CAPACITÉ D'UNE JONCTION

4.1. Jonction polarisée en inverse. — Lorsqu'une jonction est placée sous tension inverse, les porteurs mobiles quittent la zone de transition qui est ainsi rendue isolante. La jonction comporte alors deux zones portant des charges de signe contraire (négatives dans P, positives dans N) séparées par une zone isolante jouant le rôle d'un diélectrique. Si la tension inverse V_R varie d'une petite quantité dV_R, un nouvel équilibre s'établit. Selon que V_R augmente ou diminue en valeur absolue, la zone de transition s'élargit ou s'amincit : une quantité d'électricité dQ est enlevée ou est apportée dans cette zone. Si la variation de tension dV est suffisamment faible, cette quantité d'électricité dQ (qui traverse le circuit extérieur) est proportionnelle à dV :

$$dQ = C_t \, dV \Rightarrow C_t = \frac{dQ}{dV}$$

Le coefficient de proportionnalité C_t a les dimensions d'une capacité : il est appelé **capacité de transition** de la jonction. Cette capacité n'est pas constante comme celle d'un condensateur : elle dépend de la tension inverse V_R à partir de laquelle est effectuée la petite variation dV. La capacité C_t est liée à la tension V_R par la relation :

$$C_t = \frac{k}{V^n}$$

Dans cette relation k est une constante dépendant essentiellement de l'aire de la jonction. L'exposant n est fonction du mode d'obtention de la jonction ($n = \frac{1}{2}$ pour une jonction abrupte obtenue par alliage, $n = \frac{1}{3}$ pour une jonction graduelle obtenue par diffusion).

La capacité présentée par une jonction polarisée en inverse est utilisée dans certains montages : la jonction joue alors le rôle d'un condensateur variable. Les dispositifs mettant en œuvre cette propriété sont appelés *varactors, varicaps, varistors* ou plus simplement *diodes à capacité variable* (V. t. 2, Radioélectricité, chap. 4).

4.2. Jonction polarisée en direct. — En polarisation directe, une faible variation de la tension provoque une très profonde modification de la répartition des *porteurs minoritaires* accumulés de part et d'autre de la jonction. Si nous provoquons une petite variation dV_F de la tension directe V_F, il faut apporter ou enlever à la jonction une quantité d'électricité dQ très importante. Comme dans le cas précédent, nous pouvons écrire :

$$dQ = C_s \, dV_F$$

Le coefficient C_s, appelé **capacité de stockage,** est beaucoup plus grand que C_t. Cette capacité peut atteindre des valeurs supérieures à une dizaine de microfarads.

5. DIODE À JONCTION

La diode à jonction est constituée par une jonction P-N ; elle représente le dispositif le plus simple utilisant la propriété fondamentale de la jonction P-N : sa conductibilité presque unidirectionnelle. Le nom de diode qui lui a été donné rappelle que ses propriétés sont analogues à celles d'un tube électronique à deux électrodes (V. chap. 4).

Diode à jonction au silicium (350 A, 1000 V) (*Alsthom*)

5.1. Caractéristique d'une diode à jonction. — La caractéristique courant-tension d'une diode est analogue à celle d'une jonction P-N. Pour les tensions directes

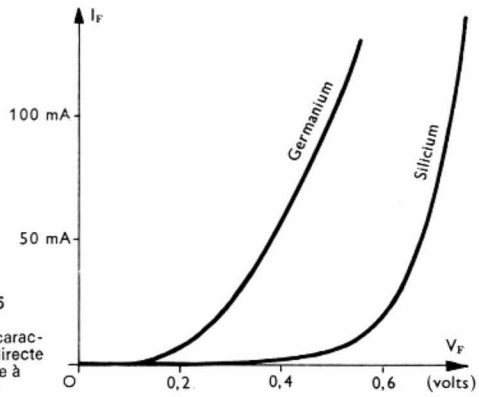


Fig. VII-5

Allure de la caractéristique directe d'une diode à jonction

(fig. VII-5), nous pouvons observer son allure exponentielle ($I_F \approx I_s \, e^{qV_F/\eta kT}$). Il faut noter qu'au-dessous d'un seuil, le courant a une intensité sensiblement nulle. La tension correspondant à ce seuil est égale à 0,2 V pour le germanium ($\eta = 1$) et à 0,6 V pour le silicium ($\eta = 2$).

Lorsque la diode est sous tension inverse, le courant a une intensité très faible, négligeable dans la plupart des applications. Théoriquement, cette intensité est sensiblement constante et égale à $-I_s$ [$I = I_s$ ($e^{qV/\eta kT} - 1$) mais, même pour des tensions inverses assez faibles, l'exponentielle est négligeable devant 1 et $I = -I_s$]. Pratiquement, il n'en est pas toujours ainsi (fig. VII-6) car

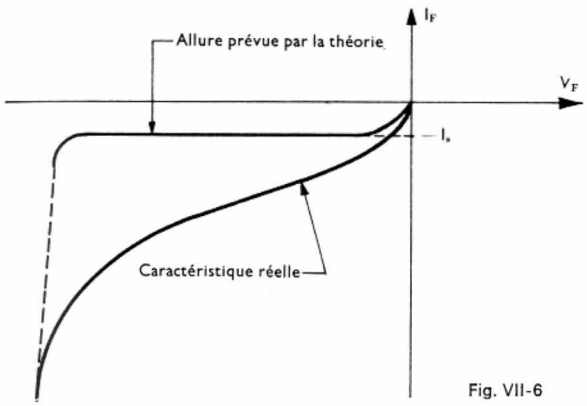


Fig. VII-6

quelles que soient les précautions prises par les constructeurs, il est impossible d'annuler les courants qui circulent à la surface des cristaux. Bien que des progrès considérables aient été réalisés dans ce domaine, de larges écarts peuvent encore être observés surtout si la tension appliquée est grande (les courants de fuite suivent sensiblement la loi d'Ohm). Au-delà d'une tension déterminée, le courant croît très rapidement : c'est *l'avalanche* (V. ci-après § 7).

En conclusion, il faut retenir que les limites d'utilisation de la diode sont définies par :

— l'intensité maximale du courant direct (qui dépend de la puissance que peut dissiper la diode),

— la tension inverse maximale.

5.2. Influence de la température. — En direct, la tension aux bornes de la diode décroît lorsque la température de celle-ci augmente. Au voisinage de 300 K et pour

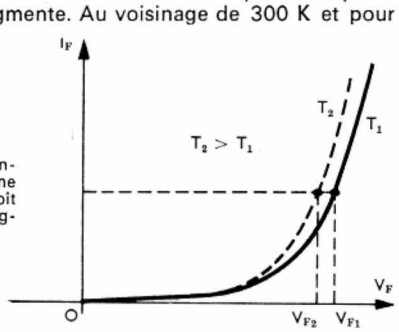


Fig. VII-7

À courant constant la tension aux bornes d'une diode à jonction décroît quand la température augmente

la tension de seuil, la décroissance est égale à 2,1 mV/K pour le germanium et à 2,3 mV/K pour le silicium (fig. VII-7).

En inverse, c'est l'intensité du courant qui augmente très rapidement lorsque la température croît. Aux températures usuelles cette intensité double tous les 10 °C pour le germanium et tous les 6 °C pour le silicium (fig. VII-8).

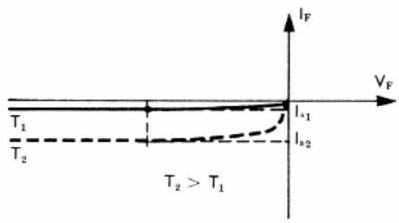


Fig. VII-8

À tension inverse constante, le courant inverse croît avec la température

5.3. Linéarisation de la caractéristique d'une diode. — Les méthodes de calcul facilement accessibles sont celles qui s'appliquent à des dispositifs ayant des caractéristiques linéaires. Pour cette raison, la caractéristique d'une diode sous tension directe est souvent remplacée par un ensemble de deux segments de droite (fig. VII-9). L'un, *OA*, est confondu avec l'axe des abscisses,

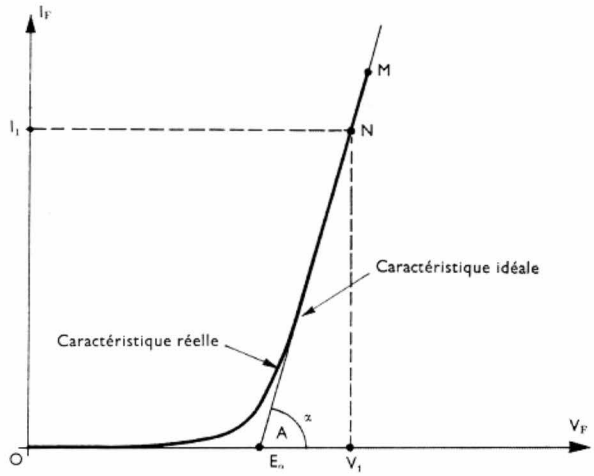


Fig. VII-9 — Linéarisation de la caractéristique directe d'une diode à jonction

l'autre, *AM*, relie le point de fonctionnement *M* correspondant au plus grand courant prévu dans le montage et le point *A* qui correspond au début de la conduction. Ce point est pratiquement sur l'axe OV_F et son abscisse représente une tension E_0 qui est sensiblement égale à 0,6 V pour le silicium et à 0,2 V pour le germanium, pour une température voisine de 20 °C. Cette caractéristique idéale est également celle d'un dipôle formé d'une résistance *r* convenable associée en série avec un récepteur de f.c.é.m. E_0 (fig. VII-10). Cet ensemble est appelé *schéma équivalent de la diode* sous tension directe.

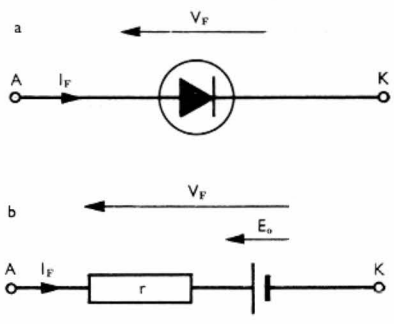


Fig. VII-10

Diode à jonction sous tension directe

La valeur de la résistance *r* s'obtient en écrivant que, pour une tension V_F, le courant dans la diode et dans le

circuit équivalent est I. Or, en appliquant la loi d'Ohm à ce circuit, nous déduisons les relations suivantes :

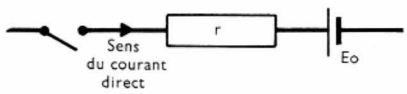
$$V_F = E_0 + rI_F \Rightarrow I_F = \frac{V_F - E_0}{r}$$

C'est l'équation de la droite qui porte le segment AM. Nous constatons que son coefficient directeur est $\frac{1}{r}$; de la mesure de ce coefficient directeur, nous déduisons la valeur de r. Nous pouvons ainsi la déterminer si nous connaissons les coordonnées d'un point de fonctionnement N ; par exemple, si pour $V_F = V_1$ nous obtenons un courant $I_F = I_1$, nous tirons :

$$r = \frac{V_1 - E_0}{I_1}$$

En inverse, tant que la tension d'avalanche n'est pas atteinte (cas général), l'intensité du courant qui traverse la diode est faible et elle peut être négligée.

Fig. VII-11



Le schéma équivalent de la diode peut alors être complété par un interrupteur ; il est fermé lorsque la diode est sous tension directe, et il est ouvert si elle est sous tension inverse (fig. VII-11).

5.4. Fabrication des diodes à jonction. — Les diodes à jonction sont surtout obtenues par diffusion gazeuse.

Dans la *technique mesa*, on produit une zone P sur une plaquette de semiconducteur de type N (fig. VII-12).

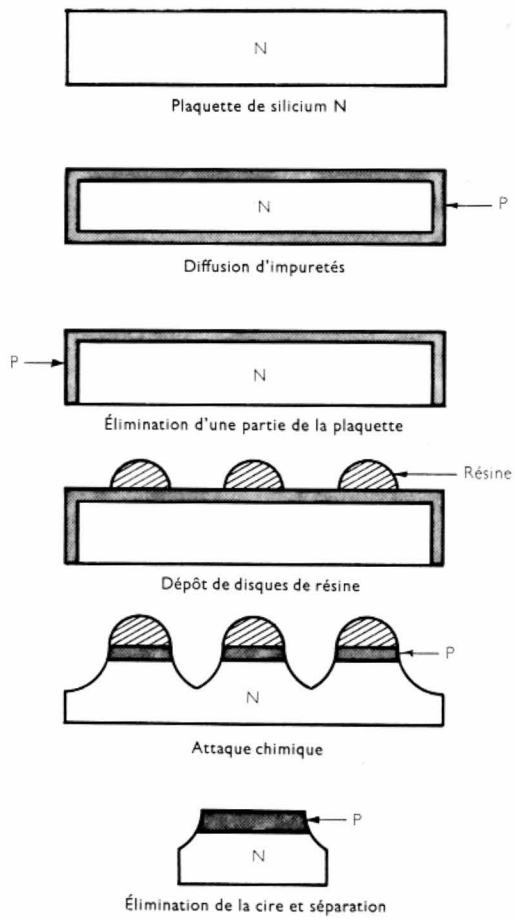


Fig. VII-12 — Technique mesa

À partir de cette plaquette, on peut réaliser plusieurs centaines de diodes. Pour les séparer, on dépose des disques de résine régulièrement espacés par vaporisation à travers un masque et on attaque les parties non protégées par un acide. La plaquette semble alors reproduire le relief d'une contrée du Mexique, particularité qui est à l'origine du nom donné à cette technique (mesa : table en espagnol). On termine le découpage en cassant la plaquette après avoir passé un saphir dans les rigoles produites par l'acide.

Dans la *technique plane* ou *planar*, la diffusion gazeuse est précédée d'un certain nombre d'opérations qui permettent de délimiter les zones de la plaquette où la pénétration des impuretés doit se produire. Dans ce but, par oxydation thermique à haute température, on recouvre la plaque d'une couche isolante d'oxyde de silicium ($Si\,O_2$ ou silice) et on l'ajoure chimiquement ensuite (fig. VII-13).

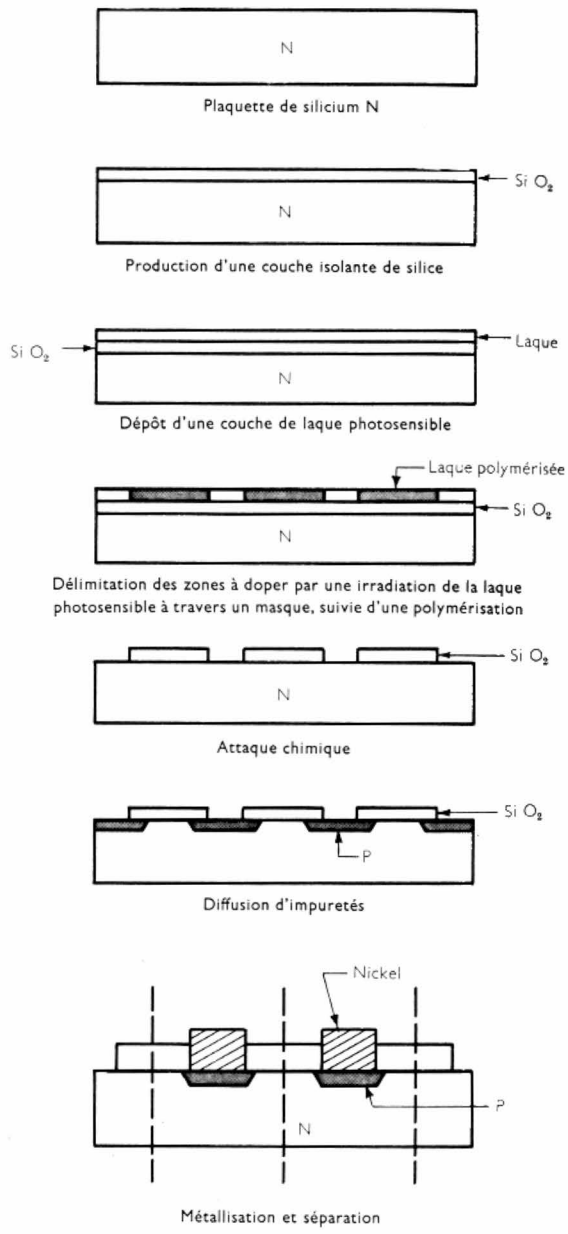


Fig. VII-13 — Technique plane

Dans les deux cas, chaque élément P-N est placé dans un boîtier et on réunit les deux zones de la jonction à deux bornes qui seront celles de la diode. Pour obtenir d'excellents contacts, on dépose généralement une couche de métal, de l'aluminium par exemple, sur la petite surface du semiconducteur où l'on soude un fil conducteur, souvent en or. Dans certains cas, la surface métallisée est directement fixée sur un support métallique, par exemple en

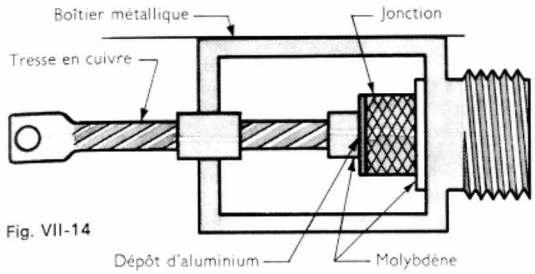


Fig. VII-14

molybdène, qui assure une dissipation rapide de la chaleur produite par effet Joule dans la jonction (fig. VII-14).

5.5. Applications. — Les diodes à jonction sont particulièrement bien adaptées au redressement de courants alternatifs (V. chap. 18).

6. DIODE À POINTE

6.1. Description. Fonctionnement. — Une diode à pointe comprend en général un monocristal de type N sur lequel appuie une pointe métallique en tungstène, en or ou en platine. L'ensemble se trouve dans une enveloppe étanche, le plus souvent en verre (fig. VII-15). Lorsque les

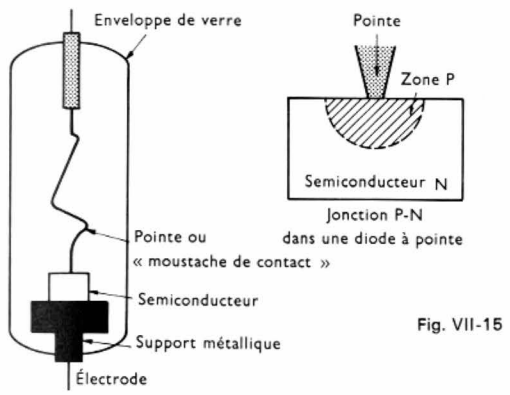


Fig. VII-15

éléments sont convenablement disposés, la diode est formée par le passage d'un courant bref mais intense. Sous la pointe, des impuretés diffusent; il se forme une zone de conductibilité opposée à celle du reste du monocristal et une jonction prend naissance dans le voisinage de la pointe.

La diode à pointe est une diode à jonction particulière; elle fonctionne suivant le même principe que celle-ci mais les faibles dimensions de sa jonction font que l'intensité maximale du courant direct est faible. Par ailleurs, la capacité de la jonction est très réduite et la diode peut être employée dans des montages traversés par des courants de fréquence élevée.

6.2. Applications. — Les diodes à pointe ont des utilisations différentes des diodes à jonction. Elles conviennent particulièrement bien pour le redressement de courants de très haute fréquence mais peu intenses, comme ceux rencontrés dans certains dispositifs en radioélectricité (détecteur, discriminateur; V. t. 2, Radioélectricité, chap. 5).

7. DIODE ZENER. DIODE À AVALANCHE CONTRÔLÉE

7.1. « Claquage » d'une jonction. — Une diode à jonction ne peut supporter une tension inverse trop importante. Lorsque celle-ci atteint une certaine valeur, l'intensité du courant inverse augmente brusquement: c'est le *claquage* de la jonction. Deux causes assez différentes sont à l'origine de cette augmentation brutale: la nature et le dopage des zones P et N formant la jonction.

Dans *une diode fortement dopée*, la zone de transition est très étroite et le champ électrique qui y règne est extrêmement grand même si la tension inverse appliquée aux bornes de la diode est faible. À partir d'une certaine valeur de la tension, ce champ est tellement important que des électrons de la bande de valence des atomes peuvent être arrachés et précipités à travers la zone de transition. Il en résulte un afflux considérable de porteurs et le courant augmente de façon extrêmement brutale: c'est l'**effet Zener.** Les tensions inverses permettant d'obtenir cet effet Zener sont comprises entre 0 et — 4 V.

Dans *une diode faiblement dopée*, la zone de transition est très large et le champ électrique n'atteint pas une valeur suffisante pour déclencher l'effet Zener. En revanche, un porteur minoritaire engendré dans la zone de transition par ionisation thermique peut être suffisamment accéléré pour expulser un électron d'un atome lors d'une collision. À son tour, cet électron peut être accéléré et il peut engendrer de nouveaux porteurs. C'est le phénomène d'avalanche. Il intervient pour des tensions inférieures à — 6 V environ. Entre — 4 V et — 6 V les deux effets peuvent se produire simultanément. L'effet d'avalanche produit sensiblement le même résultat que l'effet Zener. C'est pour cette raison que les électroniciens appellent diodes Zener toutes les diodes construites pour être utilisées dans la zone de claquage, que le mécanisme de fonctionnement soit l'avalanche ou l'effet Zener proprement dit.

7.2. Caractéristique d'une diode Zener. Applications. — Sous tension directe, la caractéristique de la diode Zener est analogue à celle de la diode à jonction considérée précédemment (V. ci-dessus § 5). Sous tension inverse, le courant dans la diode est négligeable tant que la tension de claquage ou tension de Zener V_Z n'est pas atteinte; ensuite la tension reste sensiblement constante et égale à V_Z et l'intensité du courant croît très rapidement (fig. VII-16).

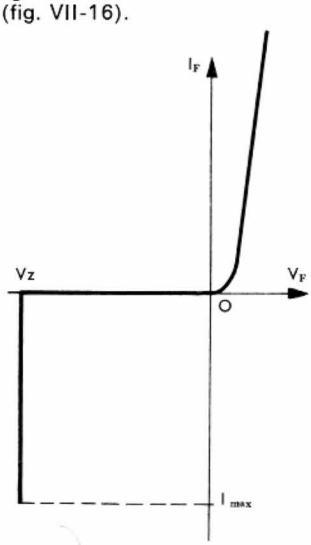


Fig. VII-16

Caractéristique d'une diode Zener

Lorsque la diode est sous la tension de Zener V_Z, il faut limiter l'intensité du courant à une valeur compatible avec l'élévation de température admissible au niveau de la jonction, en agissant sur les éléments qui composent le circuit, la résistance de ce dernier par exemple (en effet, ces éléments supportent toute l'augmentation de tension au-delà de V_Z). C'est pour cette raison qu'une diode Zener est caractérisée par sa tension de Zener et par l'intensité maximale du courant qui peut la traverser.

La constance de la tension de Zener est utilisée pour obtenir des tensions de référence dans des montages stabilisateurs de tension (V. chap. 18).

7.3. Diode à avalanche contrôlée. — Les diodes à avalanche contrôlée sont utilisées comme des diodes à jonction pour le redressement de courants alternatifs. Elles sont insérées dans des montages où la tension de fonctionnement la plus grande qu'elles aient à supporter est inférieure à leur tension de claquage. Si, par suite d'une anomalie, cette tension est atteinte, la diode ne sera pas détruite comme cela peut se produire avec les autres diodes. Ainsi, la diode est protégée contre les surtensions.

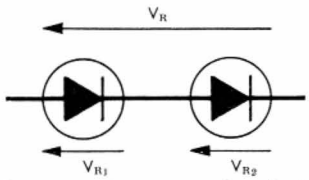


Fig. VII-17

Pour bien comprendre la protection apportée ainsi, imaginons un montage de deux diodes en série (fig. VII-17) pouvant supporter des tensions inverses maximales de 1 000 V. En fonctionnement normal, la tension inverse maximale aux bornes de l'ensemble est $V_R = 1\,200$ V par exemple ; si les diodes sont identiques, la tension aux bornes de chaque diode est $V_{R_1} = V_{R_2} = 600$ V. Si, au cours d'une surtension, la d.d.p. totale atteint 2 000 V, chaque diode supporte une tension inverse de 1 000 V. Lorsque les diodes sont légèrement différentes (deux diodes de même type ne peuvent être absolument identiques), les tensions ne se répartissent pas uniformément et la d.d.p. aux bornes de l'une des diodes dépasse 1 000 V. Il en résulte la destruction de la diode sauf s'il s'agit d'une diode à avalanche contrôlée dont le seuil est 1 000 V. L'emploi des diodes à avalanche contrôlée assure donc une répartition uniforme des tensions inverses aux bornes des diodes du montage et évite des destructions intempestives.

8. AUTRES DIODES À JONCTION

8.1. Diode-tunnel. — L'*effet tunnel* ou *effet Esaki* a été découvert en 1953 par le physicien japonais Esaki. Une diode à jonction, réalisée à partir d'un semiconducteur contenant un plus grand nombre d'atomes d'impuretés que les semiconducteurs employés pour les diodes ordinaires (10^{20} atomes d'impuretés par centimètre cube contre 10^{15} ou 10^{13}), possède une caractéristique particulière. Tout d'abord le courant inverse croît très rapidement même si la tension inverse est faible (fig. VII-18) ; par ailleurs, *dans le sens direct*, lorsque la tension augmente :

— dans un premier temps le courant direct augmente jusqu'à une valeur appelée *courant de « pic »* ;

— dans un deuxième temps il diminue jusqu'à un minimum relatif dit *courant de « vallée »* ;

— dans un troisième temps il croît à nouveau et alors seulement on retrouve une caractéristique analogue à celle d'une diode à jonction ordinaire.

Dans le premier et le deuxième temps les porteurs traversent la jonction bien que la tension appliquée soit faible, c'est-à-dire bien que le champ électrique dû à la source n'atténue que faiblement l'action du champ interne. Ce phénomène a reçu le nom d'effet tunnel ; la mécanique ondulatoire permet de le prévoir tandis que les lois de la mécanique classique conduisent à le considérer comme impossible. Il devient suffisamment important et utilisable lorsque, dans les deux zones du monocristal, la concentration en impuretés est grande et que la diode comporte une jonction extrêmement mince.

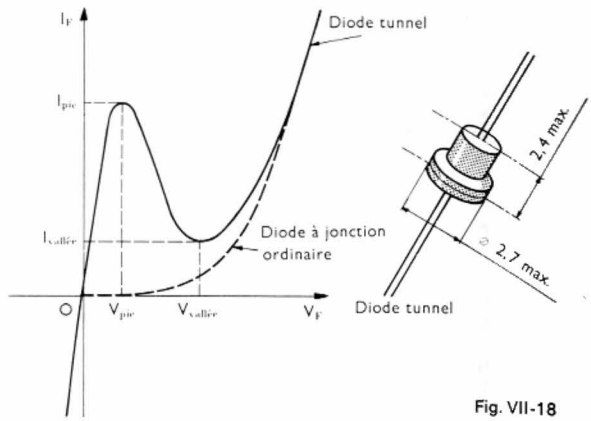


Fig. VII-18

Cet effet tunnel a une amplitude maximale lorsque la tension directe est égale à la tension de « pic » ; il devient ensuite moins important lorsque la tension directe augmente. Entre « pic » et « vallée » la diode se comporte comme une *résistance négative* $\left(R_d = \frac{dV_F}{dI_F} < 0\right)$. Elle est employée pour cette raison dans des oscillateurs car, ainsi, l'amortissement produit par les résistances des éléments composant le circuit (résistances positives) peut être atténué.

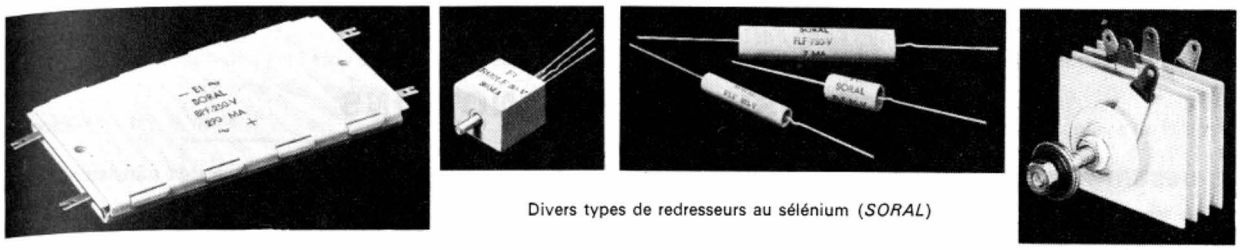
8.2. Diode électroluminescente. — Les diodes électroluminescentes émettent un rayonnement lumineux lorsqu'elles sont traversées par un *courant dans le sens direct*. Dans ces diodes, le passage d'électrons de la bande de valence à la bande de conduction nécessite l'apport d'une certaine énergie et le changement d'état inverse s'accompagne évidemment de la restitution de la même énergie. Celle-ci apparaît sous la forme de chaleur dans le germanium et le silicium, et sous la forme d'un *rayonnement lumineux dans l'arséniure de gallium*. Dans ce cas, les différences d'énergies entre les niveaux de départ et les niveaux d'arrivée des électrons correspondent en effet aux énergies de photons d'un rayonnement infrarouge.

Pour obtenir le maximum de lumière, la jonction est réalisée en surface, par exemple en diffusant du zinc sur une épaisseur de 5 μm dans une plaquette d'arseniure de gallium de type N. L'intérêt de ces diodes réside essentiellement dans le fait qu'elles offrent la possibilité de moduler l'intensité du rayonnement en agissant sur l'intensité du courant dans la diode, ce qui peut se faire très facilement.

8.3. Diode laser. — Comme un laser, cette diode émet un rayonnement électromagnétique cohérent lorsqu'un

Tableau comparatif des redresseurs métal-semiconducteur et des diodes à jonction

	Densité de courant admissible		Tension inverse maximale	Température de fonctionnement maximale	Rendement	Encombrement à puissance égale, comparé à celui d'une diode à jonction en silicium
	Refroidissement					
	naturel	forcé				
Redresseur cuivre-oxyde de cuivre	0,04 A/cm²	0,14 A/cm²	6 V	50 °C	78 %	30
Redresseur au sélénium	0,07 A/cm²	0,2 A/cm²	25 V	85 °C	92 %	15
Diode à jonction en germanium	40 A/cm²	100 A/cm²	110 V	70 °C	98 %	3
Diode à jonction en silicium	90 A/cm²	200 A/cm²	1 000 V	140 °C	99 %	1



Divers types de redresseurs au sélénium (*SORAL*)

courant la traverse dans le sens direct. Avec des diodes à l'arséniure de gallium convenablement préparées, le rayonnement lumineux peut être confiné dans une zone réduite, précisément dans la bande très étroite de la jonction (quelques dizaines de micromètres) où aucune charge ne subsiste. Cette zone, limitée par des faces réfléchissantes, forme une cavité électromagnétique qui peut fournir un rayonnement analogue à celui d'un laser. Ces diodes fonctionnent en régime d'impulsions à la température ambiante, ou en régime continu à la température de l'azote liquide (77 K). On obtient des puissances lumineuses de plusieurs dizaines de watts, qui peuvent être utilisées pour des transmissions ou dans des systèmes de détection électromagnétique tels que le radar.

9. REDRESSEUR MÉTAL-SEMICONDUCTEUR

Dans certaines conditions, en associant un métal et un semiconducteur, il est possible de former un ensemble équivalent à une diode à jonction. En déposant une couche d'un semiconducteur sur une plaque métallique, il se produit une diffusion d'électrons d'un des corps vers l'autre dans le voisinage de la surface de séparation. Évidemment, le corps qui cède des électrons est celui pour lequel le travail de sortie est le plus faible.

Ainsi, un semiconducteur de type N, caractérisé par une énergie de sortie inférieure à celle du métal sur lequel il se trouve, fournit des électrons à ce dernier. Une charge négative apparaît dans le métal et une charge positive dans le semiconducteur; elles donnent naissance à un champ interne auquel nous pouvons faire correspondre une *barrière de potentiel*. Ce groupement se comporte donc comme une diode dont le sens passant est le sens métal-semiconducteur. Avec un semiconducteur de type P caractérisé par une énergie de sortie supérieure à celle du métal, des électrons diffusent du métal vers le semiconducteur engendrant une charge d'espace positive dans le métal et négative dans le semiconducteur; elle joue le même rôle que celle d'une diode à jonction. Ce groupement se comporte donc également comme une diode dont le sens passant va du semiconducteur vers le métal.

Les redresseurs au sélénium et ceux à l'oxyde de cuivre appartiennent à cette catégorie (fig. VII-19). Ils se composent d'une électrode métallique sur laquelle est déposé le semiconducteur, et d'une contre-électrode qui protège mécaniquement ce semiconducteur, assure une répartition uniforme du courant dans le contact redresseur et facilite l'évacuation de la chaleur produite par le passage du courant. La caractéristique de ces redresseurs a la même allure que celle d'une diode à jonction. Ils sont employés pour le redressement de courants alternatifs de fréquence industrielle dans la mesure où leur encombrement, supérieur à celui des diodes à jonction au silicium, ne constitue pas un handicap.

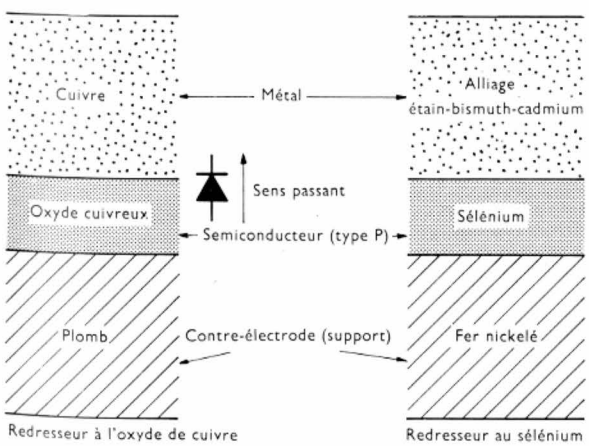


Fig. VII-19 — Redresseur métal-semiconducteur

DISPOSITIFS À SEMICONDUCTEURS

Code de désignation

Un dispositif à semiconducteurs est désigné par un groupement de deux lettres suivies de trois chiffres ou de trois lettres et de deux chiffres (composants pour équipements professionnels). Les deux premières lettres suffisent pour déterminer la nature du matériau employé et la fonction du composant électronique considéré, comme le code donné ci-dessous le montre; les autres indications n'ont qu'une signification de classement.

Première lettre	Seconde lettre
Dispositifs à jonction	A : Diode
A : Dispositifs à une ou plusieurs jonctions, réalisés avec un matériau dont la bande interdite correspond à un niveau d'énergie compris entre 0,6 et 1 eV. Ex. : le *germanium*.	B : Diode à variation de capacité
B : Dispositifs à une ou plusieurs jonctions, réalisés avec un matériau dont la bande interdite correspond à un niveau d'énergie allant de 1 à 1,3 eV. Ex. : le *silicium*.	C : Transistor pour audiofréquences
C : Dispositifs à une ou plusieurs jonctions, réalisés avec un matériau dont la bande interdite correspond à un niveau d'énergie supérieur à 1,3 eV. Ex. : l'*arséniure de gallium*.	D : Transistor de puissance
D : Dispositifs à une ou plusieurs jonctions, réalisés avec un matériau dont la bande interdite correspond à un niveau d'énergie inférieur à 0,6 eV. Ex. : l'*antimoniure d'indium*.	E : Diode tunnel
Dispositifs sans jonction	F : Transistor pour radiofréquences
R : Dispositifs sans jonction, réalisés avec des matériaux tels que ceux que l'on emploie dans les générateurs à effet Hall ou les cellules photoconductrices.	L : Transistor de puissance pour radiofréquences
	S : Transistor destiné aux applications de commutation.
	T : Dispositif à déclenchement par signal électrique ou lumineux.
	U : Transistor de puissance destiné aux applications de commutation.
	Y : Diode de redressement
	Z : Diode régulatrice de tension

Exemple : BCY 10 : Transistor au silicium.

CHAPITRE VIII

TRANSISTOR À JONCTIONS

1. DESCRIPTION

Un transistor est un élément semiconducteur comportant deux zones de conductibilité déterminée, séparées par une zone de conductibilité contraire. On distingue les transistors NPN (deux zones N séparées par une zone P) et PNP (deux zones P séparées par une zone N). Un transistor peut être considéré comme l'association de deux diodes réunies par leur cathode. Il est obtenu, non pas en accolant deux diodes, mais en réalisant *deux jonctions dans le même monocristal*. L'épaisseur de la région intermédiaire ne doit pas dépasser quelques dizaines de micromètres. Les trois zones délimitées dans le semiconducteur portent les noms d'*émetteur*, de *base* et de *collecteur* (fig. VIII-1).

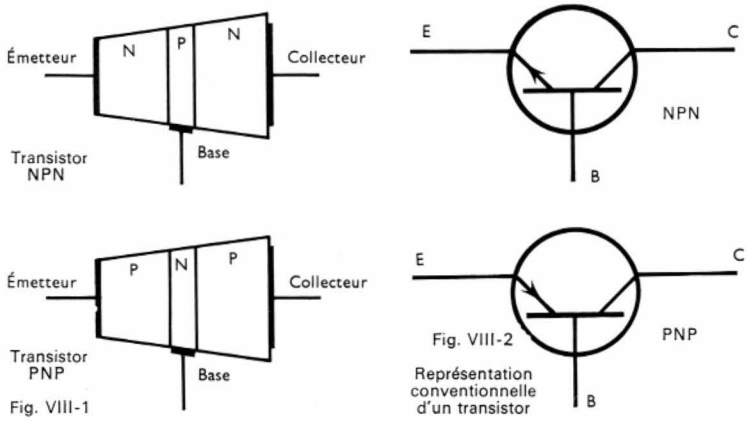


Fig. VIII-1

Fig. VIII-2 Représentation conventionnelle d'un transistor

Dans la représentation conventionnelle (fig. VIII-2), l'émetteur est repéré par une flèche ; cette flèche est dirigée vers l'extérieur du transistor pour un transistor NPN et vers la base pour un transistor PNP.

2. ÉTUDE THÉORIQUE D'UN TRANSISTOR

2.1. Polarisation des jonctions. — Dans un montage utilisé pour amplifier des signaux variables (courant ou tension), la jonction émetteur-base J_E est polarisée dans le sens direct (fig. VIII-3) : la base est portée à un potentiel

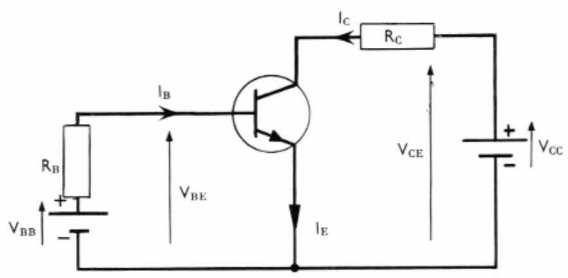


Fig. VIII-3

positif par rapport à l'émetteur pour un transistor NPN (négatif pour un transistor PNP). Au contraire, la jonction collecteur-base J_C est polarisée dans le sens inverse : le collecteur est porté à un potentiel positif par rapport à la base pour un transistor NPN (négatif par rapport à la base pour un transistor PNP) ; c'est donc le courant inverse de cette jonction qui passe dans le circuit collecteur.

Si les jonctions J_E et J_C étaient indépendantes, le courant de collecteur I_C serait faible. Il n'en est pas ainsi car la base étant extrêmement mince, il y a interaction entre les courants traversant les deux jonctions comme nous allons le voir à présent. Afin de simplifier l'exposé, dans la suite de ce chapitre nous ne considérerons que des transistors NPN ; ce sont les plus utilisés actuellement.

2.2. Courants dans un transistor. — *L'émetteur étant beaucoup plus dopé que la base*, le courant dans la jonction J_E, placée sous tension directe, est constitué d'un flot très important d'électrons circulant de l'émetteur vers la base ; cela correspond à un courant I_{En} (fig. VIII-4) dans le sens base-émetteur (sens conventionnel). En revanche, les

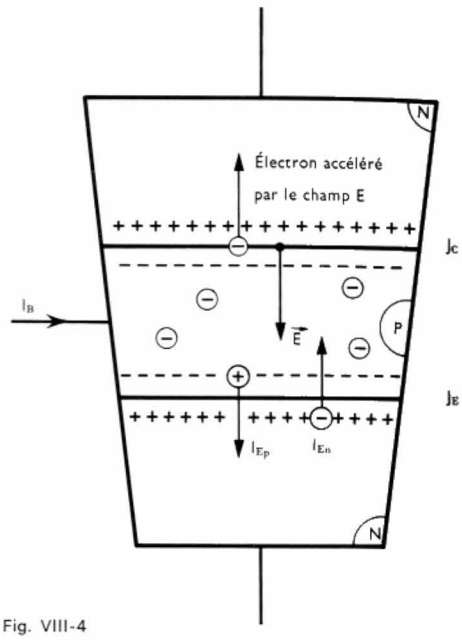


Fig. VIII-4

trous traversant J_E de la base vers l'émetteur donnent naissance à un courant I_{Ep} beaucoup moins grand que I_{En}. L'importance relative de ces courants est définie au moyen du **facteur d'injection** :

$$\gamma = \frac{I_{En}}{I_{Ep} + I_{En}}$$

Ce rapport est plus petit que l'unité mais il est d'autant plus voisin de 1 que le rapport des taux de dopage de l'émetteur et de la base est grand. Dans la base, il y a donc en permanence un très grand nombre d'électrons libres venant de l'émetteur et qui sont des porteurs minoritaires dans cette zone (la base est un semiconducteur P). Ils sont donc accélérés par le champ électrique au niveau de la jonction J_C et un grand nombre d'entre eux passe dans la zone de collecteur. La probabilité pour qu'un électron se recombine avec un trou dans la zone P est grande mais, la base étant très mince, le taux de recombinaisons reste faible : le courant d'électrons qui traverse J_C n'est guère plus petit que I_{En}. Le coefficient constant B par lequel on doit multiplier I_{En} pour trouver le courant traversant J_C est appelé *facteur de transport de la base* ; B est plus petit que l'unité mais il est d'autant plus voisin de 1 que la base est mince.

Nous pouvons donc établir le bilan des divers courants qui circulent dans le transistor.

— Le **courant d'émetteur** a une intensité égale à :

$$I_E = I_{En} + I_{Ep}$$

— Le **courant de collecteur** est égal au courant $B \,.\, I_{En}$ augmenté du courant inverse I_{CBO} dû à l'ionisation thermique dans la zone de transition de la jonction J_C. Nous pouvons donc écrire :

$$I_C = B \,.\, I_{En} + I_{CBO}$$

En tenant compte du facteur d'injection défini précédemment, nous voyons que $\gamma I_E = I_{En}$ et par conséquent I_C s'exprime en fonction de I_E à l'aide de la relation suivante :

$$I_C = B\gamma I_E + I_{CBO}$$

Posons $\alpha = B\gamma$, il vient :

$$\boxed{I_C = \alpha I_E + I_{CBO}}$$

(α est un nombre légèrement inférieur à 1 ; il est souvent compris entre 0,95 et 0,995).

Cette relation montre bien que le courant dans la jonction J_C peut être commandé par celui qui traverse la jonction J_E. — Le **courant de base** I_B se déduit des deux précédents. En régime établi, il ne peut y avoir accumulation de charges dans le transistor et le courant I_E qui sort par l'émetteur est égal à la somme des courants I_C et I_B qui entrent dans le transistor (fig. VIII-3) :

$$I_E = I_C + I_B$$

L'intensité du courant base est donc égale à :

$$I_B = I_E - I_C$$

et, en remplaçant I_C par la valeur obtenue précédemment, nous voyons que :

$$I_B = I_E - (\alpha I_E + I_{CBO})$$
$$I_B = (1 - \alpha)\, I_E - I_{CBO}$$

2.3. Effet transistor. — Pour mettre en évidence l'intérêt du transistor, nous allons établir une relation entre le courant de collecteur et le courant base. Nous connaissons les intensités de ces courants en fonction du courant d'émetteur :

$$I_C = \alpha I_E + I_{CBO}$$
$$I_B = (1 - \alpha)\, I_E - I_{CBO}$$

Eliminons I_E entre ces deux relations : nous utilisons la deuxième égalité pour obtenir une valeur de I_E que nous portons ensuite dans la première relation :

$$I_E = \frac{I_B + I_{CBO}}{1 - \alpha}$$

et :
$$I_C = \frac{\alpha}{1 - \alpha} I_B + \frac{1}{1 - \alpha} I_{CBO}$$

Posons : $\beta = \dfrac{\alpha}{1 - \alpha}$ $\left(\text{soit : } \alpha = \dfrac{\beta}{\beta + 1} \text{ et : } \dfrac{1}{1 - \alpha} = \beta + 1\right)$

il vient :
$$\boxed{I_C = \beta\, I_B + (1 + \beta)\, I_{CBO}}$$

β est très grand puisque α est très voisin de 1 (si $\alpha = 0{,}95$, $\beta = 19$ et si $\alpha = 0{,}995$, $\beta = 199$). Donc, avec un courant I_B très faible, nous pouvons commander un courant de collecteur beaucoup plus grand : c'est l'**effet transistor.** Il faut bien noter que ce courant de collecteur n'est pas fourni par le transistor mais par le générateur placé dans le circuit émetteur-collecteur ; le courant de base commande donc le débit de ce générateur de la même manière qu'une vanne peut régler le débit d'une canalisation à la sortie d'un réservoir.

2.4. Courants de fuite. — Dans le montage de la figure VIII-5, l'émetteur n'est pas relié au circuit électrique : il est dit *ouvert*. Le courant de collecteur est encore donné par la relation précédente :

$$I_C = \alpha I_E + I_{CBO}$$

Comme $I_E = 0$ il vient : $I_C = I_{CBO}$

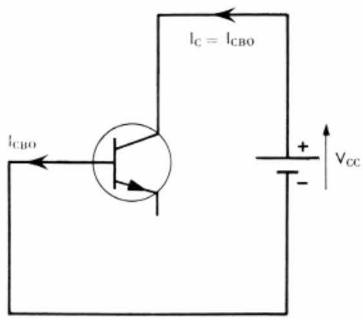


Fig. VIII-5

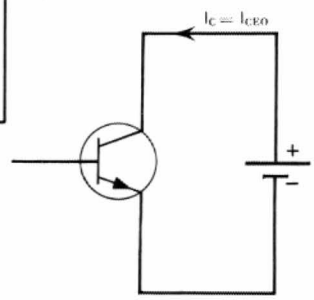


Fig. VIII-6

I_{CBO} est le courant de fuite de la jonction J_C ; il est appelé courant collecteur-base à émetteur ouvert.

Dans le montage de la figure VIII-6 *la base est ouverte.* Le courant de collecteur (courant de fuite) est celui qui correspond à un courant de base nul :

$$I_C = \beta I_B + (1 + \beta)\, I_{CBO}$$

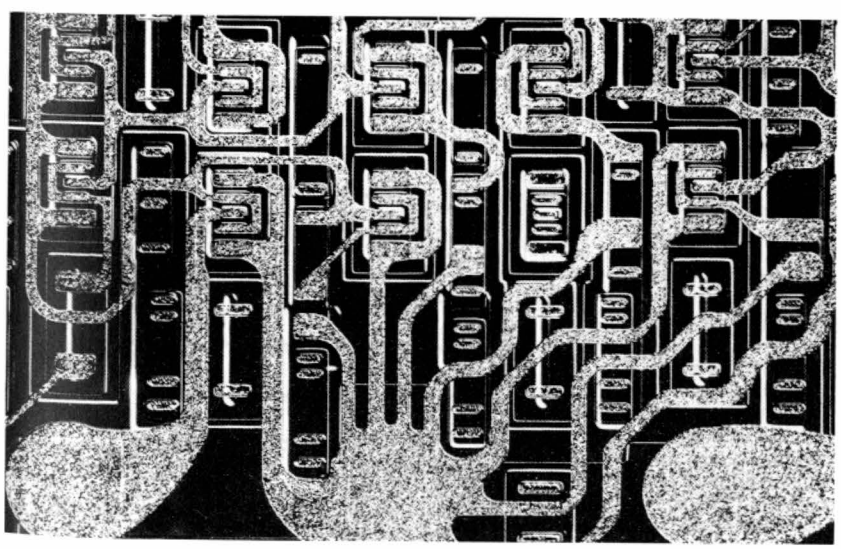
Si $I_B = 0$, nous déduisons la valeur I_{CEO} de ce courant de collecteur :

$$I_C = I_{CEO} = (1 + \beta)\, I_{CBO}$$

I_{CEO} est appelé courant collecteur-émetteur à base ouverte ; il traverse les jonctions J_C et J_E. À cause de l'effet transistor, l'intensité de ce courant est bien supérieure à celle du courant I_{CBO}.

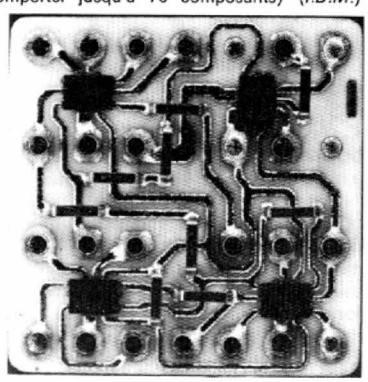
3. CARACTÉRISTIQUES STATIQUES D'UN TRANSISTOR

Un transistor peut être inséré de différentes façons dans un montage mais nous pouvons toujours distinguer deux



Détail d'une microplaquette vue au microscope (dimensions d'une microplaquette : 1,1 × 1,6 × 0,2 mm). C'est l'utilisation des semiconducteurs qui a permis une telle miniaturisation (*I.B.M.*)

Micromodule à circuits intégrés comportant quatre microplaquettes (chacune d'elles peut comporter jusqu'à 70 composants) (*I.B.M.*)



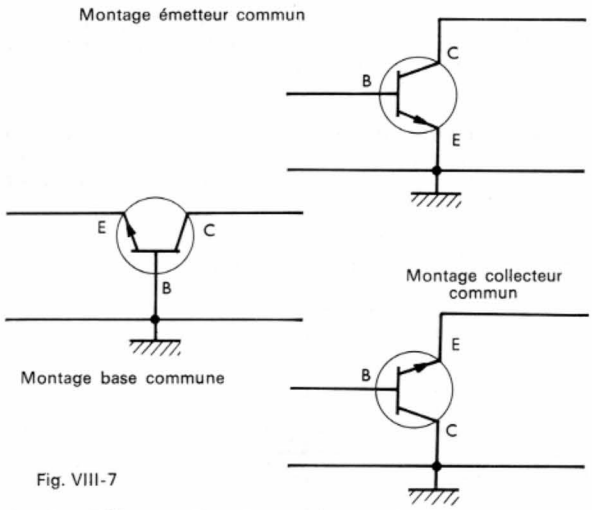


Fig. VIII-7

circuits différents. Une borne du transistor est commune aux deux circuits et *c'est le nom de cette borne qui est toujours indiqué dans la désignation du montage :* montage émetteur commun, montage base commune, montage collecteur commun (fig. VIII-7).

Les relations établies précédemment s'appliquant dans tous les cas, nous allons considérer le **montage émetteur commun** (fig. VIII-8) qui est le plus fréquemment employé. Le circuit alimentant la base et se refermant sur l'émetteur est le **circuit de commande** ou **circuit d'entrée.** Le circuit reliant le collecteur et l'émetteur est le **circuit d'utilisation** ou **circuit de sortie.**

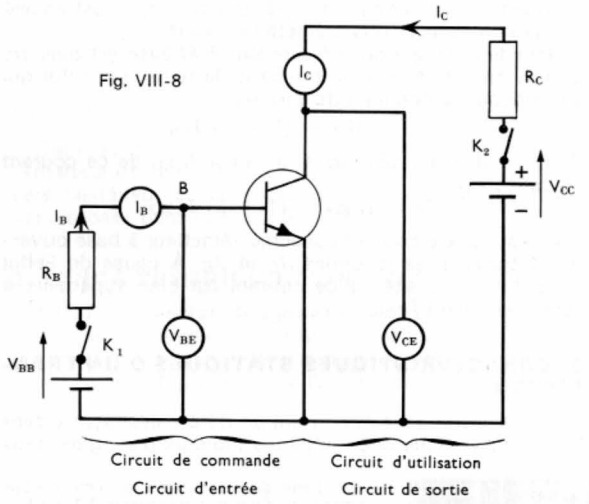


Fig. VIII-8

Le courant dans le circuit d'utilisation dépend du courant dans le circuit de commande. Nous pouvons utiliser ce montage pour le vérifier et pour mettre en évidence l'influence des tensions V_{BE} (tension base-émetteur) et V_{CE} (tension collecteur-émetteur).

3.1. Caractéristiques d'entrée du transistor. — Ce sont les caractéristiques courant-tension I_B (V_{BE}) du circuit d'entrée.

Supposons le circuit de collecteur ouvert (interrupteur K_2 ouvert) : la jonction J_E se comporte comme une jonction polarisée en direct. La caractéristique I_B (V_{BE}) est analogue à celle d'une diode (fig. VIII-9).

Si nous fermons l'interrupteur K_2 et si le générateur de courant continu fournit une tension suffisante pour que la d.d.p. V_{CE} soit bien supérieure à V_{BE}, le courant I_E augmente dans de grandes proportions. Il en résulte une augmentation sensible de la chute de tension V_{BE} due à la jonction J_E; la caractéristique I_B (V_{BE}) se décale vers la droite du graphique lorsque V_{CE} augmente (fig. VIII-9). L'influence de V_{CE} sur V_{BE} reste cependant faible et la

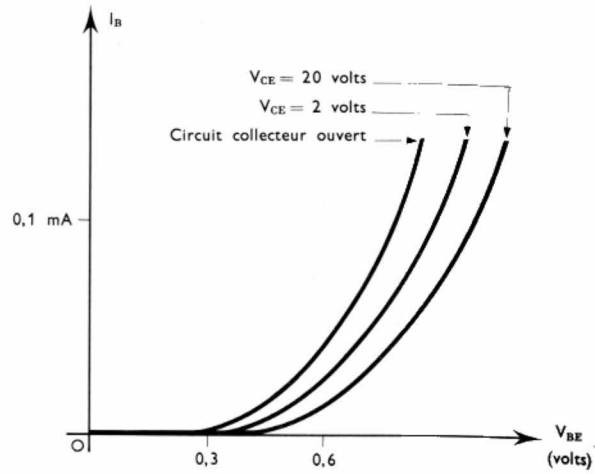


Fig. VIII-9 — Caractéristiques d'entrée pour un transistor au silicium

caractéristique d'entrée d'un transistor ne s'écarte jamais beaucoup de celle d'une jonction polarisée en direct. Elle en conserve les propriétés.

3.2. Caractéristiques de sortie du transistor. — Ce sont les caractéristiques courant-tension I_C (V_{CE}) du circuit de sortie.

À base ouverte (interrupteur K_1 ouvert), la caractéristique de sortie du transistor est celle d'une jonction polarisée en inverse : le courant de collecteur est égal à I_{CEO} et cela jusqu'à la valeur de la tension V_{CE} pour laquelle se produit l'avalanche.

Lorsque le circuit de base est alimenté (interrupteur K_1 fermé) par un générateur fournissant un courant I_B, le courant de collecteur devient beaucoup plus grand que I_{CEO} et il dépend essentiellement de I_B. Pour chaque valeur de ce courant de base, nous pouvons tracer une courbe I_C (V_{CE}) ; nous obtenons un réseau de courbes en choisissant différentes valeurs pour I_B (en général régulièrement réparties ; fig. VIII-10). Nous constatons quelques particularités importantes que l'étude théorique n'avait pas permis de mettre en évidence.

Trois régions distinctes apparaissent sur ce réseau :

— la **région de saturation** correspondant aux tensions collecteur-émetteur faibles ($0 \leqslant V_{CE} \leqslant V_{CEsat}$). La jonction J_C n'est pas polarisée en inverse ou très faiblement et l'équation reliant I_C et I_B n'est pas applicable. Cette région offre peu d'intérêt pour l'amplification. Signalons que la tension V_{CEsat} est du même ordre de grandeur que la tension E_0 nécessaire pour que la jonction J_E commence à conduire ;

— la **région active** correspondant aux tensions V_{CE} comprises entre V_{CEsat} et la tension d'avalanche ($V_{CEsat} \leqslant V_{CE} \leqslant V_{BrCEO}$). C'est la zone utile de fonctionnement. Dans cette zone, l'égalité :

$$I_C = \beta I_B + I_{CEO}$$

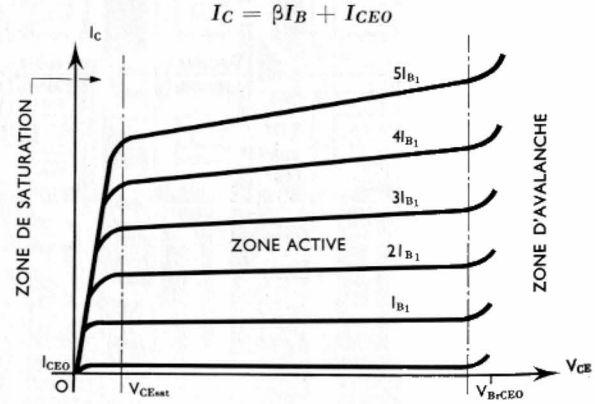
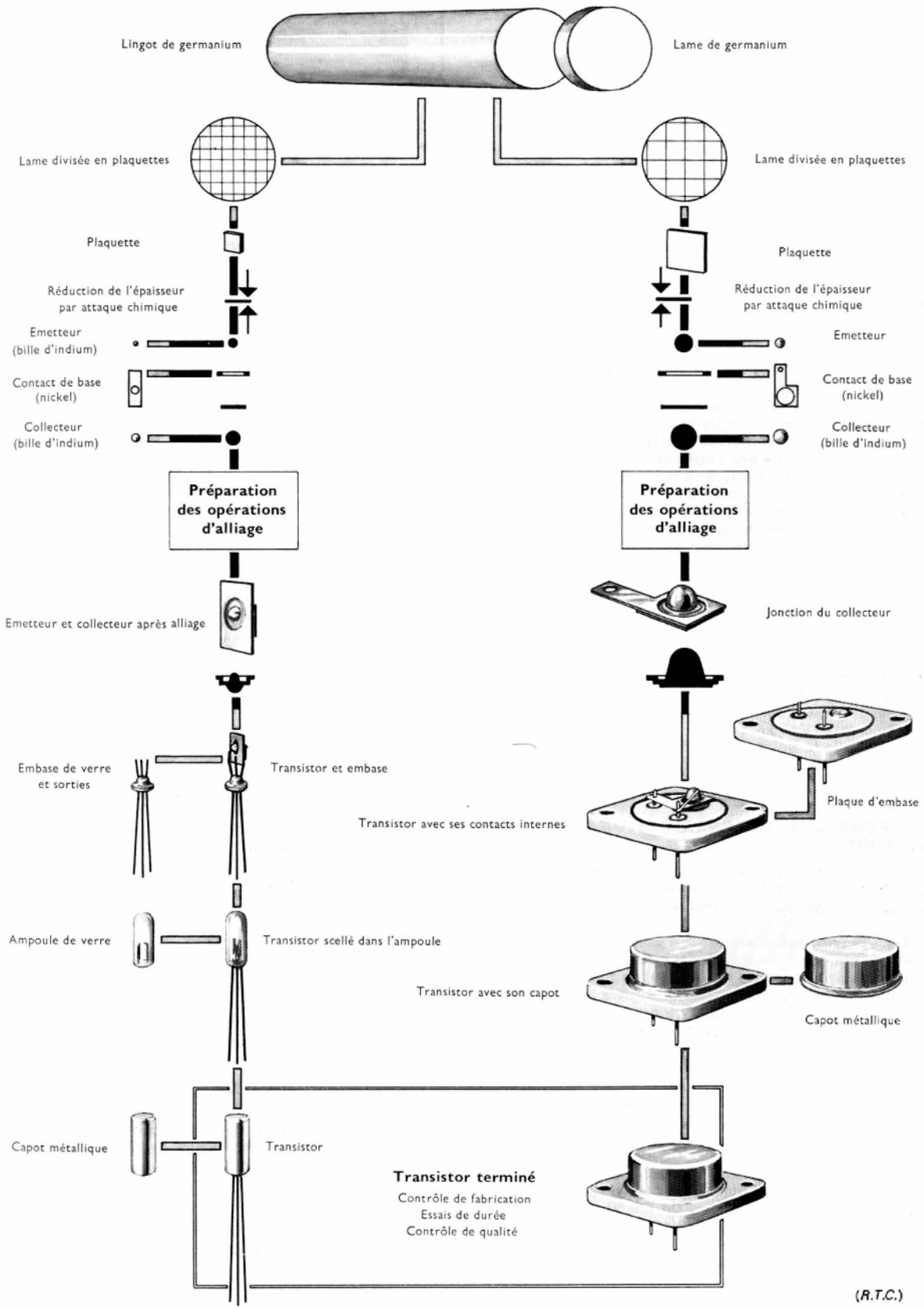


Fig. VIII-10 — Réseau de caractéristiques de sortie pour un transistor au silicium

FABRICATION DE TRANSISTORS PAR ALLIAGE



(*R.T.C.*)

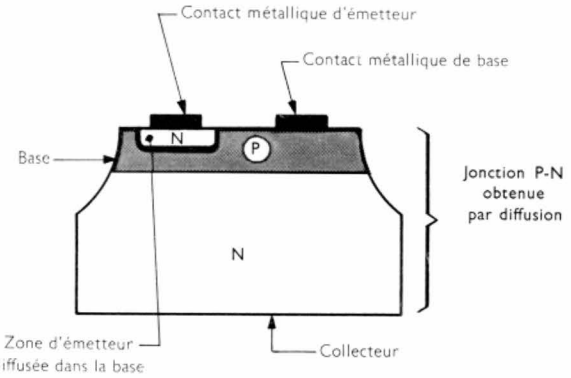


Fig. VIII-11 — Transistor mesa

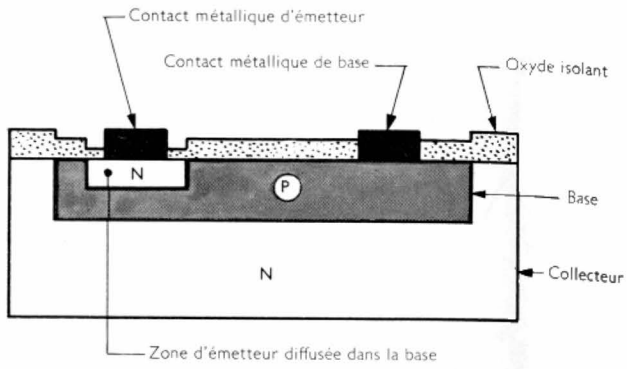


Fig. VIII-12 — Transistor à structure plane

est sensiblement vérifiée. En réalité, I_C croît légèrement lorsque V_{CE} augmente. Cela est dû au fait que la base est très mince et que son épaisseur réelle vis-à-vis du flux électronique est encore réduite par la présence des zones de transition des deux jonctions. L'influence de la zone de transition de J_C est particulièrement importante car *son épaisseur croît avec la tension* V_{CE} (tension inverse pour J_C). Le facteur de transport B de la base que nous avons supposé constant, dépend en réalité de V_{CE} car il est *lié à l'épaisseur réelle de la base*. Lorsque V_{CE} croît, il en résulte une augmentation de α, donc de β, et par conséquent de I_C : c'est l'**effet Early.** Ce phénomène est d'autant plus marqué que l'épaisseur initiale de la base est faible. La sensibilité de I_C à la tension V_{CE} est donc plus grande pour les transistors caractérisés par un coefficient β important. Par ailleurs, pour une valeur déterminée de V_{CE}, à des accroissements égaux ΔI_B de I_B ne correspondent pas toujours les mêmes accroissements égaux ΔI_C pour I_C. En d'autres termes, à tension V_{CE} constante, le rapport $\beta = \dfrac{\Delta I_C}{\Delta I_B}$ dépend de la valeur initiale de I_C. Ce phénomène est particulièrement sensible pour le silicium car le facteur β décroît considérablement lorsque I_C diminue. Cet effet est dû aux recombinaisons dans la zone de transition de J_E, zone beaucoup plus large pour le silicium que pour le germanium ;

— la **région d'avalanche** correspondant aux tensions supérieures à V_{BrCEO} ($V_{CE} \geqslant V_{BrCEO}$). C'est une zone dans laquelle le point de fonctionnement du transistor ne doit pas se trouver afin de limiter l'échauffement et les non-linéarités.

4. TECHNIQUE DE FABRICATION DES TRANSISTORS

Les deux jonctions d'un transistor peuvent être obtenues par alliage ou par diffusion. Les techniques employées pour la fabrication des diodes demeurent valides.

4.1. Technique d'alliage. — Cette méthode a été surtout utilisée pour obtenir des transistors PNP au germanium. De chaque côté d'un échantillon très mince de germanium N très peu dopé (qui constituera la base du transistor), on dépose une petite goutte d'indium liquide. À la base des soudures, des molécules d'indium pénètrent dans le cristal de germanium créant ainsi deux zones P qui constitueront le collecteur et l'émetteur du transistor (V. tableau page précédente). Cette technique, un peu brutale, ne permet pas de contrôler avec une très grande précision l'épaisseur et surtout la planéité de la base.

4.2. Technique de diffusion gazeuse. — Une plaquette de silicium est chauffée sous pression réduite jusqu'au voisinage de son point de fusion. Un masque d'oxyde permet de délimiter les zones du cristal qui doivent être mises en contact avec la vapeur d'un élément à 3 ou 5 électrons périphériques (l'impureté à introduire). Des molécules de cet élément diffusent dans le cristal pour former une couche P ou une couche N. Il est possible de réaliser la base sur une plaquette qui constitue le collecteur, puis de diffuser l'émetteur sur une partie de la base : c'est la technique dite « *à base diffusée* » (fig. VIII-11). L'émetteur et le collecteur peuvent être diffusés sur une plaquette qui forme la base du transistor : technique « *à jonction diffusée* » (fig. VIII-12). Dans une même enceinte, plusieurs milliers de transistors peuvent être fabriqués simultanément en contrôlant en permanence les résultats.

4.3. L'épitaxie. — Cette technique permet d'obtenir un édifice cristallin extrêmement régulier à partir d'un cristal dont la pureté est médiocre. Pour cela le cristal de silicium est chauffé jusqu'au voisinage de sa température de fusion ($t \geqslant 1\,000$ °C) et des vapeurs de silicium sont introduites dans l'enceinte contenant le cristal ; les molécules viennent se déposer en ordre régulier sur ce cristal moins chaud. Il se forme ainsi des couches très minces de silicium parfaitement pur ou dopé comme il le faut. Souvent, au lieu d'employer comme élément de départ une plaquette normalement dopée, on fait croître un réseau cristallin régulier de semiconducteur peu dopé, donc de grande résistivité, sur une plaquette de semiconducteur fortement dopé, donc de faible résistivité (par exemple du silicium N sur du silicium N très dopé dit N^+). Les semiconducteurs peuvent être des espèces chimiques différentes, il faut seulement que les réseaux des deux substances soient du même type, tous les deux cubiques par exemple, et que leurs mailles aient des dimensions voisines. La couche obtenue de cette façon, bien qu'épaisse de quelques micromètres, est seule utilisée pour la fabrication du transistor et le reste sert uniquement de support ; contenant une proportion importante d'impuretés, ce substrat présente une faible résistance alors qu'une plaquette de même dimension normalement dopée oppose une grande résistance au passage du courant. La forte résistivité de la couche déposée par épitaxie assure une tension de claquage élevée ; ainsi deux conditions apparemment opposées se trouvent satisfaites simultanément : faible résistance de la plaquette formant le collecteur et forte tension de claquage.

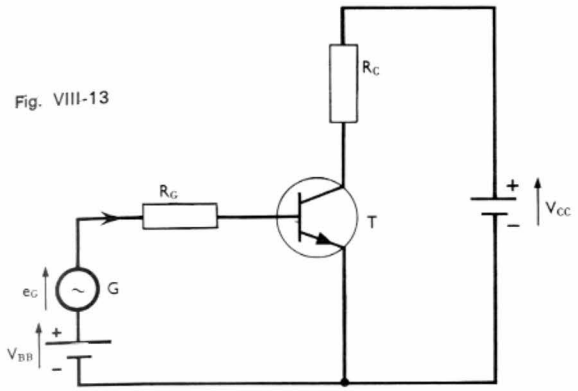
Après la dernière diffusion, le transistor obtenu est *passivé* en formant une couche de silice isolante à la surface du cristal (réalisation d'une oxydation). Cela permet d'obtenir le transistor actuellement le plus utilisé : le transistor *planar* (car les plans des jonctions sont très réguliers), *épitaxial, passivé* dont le fonctionnement est satisfaisant jusqu'à des fréquences très élevées (plusieurs centaines de mégahertz).

Les modes de fabrication déterminent dans une certaine mesure les paramètres et les caractéristiques des transistors : épaisseur de la base, dimensions des jonctions, tensions admissibles, etc. Cela explique les nombreuses variantes mises au point alors que les principes retenus restent toujours les mêmes.

5. PRINCIPE DE L'AMPLIFICATION PAR TRANSISTOR. ÉTUDE GRAPHIQUE

L'amplification est une fonction très importante en électronique. À partir d'un signal électrique variable et de

Fig. VIII-13



faible amplitude (signal de commande), un montage amplificateur fournit un signal reproduisant les variations du premier avec des amplitudes beaucoup plus grandes (signal de sortie).

Pour bien comprendre le mécanisme utilisé, nous considérons encore un montage émetteur commun (fig. VIII-13). Le générateur de commande *G* est placé dans le circuit base-émetteur : il fournit un signal de commande e_G sinusoïdal ($e_G = \widehat{E}_G \sin \omega t$) ; l'intensité du courant dans ce circuit est limitée par la résistance R_G. Dans le circuit collecteur-émetteur se trouve le générateur qui fournit le courant de collecteur et une résistance R_C appelée *résistance de charge*.

5.1. Fonctionnement statique du transistor. — Supposons tout d'abord que e_G soit nul : aucun signal variable n'est appliqué dans le circuit d'entrée de l'étage (fonctionnement dit statique). Les courants et les tensions ont des valeurs constantes bien déterminées appelées *courants et tensions de repos* (ou *de support*). Nous les désignerons au moyen des symboles suivants (fig. VIII-14) :

— courants de repos { — de base : I_{B0} ; — de collecteur : I_{C0} ; — d'émetteur : I_{E0}
— tensions de repos { — base-émetteur : V_{BE0} ; — collecteur-émetteur : V_{CE0}

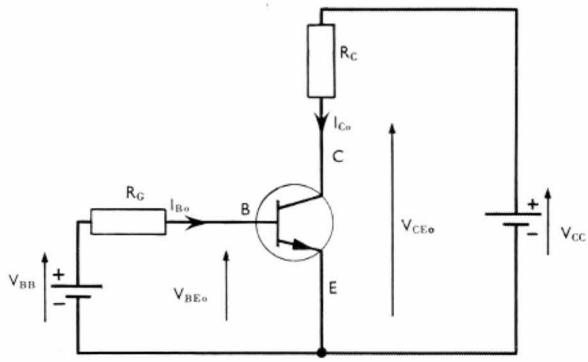


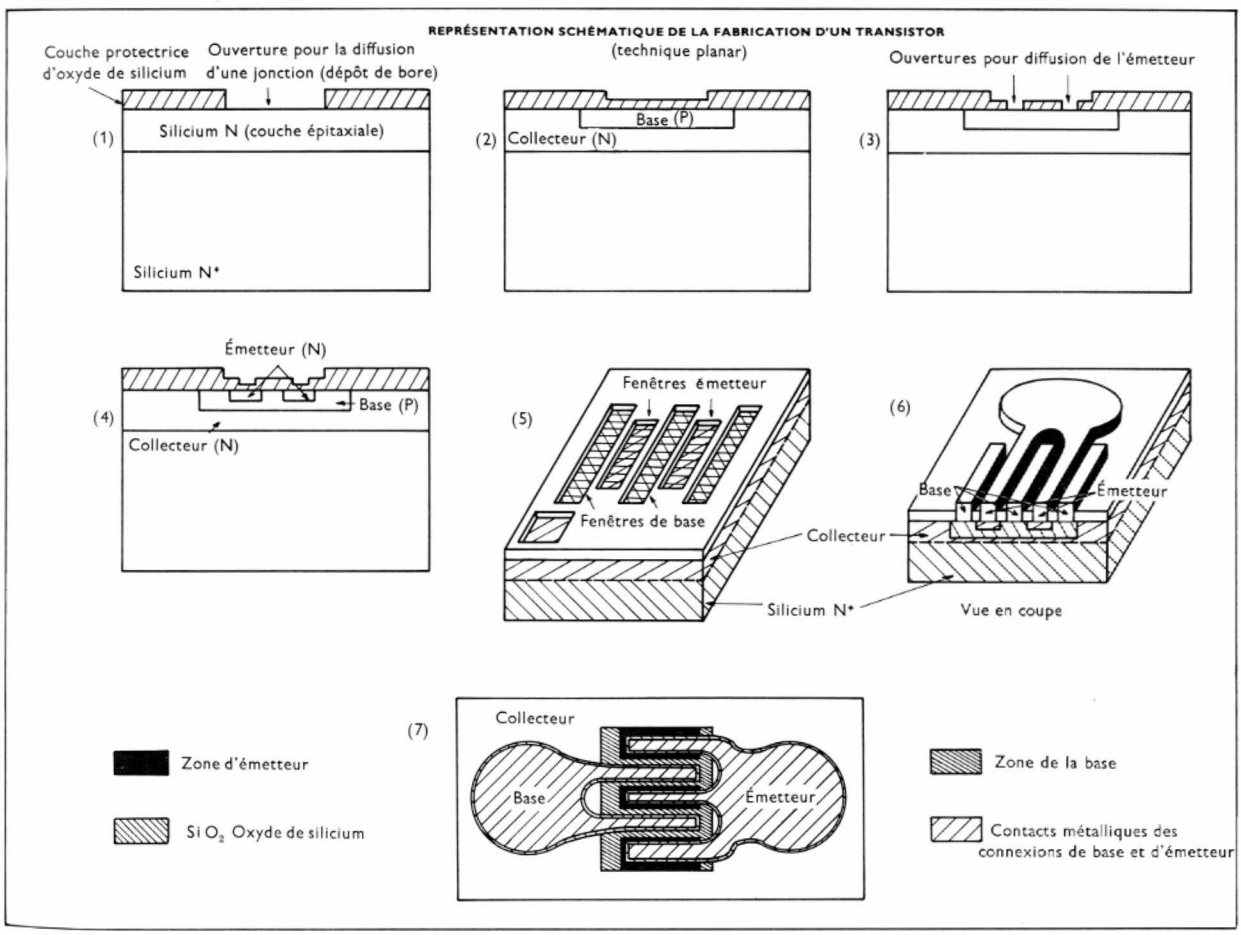
Fig. VIII-14 — Circuit à considérer si $e_G = 0$

Ces grandeurs de repos sont fonction des caractéristiques du transistor, des tensions V_{CC} et V_{BB} et des valeurs des résistances R_C et R_G. Pour les déterminer, nous opérons graphiquement et pour cela, nous utilisons les réseaux de caractéristiques du transistor *T*.

D'une manière générale, la loi d'Ohm appliquée au circuit de sortie se traduit par la relation suivante :

$$V_{CC} = V_{CE} + R_C I_C$$

Dans le plan I_C (V_{CE}) du réseau des caractéristiques de sortie, c'est l'équation d'une droite (de la forme $y = a - mx$



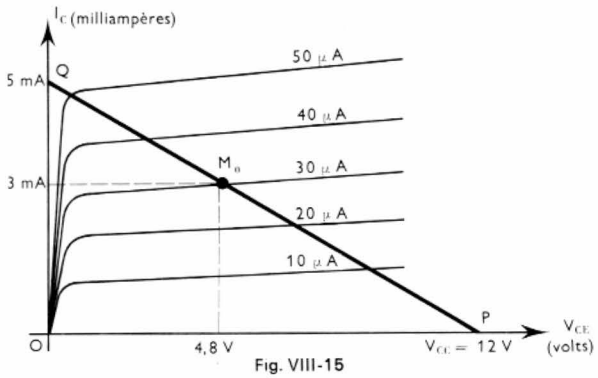


Fig. VIII-15

puisque nous avons porté I_C en ordonnées et V_{CE} en abscisses) :

$$I_C = \frac{V_{CC}}{R_C} - \frac{V_{CE}}{R_C}$$

Elle coupe les axes de coordonnées en deux points P et Q. Le point P se trouve sur l'axe des abscisses (fig. VIII-15) :

$$P \begin{cases} V_{CE} = V_{CC} \\ I_C = 0 \end{cases}$$

et le point Q est sur l'axe des ordonnées :

$$Q \begin{cases} V_{CE} = 0 \\ I_C = \dfrac{V_{CC}}{R_C} \end{cases}$$

Compte tenu des échelles, le coefficient directeur de cette droite est $-\dfrac{1}{R_C}$.

Par exemple, si $V_{CC} = 12$ V et $R_C = 2{,}4$ kΩ, nous voyons (V. fig. VIII-15) que la droite de charge passe par les points :

P ($V_{CE} = 12$ V, $I_C = 0$)

et : $Q\left(V_{CE} = 0,\ I_C = \dfrac{12}{2400} = 0{,}005 \text{ A} = 5 \text{ mA}\right)$.

L'équation de la droite de charge est également vérifiée pour les valeurs de repos V_{CE_0} et I_{C_0} :

$$V_{CC} = V_{CE_0} + R_C I_{C_0}$$

Le point de repos se trouve donc à l'intersection d'une caractéristique I_C (V_{CE}) et de la droite de charge. Si la tension V_{BB} a été réglée pour avoir $I_{B_0} = 30$ μA ce point de repos est M_0.

Si nous admettons que les caractéristiques d'entrée du transistor sont indépendantes de la tension V_{CE}, nous avons une seule caractéristique I_B (V_{BE}) et nous plaçons un point de repos M'_0 sur celle-ci (fig. VIII-16) : c'est le

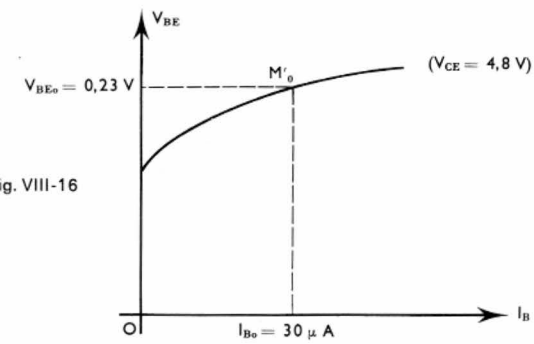


Fig. VIII-16

point d'abscisse $I_{B_0} = 30$ μA dans l'exemple considéré précédemment. Si l'approximation précédente n'est pas possible, il faut placer ce point M'_0 sur la caractéristique d'entrée qui correspond à la tension $V_{CE_0} = 4{,}8$ V.

5.2. Fonctionnement dynamique du transistor

5.2.1. Courant de base. — Lorsque la f.é.m. du générateur G n'est pas nulle, le courant dans le circuit d'entrée peut être considéré comme la somme du courant de base de repos I_{B_0} (dû à V_{BB}) et d'un courant i_B (dû à e_G). Cette composante variable du courant total dans la base, doit avoir une valeur de crête toujours inférieure à I_{B_0}.

Dans le montage considéré, supposons que i_B soit sinusoïdal et que sa valeur de crête soit 20 μA ($i_B = 20$, sin ωt en microampères). Le courant total de base varie donc entre 10 μA et 50 μA (fig. VIII-17). Le point de fonc-

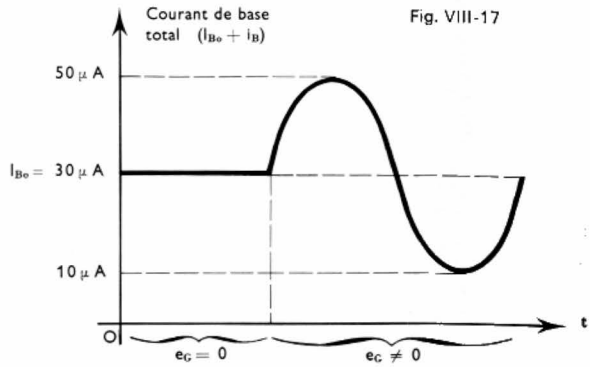


Fig. VIII-17

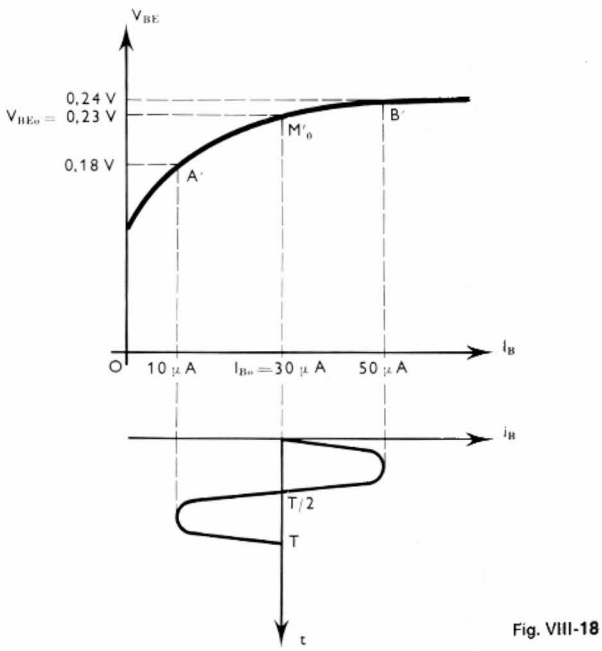


Fig. VIII-18

tionnement se déplace de part et d'autre de M'_0 sur la caractéristique d'entrée (fig. VIII-18). Si celle-ci n'est pas unique, les points A' et B' ne se trouvent pas sur la même caractéristique I_B (V_{BE}) et ils définissent un segment $A'B'$ (fig. VIII-19) appelé *caractéristique dynamique d'entrée*.

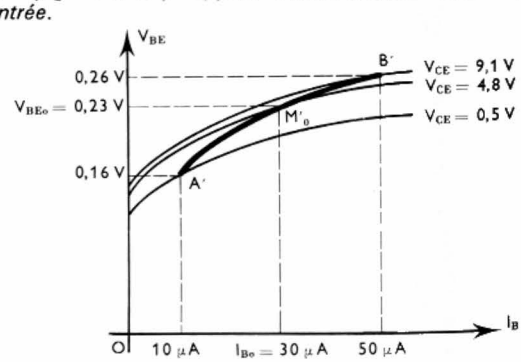


Fig. VIII-19

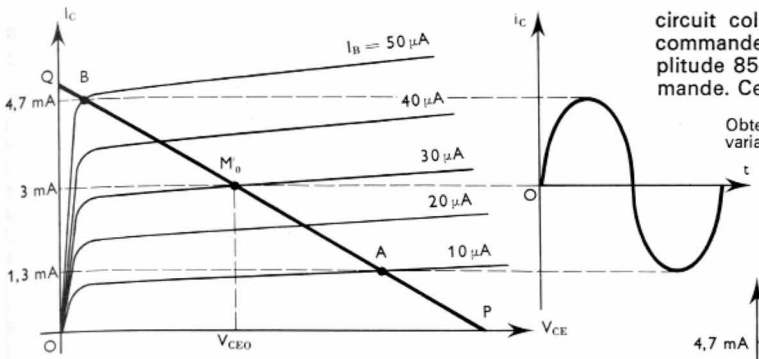


Fig. VIII-20

5.2.2. Courant de collecteur. — Dans le réseau de sortie, le point de fonctionnement se déplace de part et d'autre du point de repos M_0. Comme le courant total de base varie entre 10 et 50 μA, le point de fonctionnement décrit le segment *AB* (fig. VIII-20). Le courant total dans le collecteur est donc égal à la somme du courant collecteur de repos I_{C0} et d'une composante variable i_C (fig. VIII-21). Si les segments M_0A et M_0B sont égaux, cette composante est sinusoïdale; dans le cas contraire, l'amplification est accompagnée d'une déformation du signal (distorsion de non linéarité). En choisissant convenablement la droite de charge, il est possible de rendre cette distorsion très faible et, dans ces conditions, les composantes i_B et i_C sont sinusoïdales et en phase (i_C croît et décroît en même temps que i_B).

Dans l'exemple considéré, la valeur de crête de cette composante i_C est 1,7 mA et le rapport des valeurs de crête des composantes i_C et i_B est égal à $\frac{1\,700}{20} = 85$. Le courant fourni par la source de courant continu placée dans le circuit collecteur reproduit les variations du courant de commande (i_B) et la composante variable i_C a une amplitude 85 fois plus grande que celle du courant de commande. Ce courant paraît amplifié par le montage.

Obtention graphique de la composante variable du courant de collecteur

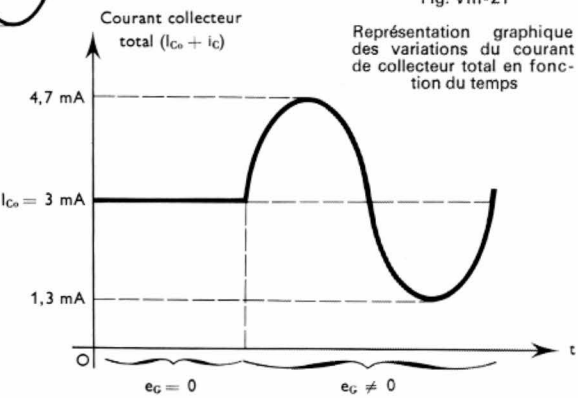


Fig. VIII-21

Représentation graphique des variations du courant de collecteur total en fonction du temps

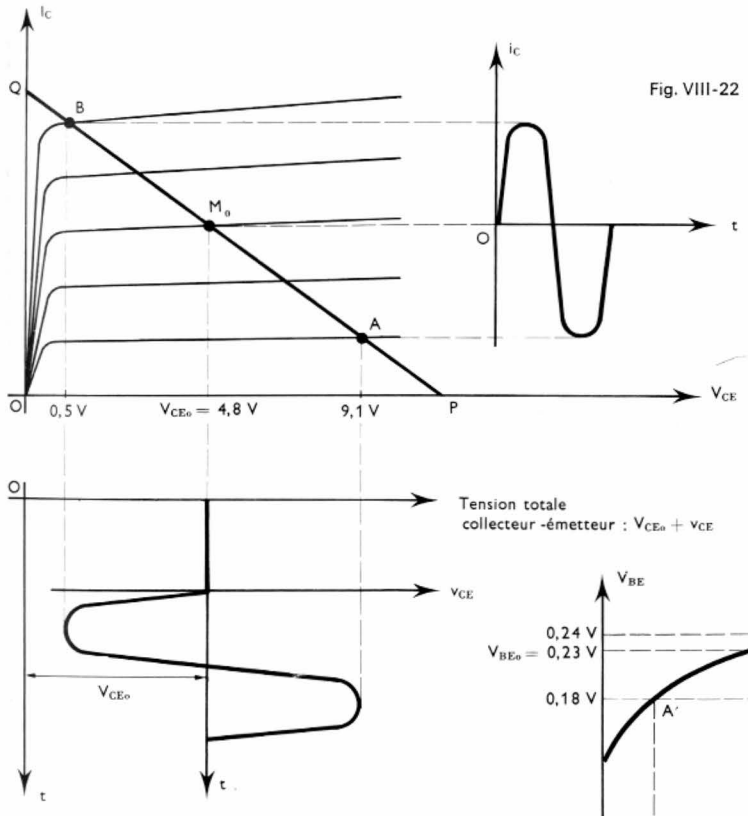


Fig. VIII-22

5.2.3. Tension collecteur-émetteur. — La tension collecteur-émetteur peut également être considérée comme la somme d'une tension continue V_{CE0} et d'une tension variable v_{CE} (fig. VIII-22). Si la composante variable i_C du courant de collecteur est sinusoïdale, il en est de même de v_{CE}. De plus, le graphique montre que les composantes v_{CE} et i_C sont en opposition de phase: lorsque l'une croît, l'autre décroît et inversement. L'amplitude de la tension variable v_{CE} est proche de 4,3 V dans l'exemple choisi ($v_{CE} = -4,3 \sin \omega t$ volts).

5.2.4. Tension base-émetteur. — La tension totale entre la base et l'émetteur est égale à la somme de la tension base-émetteur de repos V_{BE0} et d'une composante variable v_{BE}. Dans le cas considéré (fig. VIII-23) cette tension variable n'est pas sinusoïdale (les variations de v_{BE} ne sont pas symétriques par rapport à V_{BE0}).

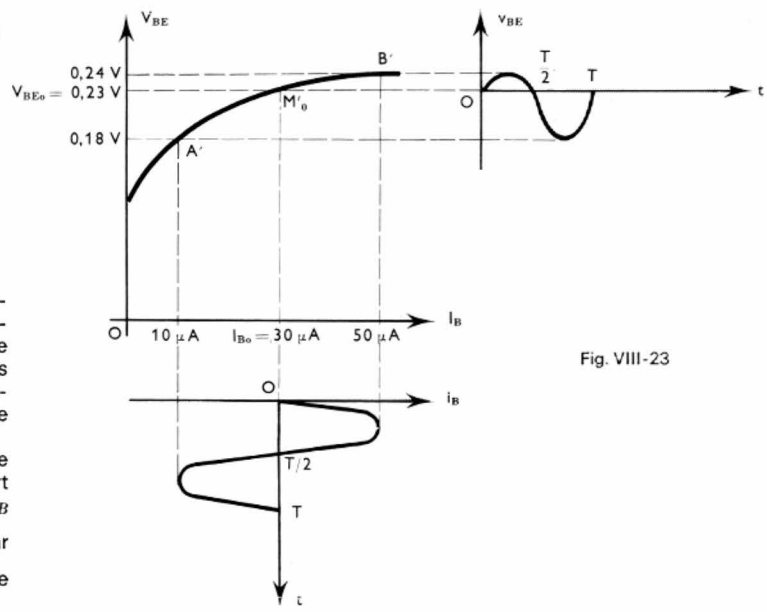
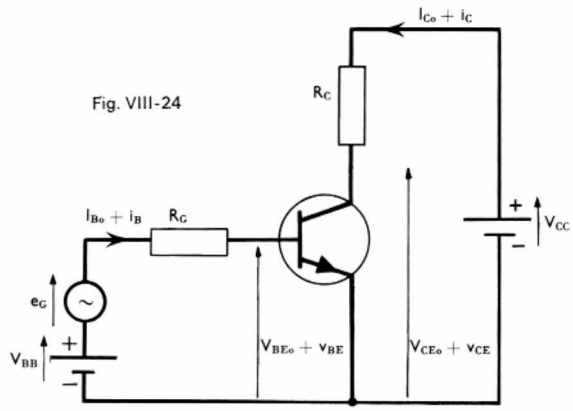


Fig. VIII-23

Fig. VIII-24



Le mode de commande considéré précédemment est très utilisé car il est facile d'obtenir une composante i_B sinusoïdale dans le circuit d'entrée. Pour le montrer, appliquons la loi d'Ohm au circuit d'entrée (fig. VIII-24) :

— au repos : $V_{BB} = R_G I_{B_0} + V_{BE_0}$

— en régime dynamique :

$$V_{BB} + e_G = R_G \underbrace{(I_{B_0} + i_B)}_{\substack{\text{courant total dans la base}}} + \underbrace{V_{BE_0} + v_{BE}}_{\substack{\text{tension totale entre base et émetteur}}}$$

En soustrayant membre à membre ces relations, nous obtenons l'égalité suivante :

$$e_G = R_G i_B + v_{BE}$$

À tout instant, si v_{BE} est négligeable devant la chute de tension ($R_G i_B$), nous pouvons écrire :

$$e_G \approx R_G i_B \text{ ou : } i_B = \frac{e_G}{R_G}$$

Lorsque la f.é.m. e_G est sinusoïdale, il en est de même pour la composante i_B : c'est la **commande en courant** du transistor. Elle nécessite donc que la résistance R_G soit très grande (plusieurs dizaines de milliers d'ohms).

Avec des signaux d'amplitude très faible il est possible d'obtenir un courant i_B sinusoïdal et une tension v_{BE} sinusoïdale (fig. VIII-25). La portion $A'B'$ de la caractéristique d'entrée doit être un segment de droite (autrement dit la caractéristique doit pouvoir être confondue avec la tangente à cette courbe en M'_0). C'est ce qui est réalisé dans la **commande en tension** car alors la résistance R_G est pratiquement nulle et $v_{BE} \approx e_G$.

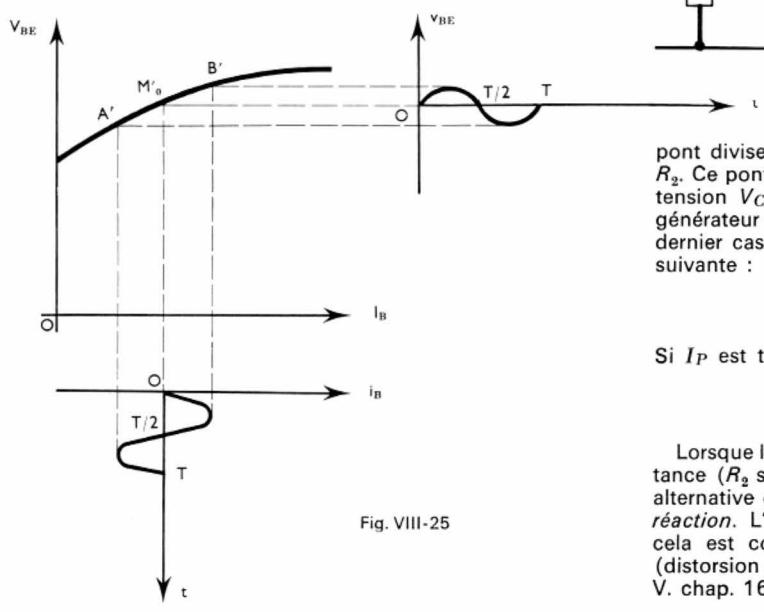


Fig. VIII-25

6. POLARISATION D'UN TRANSISTOR

L'amplification d'un signal au moyen d'un transistor nécessite l'obtention préalable des conditions de fonctionnement correspondant au point de repos. Dans la plupart des cas, il n'y a pas deux générateurs de courant continu comme dans le montage considéré précédemment (V. fig. VIII-8) mais une seule source fournit les divers courants de repos.

Le courant de base de repos peut être obtenu en alimentant la jonction J_E au moyen du générateur placé dans le circuit collecteur-émetteur. On utilise généralement un

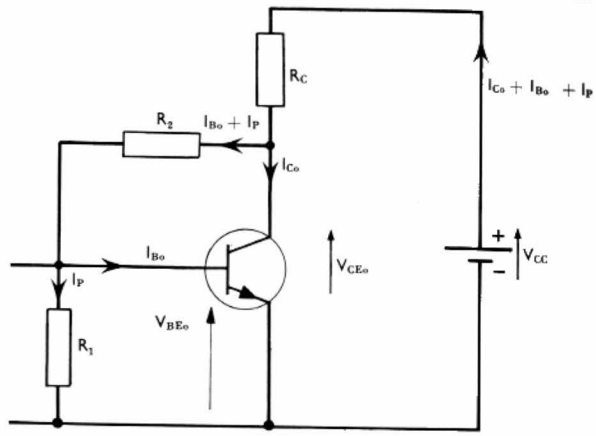


Fig. VIII-26

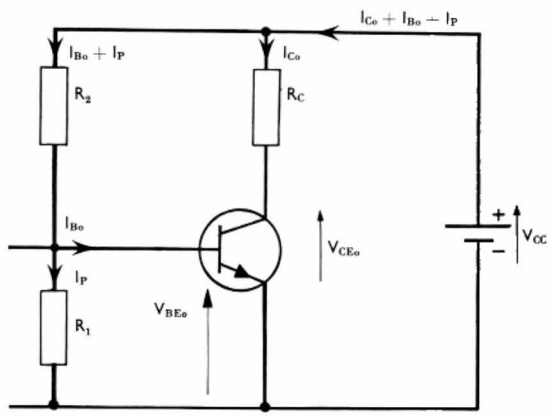


Fig. VIII-27

pont diviseur de tension formé de deux résistances R_1 et R_2. Ce pont peut être placé entre les points C et E (sous la tension V_{CE_0} ; fig. VIII-26) ou directement aux bornes du générateur (sous la tension V_{CC} ; fig. VIII-27). Dans ce dernier cas, la tension V_{BE_0} est alors donnée par la relation suivante :

$$V_{BE_0} = V_{CC} \frac{R_1 I_P}{R_1 I_P + R_2 (I_P - I_{B_0})}$$

Si I_P est très supérieur à I_{B_0} ($I_P = 5$ à $10\ I_{B_0}$) il vient :

$$V_{BE_0} \approx V_{CC} \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Lorsque le collecteur est relié à la base à travers une résistance (R_2 sur la figure VIII-26), une fraction de la tension alternative de sortie est renvoyée à l'entrée : il y a *contre-réaction*. L'amplification du montage est diminuée, mais cela est compensé par un certain nombre d'avantages (distorsion plus faible, bande passante plus grande. V. chap. 16).

7. STABILISATION THERMIQUE D'UN TRANSISTOR

7.1. Puissance dissipée par un transistor. — La puissance électrique fournie au transistor, sensiblement égale à $P_C = V_{CE_0} I_{C_0}$ est convertie en chaleur dans le cristal et celui-ci s'échauffe. Elle est dissipée essentiellement au niveau de la jonction J_C placée sous une tension beaucoup plus grande que J_E. Le transistor atteint une température d'équilibre lorsque la quantité de chaleur cédée au milieu ambiant en une seconde est égale à la puissance P_C.

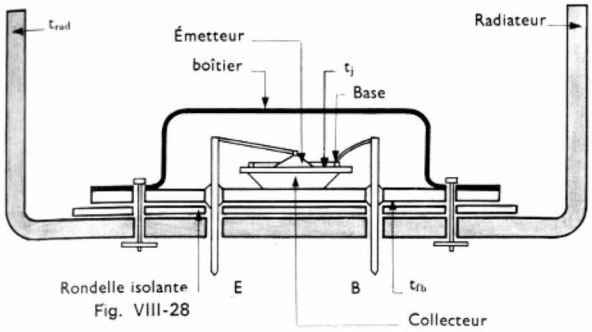


Fig. VIII-28

7.2. Résistance thermique. — La quantité de chaleur dissipée par le transistor dépend :

— de la différence de température Δt entre la température du milieu ambiant t_a et celle de la jonction J_C du transistor t_j :

$$\Delta t = t_j - t_a$$

— de l'aptitude du transistor à évacuer de la chaleur.

À l'équilibre thermique, si nous appliquons la loi du refroidissement de Newton au transistor, nous pouvons écrire :

$$\Delta t = R_{th} . P_C$$

R_{th} est un coefficient de proportionnalité qui traduit l'aptitude du transistor à évacuer de la chaleur et qui est appelé *résistance thermique jonction-ambiance du transistor.* Ce coefficient s'exprime en kelvins par watt ou en degrés Celsius par watt (symboles : K/W et °C/W ; 1 K/W = 1 °C/W).

La valeur de R_{th} dépend aussi bien du transistor que de la surface de contact transistor-milieu ambiant.

Considérons un transistor muni d'un radiateur (ailette métallique par exemple) pour faciliter le refroidissement (fig. VIII-28). Appelons :

— t_j la température de la jonction,
— t_{fb} la température du fond du boîtier (zone de contact avec le radiateur),
— t_{rad} la température du radiateur (supposée uniforme),
— t_a la température du milieu ambiant.

Chaque seconde, la même quantité de chaleur (égale à P_C) traverse le boîtier et le radiateur et, en appliquant la loi de Newton, nous pouvons écrire :

$$t_j - t_{fb} = R_{j-fb} . P_C$$

(R_{j-fb} : résistance thermique jonction-fond du boîtier),

$$t_{fb} - t_{rad} = R_i . P_C$$

(R_i : résistance thermique de contact y compris la rondelle isolante nécessaire lorsque le collecteur du transistor est réuni au boîtier) ;

$$t_{rad} - t_a = R_{rad} . P_C$$

(R_{rad} : résistance thermique du radiateur).

En additionnant les trois égalités ainsi obtenues, nous voyons que la différence de température entre la jonction et l'ambiance est égale à :

$$t_j - t_a = (R_{j-fb} + R_i + R_{rad}) P_C$$

Comme elle est aussi égale au produit $R_{th} . P_C$ nous déduisons :

$$R_{th} = R_{j-fb} + R_i + R_{rad}$$

Cette égalité est très importante car elle met en évidence le fait que la résistance thermique totale R_{th} dépend à la fois de la construction du transistor (par R_{j-fb}) et de l'utilisation qui en est faite (par R_i et R_{rad}).

Pour un même radiateur, R_{rad} dépend : de l'état de surface, de la couleur, mais surtout de la position dans le montage et de la façon dont il est refroidi (R_{rad} décroît si le refroidissement naturel est remplacé par une circulation d'air forcé).

Pour les transistors au silicium, la température maximale de jonction étant très élevée (jusqu'à 150 °C), la loi de Newton n'est plus applicable. Les expressions précédentes sont cependant conservées et des abaques donnent, pour un radiateur déterminé, les valeurs de R_{th} en fonction de la température d'équilibre. Les valeurs des résistances thermiques des transistors sont comprises entre 2 000 K/W (transistors miniature sans radiateur) et 1 à 2 K/W (transistors de grande puissance utilisant des radiateurs de grandes dimensions).

Notons que la température maximale de la jonction collecteur-base d'un transistor ne peut en aucun cas être dépassée sans entraîner sa destruction immédiate. Pour une température ambiante et un radiateur déterminés, il existe donc une puissance P_C maximale à ne dépasser en aucun cas.

7.3. Stabilisation thermique par résistance d'émetteur. — Lorsque la température du transistor augmente, le courant de fuite I_{CBO} augmente (et I_{CEO} aussi bien sûr) et la tension V_{BE_0} diminue. Cela se traduit par une augmentation générale des intensités des courants et la puissance fournie au transistor croît ; il en résulte une augmentation de température et ces effets cumulatifs aboutissent rapidement à la destruction du transistor si aucune précaution n'est prise. Non seulement il faut refroidir le transistor comme nous l'avons vu ci-dessus mais il est indispensable de l'insérer dans des montages où les variations de courant de collecteur sont automatiquement limitées.

Un montage est couramment utilisé et est particulièrement intéressant (fig. VIII-29) : il comporte un pont de

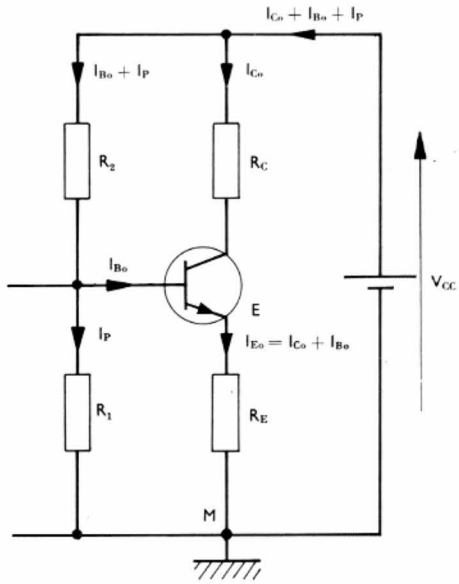


Fig. VIII-29

polarisation (résistances R_1 et R_2) et une résistance R_E entre l'émetteur E et la masse M du montage. Si une augmentation de température provoque une augmentation du courant I_{C_0}, I_{E_0} croît, ainsi que la chute de tension ($R_E I_{E_0}$) due à la résistance R_E. En revanche, il se produit une diminution des tensions V_{CE_0} et V_{BE_0} qui sont données par les relations suivantes :

$$V_{CE_0} = V_{CC} - R_C I_{C_0} - R_E (I_{C_0} + I_{B_0})$$
$$V_{BE_0} = R_1 I_P - R_E (I_{C_0} + I_{B_0})$$

La décroissance de V_{BE_0} est suivie de celle du courant I_{B_0}, ce qui entraîne celle de I_{C_0}, c'est-à-dire une variation de sens contraire à celle provoquée par l'augmentation de température. En choisissant convenablement R_E, il est possible de stabiliser thermiquement le transistor.

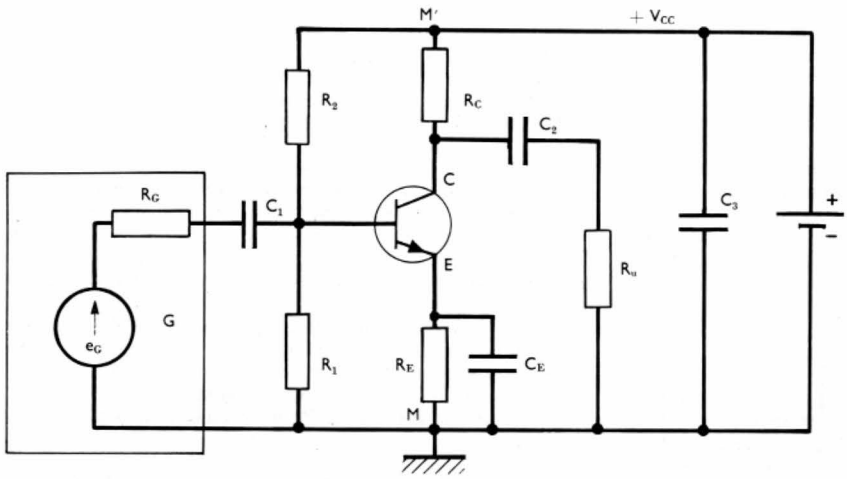


Fig. VIII-30

8. CONCLUSION - ÉTAGE AMPLIFICATEUR

Le calcul montre que, si les éléments du montage précédent (V. fig. VIII-29) sont bien choisis, il y a non seulement stabilisation thermique mais de plus l'interchangeabilité du transistor ne pose pas de problème malgré la dispersion des caractéristiques (en particulier malgré les différences entre les valeurs de β en passant d'un transistor à un autre de même type).

Pour être utilisable en amplificateur, ce montage doit être complété. Les éléments précédents sont nécessaires à l'obtention des courants et des tensions de repos. La composante variable du courant d'entrée (par exemple un signal alternatif) est obtenue par l'intermédiaire d'un générateur G (f.é.m. e_G, résistance interne R_G) ou est fournie par un autre étage amplificateur qui joue le même rôle que G pour le montage (fig. VIII-30). Un condensateur C_1 est placé en série avec G pour éviter qu'un courant continu ne traverse inutilement cette partie du circuit.

Le signal amplifié est recueilli entre les bornes C et M et est appliqué à un dispositif (autre étage par exemple) symbolisé par la résistance d'utilisation R_u. Pour que cette résistance n'intervienne pas pour l'obtention du point de repos (c'est-à-dire en régime statique), elle est placée en série avec un condensateur C_2 : celui-ci présente une impédance faible au signal variable mais il empêche le passage d'un courant continu.

Afin que l'émetteur E soit à la masse du montage pour le signal alternatif (montage émetteur commun), il faut placer un condensateur C_E de grande capacité entre les bornes de R_E (C_E est appelé condensateur de découplage). Pour l'alternatif, cet élément est équivalent à un court-circuit et la composante alternative du courant d'émetteur passe dans sa presque totalité par C_E.

La source de courant continu doit également être découplée par un condensateur C_3 pour ne pas être traversée par la composante variable du courant de collecteur. Sans cette précaution, la résistance interne de cette source serait à l'origine d'une inutile chute de tension due à cette composante variable. Dans la suite, nous supposerons que ce découplage est toujours parfaitement réalisé.

L'étude graphique du fonctionnement de ce montage peut être conduite comme celle proposée au paragraphe 5. Cependant, il faut bien distinguer les éléments utiles pour le régime statique et ceux qui interviennent pour le régime dynamique. Pour le *courant continu*, c'est-à-dire pour les grandeurs de repos, il faut considérer le montage de la figure VIII-29 ; si nous négligeons I_B devant I_C, la droite de charge D_C est alors définie par l'équation suivante :

$$I_C = \frac{V_{CC} - V_{CE}}{R_C + R_E}$$

Pour le *courant alternatif*, la résistance R_E et le générateur de courant continu n'interviennent pas. Par ailleurs, le point M' est au même potentiel que le point M (masse) pour le *courant alternatif* puisque le condensateur C_3 est considéré comme un court-circuit pour ce courant. Pour la même raison, les condensateurs C_1 et C_2 n'ont pas à être représentés puisque nous avons supposé leur influence négligeable pour le courant alternatif, quelle que soit la fréquence. Cela conduit à représenter l'étage amplificateur sous une forme simplifiée (fig. VIII-31) qui montre que, *pour le courant alternatif*, R_1 et R_2 sont en parallèle entre les bornes d'entrée B et M et R_C et R_u sont en parallèle entre les bornes de sortie C et M. La résistance de charge en alternatif est donc égale à $R'_C = \dfrac{R_C R_u}{R_C + R_u}$ (résistance équivalente à R_C en parallèle avec R_u). Pour une étude graphique, il faut considérer une droite de charge D_A différente de D_C (fig. VIII-32) : elle passe par le point

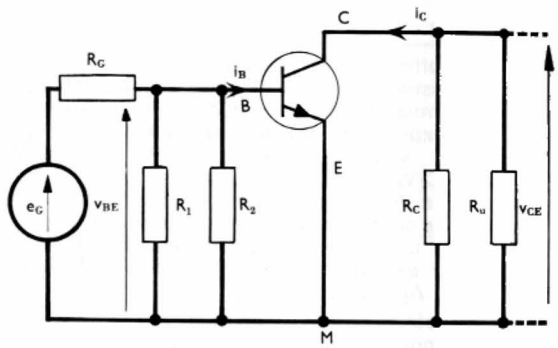


Fig. VIII-31

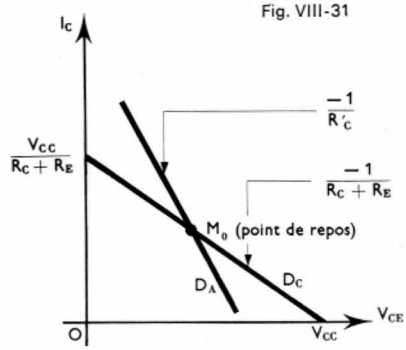


Fig. VIII-32

Droites de charge : D_c en courant continu, D_a en courant alternatif ; $R'_c = \dfrac{R_c R_u}{R_c + R_u}$

M_0 mais son coefficient directeur dépend de R_C et de R_u et est égal à $\dfrac{-1}{R'_C} = \dfrac{-(R_C + R_u)}{R_C R_u}$.

Une étude plus complète de ce montage pourra être réalisée lorsque nous aurons défini un schéma électrique équivalent au transistor.

CHAPITRE IX

TRANSISTORS À JONCTIONS PARAMÈTRES. SCHÉMAS ÉQUIVALENTS

Pour analyser le fonctionnement d'un étage amplificateur à transistor, il faut chercher un modèle linéaire pouvant remplacer cet élément dans le schéma utilisable en courant alternatif.

1. ÉQUATIONS POUR LE FONCTIONNEMENT DYNAMIQUE

Nous considérons un montage émetteur commun (V. fig. VIII-31) utilisé pour amplifier un signal alternatif fourni par un générateur *G*.

Les caractéristiques du transistor ne sont que des représentations graphiques de fonctions (fig. IX-1) définies implicitement par les expressions suivantes :

— pour l'entrée : $V_{BE} = f\ (I_B, V_{CE})$
— pour la sortie : $I_C = g\ (I_B, V_{CE})$

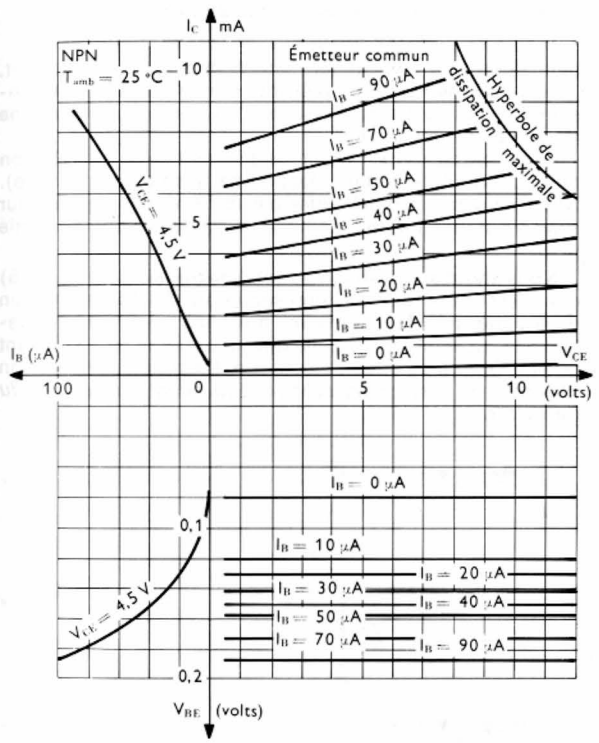


Fig. IX-1 — Réseaux de caractéristiques d'un transistor à jonctions (NPN)

Ces fonctions ne sont pas connues mathématiquement mais cela n'a pas d'importance car l'étude de l'amplification a conduit à considérer non pas les grandeurs de repos mais des variations de ces grandeurs autour des valeurs de repos. Or, des relations peuvent facilement être établies entre des variations élémentaires des courants et tensions d'entrée (notées dI_B et dV_{BE}) et de sortie (notées dI_C et dV_{CE}). En effet, en différenciant ces expressions, nous obtenons les deux égalités suivantes :

$$dV_{BE} = \frac{\partial f}{\partial I_B}\, dI_B + \frac{\partial f}{\partial V_{CE}}\, dV_{CE}$$

$$dI_C = \frac{\partial g}{\partial I_B}\, dI_B + \frac{\partial g}{\partial V_{CE}}\, dV_{CE}$$

où $\frac{\partial f}{\partial I_B}$, $\frac{\partial f}{\partial V_{CE}}$, $\frac{\partial g}{\partial I_B}$ et $\frac{\partial g}{\partial V_{CE}}$ représentent les dérivées partielles des fonctions *f* et *g* (V. t. 1, Mathématiques, chap. 19). Pour un point de repos déterminé, ces dérivées ont des valeurs parfaitement définies et constantes ; elles sont numériquement égales aux coefficients directeurs des tangentes aux caractéristiques du transistor passant par les points de repos dans les divers quadrants (fig. IX-2). Par

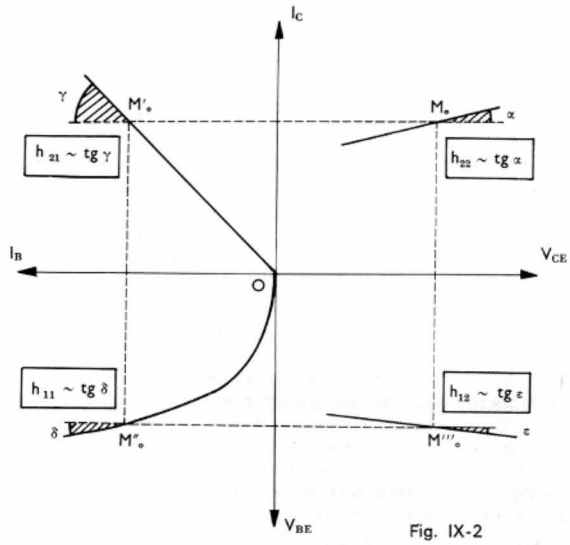


Fig. IX-2

convention, ces dérivées partielles sont désignées au moyen des quatre *paramètres* suivants :

$$h_{11} = \frac{\partial f}{\partial I_B} = \left(\frac{\partial V_{BE}}{\partial I_B}\right) \text{ avec } V_{CE} = \text{Cte}$$

$$h_{12} = \frac{\partial f}{\partial V_{CE}} = \left(\frac{\partial V_{BE}}{\partial V_{CE}}\right) \text{ avec } I_B = \text{Cte}$$

$$h_{21} = \frac{\partial g}{\partial I_B} = \left(\frac{\partial I_C}{\partial I_B}\right) \text{ avec } V_{CE} = \text{Cte}$$

$$h_{22} = \frac{\partial g}{\partial V_{CE}} = \left(\frac{\partial I_C}{\partial V_{CE}}\right) \text{ avec } I_B = \text{Cte}$$

Les variations élémentaires des courants et des tensions peuvent être assimilées aux valeurs instantanées des composantes variables de ces grandeurs :

$$dI_B = i_B,\ dV_{BE} = v_{BE},\ dI_C = i_C \text{ et } dV_{CE} = v_{CE}$$

Les équations différentielles précédentes s'écrivent alors plus simplement sous la forme suivante :

$$\begin{cases} v_{BE} = h_{11}\, i_B + h_{12}\, v_{CE} & (1) \\ i_C = h_{21}\, i_B + h_{22}\, v_{CE} & (2) \end{cases}$$

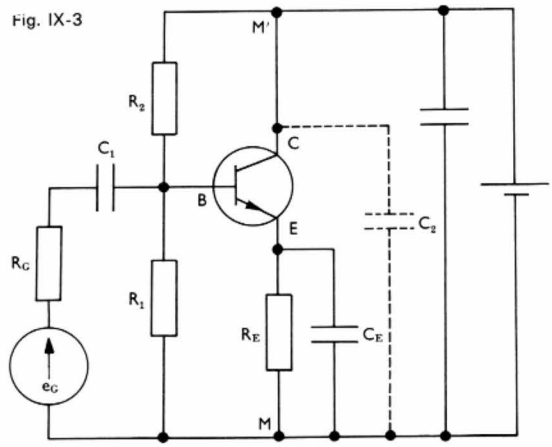
Il est tentant d'étudier les propriétés du circuit en utilisant uniquement les méthodes du calcul matriciel ; une telle étude n'est cependant pas très intéressante. En effet, les quatre nombres h_{11}, h_{12}, h_{21}, h_{22} ont une signification physique simple et il est plus facile de chercher un modèle linéaire pour le transistor appelé **schéma équivalent du transistor** et de raisonner sur les circuits électriques ainsi obtenus.

2. SIGNIFICATION DES PARAMÈTRES HYBRIDES

Les équations (1) et (2) permettent de déduire facilement la signification des paramètres définis précédemment.

2.1. $v_{CE} = 0$. — Cette condition est réalisée si nous utilisons un étage amplificateur en émetteur commun sans résistance de collecteur ($R_C = 0$) ou en reliant le collecteur à la masse à l'aide d'un condensateur de capacité

Fig. IX-3



suffisante (fig. IX-3). Dans les deux cas, la *sortie est en court-circuit pour le courant alternatif* (mais pas pour le courant continu).

Si la tension v_{CE} est nulle, nous pouvons écrire :

$$v_{BE} = h_{11}\, i_B \quad \text{ou :} \quad h_{11} = \frac{v_{BE}}{i_B}$$

$$i_C = h_{21}\, i_B \quad \text{ou :} \quad h_{21} = \frac{i_C}{i_B}$$

— $\boldsymbol{h_{11}}$ représente donc la **résistance d'entrée du transistor à sortie en court-circuit** pour le signal alternatif. Ce paramètre s'exprime donc en ohms.

— $\boldsymbol{h_{21}}$ est égal au rapport des intensités des courants de sortie et d'entrée ; c'est **l'amplification en courant lorsque la sortie est en court-circuit** pour le signal alternatif. h_{21} est un *nombre abstrait*.

Au chapitre précédent, nous avons vu que le courant I_C est donné en fonction de I_B par la relation suivante :

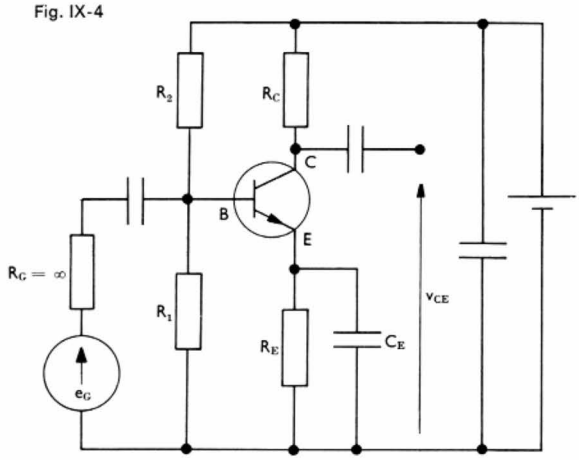
$$I_C = \beta\, I_B + I_{CEO}$$

En différenciant, si β est constant (caractéristique $I_C(I_B)$ linéaire), il vient :

$$h_{21} = \frac{dI_C}{dI_B} = \beta$$

2.2. $i_B = 0$. — Pour que la composante alternative du courant d'entrée soit nulle, il faut que la résistance R_G soit infinie (fig. IX-4) ; le montage que nous considérons comporte une résistance de collecteur R_C.

Fig. IX-4



Les équations précédentes, appliquées à ce montage, s'écrivent :

$$v_{BE} = h_{12}\, v_{CE} \text{ ou : } h_{12} = \frac{v_{BE}}{v_{CE}}$$

$$i_C = h_{22}\, v_{CE} \text{ ou : } h_{22} = \frac{i_C}{v_{CE}}$$

— $\boldsymbol{h_{12}}$ est ainsi un nombre sans dimension qui permet de connaître la fraction de la tension de sortie ramenée dans le circuit d'entrée. C'est le **facteur de report en tension à entrée ouverte** ou **facteur de réaction de la sortie sur l'entrée lorsque celle-ci est ouverte** (sous-entendu ouverte pour le signal alternatif).

— $\boldsymbol{h_{22}}$ représente la **conductance de sortie du transistor à entrée ouverte** pour le signal alternatif. Ce paramètre est exprimé en *siemens* et plus couramment en *ampères par volt* ou en *milliampères par volt*.

2.3. Conclusion. — Ces paramètres sont de natures différentes et sont appelés **paramètres hybrides** pour cette raison.

Pour faciliter la compréhension, nous rappellerons constamment la nature du paramètre considéré en utilisant les notations suivantes dans la suite de l'exposé :

$$h_{11} = r_{BE}\,;\; h_{12} = \mu\,;\; h_{21} = \beta\,;\; h_{22} = \frac{1}{\rho}$$

Exemple : transistor basse fréquence : $r_{BE} = 2\,000\ \Omega$, $\mu = 2.10^{-4}$, $\beta = 100$, $\rho = 40\ \text{k}\Omega$.

3. SCHÉMA ÉQUIVALENT DU TRANSISTOR

3.1. Circuit d'entrée. — Les grandeurs v_{BE} et i_B sont relatives au circuit d'entrée et l'équation (1) :

$$v_{BE} = h_{11}\, i_B + h_{12}\, v_{CE} = r_{BE}\, i_B + \mu\, v_{CE}$$

peut donc être considérée comme appliquée à ce circuit.

— Le terme $r_{BE}\, i_B$ se présente comme la chute de tension provoquée par le passage d'un courant i_B dans une résistance de valeur r_{BE}.

— Le terme μv_{CE} traduit simplement une perturbation due au circuit de sortie (réaction de la sortie sur l'entrée). Nous pouvons la représenter par la f.é.m. d'un générateur sans résistance interne, commandé par la tension de sortie v_{CE}.

Nous aboutissons ainsi à un schéma très simple (fig. IX-5) qui n'est autre que la représentation de Thévenin d'un dipôle linéaire. Il faut bien avoir présent à l'esprit que l'équation (1) est semblable à celle qui est obtenue en appliquant la loi d'Ohm à ce circuit électrique. C'est pour cette raison que celui-ci est appelé *schéma équivalent de l'entrée du transistor*.

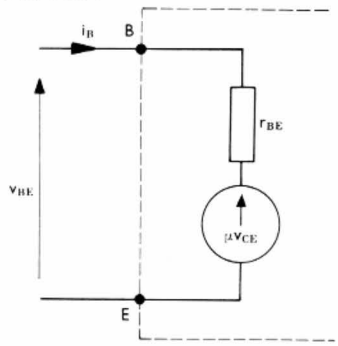


Fig. IX-5

3.2. Circuit de sortie. — L'équation (2) :

$$i_C = h_{21}\, i_B + h_{22}\, v_{CE} = \beta\, i_B + \frac{1}{\rho}\, v_{CE}$$

permet de considérer i_C comme la somme de deux courants et cela conduit à utiliser un schéma comportant deux dérivations.

— Le terme $\beta\, i_B$ représente un courant lié au courant dans le circuit d'entrée ; nous pouvons considérer qu'il est fourni par un générateur de courant commandé par i_B. Rappelons qu'un générateur de courant est caractérisé par le courant qu'il fournit et non par sa f.é.m. comme un générateur de tension (fig. IX-6) ; par ailleurs, sa résistance interne est infinie. Signalons également qu'à tout générateur nous pouvons faire correspondre deux schémas équivalents, l'un comporte un générateur de tension et l'autre un générateur de courant (fig. IX-7) ; dans chaque cas, il faut choisir le plus commode.

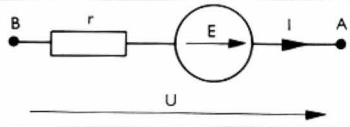
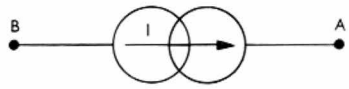
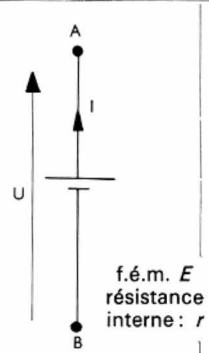
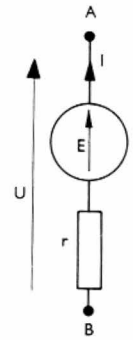
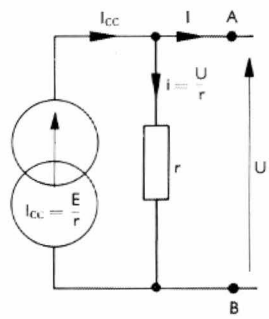
	Générateur de tension	Générateur de courant
Représentation		
Intérêt	Permet d'appliquer entre A et B une tension U $U = E - rI$	Fournit un courant I quelle que soit la résistance des éléments composant ce circuit
Résistance interne	r	∞

Fig. IX-6

Fig. IX-7
Schémas équivalents d'un générateur

Générateur	Schéma équivalent avec générateur de tension	Schéma équivalent avec générateur de courant
 f.é.m. E résistance interne : r		
$U = E - rI$ ou $I = \frac{E}{r} - \frac{U}{r}$	$U = E - rI$ ou $I = \frac{E}{r} - \frac{U}{r}$	$I = I_{CC} - i$ ou $I = \frac{E}{r} - \frac{U}{r}$

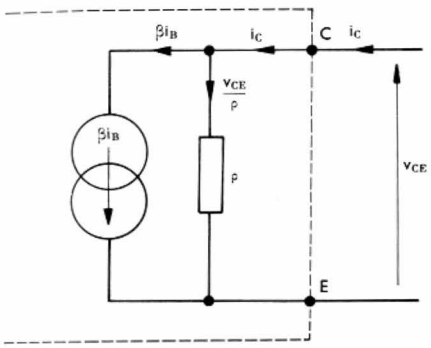


Fig. IX-8

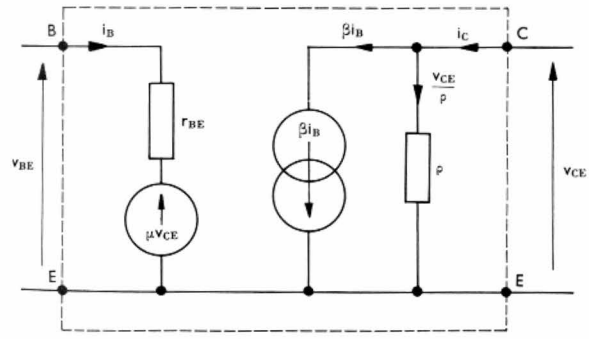


Fig. IX-9

— Le terme $\frac{v_{CE}}{\rho}$ représente un courant proportionnel à la tension entre les bornes de sortie ; il passe dans une résistance de valeur ρ placée sous la tension v_{CE}. C'est ce que représente le schéma équivalent du circuit de sortie du transistor (fig. IX-8).

3.3. Conclusion. — Le schéma équivalent du transistor est obtenu en associant ces deux dipôles qui ont une électrode commune : l'émetteur E (fig. IX-9).

4. SCHÉMA ÉQUIVALENT DE L'ÉTAGE AMPLIFICATEUR

4.1. Schéma général. — Le schéma équivalent de l'étage amplificateur (fig. IX-10) s'obtient à partir du schéma équivalent du transistor.

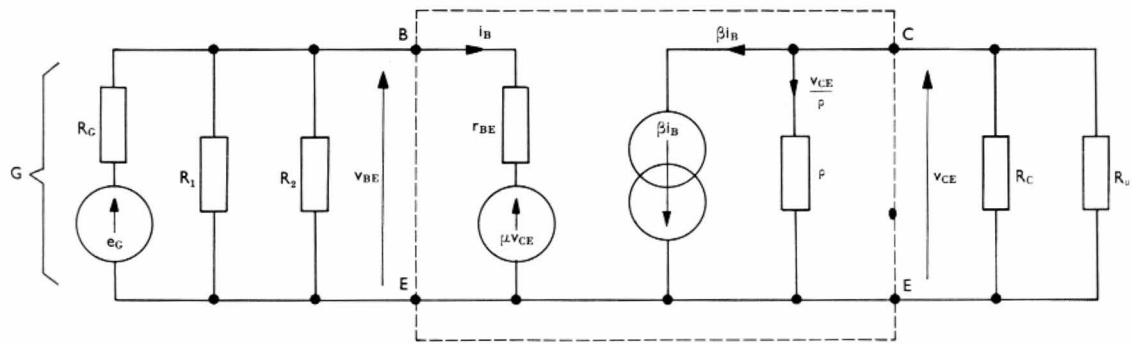


Fig. IX-10

— Dans le circuit d'entrée, il faut placer entre B et E le générateur fournissant le signal alternatif (f.é.m. : e_G; résistance interne : R_G) et les résistances R_1 et R_2 du pont de polarisation.

— Dans le circuit de sortie, il faut disposer les résistances R_C et R_u en parallèle entre les bornes C et E.

Rappelons que ce schéma ne doit pas comporter le générateur de courant continu utilisé pour la polarisation du transistor car cet appareil est supposé bien découplé et il ne doit donc pas être considéré pour le fonctionnement en courant alternatif.

4.2. Schéma simplifié. — Les résistances ρ, R_C et R_u peuvent être remplacées par la résistance R'_C équivalente à ce groupement $\left(\frac{1}{R'_C} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{R_C} + \frac{1}{R_u}\right)$. La tension v_{CE} est alors donnée par l'expression suivante (fig. IX-11) :

$$v_{CE} = -R'_C \beta i_B$$

Les résistances R_1 et R_2 peuvent également être remplacées par la résistance équivalente $R_P = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. En général, cette résistance est suffisamment grande et elle ne dérive qu'une fraction très faible du courant fourni par le générateur G ; pour la suite, nous supposerons cette condition réalisée et nous supprimerons la résistance R_P du schéma équivalent.

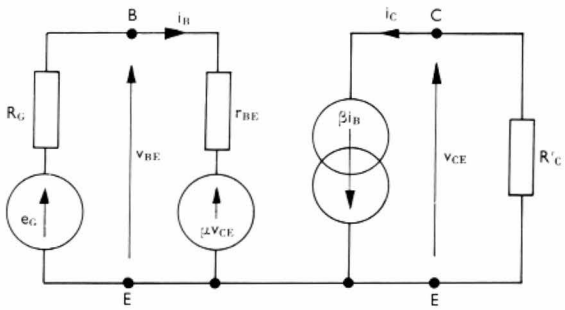


Fig. IX-11

Si nous appliquons la loi d'Ohm au circuit d'entrée, nous pouvons écrire l'égalité suivante :

$$e_G = (R_G + r_{BE})\, i_B + \mu\, v_{CE}$$

En tenant compte du résultat précédent, il vient :

$$e_G = (R_G + r_{BE} - \mu R'_C \beta)\, i_B$$

La réaction de la sortie sur l'entrée modifie peu la valeur de l'intensité i_B car le terme $(\mu R'_C \beta)$ est négligeable devant la somme $(R_G + r_{BE})$ dans la plupart des cas. Pour nous en rendre compte, prenons un exemple : $\mu = 2.10^{-4}$, $r_{BE} = 2\ \text{k}\Omega$, $\beta = 100$, $\rho = 40\ \text{k}\Omega$, $R_G = 2\ \text{k}\Omega$, $R'_C = 1\ \text{k}\Omega$. Ces valeurs correspondent à des éléments fréquemment utilisés. Dans ces conditions, la somme $(R_G + r_{BE})$ est égale à 4 kΩ et le produit $\mu R'_C \beta$ est égal à 20 Ω ; il est parfaitement légitime de le négliger devant la somme précédente. Il en est encore de même lorsque la résistance R'_C est maximale et est sensiblement égale à ρ (lorsque des résistances sont en parallèle, la résistance équivalente est toujours inférieure à la plus petite de ces résistances).

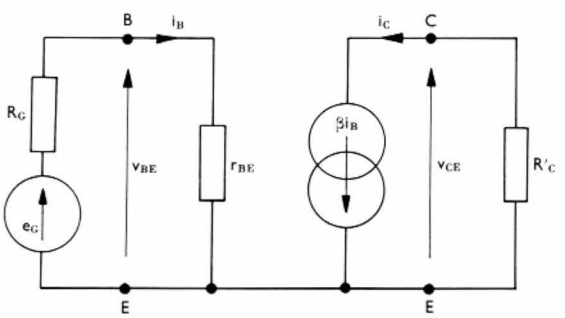


Fig. IX-12

Nous pouvons donc écrire : $e_G \approx (R_G + r_{BE})\, i_B$

En conclusion, le circuit d'entrée du schéma équivalent du transistor peut donc ne comporter que la résistance r_{BE} (fig. IX-12). Ce schéma simplifié peut être systématiquement employé pour l'étude des montages amplificateurs à transistors.

5. AUTRES SCHÉMAS ÉQUIVALENTS

5.1. Base interne. — La couche P constituant la base d'un transistor NPN est extrêmement mince et très peu dopée. Le courant de base doit traverser cette couche peu conductrice, de résistance non négligeable, pour passer de la connexion de base à la partie active (la base réelle) *située entre les jonctions J_C et J_E*. La résistance r_{BE} permet de tenir compte à la fois de cette résistance et de la résistance dynamique de la jonction J_E. Cependant, il est logique de séparer ces résistances, car si la première est constante, la seconde dépend d'une variation du point de repos. Pour cette raison, nous plaçons sur le schéma équivalent (fig. IX-13), d'une part, $r_{BB'}$ pour représenter la

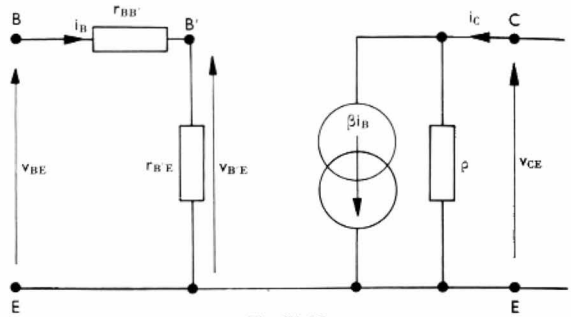


Fig. IX-13

résistance transversale de la base, d'autre part, $r_{B'E}$ pour figurer la résistance dynamique de la jonction J_E. Le point B' (inaccessible à l'expérimentateur) est appelé **base interne.** La résistance $r_{BB'}$ est comprise entre 50 et 100 Ω pour un transistor de faible puissance.

5.2. Transconductance. — La tension $v_{B'E}$ est la véritable tension de commande :

$$v_{B'E} = r_{B'E} i_B$$

Le courant débité par le générateur de courant placé dans le circuit collecteur-émetteur peut être exprimé en fonction de cette tension :

$$\beta\, i_B = \frac{\beta}{r_{B'E}}\, v_{B'E}$$

Le quotient $\frac{\beta}{r_{B'E}}$ a les dimensions d'une conductance ; il est égal au rapport du **courant de sortie,** *lorsque celle-ci est en court-circuit,* et de la **tension d'entrée.** Il est appelé **transconductance intrinsèque** et est désigné par le symbole g_m.

Ce paramètre du transistor est utilisé sur le schéma équivalent de la figure IX-14.

Le calcul montre que la transconductance d'un transistor est proportionnelle à l'intensité du courant de collecteur

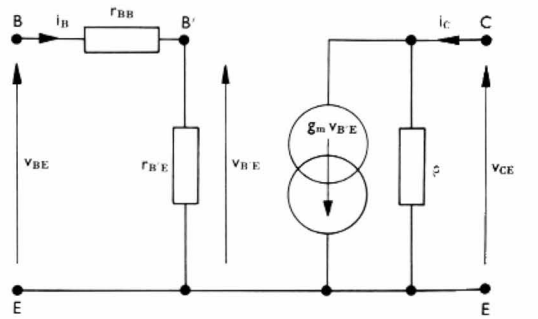


Fig. IX-14

I_C; à la température de 300 K ce coefficient est sensiblement égal à :

$g_m \approx 40\ I_C$ pour un transistor au germanium,
$g_m \approx 35\ I_C$ pour un transistor au silicium.

Ce résultat est remarquable : il permet de constater que la transconductance ne dépend pas de la dispersion due à la fabrication et elle est la même pour tous les transistors de même nature, pour une valeur déterminée de I_C.

Remarque : Le résultat précédent est intéressant aussi parce qu'il montre que la résistance $r_{B'E}$ est inversement proportionnelle à I_C :

$$g_m = \lambda I_C = \frac{\beta}{r_{B'E}}$$

($\lambda = 40$ pour un transistor au germanium et 35 pour un transistor au silicium).

D'où nous tirons : $r_{B'E} = \dfrac{\beta}{\lambda I_C}$

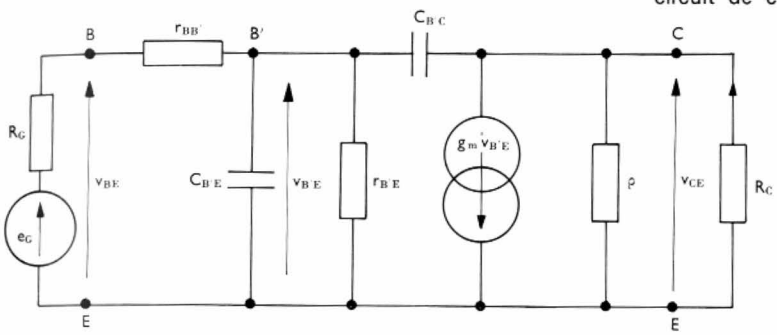


Fig. IX-15

Si le courant de collecteur I_C *est exprimé en milliampères,* il vient :

$$\begin{cases} r_{B'E} \approx 25\ \dfrac{\beta}{I_C} \text{ pour un transistor au germanium,} \\ r_{B'E} \approx 30\ \dfrac{\beta}{I_C} \text{ pour un transistor au silicium.} \end{cases}$$

Pour un transistor de faible puissance $r_{BB'}$ est comprise entre 50 et 100 Ω ; cette résistance est négligeable devant $r_{B'E}$ pour les faibles valeurs de I_C. Dans ce cas, les résistances r_{BE} et $r_{B'E}$ sont sensiblement égales.

5.3. Schéma équivalent aux fréquences élevées. — Le schéma équivalent de la figure IX-14 peut être complété ; en effet, il est possible de tenir compte des capacités parasites des deux jonctions J_E et J_C.

La capacité parasite $C_{B'C}$ de la jonction J_C peut être représentée par un condensateur reliant la base interne B' et le collecteur ; c'est la capacité d'une jonction polarisée en inverse (capacité de transition) et sa valeur peut être très faible (4 à 10 pF pour un transistor planar).

La jonction J_E présente une capacité parasite beaucoup plus importante puisqu'il s'agit d'une capacité de stockage ; elle peut être figurée par un condensateur $C_{B'E}$ branché entre la base interne B' et l'émetteur (fig. IX-15). Ce schéma est celui que nous utiliserons pour calculer les fréquences les plus élevées, transmises par les amplificateurs à large bande (V. chap. 13). Il est quelquefois complété par une résistance $r_{B'C}$ branchée entre B' et le collecteur C pour tenir compte de la transmission inverse ; cette résistance a une valeur très grande (quelques mégohms souvent) et le courant qui la traverse, de la sortie vers l'entrée, est presque toujours négligeable. Ce schéma est connu sous le nom de **schéma équivalent naturel** ou **schéma de Giacoletto** (fig. IX-16).

6. FRÉQUENCES DE COUPURE D'UN TRANSISTOR

Pour pouvoir comparer le comportement de divers transistors aux fréquences élevées, deux paramètres sont couramment utilisés : ils sont appelés **fréquence de coupure de l'amplification de courant** (notée f_β) et **fréquence de transition** (notée f_T).

Considérons un transistor fonctionnant à une fréquence élevée f, représenté par son schéma de Giacoletto (fig. IX-16). Supposons que la résistance R_C, placée dans le circuit de collecteur, soit suffisamment faible pour que nous puissions négliger la tension alternative v_{CE} devant $v_{B'E}$ et aussi l'influence de la résistance ρ (si la résistance ρ est très supérieure à R_C elle dérive un courant négligeable devant i_C).

6.1. Fréquence de coupure f_β. — La tension d'entrée v_{BE} étant sinusoïdale et de fréquence f (pulsation : $\omega = 2\pi f$), nous pouvons utiliser les nombres complexes pour faciliter les calculs. Appelons $\underline{I_C}$, $\underline{I_B}$ et $\underline{V_{B'E}}$ les valeurs complexes associées à i_C, i_B et $v_{B'E}$ et déterminons le rapport $\dfrac{\underline{I_C}}{\underline{I_B}}$ que nous noterons $\underline{\beta}$. Ce nombre représente l'*amplification dynamique à sortie en court-circuit,* à une fréquence élevée.

$$\underline{I_C} = g_m \underline{V_{B'E}}$$

La tension $\underline{V_{CE}}$ étant négligée, la d.d.p. aux bornes du condensateur $C_{B'C}$ est sensiblement égale à $\underline{V_{B'E}}$ et $C_{B'C}$ peut être considéré comme étant en parallèle avec $C_{B'E}$. D'où nous pouvons écrire (fig. IX-17) :

$$\underline{V_{B'E}} = \underline{I_B}\,\underline{Z} = \underline{I_B}\,\frac{r_{B'E}}{1 + j\,r_{B'E}\,(C_{B'C} + C_{B'E})\,\omega}$$

et :
$$\underline{\beta} = \frac{\underline{I_C}}{\underline{I_B}} = \frac{g_m\,r_{B'E}}{1 + j\,r_{B'E}\,(C_{B'C} + C_{B'E})\,\omega}$$

Pratiquement, la capacité $C_{B'C}$ est très inférieure à $C_{B'E}$.

D'où : $\underline{\beta} \approx \dfrac{g_m\,r_{B'E}}{1 + j\,r_{B'E}\,C_{B'E}\,\omega}$

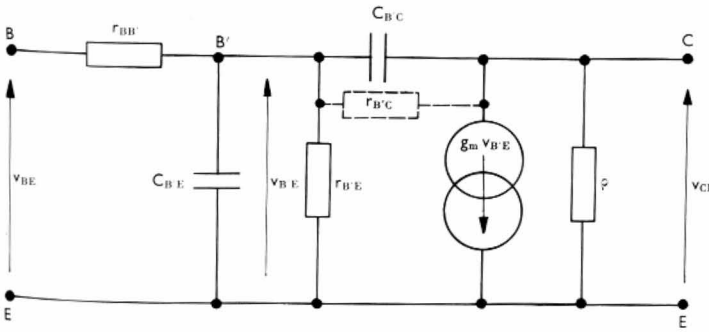


Fig. IX-16

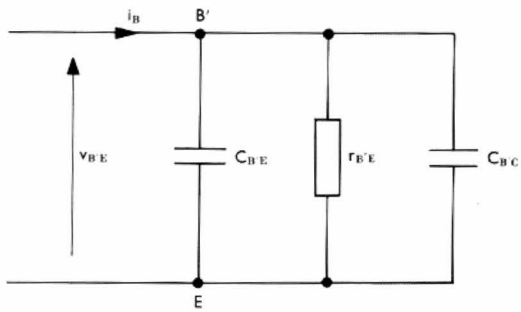


Fig. IX-17

Le numérateur $g_m\ r_{B'E}$ est égal à β (V. ci-dessus § 5.2). Par ailleurs, posons : $\omega_\beta = \dfrac{1}{r_{B'E}\ C_{B'E}}$; il vient :

$$\underline{\beta} = \frac{\beta}{1 + j\,\dfrac{\omega}{\omega_\beta}}$$

Le module de cette amplification dynamique de courant est égal à :

$$|\underline{\beta}| = \frac{\beta}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_\beta}\right)^2}}$$

Tant que ω est très inférieur à ω_β, les nombres $|\underline{\beta}|$ et β sont sensiblement égaux. Lorsque ω croît $|\underline{\beta}|$ décroît et la fréquence de coupure f_β est celle pour laquelle nous avons :

$$|\beta| = \frac{\beta}{\sqrt{2}}$$

Dans ce cas $\omega = \omega_\beta$ et nous pouvons donc écrire :

$$\boxed{f_\beta = \frac{\omega_\beta}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\ r_{B'E}\ C_{B'E}}}$$

6.2. Fréquence de transition. — Il est parfaitement possible d'utiliser un transistor en amplificateur à des fréquences supérieures à f_β ; en revanche, il est peu intéressant de dépasser la fréquence au-delà de laquelle le module de I_C est inférieur à celui de I_B (c'est-à-dire lorsque l'amplitude de i_C devient inférieure à celle de i_B).

La **fréquence de transition** f_T est celle qui est définie par l'égalité de ces modules :

$$|\underline{I_C}| = |\underline{I_B}| \Rightarrow |\underline{\beta}| = \left|\frac{\underline{I_C}}{\underline{I_B}}\right| = 1$$

Si le module de l'amplification dynamique de courant est égal à 1, nous pouvons écrire :

$$1 + \left(\frac{\omega_T}{\omega_\beta}\right)^2 = \beta^2 \quad \text{ou :} \quad \frac{\omega_T}{\omega_\beta} = \sqrt{\beta^2 - 1}$$

Comme 1 est négligeable devant β, nous déduisons :

$$\frac{\omega_T}{\omega_\beta} = \frac{f_T}{f_\beta} \approx \beta$$

soit :

$$\boxed{f_T = \beta\ f_\beta}$$

La fréquence f_T définit en quelque sorte les performances du transistor ; elle est égale au produit d'une amplification (β) et d'une fréquence (f_β) à partir de laquelle cette amplification commence à décroître.

Remarque : Une fréquence de coupure f_α pour le facteur $|\underline{\alpha}| = \left|\dfrac{\underline{I_C}}{\underline{I_E}}\right|$ est définie dans certains cas ; c'est la fréquence pour laquelle nous avons $|\underline{\alpha}| = \dfrac{\alpha}{\sqrt{2}}$. Un calcul analogue à celui que nous avons fait pour la fréquence de coupure f_β montre que f_α est peu différente de f_T.

CHAPITRE X

TRANSISTOR À EFFET DE CHAMP

1. EFFET DE CHAMP

Dans un circuit électrique qui comporte un générateur de courant continu, une résistance et une plaquette de sulfure de cuivre soumise par ailleurs à un champ électrique, l'intensité du courant dépend de celle du champ (Lilienfeld, 1928). En effet, le champ électrique modifie la répartition des porteurs dans le semiconducteur et, par suite, la résistance de la plaquette (*effet de champ*).

Cet effet a été utilisé avec un barreau de semiconducteur et a pu être interprété simplement. Par exemple, avec un semiconducteur de type N, en allant de la périphérie vers le centre, nous pouvons distinguer (fig. X-1) :

— une couche chargée négativement (de nombreux atomes superficiels ont capturé des électrons) ;

— une couche sous-jacente chargée positivement par suite du départ d'un grand nombre d'électrons vers la couche précédente ;

— une *région neutre* (par compensation). Cette dernière région est formée par un semiconducteur analogue à ceux considérés pour les utilisations habituelles et est seule conductrice.

La présence de deux couches voisines portant des charges de signes contraires entraîne évidemment l'existence d'un champ électrique interne. Si nous appliquons un champ électrique externe de même sens que le champ interne, la zone chargée augmente d'épaisseur, au détriment de la zone neutre, et *la résistance du barreau croît.* Inversement, si les deux champs ont des sens opposés, les dimensions de la zone neutre augmentent et *la résistance présentée par celui-ci décroît.* Dans un semiconducteur de type P, le même phénomène peut être mis en évidence, mais les signes des charges sont inversés par rapport au cas précédent.

Un grand nombre de dispositifs mettant en œuvre ce principe ont été mis au point. Ils ont reçu des noms divers : transistor à effet de champ (T.E.C.), statistor, gridistor par exemple, ou sont désignés par un certain nombre de lettres dans lesquelles se trouvent souvent les trois initiales F.E.T. de l'appellation américaine *field effect transistor* (transistor à effet de champ).

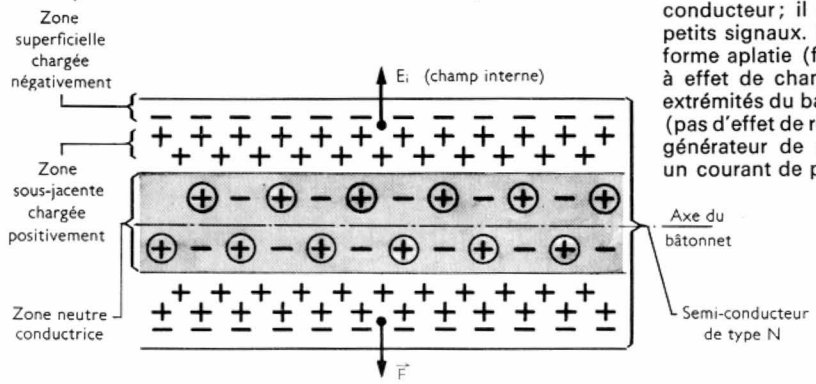


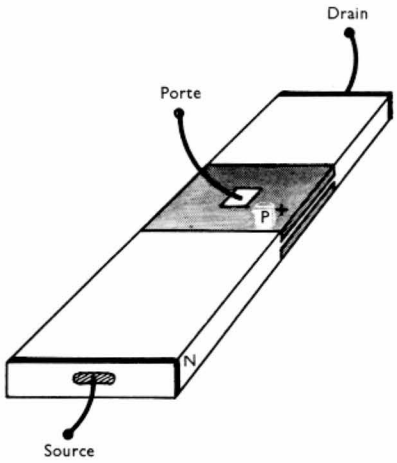
Fig. X-1

2. TRANSISTOR À EFFET DE CHAMP

2.1. Description. — Comme le transistor à jonctions, le transistor à effet de champ est un dispositif semiconducteur ; il est fréquemment utilisé pour amplifier de petits signaux. Il est constitué d'un barreau de silicium de forme aplatie (fig. X-2), très souvent de type N (transistor à effet de champ à canal N). Les soudures placées aux extrémités du barreau sont des contacts purement résistants (pas d'effet de redressement). Lorsqu'elles sont réunies à un générateur de courant continu convenablement disposé, un courant de porteurs majoritaires (électrons si le barreau

est de type N) traverse le barreau. Ces porteurs entrent dans le barreau par l'électrode appelée **source,** et en sortent par l'électrode appelée **drain.** Une mince couche de silicium P fortement dopé (P^+) est déposée sur deux faces latérales opposées du barreau pour former une électrode unique appelée **porte** du transistor.

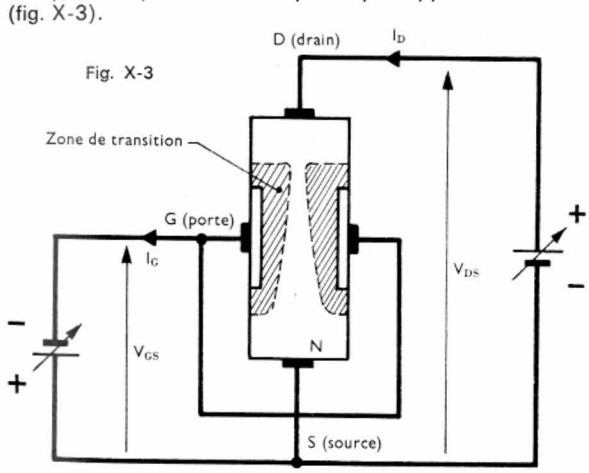
Fig. X-2



2.2. Polarisation. — Lorsqu'un transistor à effet de champ est utilisé en amplificateur, la source et le drain sont reliés au circuit d'utilisation, tandis que la source et la porte sont connectées au circuit d'entrée (ou de commande).

Si nous considérons encore un transistor à effet de champ à canal N, comme les porteurs majoritaires du barreau entrent par la source (autrement dit comme le courant correspondant entre *conventionnellement* par le drain), il faut que le *drain soit positif par rapport à la source* (fig. X-3).

Fig. X-3



Par ailleurs, le champ électrique qui doit s'ajouter, ou se retrancher, au champ interne est produit en plaçant la *jonction porte-source sous tension inverse ;* de sa valeur dépend l'intensité du courant qui circule du drain vers la source. Donc, la *porte, zone P d'un T.E.C. à canal N, doit être négative par rapport à la source.* Le courant de porte est ainsi extrêmement faible et la puissance nécessaire pour commander le courant de drain est beaucoup plus petite que celle qui doit être fournie à un transistor à jonctions pour commander le courant de collecteur.

La polarisation d'un T.E.C. à canal P est opposée à celle d'un transistor à effet de champ à canal N (fig. X-4).

3. CARACTÉRISTIQUES STATIQUES D'UN TRANSISTOR À EFFET DE CHAMP

Nous désignerons :

— par I_G la valeur algébrique du courant entrant par la porte,

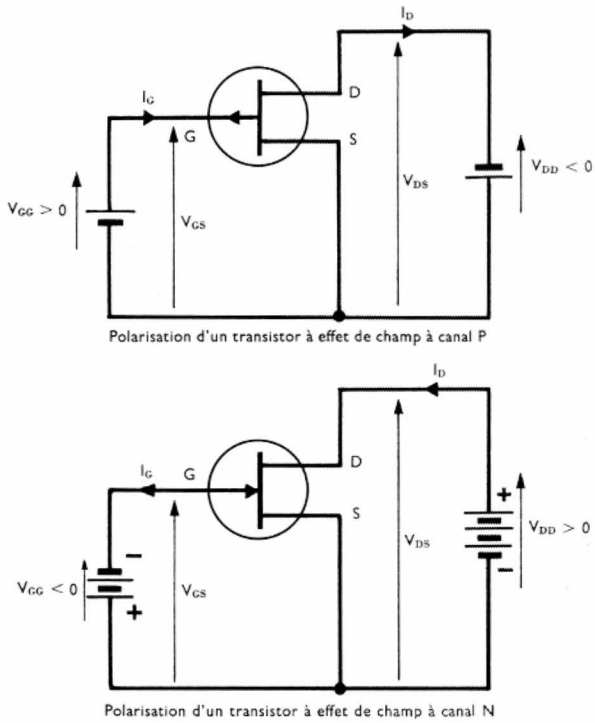


Fig. X-4

— par I_D la valeur algébrique du courant entrant par le drain,

— par V_{GS} la tension porte-source,

— par V_{DS} la tension drain-source,

— par V_{GG} et V_{DD} les tensions de polarisation des circuits porte-source et drain-source mesurées en prenant le potentiel de la source comme référence ; V_{GG} est obligatoirement de signe opposé à V_{DD} pour que la jonction porte-source soit polarisée en inverse.

Le courant de drain I_D n'est pas donné en fonction de V_{GS} et de V_{DS} par une loi mathématique simple. Nous devons avoir recours à des représentations graphiques, particulièrement aux deux réseaux de caractéristiques suivants :

$I_D = f\ (V_{DS})$ avec $V_{GS} =$ Cte (réseau de sortie)

$I_D = g\ (V_{GS})$ avec $V_{DS} =$ Cte (réseau de transfert)

3.1. Réseau de sortie (fig. X-5). — Une caractéristique $I_D = f\ (V_{DS})$ tracée pour une tension V_{GS} constante, peut se décomposer en trois parties :

— *Pour les tensions V_{DS} plus petites que V_P,* le courant I_D est sensiblement proportionnel à V_{DS}. Le barreau se com-

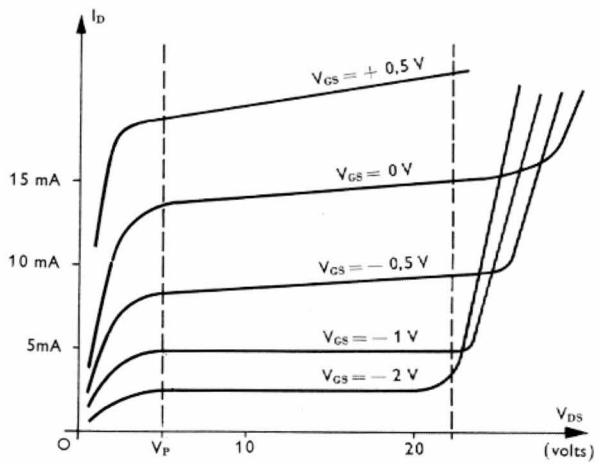


Fig. X-5

porte comme une simple résistance dont la valeur augmente lorsque la largeur du canal diminue, c'est-à-dire lorsque la tension V_{GS} diminue (V_{GS} augmente en valeur absolue).

— Pour des tensions V_{DS} supérieures à V_P, le courant I_D n'augmente pratiquement plus lorsque V_{DS} croît: il y a *pincement* du barreau. Ce phénomène se produit d'abord vers l'extrémité *M* de la zone de transition voisine du drain (fig. X-6), car la tension entre les zones P et N du cristal est maximale. Aussi étroit que soit le barreau de silicium,

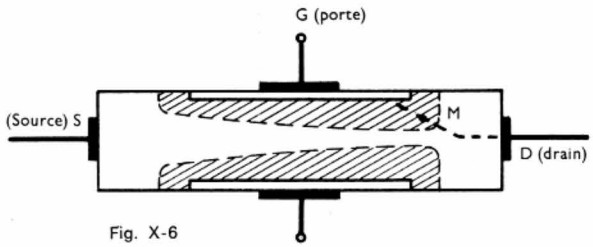


Fig. X-6

les deux zones de transition ne se rejoignent pas et ne ferment pas complètement le canal conducteur (sinon la zone entre le point *M* et le drain deviendrait isolante, et la tension en *M* redeviendrait égale à la tension de la source *S*, supprimant ainsi l'interruption du courant). À partir d'une certaine tension, la largeur efficace du canal atteint donc une certaine limite dépendant des dimensions géométriques, des tensions appliquées, du dopage, et elle reste constante: c'est ce qui a été appelé *pincement du barreau*. Si la tension V_{DS} croît dans le canal, la longueur pincée augmente.

— À partir d'une certaine valeur de la tension V_{DS}, la tension d'avalanche de la jonction porte-canal est atteinte, et le courant I_D croît brutalement.

Sur le réseau de la figure X-5, nous avons fait figurer la caractéristique $V_{GS} = +0{,}5$ V correspondant à une polarisation inversée de la porte. Il est en effet possible d'utiliser le transistor à effet de champ avec une telle tension puisque la conduction de la diode porte-canal ne commence qu'à partir d'une d.d.p. de + 0,6 V.

3.2. Réseau de transfert (fig. X-7). — La tension V_{DS} modifie peu la valeur du courant de drain I_D dès que V_{GS} est supérieure à V_P: *le réseau est pratiquement réduit à une seule courbe*. L'intersection d'une courbe et de l'axe des ordonnées ($V_{GS} = 0$) correspond au courant I_{DSS} (courant de drain lorsque la source est réunie à la porte) ; celle avec l'axe des abscisses ($I_D = 0$) est obtenue pour une tension V_P dont la valeur absolue est sensiblement égale à la tension de pincement.

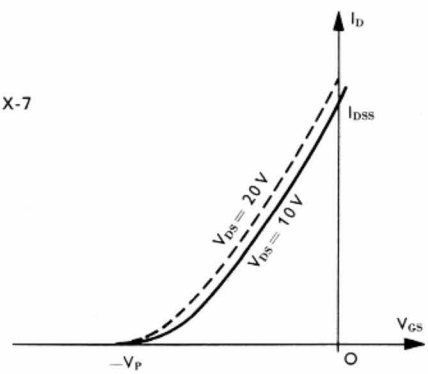


Fig. X-7

4. FONCTIONNEMENT DYNAMIQUE D'UN TRANSISTOR À EFFET DE CHAMP

4.1. Montage. — Un montage amplificateur comprend les générateurs de courant continu nécessaires pour polariser le transistor à effet de champ (fig. X-8) et un dispositif qui fournit les signaux alternatifs à amplifier (générateur *G* sur la figure X-8).

En l'absence de signal alternatif ($e_G = 0$), les courants et tensions ont leurs valeurs de repos (I_{G_0}, I_{D_0}, V_{DS_0}, V_{GS_0}).

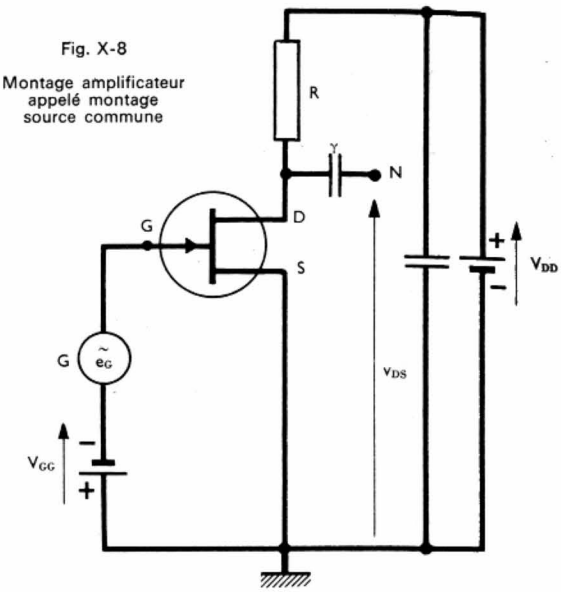


Fig. X-8

En fournissant un signal alternatif, le générateur *G* permet de modifier la tension entre *G* et *S* (mais l'amplitude de la tension variable e_G, superposée à V_{GS_0}, doit rester faible devant cette valeur de repos). Le courant de drain varie à la même fréquence que la tension porte-source et il peut être considéré comme la somme d'un courant du repos I_{D_0} et d'une composante alternative i_D. De même, la tension drain-source peut être assimilée à la somme de la tension de repos V_{DS_0} et d'une tension alternative v_{DS}.

Le condensateur γ, relié au drain *D*, permet de recueillir la tension alternative v_{DS} entre le point *N* et la masse du montage. Si la f.é.m. e_G est sinusoïdale, il en est de même de v_{DS}; ces tensions ont la même fréquence et sont en opposition de phase.

4.2. Paramètres du transistor à effet de champ. — Le courant I_D peut être représenté implicitement par l'expression suivante:

$$I_D = f\,(V_{GS},\ V_{DS})$$

Nous avons vu que, comme avec un transistor à jonctions (V. chap. 8), l'amplification est obtenue en produisant des variations des courants et des tensions autour des valeurs de repos. En différenciant l'expression précédente, nous allons donc établir une relation entre ces variations élémentaires dI_D, dV_{GS} et dV_{DS}:

$$dI_D = \left(\frac{\partial f}{\partial V_{GS}}\right) dV_{GS} + \left(\frac{\partial f}{\partial V_{DS}}\right) dV_{DS}$$

Or, les variations élémentaires dI_D, dV_{GS} et dV_{DS} peuvent être assimilées aux composantes alternatives i_D, v_{GS}, v_{DS} respectivement du courant de drain et des tensions porte-source et drain-source.

Par ailleurs, pour un point de repos déterminé, les dérivées partielles:

$$\left(\frac{\partial I_D}{\partial V_{GS}}\right) \text{ pour } V_{DS} = \text{Cte et } \left(\frac{\partial I_D}{\partial V_{DS}}\right) \text{ pour } V_{GS} = \text{Cte}$$

sont constantes et nous les noterons respectivement g_m et $\frac{1}{\rho}$ (par analogie avec le transistor à jonctions). La relation précédente peut donc s'écrire:

$$i_D = g_m\, v_{GS} + \frac{v_{DS}}{\rho}$$

Dans cette relation linéaire g_m et ρ sont les deux paramètres du T.E.C.; g_m est la **transconductance** et ρ est **la résistance dynamique de sortie à entrée en court-circuit.**

Le courant inverse de la jonction porte-source étant très faible, nous pouvons considérer la composante alternative i_G comme nulle.

Si nous comparons ces résultats à ceux que nous avons obtenus pour le transistor à jonctions (V. chap. 9), nous

constatons une seule différence importante: pour un T.E.C., l'équation du fonctionnement dynamique du circuit d'entrée se réduit à : $i_G = 0$

et il n'y a que deux paramètres à considérer.

4.3. Schéma équivalent du transistor à effet de champ. — Nous opérons comme nous l'avons fait avec le transistor à jonctions.

Puisque nous pouvons considérer que i_G est nulle, le circuit d'entrée peut être représenté par un circuit ouvert (fig. X-9).

Le courant de sortie i_D est la somme de deux courants: le premier est fourni par un générateur de courant commandé par la d.d.p. v_{GS} et le second passe dans une résistance ρ placée sous la tension v_{DS}.

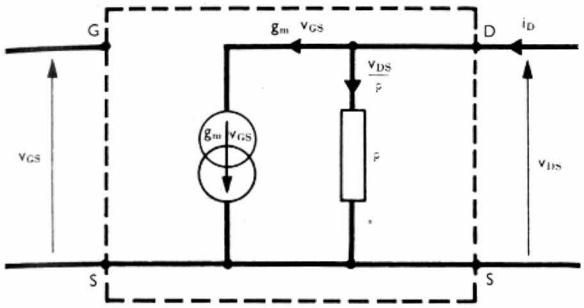


Fig. X-9

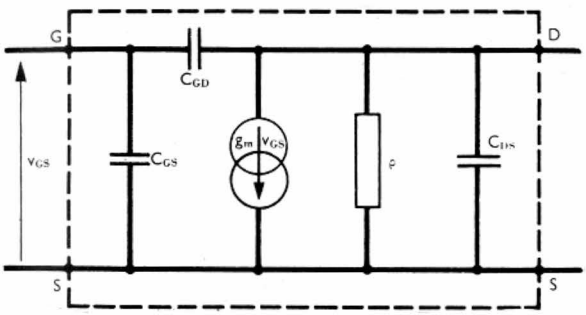


Fig. X-10

Ce schéma peut être complété (fig. X-10) en plaçant des condensateurs C_{GS} et C_{DS} pour symboliser les faibles capacités parasites dues surtout aux fils de liaisons et au support. C_{GD} représente la capacité beaucoup plus gênante de la jonction porte-canal. Le tableau suivant indique les ordres de grandeur des divers éléments du schéma équivalent d'un T.E.C.

g_m	1 à 10 mA/V
ρ	0,1 à 1 MΩ
C_{DS}	0,1 à 1 pF
C_{GD}, C_{GS}	1 à 10 pF

5. TRANSISTOR À EFFET DE CHAMP À PORTE ISOLÉE

Ce transistor à effet de champ, souvent appelé *MOSFET* (*Metal-Oxide-Semiconductor-Field-Effect-Transistor*) est une amélioration du T.E.C. que nous venons d'étudier. Son grand intérêt vient surtout de ce qu'il peut être facilement incorporé dans un circuit intégré. Les transistors à porte isolée comportent en général un canal N. Nous devons en distinguer deux sortes appelées *transistors à enrichissement* et *transistors à appauvrissement*.

5.1. Transistor à porte isolée à enrichissement (fig. X-11). — Ce transistor est constitué de deux couches N très voisines (distantes de 50 à 100 μm), très fortement dopées (N +) obtenues par diffusion sur un substrat de type P. Après soudure de deux électrodes d'aluminium,

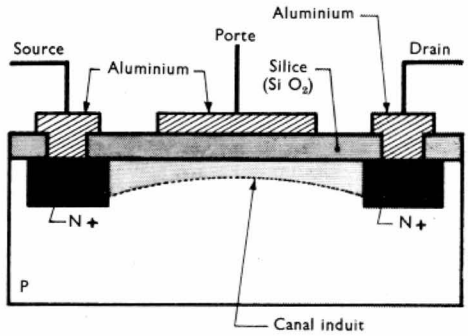


Fig. X-11

une oxydation permet de recouvrir l'ensemble d'une couche de silice très mince. Une nouvelle couche d'aluminium est déposée entre les électrodes source et drain, pour constituer la porte qui est ainsi *isolée* du cristal par la couche de silice.

Lorsque le potentiel de la porte est positif par rapport au substrat, l'ensemble porte-couche d'oxyde-substrat se comporte comme un condensateur dont les armatures sont la porte et la partie du substrat placée immédiatement sous la couche d'oxyde (entre la porte et le drain). *Dans cette région s'accumulent donc des charges négatives mobiles constituant un canal conducteur* dont la section est d'autant plus importante que la tension appliquée à la porte est grande.

Les caractéristiques de cet élément s'apparentent beaucoup à celles du T.E.C. à jonction (fig. X-12) et leurs utilisations sont sensiblement les mêmes. Une particularité de ce transistor à porte isolée est sa très grande impédance d'entrée, plus grande encore que celle d'un T.E.C. à jonction : 10^{14} Ω au lieu de 10^8 à 10^{10} Ω.

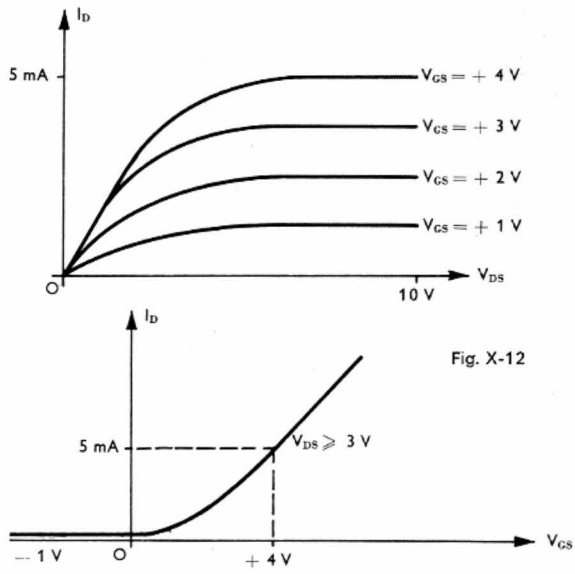


Fig. X-12

5.2. Transistor à porte isolée à appauvrissement. La structure du T.E.C. à appauvrissement est semblable à celle du T.E.C. à enrichissement à un détail près: entre les zones très dopées (N +) de source et de drain se trouve un canal N faiblement dopé (fig. X-13). Ainsi,

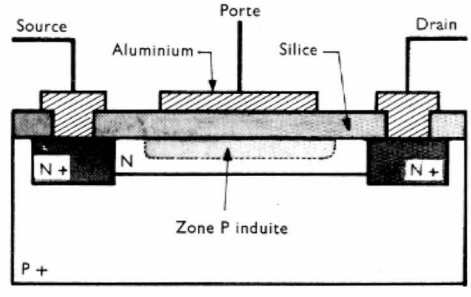


Fig. X-13

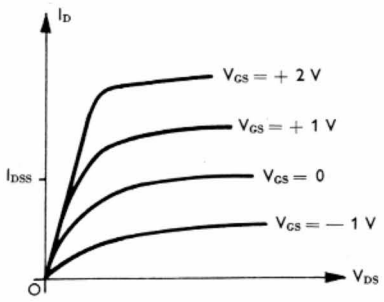
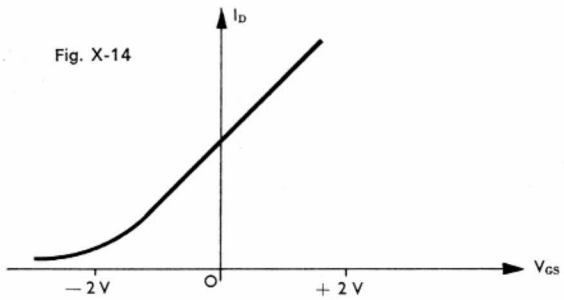
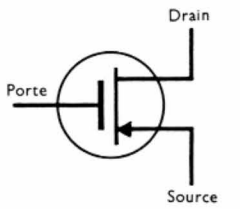
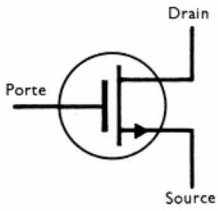


Fig. X-14





Canal P

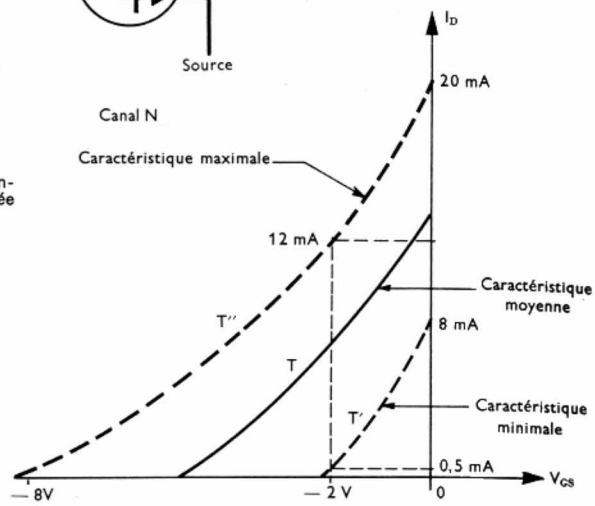


Canal N

Fig. X-15

Représentation conventionnelle des T.E.C. à porte isolée

Fig. X-16



lorsque $V_{GS} = 0$, un courant I_{DSS} assez important circule dans ce canal ; pour le réduire, il faut appliquer une tension V_{GS} négative. En effet, cette tension induit des charges électriques dans le canal et donne naissance à une zone P ; celle-ci ne peut conduire le courant issu de la source (dopée N) et la section utile du canal se trouve réduite d'autant plus que la tension V_{GS} appliquée est plus négative.

Un tel transistor possède un avantage supplémentaire : si la tension V_{GS} est positive, il peut fonctionner suivant le mode à enrichissement. C'est pour cette raison que, dans le réseau de caractéristiques (fig. X-14), la courbe correspondant à la tension $V_{GS} = 0$ est située au milieu de la zone utile ; cela est très intéressant pour certaines applications (montage découpeur de courant continu, par exemple).

Les T.E.C. à porte isolée (fig. X-15) doivent être manipulés avec de très grandes précautions. En effet, la plus petite charge électrique qui est apportée sur la porte du T.E.C. produit un champ électrique très intense dans la couche d'oxyde (extrêmement mince) et le claquage de cet isolant peut se produire. Une précaution simple doit être respectée pour éviter cet inconvénient : il faut réunir toutes les électrodes du T.E.C. à l'aide d'un ruban conducteur qui ne doit être supprimé que lorsque le transistor est définitivement incorporé dans un montage. Les impédances habituellement utilisées dans les circuits électroniques (beaucoup plus petites que l'impédance source-porte du T.E.C.) suffisent alors à assurer une protection efficace.

6. MONTAGE PRATIQUE D'UN TRANSISTOR À EFFET DE CHAMP

6.1. Dispersion des caractéristiques et dérives thermiques. — Comme pour le transistor à jonctions, l'obtention d'un point de repos convenant à n'importe quel transistor d'une série déterminée se heurte ici à deux difficultés : la dispersion des caractéristiques et les dérives thermiques. La dispersion est particulièrement importante sur la caractéristique de transfert (fig. X-16). Il est évident qu'un montage statique, utilisant une tension auxiliaire fixe de — 2 V pour polariser un transistor T, ne peut donner satisfaction (elle ne permet pas de le remplacer par un transistor T' ou T'').

Par ailleurs, les caractéristiques du T.E.C. varient également avec la température. Le courant I_D est un courant de porteurs majoritaires : *si la température augmente il décroît* (comme la mobilité des porteurs majoritaires) de 0,7 % par degré Celsius environ. De plus, à courant constant, la largeur de la zone de transition d'une jonction est aussi fonction de la température : toutes choses égales par ailleurs, lorsque la température augmente, la décroissance de l'épaisseur de cette zone se traduit par un élargissement du canal et pour une même tension V_{GS}, le *courant I_D est plus grand à température élevée*. Suivant les conditions d'utilisation du T.E.C., l'un ou l'autre des deux phénomènes est prépondérant. Lorsque I_D est très faible, le second est plus important et I_D croît avec la température. Si le courant I_D est important, c'est le premier qui domine et I_D décroît lorsque la température croît. Pour une valeur intermédiaire I_{D_0}, ces deux effets se compensent exactement, mais ce courant est souvent trop faible pour conduire à un fonctionnement dynamique satisfaisant.

6.2. Emploi d'un pont de polarisation. — Les circuits de polarisation sont souvent établis sans tenir compte du point de dérive nulle, quitte ensuite à corriger les dérives thermiques par un montage approprié.

Comme pour le transistor à jonctions, le schéma le plus fréquemment utilisé est un montage comportant deux résistances (fig. X-17). Ici, le fonctionnement est cependant très différent puisque aucun courant ne circule dans la connexion de porte ; la tension V_{GS} est donc donnée par la relation suivante :

$$V_{GS} = V_{DD} \frac{R_1}{R_1 + R_2} - R_S I_D$$

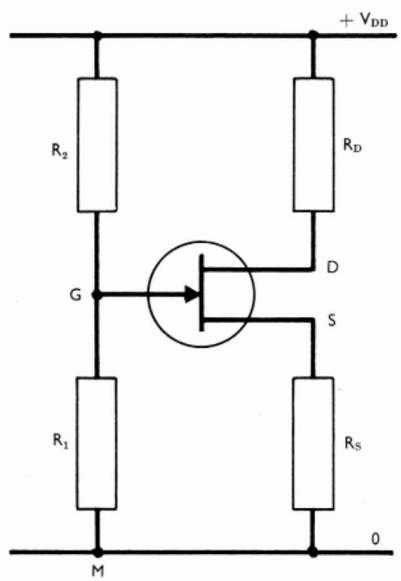


Fig. X-17

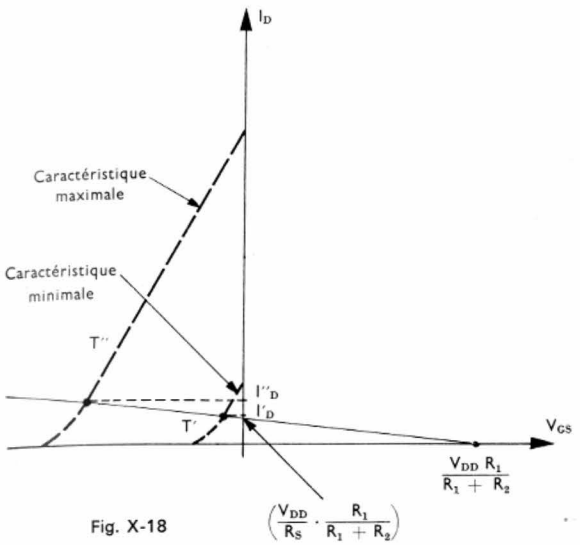


Fig. X-18

Dans le plan (I_D, V_{GS}), cette équation est représentée par une droite (fig. X-18) qui coupe la caractéristique du T.E.C. au point de repos. En choisissant convenablement V_{DD} et les résistances du montage, le courant I_D est presque indépendant de l'échantillon choisi. Dans ces conditions, les dérives thermiques sont également compensées mais il faut veiller à ce que la tension V_{DS} soit supérieure à V_P.

7. UTILISATION DU T.E.C. EN RÉSISTANCE COMMANDÉE PAR UNE TENSION

Lorsque la tension source-drain appliquée au T.E.C. est plus petite que V_P, la caractéristique statique $I_D = f(V_{DS})$ est analogue à celle d'une résistance : c'est une droite passant par l'origine (fig. X-19). Cette droite peut d'ailleurs être prolongée dans le troisième quadrant (I_D et V_{DS} négatifs) pour les valeurs de V_{DS} supérieures à — 0,5 V (le courant de la jonction porte-canal reste ainsi négligeable). Le coefficient directeur de cette droite est lié à la polarisation V_{GS} : il décroît lorsque V_{GS} devient plus négative (T.E.C. à canal N). *Alimenté dans ces conditions, le circuit drain-source du T.E.C. équivaut donc à une résistance r.* Ce fonctionnement reste possible lorsque la tension appliquée à ce circuit est une tension alternative dont l'amplitude n'excède pas 0,5 V. L'expression :

$$r = \frac{R}{1 - kV_{GS}}$$

représente assez bien les variations de r en fonction de V_{GS}. Dans cette expression R et k sont des constantes dépendant du T.E.C. utilisé. Ce mode de fonctionnement est très intéressant pour réaliser une commande automatique de gain dans un système oscillateur, dans un récepteur de télécommunications ou dans un enregistreur magnétique.

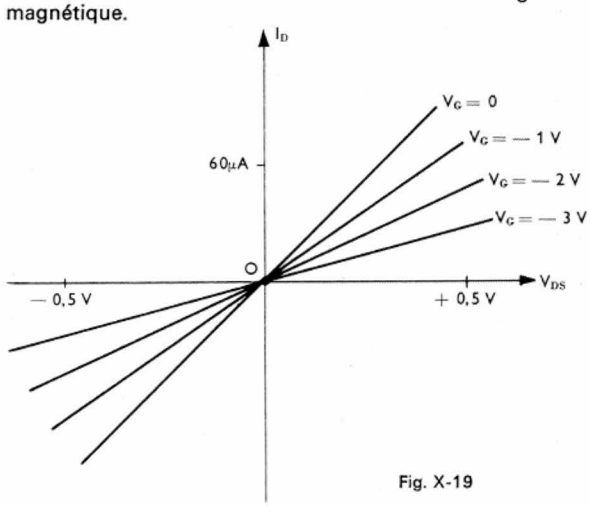


Fig. X-19

CHAPITRE XI

THYRISTOR - TRANSISTOR UNIJONCTION
Diac - Triac

1. THYRISTOR

Un thyristor comporte quatre couches de semiconducteurs, deux couches consécutives étant de conductibilités différentes (P ou N) (fig. XI-1). Il est donc formé de trois jonctions disposées en série ; la jonction médiane correspond à une diode branchée en sens contraire des deux autres. Un thyristor est accessible à l'aide de trois connexions nommées *anode, cathode* et *électrode de commande* (parfois *porte* ou *gâchette*). L'électrode de commande est reliée à la couche P la plus voisine de la couche de cathode. Si la *couche d'anode,* dopée P, est prise pour référence nous dirons que son épaisseur et son dopage sont moyens alors que :

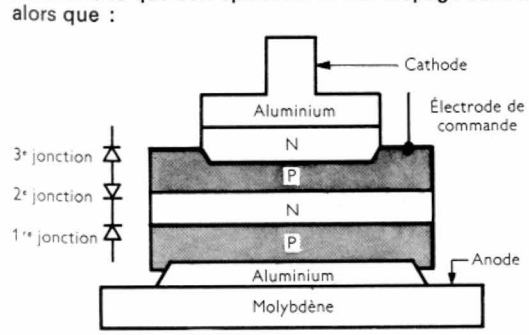


Fig. XI-1 — Thyristor ; constitution

— la *couche intermédiaire* (non accessible à l'utilisateur), appelée *couche de blocage,* est épaisse et peu dopée ;

— la *couche de gâchette,* ou *couche de commande,* est mince et peu dopée ; elle est comparable à la base d'un transistor,

— la *couche de cathode* est mince et très dopée ; elle peut être comparée à l'émetteur d'un transistor.

1.1. Fonctionnement en polarisation directe. — Appliquons au thyristor une tension rendant l'anode positive par rapport à la cathode (fig. XI-2) et supposons que la gâchette soit momentanément déconnectée. La jonction J_2 est polarisée en inverse (fig. XI-3) ; la couche

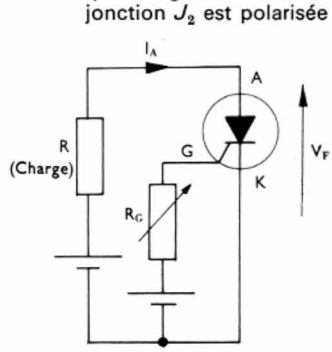


Fig. XI-2

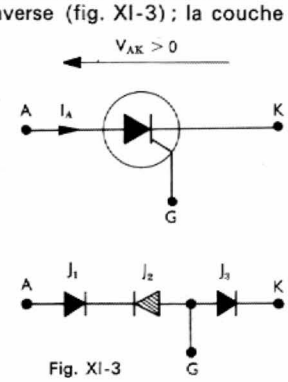
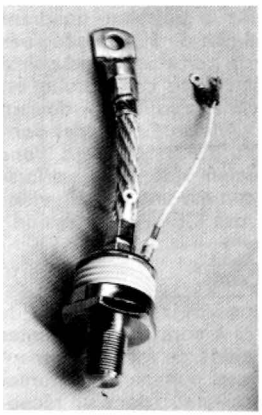
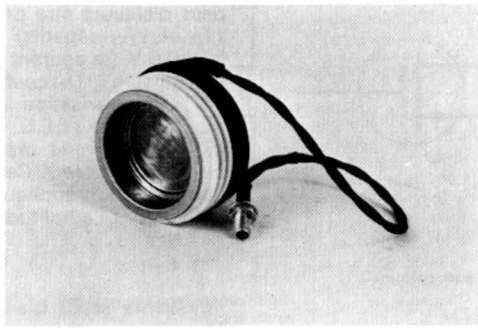


Fig. XI-3



Thyristor
(*Alsthom*)



Thyristor sensible à la pression
(*Alsthom*)

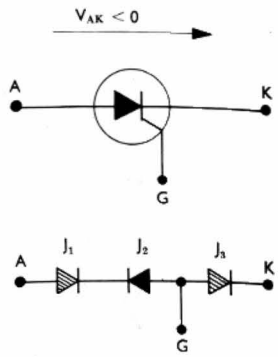


Fig. XI-5

intermédiaire étant large et peu dopée, la tension d'avalanche V_{dmax} correspondante est élevée (de 50 à 1 500 V). Le courant débité est très faible si la tension appliquée est inférieure à V_{dmax}. Au-delà de cette d.d.p. il y a amorçage mais ces conditions de fonctionnement ne sont pas recherchées dans la pratique.

Portons maintenant la gâchette à un potentiel positif par rapport à la cathode. La jonction J_1 est polarisée en direct : la tension V_{GK} est faible (proche d'un volt) et le courant I_G augmente beaucoup lorsque V_{GK} croît. De très nombreux électrons, issus de la couche de cathode, arrivent alors dans la couche de gâchette ; dans cette couche P ce sont des porteurs minoritaires et s'ils atteignent la jonction J_2 où règne un champ intense, ils sont envoyés dans la couche de blocage : le débit anode-cathode est brutalement amorcé. La jonction J_2 est conductrice et la tension V_{AK} devient très faible (1 à 1,5 volt souvent). À partir de cet instant, l'électrode de commande est sans action sur le courant qui traverse le thyristor ; elle peut même être déconnectée car J_2 est maintenue conductrice par le courant I_A.

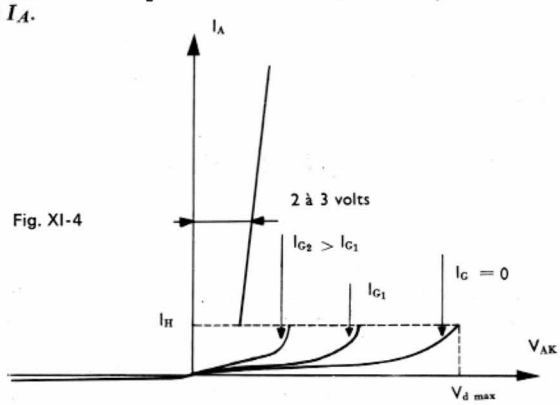


Fig. XI-4

La caractéristique I_A (V_{AK}) montre (fig. XI-4) :

— que l'amorçage se produit pour une tension d'autant plus faible que le courant de commande I_G est plus intense ;

— qu'après l'amorçage, le courant I_A augmente brusquement (il est seulement limité par la résistance du circuit extérieur) et que la tension V_{AK} devient très faible ; elle varie très peu avec l'intensité du courant I_A et ne dépend pas du courant de commande I_G ;

— que la conduction cesse lorsque le courant I_A devient inférieur à une valeur I_H, appelée *courant de maintien* (de l'anglais *holding current*). En effet, lorsque I_A est trop faible, la jonction J_2 cesse d'être conductrice.

1.2. Fonctionnement en polarisation inverse. — Si nous rendons l'anode négative par rapport à la cathode en modifiant le branchement du générateur dans le circuit principal, le thyristor reste bloqué malgré le courant de commande. Dans ce cas, les deux jonctions J_1 et J_3 sont polarisées en inverse et seule la jonction J_2 se trouve sous tension directe (fig. XI-5). Un claquage non destructif nécessiterait une tension plus élevée encore que précédemment (il ne présente aucun intérêt pratique). La caractéristique inverse est pratiquement confondue avec l'axe des abscisses (V. fig. XI-4).

En conclusion, un thyristor devient conducteur si deux conditions se trouvent réunies simultanément : d'une part, l'anode doit être positive par rapport à la cathode, d'autre part, un courant de commande doit provoquer l'amorçage, c'est-à-dire le claquage par avalanche de la jonction J_2. Un thyristor passe de l'état conducteur à l'état bloqué si le courant principal devient inférieur au courant de maintien, ou s'il est placé sous tension inverse (en rendant l'anode négative par rapport à la cathode). Le thyristor est comparable à un interrupteur commandé par un courant.

1.3. Applications

1.3.1. Relais statique. — Un thyristor peut être utilisé comme *relais statique ;* un faible courant de commande suffit pour rendre le thyristor conducteur, et donc pour fermer un circuit électrique à l'aide de cet appareil. L'ouverture comme la fermeture peuvent d'ailleurs être temporisées.

De cette propriété découle l'emploi du thyristor comme *interrupteur*. Il assure la fermeture et l'ouverture de certains circuits dans de meilleures conditions qu'un interrupteur classique ; aucun rebondissement de contacts n'est à craindre ni d'arc d'extra-rupture.

Pour limiter la perte de puissance dans cet interrupteur, on l'associe à un contacteur ordinaire dans un grand nombre de réalisations, les deux dispositifs étant placés en parallèle. Pour un thyristor dans l'état conducteur, la perte de puissance correspond au produit de la tension V_{AK}, relativement faible, et de l'intensité du courant I_A qui peut atteindre des milliers d'ampères ; cette puissance peut devenir trop importante et provoquer une élévation de température inadmissible. Un contacteur au contraire n'absorbe pratiquement aucune puissance lorsqu'il est fermé. En les associant, on allie les qualités des deux dispositifs et on élimine leurs défauts : on ferme le contacteur lorsque le thyristor est conducteur, et on l'ouvre avant de bloquer le thyristor. Les opérations de fermeture et d'ouverture sont donc effectuées à l'aide du thyristor mais pendant le fonctionnement normal le courant traverse le contacteur.

1.3.2. Variation de tension. — En courant alternatif, le thyristor est employé dans les *variateurs de tension* qui permettent d'obtenir une tension réglable, continue avec un seul thyristor, continue ou alternative à l'aide de montages appropriés. Pour comprendre le principe mis en œuvre, considérons un circuit comportant une source de courant alternatif, un thyristor et une résistance (fig. XI-6).

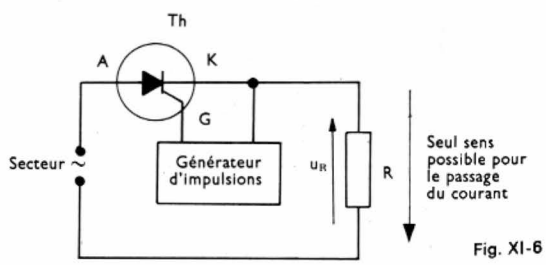


Fig. XI-6

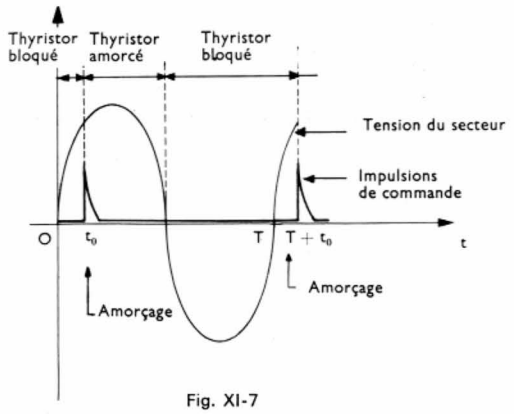


Fig. XI-7

Le courant ne peut circuler que pendant l'alternance où l'anode est positive par rapport à la cathode et seulement à partir de l'instant où un signal de commande a rendu le thyristor conducteur (fig. XI-7).

Chaque période il faut répéter l'amorçage puisque, après la conduction, le thyristor se trouve sous tension inverse (donc bloqué) pendant une alternance.

Lorsque le thyristor est bloqué, nous l'assimilerons à un interrupteur ouvert : la d.d.p. entre ses bornes *A* et *K* est égale à la tension du secteur (fig. XI-8) ; cela nous permet

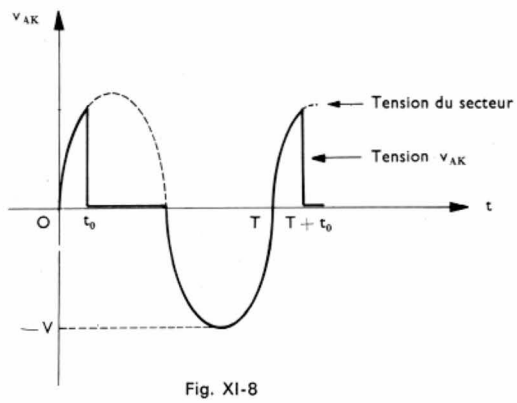


Fig. XI-8

de constater qu'il doit pouvoir supporter une tension inverse inférieure à $-\hat{V}$ (par sécurité entre — 1,5 $\hat{V}$ et — 2 $\hat{V}$ par exemple). Lorsqu'il est conducteur la tension entre ses bornes peut être considérée comme nulle : la d.d.p. (u_R) entre les bornes de *R* est alors égale à celle du secteur (fig. XI-9). Le courant qui traverse *R* est à chaque instant proportionnel à u_R.

La valeur moyenne de la tension u_R (V. t. 1, Électricité, chap. 28) est donnée par l'expression suivante :

$$U_{\text{Rmoy}} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{\frac{T}{2}} \hat{V} \sin \omega t \, . \, dt$$

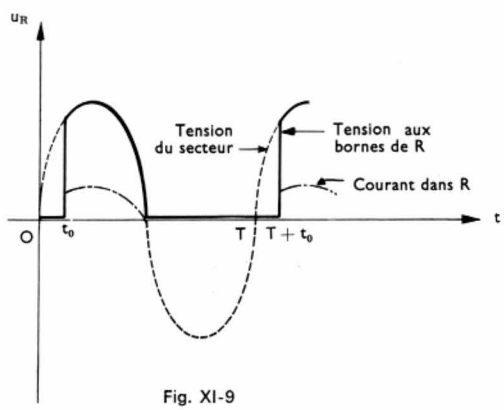
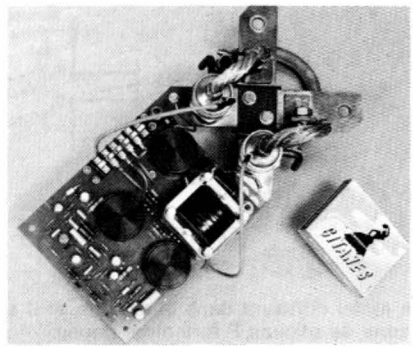


Fig. XI-9



Contacteur électronique pour soudage par points (*Alsthom*)

Elle est égale à : $U_{\text{Rmoy}} = \frac{\hat{V}}{\pi}\left(\frac{1 + \cos \omega t_0}{2}\right)$.

Si nous augmentons t_0, c'est-à-dire si nous amorçons le thyristor de plus en plus tardivement, la valeur moyenne de u_R décroît (cos ωt_0 diminue quand ωt_0 croît). Elle est maximale et égale à $\frac{\hat{V}}{\pi}$ lorsqu'il n'y a pas de retard à l'amorçage ($t_0 = 0$) ; elle devient nulle lorsque le thyristor n'est jamais amorcé (t_0 compris entre $\frac{T}{2}$ et T).

Ce principe est utilisé dans des montages redresseurs simple alternance et double alternance (alimentation monophasée ou triphasée) pour obtenir des tensions continues réglables (V. chap. 18, § 8). Il permet également de faire varier une tension alternative : la charge à alimenter doit être placée en série avec un ensemble de deux thyristors tête-bêche (l'anode de l'un est reliée à la cathode de l'autre et inversement ; fig. XI-10). Le fonctionnement de ce montage sera expliqué plus en détail au paragraphe concernant le triac.

Fig. XI-10 a

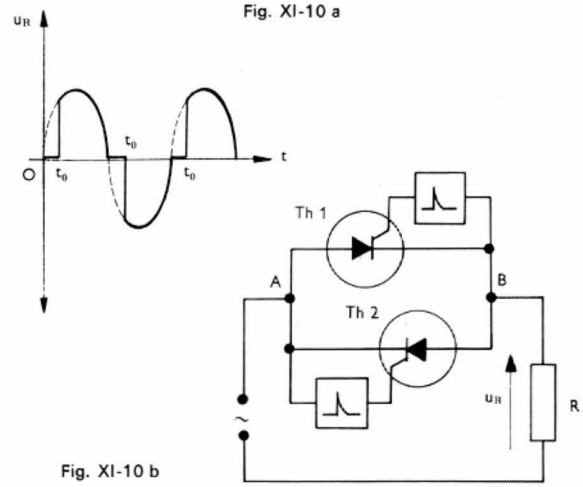


Fig. XI-10 b

1.4. Amorçage d'un thyristor. — Le courant de commande qui permet d'amorcer un thyristor peut être fourni par des dispositifs très divers. Le plus simple est constitué par une source susceptible de fournir une tension alternative, de même fréquence que la tension d'alimentation du circuit principal mais déphasée d'un angle réglable par rapport à celle-ci. En modifiant ce déphasage, on provoque la circulation du courant de commande à l'instant désiré pour l'amorçage. On emploie également des générateurs d'impulsions et le transistor unijonction (V. ci-après). Ces dispositifs doivent fournir des impulsions périodiques à un instant déterminé et réglable.

2. TRANSISTOR UNIJONCTION

Un transistor unijonction est obtenu en réalisant une jonction sur un barreau de silicium N peu dopé. En effectuant une soudure à l'aluminium en un point du barreau,

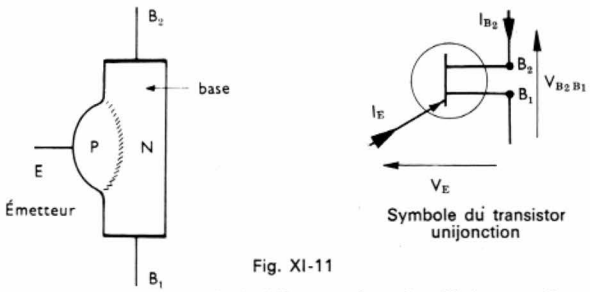


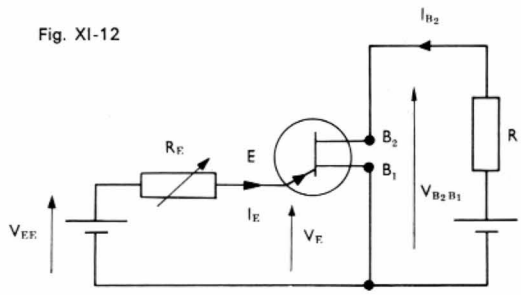
Fig. XI-11

des atomes de ce métal diffusent dans le silicium et il se forme une petite zone de silicium P fortement dopée.

Ce dispositif comporte trois électrodes, comme un transistor (fig. XI-11) : deux sont disposées sur la zone N (bases B_1 et B_2) et la troisième est solidaire de la zone P (émetteur E).

2.1. Caractéristiques courant de base - tension interbase. — Si l'émetteur E et la base B_1 sont connectés à un circuit comprenant une résistance réglable et un générateur de courant continu placé de façon que la diode émetteur-base soit polarisée dans le sens direct (fig. XI-12), un courant I_E traverse ce circuit. Par ailleurs, si

Fig. XI-12



les bases B_1 et B_2 sont reliées (directement ou non) à un générateur de courant continu de telle sorte que B_2 soit portée à un potentiel positif par rapport à B_1, un courant parcourt également ce circuit ; son intensité I_{B_2} dépend de l'intensité I_E du courant émetteur, comme le montre le réseau de caractéristiques I_{B_2} $(V_{B_2B_1})$ (fig. XI-13) dans lequel I_E joue le rôle de paramètre ($V_{B_2B_1}$ désigne la d.d.p. entre les deux bases).

Fig. XI-13

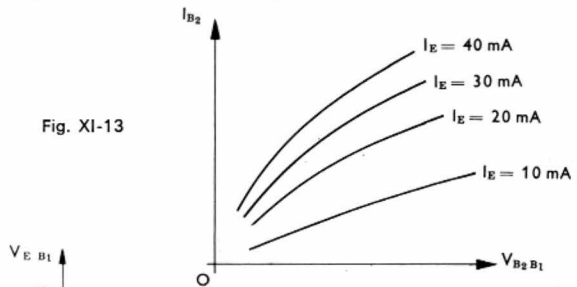
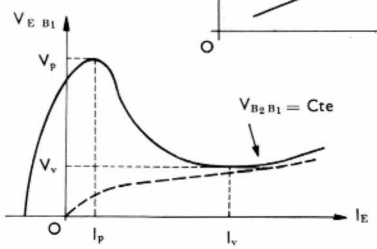


Fig. XI-14



2.2. Caractéristiques V_{EB_1} (I_E). — Si l'émetteur est déconnecté et si une tension $V_{B_2B_1}$ est appliquée entre B_2 et B_1, un courant de quelques milliampères circule dans le barreau déterminant au niveau de la soudure une polarisation positive :

$V_{EB_1} = \eta V_{B_2B_1}$ (η est compris entre 0,45 et 0,60 en général).

Lorsque le circuit émetteur-base 1 est fermé, la jonction E-B_1 est polarisée en inverse tant que la tension V_{EB_1} est inférieure à $(\eta\ V_{B_2B_1} + E_0)$, E_0 désignant le seuil de conduction de la jonction. Si la tension V_{EB_1} croît en partant d'une valeur nulle, I_E décroît lentement et s'annule lorsque $V_{EB_1} \approx \eta\ V_{B_2B_1}$ (fig. XI-14). Si V_{EB_1} continue à croître, la jonction est alors polarisée en direct, et le courant I_E augmente rapidement. De nombreux porteurs sont injectés dans la région du barreau comprise entre l'émetteur et la base B_1 et cette région devient alors très conductrice ; elle n'introduit plus qu'une chute de tension très faible et V_{EB_1} tend vers une très faible valeur, voisine de la d.d.p. aux bornes d'une jonction polarisée en direct. La caractéristique $V_{EB_1}(I_E)$, après avoir atteint un « *pic* » $(V_p = \eta V_{B_2B_1} + E_0 ;\ I_p)$ présente un minimum : c'est le point de vallée $(V_v ; I_v)$. I_p est un courant très faible (quelques microampères) ; V_v est voisine de 2 volts ; I_v est souvent compris entre 10 et 50 milliampères.

Cette caractéristique met bien en évidence une propriété intéressante du transistor unijonction : dès que la tension V_{EB_1} est égale à V_p, l'intensité du courant I_E augmente brutalement et elle n'est plus limitée que par la résistance du circuit extérieur. Évidemment, l'intensité du courant d'émetteur augmentant, celle du courant I_{B_2} croît également. Le circuit émetteur-base B_1 du transistor unijonction peut être comparé à un interrupteur qui s'est fermé lorsque la tension V_{EB_1} a atteint la tension de pic V_p.

2.3. Applications. — Le transistor unijonction est utilisé pour obtenir des impulsions (de courant ou de tension). Relions l'émetteur E et la base B_1 aux deux bornes d'un condensateur C_1 qui est chargé à travers une résistance R_1 (fig. XI-15). Dans un premier temps, la tension

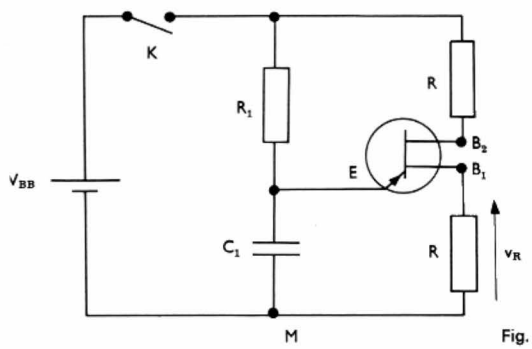


Fig. XI-15

entre E et B_1 croît exponentiellement en fonction du temps comme celle aux bornes du condensateur (V. t. 1, Électricité, chap. 19). Dès qu'elle atteint la valeur de pic V_p, le courant dans l'émetteur augmente brutalement : le condensateur se décharge dans le circuit émetteur-base B_1 et cela d'autant plus rapidement que la résistance R, placée entre la base B_1 et la masse du montage, est faible (fig. XI-16). Nous obtenons ainsi une impulsion de cou-

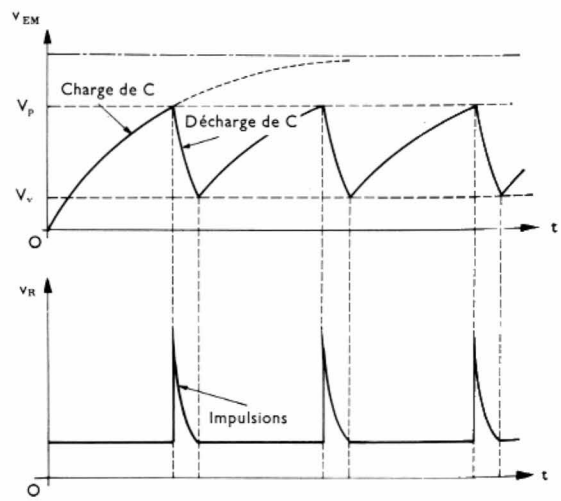


Fig. XI-16

rant et aux bornes de la résistance R nous recueillons une impulsion de tension. Dès que cette phase est terminée, l'ensemble se trouve dans un état peu différent de l'état initial puisque le condensateur est déchargé et que le courant I_E nécessaire au maintien de la conduction ne peut être fourni ni par le condensateur (la tension à ses bornes est égale à la tension de vallée) ni par l'alimentation du montage (R_1 est trop grand). Une nouvelle charge s'amorce et les mêmes transformations se reproduisent périodiquement avec une fréquence qui dépend de C_1 et de R_1 : l'ensemble constitue un *oscillateur à relaxation*.

Les impulsions fournies par un transistor unijonction sont utilisées dans des *circuits de comptage* ou pour amorcer des *thyristors* (V. chap. 18).

Le montage étudié précédemment s'utilise aussi dans des *temporisateurs* puisque l'impulsion qui est recueillie aux bornes de la résistance R peut être obtenue un temps plus ou moins long après la fermeture de l'interrupteur K. Si cette impulsion permet la commande d'un dispositif (d'un relais, par exemple), celle-ci ne se produira qu'un laps de temps déterminé (fonction de R_1 et de C_1) après la fermeture de K.

3. DIAC

3.1. Caractéristiques. — Un diac (de diode alternative current) est un élément semiconducteur qui est formé de quatre couches (comme un thyristor) mais qui ne comporte que deux électrodes. Il est équivalent à deux diodes réunies par leur cathode.

La caractéristique d'un diac (fig. XI-17) montre que cet élément n'est pratiquement pas passant lorsque la tension est inférieure à une valeur V_{BR} (de breaking, rupture en anglais) comprise souvent entre 20 et 30 V. En revanche, dès que cette tension d'avalanche est atteinte, le diac peut être assimilé à un interrupteur fermé ; l'intensité du courant qui le traverse n'est plus limitée que par la résistance du circuit dans lequel il est inséré. Cet élément n'est pas polarisé : la caractéristique est la même, que la tension aux bornes du diac soit positive ($v_{E_1} > v_{E_2}$) ou négative ($v_{E_1} < v_{E_2}$).

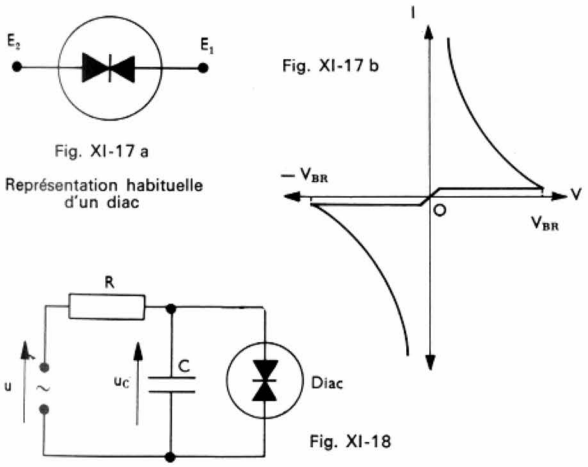


Fig. XI-17 a
Représentation habituelle d'un diac

Fig. XI-17 b

Fig. XI-18

3.2. Applications. — Le diac est essentiellement utilisé pour produire des impulsions alternativement positives et négatives.

Si un condensateur C est placé en série avec une résistance R (fig. XI-18) et que l'ensemble est alimenté sous une tension sinusoïdale u, la d.d.p. u_C aux bornes de C est sinusoïdale (V. t. 1, Électricité, chap. 31) ; son déphasage φ par rapport à u augmente avec R et C ($\text{tg}\,\varphi = RC\omega$).

Lorsque nous plaçons un diac aux bornes de C, il n'en est plus de même et nous devons distinguer deux régimes de fonctionnement. Tant que la valeur absolue de la tension u_C est inférieure à la tension d'avalanche V_{BR}, le diac est équivalent à un interrupteur ouvert et ce qui a été dit précédemment reste vrai. Dès que u_C est égal à V_{BR}, le diac se comporte comme un interrupteur fermé : d'une part, le courant fourni par la source ne passe plus

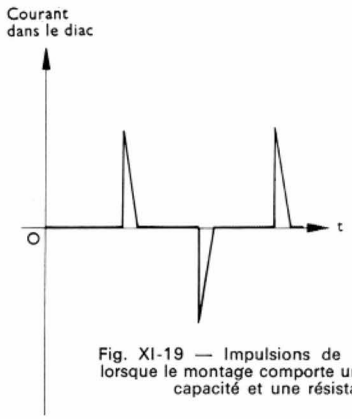


Fig. XI-19 — Impulsions de courant traversant un diac lorsque le montage comporte un condensateur C de grande capacité et une résistance R importante

dans la branche du condensateur et, d'autre part, celui-ci se décharge à travers le diac. Ainsi, à chaque alternance nous obtenons une impulsion de courant dans le diac (fig. XI-19). Il en est encore de même si une résistance de faible valeur est placée en série avec cet élément, ou si le courant de décharge doit traverser le circuit gâchette-cathode d'un thyristor ou d'un triac (V. ci-après). L'instant d'amorçage du diac est réglé en modifiant la valeur de R.

4. TRIAC

4.1. Principe. — Deux thyristors montés tête-bêche (l'anode de l'un est reliée à la cathode de l'autre et inversement) permettent l'alimentation directe d'une charge sous une tension alternative variable (V. fig. XI-10 a). En effet, quand le potentiel du point A est positif par rapport à celui du point B, le thyristor $Th1$ peut être rendu conducteur tandis que $Th2$ est forcément bloqué. L'alternance suivante, le potentiel de A est inférieur au potentiel de B, et $Th1$ est sous tension inverse ; seul $Th2$ peut devenir passant.

Si les signaux de commande appliqués aux circuits gâchette-cathode des thyristors permettent d'obtenir le même retard t_0 pour l'amorçage, la tension appliquée aux bornes de la charge est alternative (mais elle n'est pas sinusoïdale) (V. fig. XI-10 b).

Ce montage intéressant a pu être réalisé dans un même monocristal de semiconducteur et il a été appelé *triac* (de *triode alternative current*). En réalité, quelques modifications ont été nécessaires pour obtenir un ensemble qui ne comporte qu'une seule électrode de commande. Sur la figure XI-20, le thyristor $Th1$ correspond à la moitié gauche du triac : l'électrode 1 est son anode et l'électrode 2 joue le rôle de cathode. Pour le thyristor $Th2$ qui correspond à la moitié droite du triac, les rôles des électrodes sont inversés ; de plus, une jonction supplémentaire a été diffusée dans une couche P (couche d'anode pour Th 2) pour

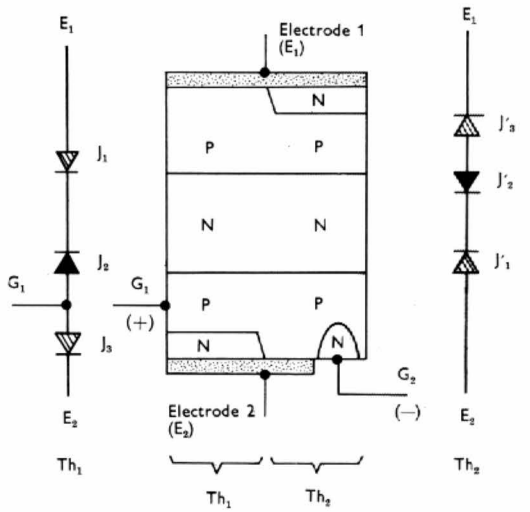
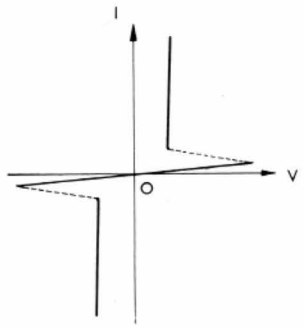


Fig. XI-20 — Représentation schématique d'un triac

Fig. XI-21



placer l'électrode de commande. La position de cette électrode peut surprendre mais nous allons voir qu'elle permet de débloquer le triac à l'aide d'impulsions négatives lorsque l'électrode E_2 est portée à un potentiel positif par rapport à E_1 ($Th2$ sous tension directe). Lorsque l'électrode G_2 est négative par rapport à E_2 (nous supposons qu'un générateur extérieur permet d'appliquer une d.d.p. convenable), des électrons passent dans la zone P voisine de E_2. Certains de ceux-ci atteignent la jonction J'_1 et l'équilibre établi au niveau de cette jonction est modifié ; il en résulte une migration de trous dans la zone N (zone de blocage pour $Th2$) et le courant de fuite de J'_2 augmente très rapidement. Certains de ces trous sont accélérés par le champ électrique important au niveau J'_2 et le triac s'amorce.

4.2. Caractéristiques. — La caractéristique I (V) représentant les variations de l'intensité I du courant dans le triac en fonction de la d.d.p. V entre les bornes de celui-ci (tension entre E_1 et E_2) met bien en évidence que le comportement du triac est analogue à celui d'un thyristor et cela pour les deux sens de passage du courant (fig. XI-21). Il est donc utilisable pour régler une tension alternative.

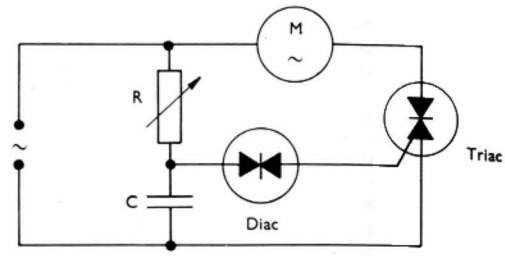


Fig. XI-22

4.3. Applications. — Le triac est employé pour alimenter des circuits de chauffage, des appareils d'éclairage, de petits moteurs universels sous des tensions alternatives réglables. La commande du triac peut dépendre de la grandeur à maintenir constante (température pour un chauffage, vitesse pour un moteur), et nous obtenons ainsi de véritables servomécanismes (fig. XI-22).

CHAPITRE XII

CIRCUITS PASSIFS UTILISÉS DANS LES AMPLIFICATEURS
QUADRIPÔLES PASSIFS LINÉAIRES

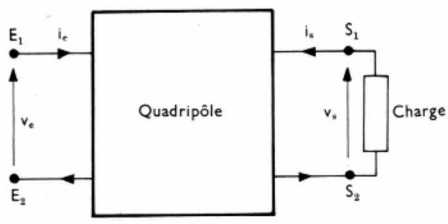
1. CARACTÉRISTIQUES D'UN QUADRIPÔLE

La plupart des circuits utilisés dans les amplificateurs sont appelés quadripôles car ils présentent quatre bornes :

— deux *bornes d'entrée* E_1 et E_2 (fig. XII-1) entre lesquelles doit être appliquée la tension v_e à amplifier ou à transformer, appelée *tension d'entrée*.

— deux *bornes de sortie* S_1 et S_2 qui sont reliées à une charge (résistance, impédance, étage amplificateur, etc.) ; la d.d.p. v_s entre ces deux bornes est appelée *tension de sortie*.

Fig. XII-1



Lorsqu'un quadripôle ne comporte que des résistances, des inductances et des condensateurs, il est dit *passif* (dans le cas contraire, le quadripôle est dit *actif*). Dans tout ce qui suit, les grandeurs d'entrée (tension v_e et courant i_e) sont supposées sinusoïdales. Avec les quadripôles passifs et linéaires, il en est alors de même pour les grandeurs de sortie : la tension v_s et le courant i_s ont la même fréquence f que v_e et i_e mais leurs amplitudes et leurs phases respectives sont fonction des grandeurs d'entrée, des éléments constituant le quadripôle et de f (ou de la pulsation correspondante : $\omega = 2\pi f$). Nous désignons par $\underline{V}_e$, $\underline{I}_e$, $\underline{V}_s$ et $\underline{I}_s$ les valeurs complexes des grandeurs d'entrée et de sortie. Rappelons qu'à toute grandeur sinusoïdale $v = \sqrt{2}\, V_{\text{eff}} \sin(\omega t + \varphi)$ nous associons un nombre complexe dont le module est égal à la valeur efficace V_{eff} de v et dont l'argument φ est la phase initiale de v (V. t. 1. Électricité, chap. 31).

1.1. Transmittance du quadripôle. — Le rapport des valeurs complexes $\underline{V}_s$ et $\underline{V}_e$ des tensions de sortie et d'entrée est appelée la **transmittance T du quadripôle.**

$$\underline{T} = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e}$$

Ce nombre complexe a un module T égal au rapport des valeurs efficaces des tensions de sortie et d'entrée :

$$T = \frac{V_{s\,\text{eff}}}{V_{e\,\text{eff}}}$$

et son argument φ est égal au déphasage entre v_s et v_e (différence des phases initiales de v_s et de v_e définies en prenant la même grandeur sinusoïdale pour référence). Le plus souvent l'étude de la transmittance est faite graphiquement.

Dans une première méthode, au nombre complexe $\underline{T}$ est associé un vecteur $\overrightarrow{OM}$ de module égal à T et d'angle polaire φ (fig. XII-2). Lorsque la fréquence f varie, le point M décrit une courbe qui est utilisée pour connaître les propriétés du quadripôle.

Une autre méthode, appelée *méthode de Bode*, est aussi très fréquemment utilisée : les variations du module et de l'argument de la transmittance $\underline{T}$ en fonction de la fréquence f (ou de la pulsation ω) sont représentées sépa-

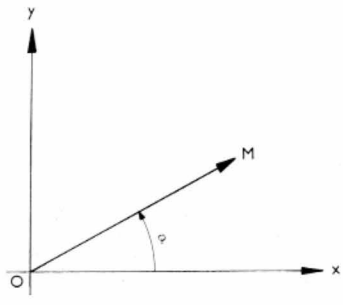
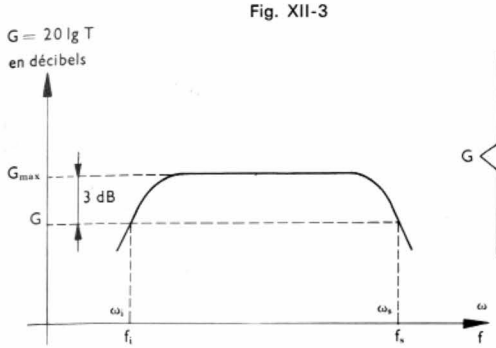


Fig. XII-2

rément ; cela fournit deux courbes correspondant aux fonctions $T(f)$ et Arg $\underline{T} = \varphi(f)$. Comme il est habituel en électronique, pour la première courbe, généralement ce n'est pas T qui est porté en ordonnées mais le nombre $G = 20 \lg T$ qui représente un gain en tension (si $V_{s\,\text{eff}} > V_{e\,\text{eff}}$) ou un affaiblissement (si $V_{s\,\text{eff}} < V_{e\,\text{eff}}$) exprimé en décibels. Cette courbe est appelée **courbe de réponse en amplitude** du quadripôle.

1.2. Bande passante. Fréquences de coupures. — Pour la plupart des circuits, le nombre $G = 20 \lg T$ est sensiblement constant lorsque la fréquence est comprise dans un intervalle déterminé (plus ou moins étendu) et il décroît de part et d'autre de celui-ci. Le domaine d'utilisation d'un circuit est limité par les fréquences f_i et f_s pour lesquelles l'affaiblissement de G est de 3 dB par rapport à sa valeur maximale (fig. XII-3). L'intervalle $[f_i, f_s]$ est appelé la **bande passante à —3 dB.**

Fig. XII-3



Si nous appelons $T_{\max}$ et $G_{\max}$ les valeurs maximales de T et de G, nous pouvons chercher quelle diminution de T correspond à un affaiblissement de —3 dB. À la fréquence f_i (ou à la fréquence f_s) nous avons :

$$G = G_{\max} - 3 = 20 \lg T_{\max} - 20 \lg \sqrt{2},$$

$$\text{car } (20 \lg \sqrt{2} \approx 3)$$

Soit : $$G = 20 \lg \frac{T_{\max}}{\sqrt{2}}$$

Donc, lorsque le module de la transmittance est divisé par $\sqrt{2}$, l'affaiblissement de G est de —3 dB (V. t. 1, Préliminaires, chap. 4).

Les fréquences f_i et f_s sont appelées les *fréquences de coupures à* —3 dB. Pour certains circuits, la fréquence f_i peut être nulle ; pour d'autres, c'est la fréquence f_s qui est infinie.

1.3. Impédance d'entrée d'un quadripôle. — Vu des bornes d'entrée E_1 et E_2, le quadripôle est assimilable à une impédance Z_e dont la valeur complexe est égale au rapport des valeurs complexes de v_e et de i_e :

$$\underline{Z_e} = \frac{\underline{V_e}}{\underline{I_e}}$$

Autrement dit, pour un générateur placé entre E_1 et E_2 pour alimenter le quadripôle, tout se passe comme si la charge était une impédance de valeur complexe $\underline{Z_e}$ (fig. XII-4).

1.4. Impédance de sortie d'un quadripôle. — Pour une charge (impédance Z_u, par exemple) le quadripôle est équivalent à un générateur dont l'impédance interne est appelée **impédance de sortie du quadripôle.**

Nous appellerons $\underline{E_s}$ et $\underline{Z_s}$ les valeurs complexes de la f.é.m. et de l'impédance interne de ce générateur (fig. XII-5). La détermination de $\underline{E_s}$ et de $\underline{Z_s}$ peut être effectuée en utilisant le théorème de Thévenin (V. t. 1, Électricité, chap. 10) puisque nous avons remplacé l'ensemble générateur G — quadripôle par le générateur de Thévenin équivalent. L'impédance de sortie $\underline{Z_s}$ est donc l'impédance vue des bornes S_1 et S_2 lorsque la f.é.m. e_G est nulle (c'est-à-dire lorsque le générateur G est remplacé par sa résistance interne R_G).

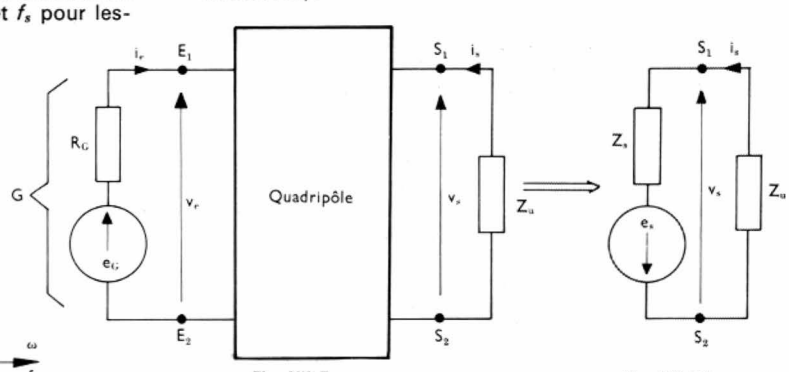


Fig. XII-5 a

Fig. XII-5 b

Dans certains cas, cette impédance $\underline{Z_s}$ peut être calculée facilement si nous connaissons la tension de sortie à vide v_{s0} (Z_u est enlevée) et le courant de court-circuit (lorsque $Z_u = 0$) :

$$\underline{Z_s} = \frac{\text{opposé de la valeur complexe de } v_{s0}}{\text{valeur complexe du courant de court-circuit}}$$

En effet, en appliquant la loi d'Ohm au schéma équivalent du quadripôle (fig. XII-5b), nous pouvons écrire :

$$\underline{Z_s} = \frac{\underline{V_s} + \underline{E_s}}{\underline{I_s}}$$

Or, si l'impédance Z_u est enlevée, le courant de sortie est nul : $\underline{V_s} = \underline{V_{s0}} = -\underline{E_s}$. En revanche, si $Z_u = 0$ (court-circuit), la tension de sortie est nulle : $\underline{I_s} = \underline{I_{CC}} = \dfrac{\underline{E_s}}{\underline{Z_s}}$.

Donc, nous avons bien : $\underline{Z_s} = \dfrac{\underline{E_s}}{\underline{I_{CC}}} = -\dfrac{\underline{V_{s0}}}{\underline{I_{CC}}}$

1.5. Impédance caractéristique. — Pour certaines applications (en télécommunications notamment), il est intéressant que les valeurs complexes $\underline{Z_e}$ et $\underline{Z_u}$ de l'impédance d'entrée d'un quadripôle et de son impédance de charge soient égales. La valeur commune de ces impédances est appelée **impédance itérative** du quadripôle ; c'est aussi l'**impédance caractéristique** lorsque le quadripôle est symétrique. Pour le générateur G placé entre les bornes d'entrée du quadripôle, tout se passe comme si la charge était reliée directement à ses bornes.

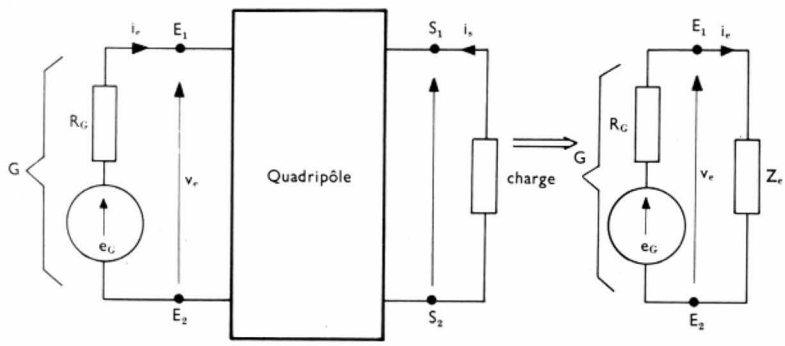


Fig. XII-4

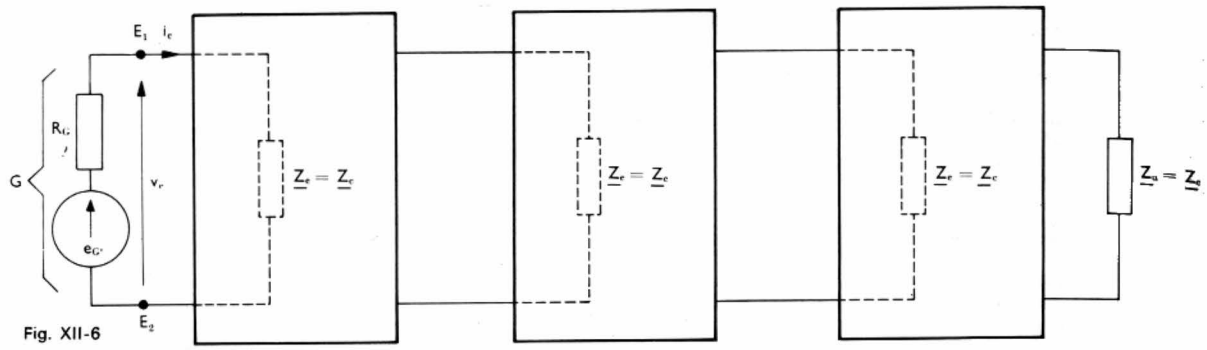


Fig. XII-6

Lorsque des quadripôles symétriques et identiques (donc de même impédance caractéristique $\underline{Z}_c$) sont associés en série (fig. XII-6) et que l'impédance de charge du dernier est égale à $\underline{Z}_c$, chacun d'eux alimente une charge égale aussi à $\underline{Z}_c$. En effet, l'impédance d'entrée d'un quadripôle du montage représente l'impédance de charge de celui qui le précède; l'impédance d'entrée du premier de la série (en partant du générateur G) constitue la charge de G. Les conditions de fonctionnement sont alors les mêmes pour tous les quadripôles du montage.

2. CIRCUIT R-C PASSE-BAS. CIRCUIT INTÉGRATEUR

Ce circuit est obtenu en associant une résistance R et un condensateur C (fig. XII-7); la tension d'entrée est appliquée aux bornes de l'ensemble et la tension de sortie

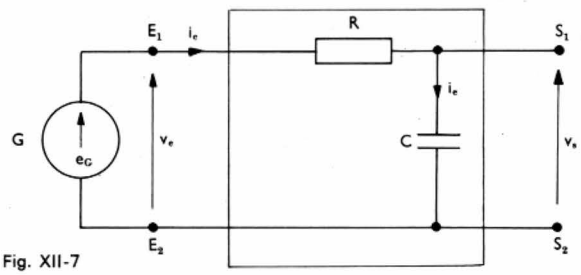


Fig. XII-7

est prélevée entre les bornes de C. Pour l'étude de ce quadripôle (et de ceux qui suivront), nous admettrons que la résistance interne du générateur G est nulle et que l'impédance du circuit de charge est infinie, c'est-à-dire que le courant de sortie est nul.

2.1. Calcul de la transmittance. — Les valeurs complexes des tensions d'entrée et de sortie sont obtenues en appliquant la loi d'Ohm :

$$\underline{V}_e = \left(R + \frac{1}{jC\omega}\right)\underline{I}_e \quad \underline{V}_s = \frac{1}{jC\omega}\,\underline{I}_e, \text{ donc :}$$

$\underline{T} = \dfrac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \dfrac{1}{1 + jRC\omega}$. En posant $RC = \dfrac{1}{\omega_0} = \dfrac{1}{2\pi f_0}$, nous obtenons :

$$\underline{T} = \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{1 + j\dfrac{f}{f_0}}$$

2.2. Diagrammes de Bode. — La fréquence (et la pulsation) variant de 0 à l'infini, nous adoptons une échelle logarithmique en abscisses. Par ailleurs, en utilisant une variable auxiliaire $X = \dfrac{f}{f_0}$ et en portant lg X sur l'axe des abscisses, nous obtenons un résultat absolument général. Le nombre complexe $\underline{T}$ est caractérisé :

— par son module :

$$T = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{f}{f_0}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + X^2}}$$

— par son argument φ :

$$\text{tg } \varphi = -\frac{f}{f_0} = -X \Rightarrow \varphi = -\text{ Arc tg } X$$

2.2.1. Courbe de réponse en amplitude

$G = 20 \text{ lg } T = -20 \text{ lg } \sqrt{1 + X^2} = -10 \text{ lg } (1 + X^2)$

L'étude de la valeur de G conduit à distinguer trois cas (fig. XII-8) :

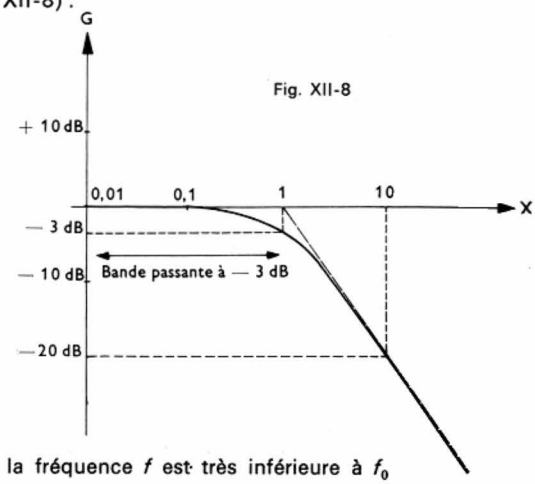


Fig. XII-8

— la fréquence f est très inférieure à f_0

$$\left(\text{par exemple } f < \frac{f_0}{10}\right) :$$

$$\frac{f}{f_0} = X \leqslant 0{,}1 \text{ soit } X \ll 1 \Rightarrow G \approx -10 \text{ lg } 1 = 0$$

La courbe représentative se confond avec l'axe des abscisses (première asymptote).

— la fréquence f est très supérieure à f_0 (par exemple : $f \geqslant 10 f_0$) :

$$\frac{f}{f_0} = X \geqslant 10 \text{ soit } X \gg 1 \Rightarrow G \approx -10 \text{ lg} X^2 = -20 \text{ lg } X$$

Lorsque X varie, la courbe G (lg X) est une droite coupant l'axe des abscisses au point ($X = 1$, $G = 0$). Pour définir cette droite, nous cherchons les coordonnées d'un autre point :

$$X = 10 \Rightarrow G = -20 \text{ lg } 10 = -20 \text{ dB}$$

Lorsque la fréquence et la variable X sont multipliées par un facteur 10, le nombre G décroît de 20 dB (droite de pente égale à *— 20 dB par décade*). Cette droite est la seconde asymptote de la courbe.

— *la fréquence est comprise entre les deux limites adoptées* : $\dfrac{f_0}{10} \leqslant f \leqslant 10\, f_0$. La courbe s'écarte peu des deux asymptotes tracées; le point le plus éloigné est le point d'abscisse $X = 1$; dans ce cas, $G = -10 \text{ lg } 2 = -3$ dB (le diagramme réel peut être confondu avec les deux asymptotes; il prend le nom de *diagramme asymptotique*).

La bande passante à —3 dB est définie par les abscisses $X = 0$ et $X = 1$. Les *fréquences de coupures* de ce circuit sont donc :

$$X = 0 \Rightarrow \frac{f_i}{f_0} = 0 \Rightarrow f_i = 0$$

$$X = 1 \Rightarrow \frac{f_s}{f_0} = 1 \Rightarrow f_s = f_0$$

Les signaux transmis sans être atténués ou avec une atténuation inférieure à 3 dB ont donc des fréquences inférieures à $f_0 = \dfrac{1}{2\pi RC}$; cela explique le nom de **filtre passe-bas** donné à ce circuit.

2.2.2. Courbe de déphasage. — Cette courbe φ (X) est obtenue assez facilement en considérant encore trois cas comme précédemment (fig. XII-9) :

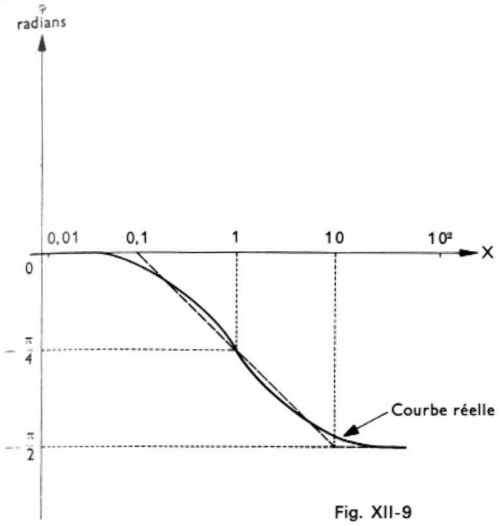


Fig. XII-9

— $X \leqslant 0{,}1$: tgφ est voisin de 0 : $\varphi \approx 0$ rad ;
— $X \geqslant 10$: tgφ est très grand en valeur absolue et est négatif : $\varphi \approx -\dfrac{\pi}{2}$ rad ;

— $0{,}1 \leqslant X \leqslant 10$: la courbe φ (X) se confond sensiblement avec la droite joignant les points $(X = 0{,}1,\ \varphi = 0)$ et $\left(X = 10,\ \varphi = -\dfrac{\pi}{2}\text{ rad}\right)$. Lorsque $X = 1$, l'argument φ de la transmittance est égal à $-\dfrac{\pi}{4}$ rad (retard de la tension de sortie par rapport à la tension d'entrée).

Dans la bande passante, nous constatons que les signaux d'entrée et de sortie sont en phase ou que leur déphasage n'excède pas $\dfrac{\pi}{4}$ rad ($\varphi = -\dfrac{\pi}{4}$ rad lorsque l'affaiblissement de G est de 3 dB).

2.3. Applications. — Ce circuit est utilisé pour éliminer des signaux parasites de fréquences élevées ($f \gg f_0$) : il permet alors la transmission de signaux dont les fréquences sont comprises dans sa bande passante. Ce montage peut aussi être employé comme *circuit intégrateur* mais les fréquences des signaux à transformer doivent être très supérieures à la fréquence de coupure du circuit ($f \gg f_0$). En effet, supposons que la tension v_e soit sinusoïdale et que sa fréquence soit égale par exemple à $100\,f_0$ ($X = 100$), les courbes G (X) et φ (X) montrent que l'atténuation est importante (— 40 dB) et que la tension v_s est en retard de $\dfrac{\pi}{2}$ rad par rapport à v_e. Donc, si $v_e = V_{e\,\text{eff}}\sqrt{2}\cos \omega t$, nous avons :

$$v_s = V_{s\,\text{eff}}\sqrt{2}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = V_{s\,\text{eff}}\sqrt{2}\sin \omega t$$

Or :

$$\int^t \cos \omega t\, dt = \frac{\sin \omega t}{\omega}$$

(V. t. 1, Mathématiques, chap. 20). La tension de sortie représente donc à une constante près l'intégrale de la tension d'entrée. Cela explique le nom de *circuit intégrateur* qui est donné au circuit.

Tout signal périodique pouvant être décomposé en une somme de signaux sinusoïdaux de fréquences f, $2f$, $3f$, . . . , *nf* (V. t. 1, Mathématiques, chap. 23), le résultat précédent s'applique à chacun d'eux (si $f \gg f_0$), et le signal de sortie est encore proportionnel à l'intégrale du signal d'entrée :

$$v_s = K \int_0^t v_e\, dt$$

3. CIRCUIT R-C PASSE-HAUT. CIRCUIT DIFFÉRENCIATEUR

Comme le filtre passe-bas, il est formé d'une résistance R et d'un condensateur C mais la tension de sortie est prélevée aux bornes de la résistance R (fig. XII-10). Les hypothèses de calcul sont les mêmes que précédemment, l'impédance interne du générateur alimentant le quadripôle est nulle, l'impédance du circuit d'utilisation est infinie.

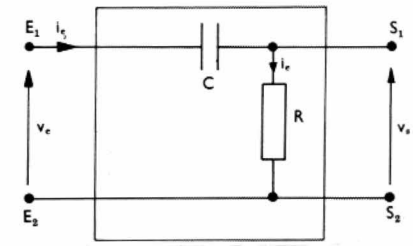


Fig. XII-10

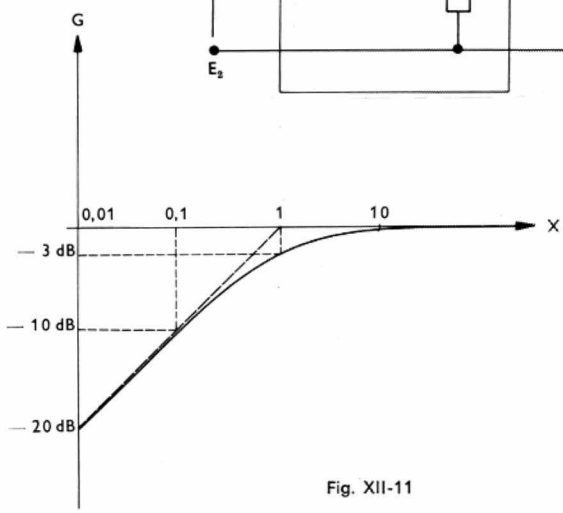


Fig. XII-11

3.1. Calcul de la transmittance

$$\underline{V_e} = \left(\frac{1}{jC\omega} + R\right)\underline{I_e};\ \underline{V_s} = R\,\underline{I_e};\ \underline{T} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

En posant encore $\omega_0 = 2\pi f_0 = \dfrac{1}{RC}$ nous avons :

$$\underline{T} = \frac{j\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}} = \frac{jX}{1 + jX} = \frac{1}{1 - \dfrac{j}{X}}\left(\text{avec } X = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}\right)$$

3.2. Diagrammes de Bode. — Le module de la transmittance est égal à :

$$T = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{1}{X}\right)^2}}$$

et l'argument a une tangente donnée par l'expression suivante :

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{1}{X}$$

3.2.1. Courbe de réponse en amplitude

$$G = 20 \lg T = -20 \lg \sqrt{1 + \left(\frac{1}{X}\right)^2}\ ;$$

la valeur de G se déduit de celle trouvée au paragraphe précédent à condition de remplacer $\dfrac{1}{X}$ par X. Nous tracerons donc le diagramme asymptotique en effectuant une symétrie autour d'un axe parallèle à l'axe des ordonnées et passant par le point d'abscisse $X = 1$ (fig. XII-11).

La bande passante à — 3 dB est l'intervalle de fréquences pour lesquelles X est supérieur ou égal à 1 : $X \geqslant 1 \Rightarrow f_i = f_0$ et $f_s = \infty$. Les signaux transmis avec une atténuation inférieure à 3 dB ont donc des fréquences supérieures à $f_0 = \dfrac{1}{2\pi RC}$ (d'où le nom de **circuit passe-haut**).

3.2.2. Courbe de déphasage. — La courbe comporte trois parties (fig. XII-12) et peut être obtenue directement en utilisant la même méthode que pour le filtre passe-bas. Nous constatons encore que le circuit n'introduit qu'un déphasage inférieur à $\dfrac{\pi}{4}$ rad pour les signaux de la bande passante ; ce déphasage est nul lorsque X est très supérieur à 1.

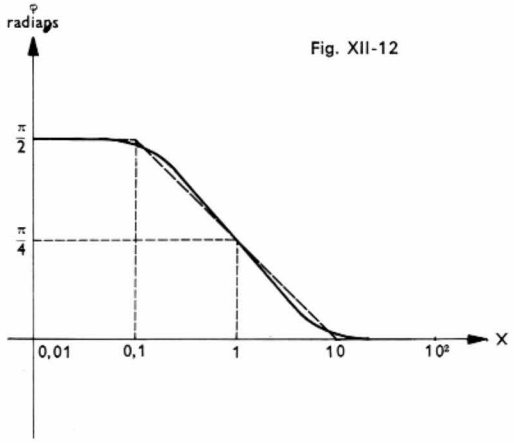


Fig. XII-12

Lorsque $X = 1$, $(f = f_0)$, le déphasage est égal à $\dfrac{\pi}{4}$ rad et l'affaiblissement de G atteint 3 dB.

3.3. Applications. — Ce circuit est un **filtre passe-haut ;** il permet d'éliminer tous les signaux de fréquence inférieure à f_0 et qui ne doivent pas être transmis à la charge du quadripôle. Pour des signaux de fréquence très inférieure à la fréquence de coupure f_0 il constitue un **circuit différenciateur.** En effet un signal d'entrée égal à : $v_e = V_{e\,\text{eff}}\sqrt{2}\sin \omega t$ (de fréquence $f = 0{,}01\ f_0$, par exemple) est transformé en un signal : $v_s = V_{s\,\text{eff}}\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ puisque la courbe $\varphi\ (X)$ indique que la tension v_s est alors déphasée de $\dfrac{\pi}{2}$ rad en avance par rapport à v_e. Or, la tension v_s est aussi égale à : $v_s = V_{s\,\text{eff}}\sqrt{2}\cos \omega t$, et à une constante près, elle représente la dérivée de la tension d'entrée :

$$v_s = K\frac{dv_e}{dt}$$

À tout signal périodique v_e de fréquence f (donc comportant des harmoniques de fréquences $2f$, $3f$, . . . , nf, . . .), correspond un signal de sortie v_s proportionnel à $\dfrac{dv_e}{dt}$ si les fréquences de tous les harmoniques sont inférieures à f_0. Si cette condition n'est pas réalisée, le résultat est plus ou moins proche de la valeur théorique.

4. CIRCUIT CORRECTEUR À AVANCE DE PHASE

4.1. Calcul de la transmittance. — Pour le circuit correcteur à avance de phase considéré (fig. XII-13) nous pouvons écrire :

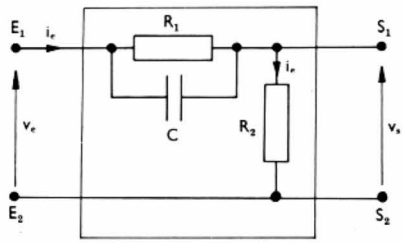


Fig. XII-13

$$\underline{V_e} = \left(\frac{R_1}{1 + jR_1C\omega} + R_2\right)\underline{I_e};\quad \underline{V_s} = R_2\,\underline{I_e}$$

$$\underline{T} = \frac{R_2\,(1 + jR_1C\omega)}{R_1 + R_2\,(1 + jR_1C\omega)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\,\frac{1 + jR_1C\omega}{1 + j\dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2}C\omega}$$

Posons : $\omega_0 = 2\pi f_0 = \dfrac{1}{R_1C}$ et : $\alpha = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$; il vient :

$$\underline{T} = \alpha\,\frac{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\alpha\dfrac{\omega}{\omega_0}} = \alpha\,\frac{1 + jX}{1 + j\alpha X}\quad \text{avec : } \left(X = \frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

4.2. Diagrammes de Bode. — Le module de la transmittance est égal à :

$$T = \alpha\,\frac{\sqrt{1 + X^2}}{\sqrt{1 + \alpha^2X^2}}$$

et l'argument φ de $\underline{T}$ est tel que :

$$\varphi = \text{Arg}\ \underline{T} = \text{Arg}\ (1 + jX) + \text{Arg}\left(\frac{1}{1 + j\alpha X}\right)$$

(α étant un nombre réel positif, Arg $\alpha = 0$)

4.2.1. Courbe de réponse en amplitude

$$G = 20\ \text{lg}\ T$$

$$= 20\ \text{lg}\ \alpha + 20\ \text{lg}\ \sqrt{1 + X^2} + 20\ \text{lg}\ \frac{1}{\sqrt{1 + (\alpha X)^2}}$$

ou : $G = 20\ \text{lg}\ \alpha + 10\ \text{lg}\ (1 + X^2) + 10\ \text{lg}\ \dfrac{1}{1 + (\alpha X)^2}$

Le nombre G est la somme de trois termes dont la représentation par la méthode de Bode est simple. Au premier terme, $G_1 = 20\ \text{lg}\ \alpha$, correspond une droite parallèle à l'axe des abscisses et passant par un point d'ordonnée négative puisque α est inférieur à 1 (fig. XII-14). Le second

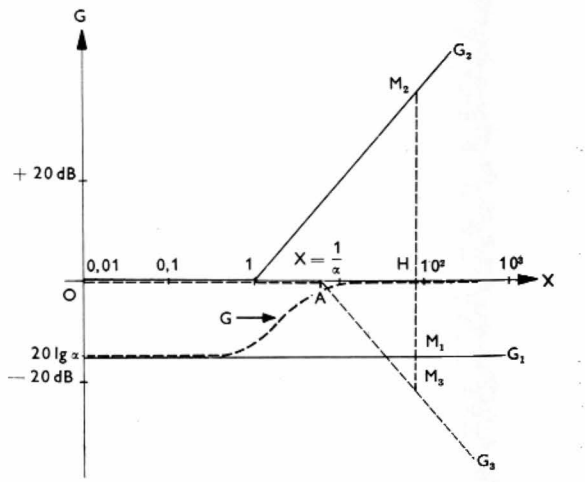


Fig. XII-14

et le troisième terme sont représentés par des courbes qui peuvent être obtenues en opérant comme nous l'avons fait pour un filtre passe-bas. La courbe de réponse est obtenue graphiquement en ajoutant les ordonnées $\overline{HM_1}$, $\overline{HM_2}$, $\overline{HM_3}$ des points M_1, M_2 et M_3 de même abscisse. Nous constatons que l'atténuation est constante et égale à 20 lg α lorsque X est inférieur ou égal à 1 $\left(f \leqslant f_0 = \dfrac{1}{2\pi R_1C}\right)$; en revanche, elle est inférieure à 3 dB tant que X est supérieur ou égal à $\dfrac{1}{\alpha}$ $\left(f \geqslant f_0\,\dfrac{R_1 + R_2}{R_2}\right)$

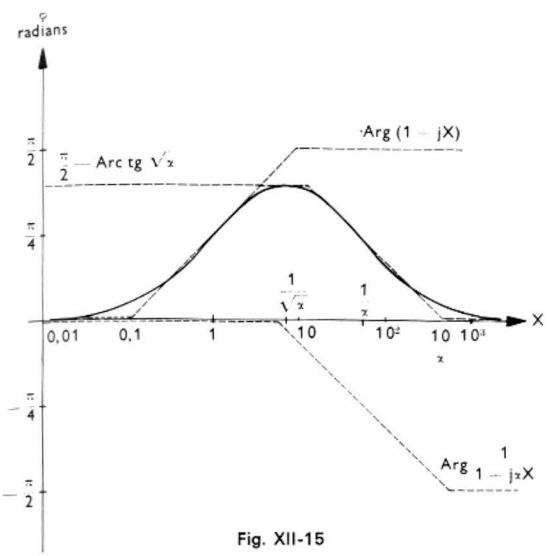


Fig. XII-15

4.2.2. Courbe de déphasage. — En utilisant la même méthode graphique que précédemment, nous obtenons facilement la courbe $\varphi\ (X)$ (fig. XII-15). Nous voyons que le déphasage est nul si X est inférieur à 0,1 ou est supérieur à $\frac{10}{\alpha}$; entre ces deux valeurs de X le déphasage de v_s par rapport à v_e est toujours positif et il passe par un maximum pour $X = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$.

4.3. Applications. — Ce circuit constitue un dispositif correcteur ; il est utilisé dans certains systèmes bouclés (amplificateurs opérationnels et servomécanismes).

5. CIRCUIT CORRECTEUR À RETARD DE PHASE

5.1. Calcul de la transmittance. — Le circuit correcteur à retard de phase (fig. XII-16) présente une trans-

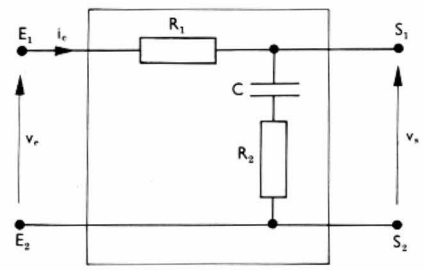


Fig. XII-16

mittance $\underline{T}$ donnée par la relation suivante :

$$\underline{T} = \frac{1 + j R_2 C \omega}{1 + j (R_1 + R_2) C \omega}$$

Posons :

$$\omega_0 = 2 \pi f_0 = \frac{1}{R_2 C} ; \quad \alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2} ; \quad X = \frac{\omega}{\omega_0}$$

il vient :

$$\underline{T} = \frac{1 + j X}{1 + j \frac{X}{\alpha}}$$

5.2. Diagrammes de Bode. — En utilisant toujours la même méthode graphique, nous obtenons la courbe de réponse (fig. XII-17) et la courbe $\varphi\ (X)$ (fig. XII-18). Pour les signaux dont la fréquence est supérieure à $f_0\,\alpha$ $(X = \alpha)$, l'atténuation est supérieure à 3 dB ; cette atténuation est constante et égale à 20 lg α lorsque X est supérieur ou égal à 1, $(f > f_0)$. Le déphasage entre les

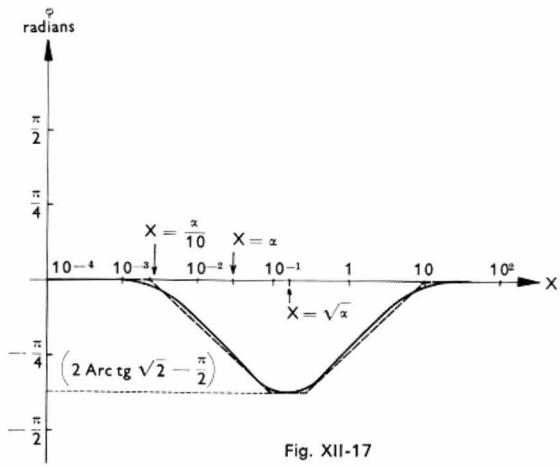


Fig. XII-17

tensions de sortie et d'entrée est nul si X est inférieur ou égal à $\frac{\alpha}{10}$, ou supérieur à 10. Entre ces deux limites le déphasage est négatif : la tension de sortie est en retard par rapport à la tension d'entrée. Ce déphasage est minimal pour $X = \sqrt{\alpha}$. Ce circuit constitue également un dispositif correcteur utilisé dans certains systèmes bouclés et dans des circuits de télécommunications.

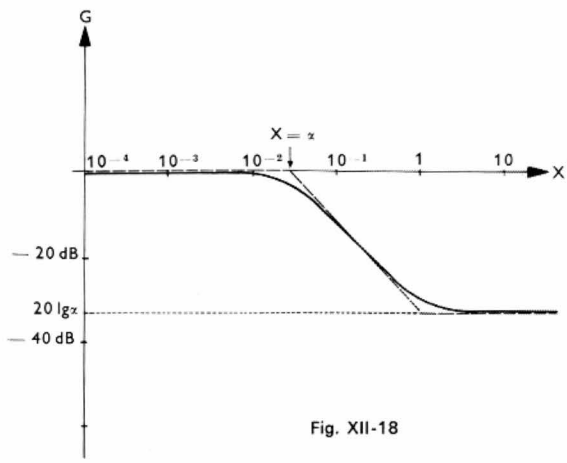


Fig. XII-18

6. CIRCUIT R-L-C SÉRIE

Nous considérons un circuit comportant, associés en série, une résistance R, une inductance L et un condensateur de capacité C (fig. XII-19). La tension d'entrée est appliquée aux bornes de l'ensemble et la tension de sortie est la d.d.p. aux bornes du condensateur.

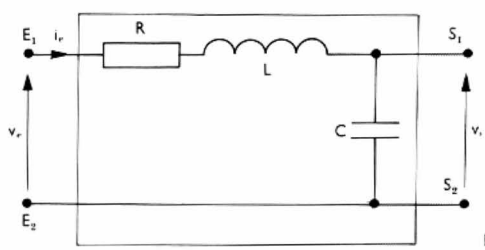


Fig. XII-19

6.1. Calcul de la transmittance

$$\underline{V_e} = \left[R + j \left(L \omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right] \underline{I_e} ; \quad \underline{V_s} = \frac{1}{jC\omega}\, \underline{I_e}$$

d'où :

$$\underline{T} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

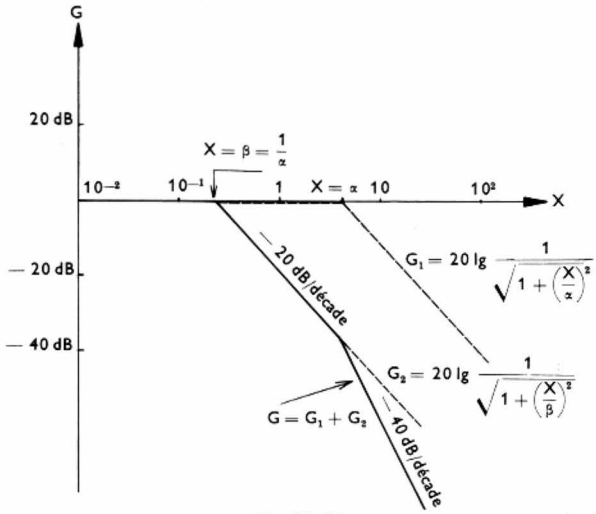


Fig. XII-20 a

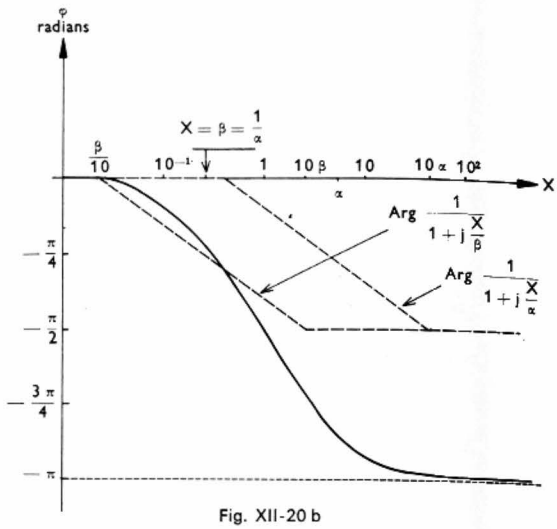


Fig. XII-20 b

Posons: $\omega_0^2 = (2\pi f_0)^2 = \dfrac{1}{LC}$ (f_0 est la fréquence de résonance du circuit); $2\sigma = RC\omega_0$ et $X = \dfrac{\omega}{\omega_0}$;

$$\underline{T} = \frac{1}{1 - X^2 + 2j\sigma X}$$

6.2. Diagrammes de Bode. — Nous pouvons écrire cette relation sous une forme plus commode à utiliser:

$$\underline{T} = \frac{1}{(1 - \sigma^2) + (\sigma + jX)^2}$$

Plusieurs cas peuvent être distingués:

● $\sigma > 1$: le terme $(1 - \sigma^2)$ est négatif; le dénominateur de $\underline{T}$ se présente sous la forme d'une différence de deux carrés, et peut être décomposé en un produit de deux facteurs du premier degré:

$$\underline{T} = \frac{1}{-\left(\sqrt{\sigma^2 - 1}\right)^2 + (\sigma + jX)^2}$$

et $\underline{T} = \dfrac{1}{\left(\sqrt{\sigma^2 - 1} + \sigma + jX\right)\left(-\sqrt{\sigma^2 - 1} + \sigma + jX\right)}$

Posons: $\alpha = \left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1}\right)$ et $\beta = \left(\sigma - \sqrt{\sigma^2 - 1}\right)$

$$\underline{T} = \frac{1}{(\alpha + jX)(\beta + jX)} = \frac{1}{\alpha\beta\left(1 + j\dfrac{X}{\alpha}\right)\left(1 + j\dfrac{X}{\beta}\right)}$$

et: $\underline{T} = \dfrac{1}{\left(1 + j\dfrac{X}{\alpha}\right)\left(1 + j\dfrac{X}{\beta}\right)}$ puisque $\alpha\beta = 1$

Nous nous sommes ramenés à un problème connu: il faut tracer les diagrammes de Bode des facteurs du dénominateur (fig. XII-20), et déterminer par addition les courbes $G(X)$ et $\varphi(X)$ du quadripôle.

● $\sigma = 1$: $\underline{T} = \dfrac{1}{(1 + jX)^2}$ et $G = 40 \lg \dfrac{1}{\sqrt{1 + X^2}}$

Ce cas particulier correspond à l'amortissement critique du circuit. Les diagrammes de Bode (fig. XII-21) sont obtenus facilement à partir des diagrammes d'amplitude et de phase du circuit passe-bas (V. ci-dessus § 2). Lorsque $X = 1$, ($f = f_0$), l'affaiblissement est égal à — 6 dB et la tension de sortie est déphasée de $\dfrac{\pi}{2}$ rad en arrière de la tension d'entrée.

● $\sigma < 1$: la décomposition du dénominateur de $\underline{T}$ en un produit de facteurs du premier degré n'est plus possible. Si σ est inférieur à 0,71, la courbe $G(X)$ passe par un maximum correspondant à une valeur G positive. L'abscisse de ce maximum est égale à $\sqrt{1 - 2\sigma^2}$ et son ordonnée est $G = 20 \lg \dfrac{1}{\sqrt{4\sigma^2(1 - \sigma^2)}}$. Si l'ordonnée de ce maximum est inférieure à + 3 dB le diagramme réel peut être confondu avec celui tracé pour $\sigma = 1$. Dans le cas contraire, il n'est plus intéressant de tracer un diagramme asymptotique car il ne donne pas une précision suffisante pour les fréquences correspondant aux points de la courbe proches du maximum (fig. XII-22).

Ce circuit peut-être utilisé dans les amplificateurs vidéofréquences pour améliorer la réponse aux fréquences élevées (V. t. 2, Radioélectricité).

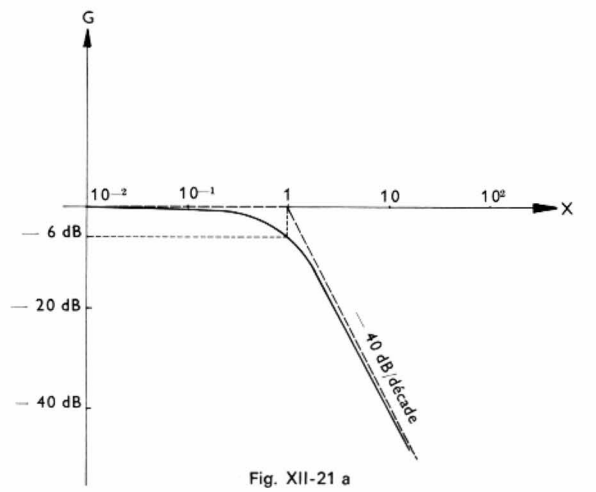


Fig. XII-21 a

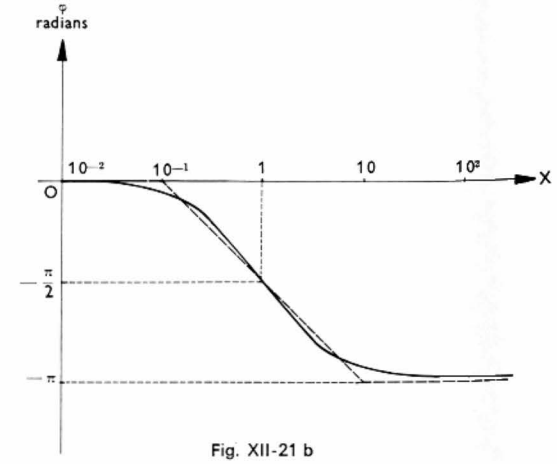


Fig. XII-21 b

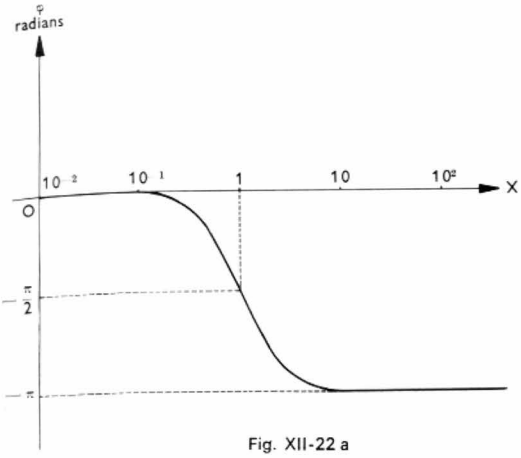


Fig. XII-22 a

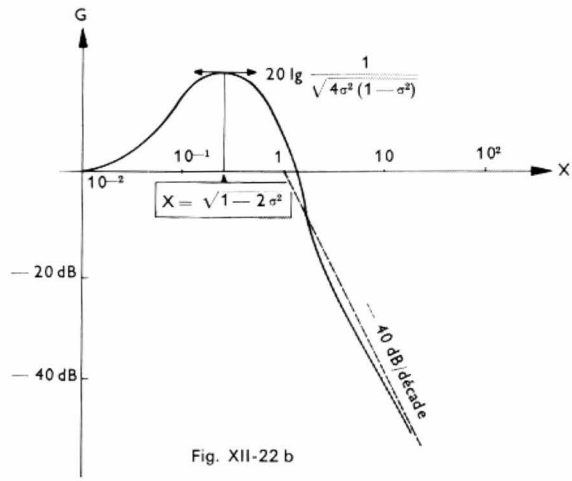


Fig. XII-22 b

CHAPITRE XIII

AMPLIFICATION

1. CLASSIFICATION DES AMPLIFICATEURS

Les utilisations des amplificateurs sont extrêmement variées et comme les qualités requises pour chaque application sont très différentes, il existe de nombreux types d'amplificateurs. Par exemple, pour amplifier le signal issu d'un microphone (tension de quelques millivolts, souvent) afin de le transmettre à un haut-parleur, deux types d'amplificateurs différents sont utilisés : tout d'abord, un amplificateur dit de *petits signaux* permet d'obtenir une tension voisine d'un volt puis un *amplificateur* de *puissance*, commandé par cette tension, restitue des signaux d'amplitude encore plus grande et fournit le courant nécessaire pour exciter le haut-parleur. Ces deux types d'amplificateurs sont très différents et nous devrons les étudier séparément. Des problèmes d'une autre nature encore sont posés par l'amplification de signaux dont les fréquences sont comprises dans une bande très étroite. Il est alors important, de n'amplifier que le signal utile (dont la fréquence est comprise dans le domaine de fonctionnement) et d'atténuer les signaux perturbateurs ayant des fréquences différentes, extérieures à cette bande (séparation des différents émetteurs de radiodiffusion, par exemple). Les amplificateurs utilisés dans ce but sont appelés *amplificateurs accordés* ou à *bande étroite*, et il peut s'agir d'amplificateurs de petits signaux ou d'amplificateurs de puissance.

Cela conduit à distinguer quatre catégories principales d'amplificateurs :

— les amplificateurs *de petits signaux* : à large bande et ceux à bande étroite ;

— les amplificateurs *de puissance* : à large bande et ceux à bande étroite.

2. AMPLIFICATEURS DE PETITS SIGNAUX À LARGE BANDE. — Caractéristiques

Un amplificateur de petits signaux peut toujours être considéré comme un quadripôle linéaire actif (V. Électronique, chap. 12). Un étage amplificateur comprend : un élément actif (transistor, T.E.C., triode, par exemple), les dispositifs nécessaires à assurer le fonctionnement statique et les éléments de couplage et de découplage destinés à transmettre le signal amplifié au circuit d'utilisation. Pour un amplificateur à large bande, il faut obtenir un fonctionnement indépendant de la fréquence dans un domaine très étendu. Les condensateurs de liaison et de découplage utilisés doivent donc se comporter comme des courts-circuits dans toute la gamme des fréquences utiles. De même, les capacités parasites doivent être négligeables à ces fréquences.

Étudier l'amplificateur consiste alors à déterminer les caractéristiques de ce quadripôle (fig. XIII-1) fonction des éléments constitutifs de l'amplificateur et à préciser le domaine de validité de cette représentation. Les courants et les tensions sont supposés sinusoïdaux dans toute cette étude.

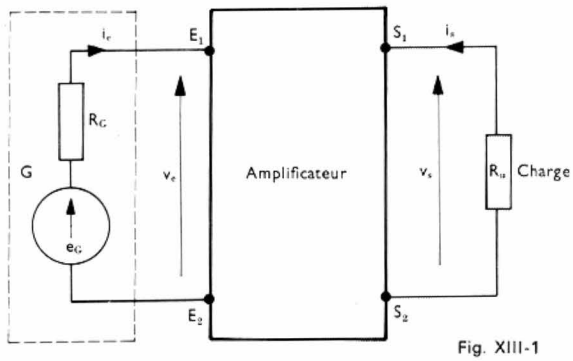


Fig. XIII-1

Les caractéristiques à connaître sont les suivantes :

— *l'impédance d'entrée Z_e de l'amplificateur :* c'est le module du nombre complexe $\underline{Z}_e$ défini par le rapport suivant :

$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{V}_e}{\underline{I}_e}$$

— *l'impédance de sortie Z_s* vue des bornes S_1 et S_2 : c'est le module du nombre complexe $\underline{Z}_s$ qui représente la valeur du rapport $\frac{\underline{V}_s}{\underline{I}_s}$ *lorsque le générateur G est remplacé par sa résistance interne R_G,*

— *l'amplification en tension de l'étage :* pour l'amplificateur seul, c'est le rapport des valeurs efficaces des tensions de sortie et d'entrée :

$$A_v = \frac{V_{s\,\text{eff}}}{V_{e\,\text{eff}}}$$

Pour l'ensemble amplificateur-générateur *G*, c'est le rapport des valeurs efficaces de la tension de sortie et du signal appliqué à *l'entrée de l'ensemble :*

$$A_{ve} = \frac{V_{s\,\text{eff}}}{E_{G\,\text{eff}}}$$

Ces rapports sont les modules des nombres complexes suivants : $\underline{A}_v = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e}$; $\underline{A}_{ve} = \frac{\underline{V}_s}{\underline{E}_G}$

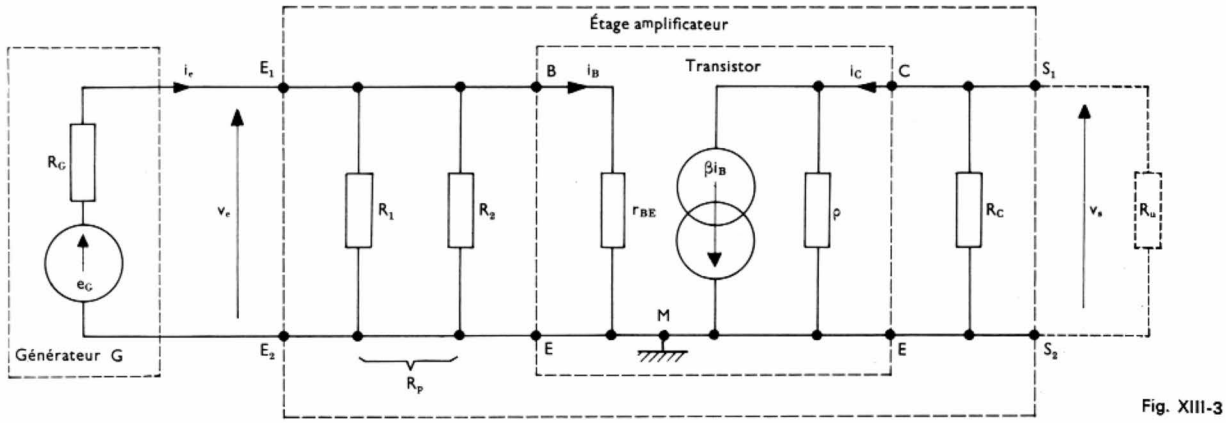


Fig. XIII-3

Ici, l'emploi des nombres complexes est indispensable ; en particulier pour l'amplification en tension, il est utile de connaître à la fois le rapport des valeurs efficaces et le déphasage des deux tensions considérées.

Dans certains cas, il est nécessaire de déterminer aussi :

— l'amplification en courant A_i module du rapport $\underline{A}_i$ des valeurs complexes des courants $\underline{I}_s$ dans la charge et $\underline{I}_e$ dans le circuit d'entrée, $\underline{A}_i = \dfrac{\underline{I}_s}{\underline{I}_e}$,

— l'amplification en puissance A_p, rapport des puissances de sortie P_s (dans la charge) et d'entrée P_e : $A_p = \dfrac{P_s}{P_e}$.

Lorsque la tension d'entrée v_e et le courant i_e sont en phase, la puissance P_e est égale au produit ($V_{e\,\text{eff}}$. $I_{e\,\text{eff}}$) ; s'il en est de même pour la tension de sortie v_s et le courant

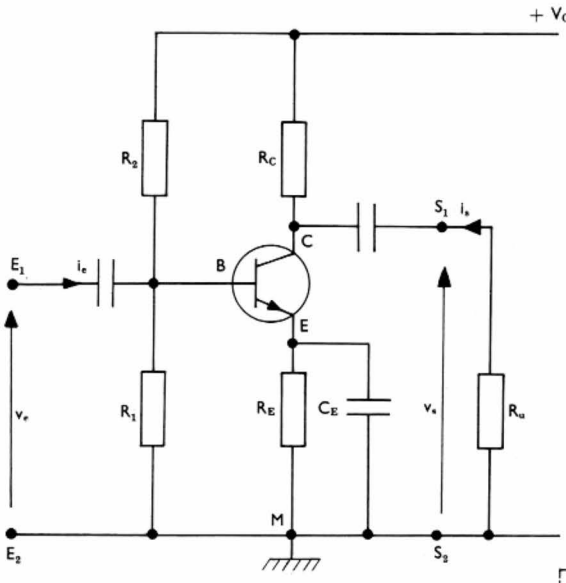


Fig. XIII-2

i_s, la puissance de sortie P_s est égale à $V_{s\,\text{eff}}\ I_{s\,\text{eff}}$).

L'amplification en puissance est alors donnée par l'expression suivante :

$$A_p = \frac{V_{s\,\text{eff}}}{V_{e\,\text{eff}}} \cdot \frac{I_{s\,\text{eff}}}{I_{e\,\text{eff}}} = A_v\, A_i$$

Elle est égale au produit des amplifications en tension (A_v) et en courant (A_i).

3. UTILISATION DU TRANSISTOR EN AMPLIFICATEUR DE PETITS SIGNAUX

3.1. Étage émetteur commun. — Cet étage amplificateur (fig. XIII-2) a déjà été étudié (V. chap. 9), et nous allons simplement en préciser les caractéristiques. Pour faciliter ce travail, nous utiliserons le schéma équivalent de l'étage que nous avons établi lors de cette étude (fig. XIII-3). Dans tout ce qui suit, le facteur de réaction de la sortie sur l'entrée (μ) est supposé négligeable.

3.1.1. Impédance d'entrée. — Vu des bornes E_1 et E_2 (autrement dit, pour le générateur G) l'étage est équivalent à trois résistances (R_1, R_2 et r_{BE}) associées en parallèle (fig. XIII-3). En effet, nous avons vu que les résistances du pont de polarisation peuvent être considérées comme étant en parallèle pour le *fonctionnement dynamique* (V. fig. VIII-31). Si nous remplaçons les résistances R_1 et R_2 par leur résistance équivalente $R_P = \dfrac{R_1\, R_2}{R_1 + R_2}$, l'impédance d'entrée est alors :

$$\underline{Z}_e = \frac{R_P\, r_{BE}}{R_P + r_{BE}}$$

L'impédance d'entrée est réelle et est équivalente à une *résistance* R_e (résistance d'entrée) souvent peu différente de r_{BE} ; elle est donc assez faible (quelques centaines à quelques milliers d'ohms).

3.1.2. Impédance de sortie de l'étage. — C'est l'impédance mesurée entre les bornes S_1 et S_2 lorsque le générateur G (qui est normalement placé entre E_1 et E_2) est remplacé par sa résistance interne R_G (fig. XIII-4). Comme il n'y a aucun générateur dans le circuit d'entrée, i_B est nul et le générateur de courant ne fournit aucun courant ($\beta i_B = 0$). Vu des bornes S_1 et S_2, le montage se réduit donc à deux résistances (R_C et ρ) qui sont disposées en parallèle :

$$\underline{Z}_s = \frac{\rho R_C}{\rho + R_C} = R_s$$

L'impédance de sortie $\underline{Z}_s$ est réelle et est équivalente à une résistance R_s (résistance de sortie). En général, la ré-

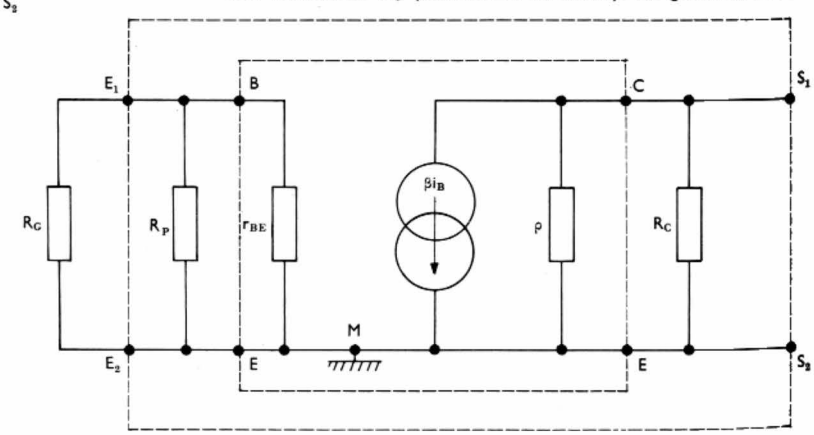
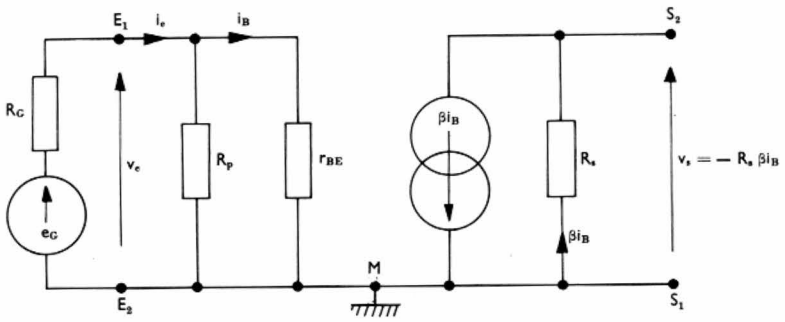


Fig. XIII-4

Fig. XIII-5



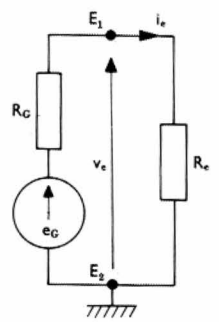


Fig. XIII-7

sistance R_G est très inférieure à ρ et R_s est légèrement plus petite que R_G (elle est souvent égale à quelques milliers d'ohms).

3.1.3. Amplification en tension. — Pour l'amplification en tension de l'étage, il faut distinguer deux cas :

1° *Aucune charge n'est branchée entre S_1 et S_2* : l'amplification en tension $\underline{A}_{v0}$ est égale à (fig. XIII-5) :

$$\underline{A}_{v0} = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{-R_s \beta \underline{I}_B}{r_{BE}\,\underline{I}_B} = -\beta \frac{R_s}{r_{BE}}$$

2° *Une résistance de charge R_u est placée entre S_1 et S_2* : la résistance à considérer dans le circuit de sortie n'est plus R_s mais $\dfrac{R_s R_u}{R_s + R_u}$ (fig. XIII-6). L'amplification en tension de l'étage est alors donnée par l'égalité suivante :

$$\underline{A}_v = -\frac{\beta}{r_{BE}} \cdot \frac{R_s R_u}{R_s + R_u} = \underline{A}_{v0} \frac{R_u}{R_s + R_u}$$

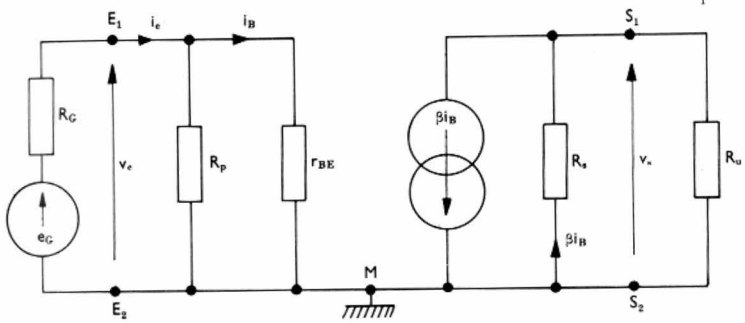


Fig. XIII-6

L'amplification en tension A_{ve} de *l'étage complet* n'est pas égale à celle de l'amplificateur seul si la résistance R_G provoque une chute de tension. Dans ce cas, nous pouvons écrire (fig. XIII-7) :

$$\frac{\underline{V}_e}{\underline{E}_G} = \frac{R_e}{R_e + R_G} \quad \text{ou :} \quad \underline{E}_G = \underline{V}_e \frac{R_e + R_G}{R_e}$$

et nous déduisons :

$$\underline{A}_{ve} \frac{\underline{V}_s}{\underline{E}_G} = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} \cdot \frac{R_e}{R_e + R_G} = \underline{A}_v \cdot \frac{R_e}{R_e + R_G}$$

Au total :

$$\underline{A}_{ve} = \underline{A}_{vo} \cdot \frac{R_u}{R_s + R_u} \cdot \frac{R_e}{R_s + R_G} \quad \text{avec :} \quad \underline{A}_{v0} = -\frac{\beta R_s}{r_{BE}}$$

ce nombre complexe a un module égal à :

$$\left|\underline{A}_{ve}\right| = \left|\frac{\underline{V}_{s\,\text{eff}}}{\underline{E}_{G\,\text{eff}}}\right| = \frac{\beta R_s}{r_{BE}} \cdot \frac{R_u}{R_s + R_u} \cdot \frac{R_e}{R_e + R_G}$$

et son argument est égal à 180° (car $\underline{A}_{ve}$ est négatif). Les tensions v_s et e_G sont donc en opposition de phase (fig. XIII-8).

L'utilisation d'un générateur de tension dont la résistance interne R_G n'est pas nulle et d'une charge R_u d'impédance non infinie diminue considérablement l'amplification d'un étage si les divers éléments ne sont pas choisis convenablement.

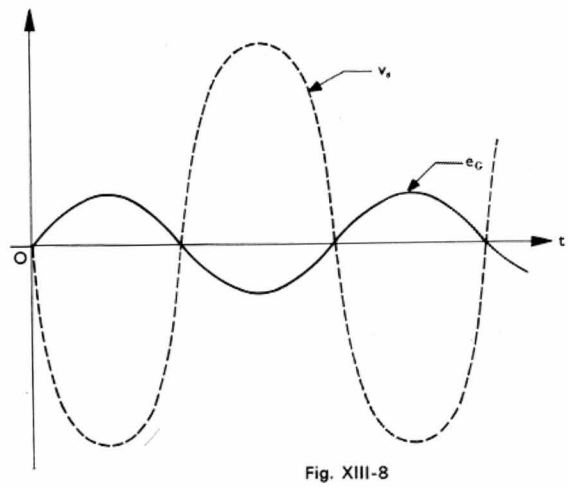
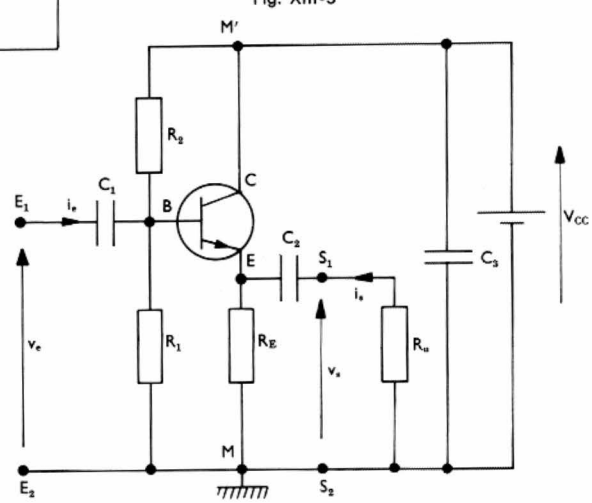


Fig. XIII-8

La tension de sortie v_s et la f.é.m. e_G du générateur alimentant l'étage sont en opposition de phase de même que les tensions v_s et v_e (car v_e et e_G sont proportionnelles)

Fig. XIII-9



3.2. Étage collecteur commun. — Ce montage (fig. XIII-9) comprend une résistance d'émetteur R_E et un pont diviseur pour la polarisation de la base (résistances R_1 et R_2). Le collecteur est relié au point M' qui est au même potentiel que le point M pour le régime alternatif (nous supposons toujours que C_3 est un véritable court-circuit en alternatif) ; pour cette raison d'ailleurs, ce montage est aussi appelé *étage collecteur à la masse*. La tension d'entrée est appliquée entre la base B et la masse M (à travers le condensateur C_1) et la tension de sortie est la d.d.p. entre l'émetteur E et la masse.

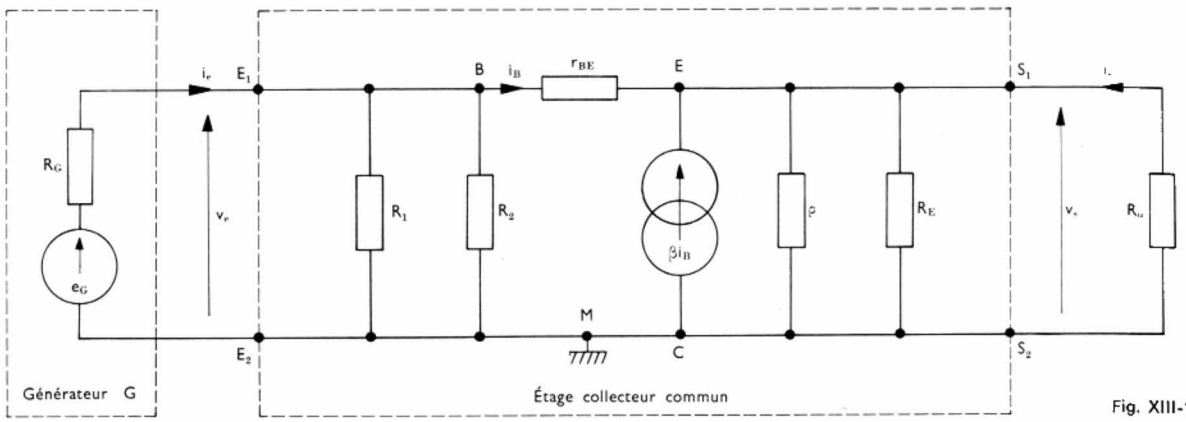


Fig. XIII-10

La figure XIII-10 est un schéma équivalent du montage. Les résistances R_1 et R_2 peuvent être remplacées par une résistance équivalente $R_P = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$; de même, dans le circuit de sortie, une résistance $R'_E = \dfrac{\rho R_E}{\rho + R_E}$ peut être substituée à ρ et à R_E (fig. XIII-11).

que le rapport $\dfrac{R_P}{R_E}$ soit assez faible ; cela impose donc de prendre une valeur R_E suffisamment grande pour la résistance d'émetteur.

3.2.2. Impédance de sortie de l'étage. — Elle peut être déterminée à partir du schéma équivalent de la figure XIII-12 dans lequel le générateur G est remplacé par une

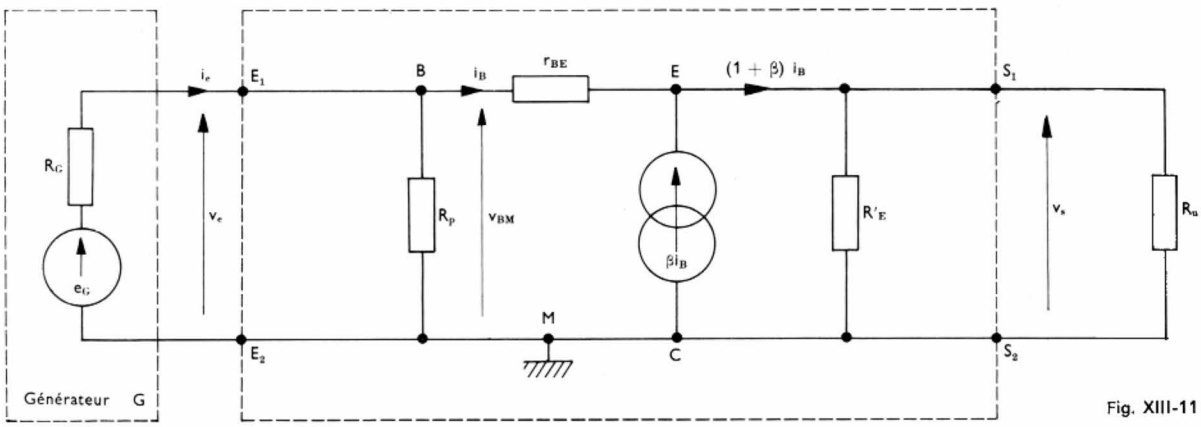


Fig. XIII-11

3.2.1. Impédance d'entrée. — C'est l'impédance équivalente à la résistance R_P et à l'impédance $\underline{Z}_{BM} = \dfrac{\underline{V}_{BM}}{\underline{I}_B}$

$$\underline{Z}_{BM} = \frac{\underline{V}_{BE} + \underline{V}_{EM}}{\underline{I}_B} = r_{BE} + \frac{R'_E R_u}{R'_E + R_u}(1 + \beta)$$

et :

$$\underline{Z}_e = \frac{R_P \underline{Z}_{BM}}{R_P + \underline{Z}_{BM}}$$

L'impédance Z_{BM} est réelle et il en est de même de Z_e ; l'impédance d'entrée se réduit donc à une *résistance* R_e. Elle est bien supérieure à r_{BE} si R_P est suffisamment grande ; c'est une propriété très intéressante du montage collecteur commun.

Pour que le montage soit stable en régime statique, il faut

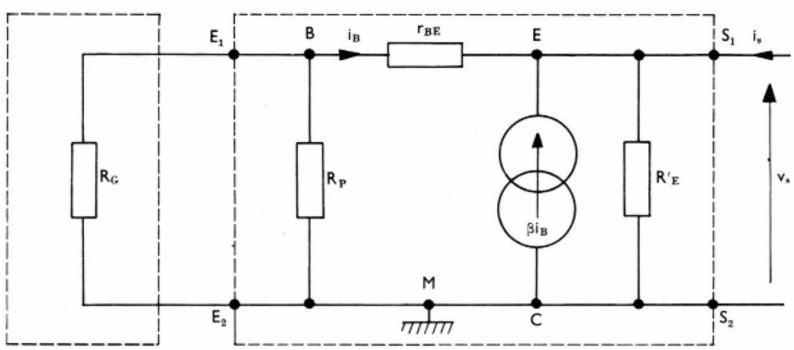


Fig. XIII-12

résistance égale à sa résistance interne R_G. Le calcul de cette impédance permet de constater qu'elle est réelle et égale à :

$$R_s = \frac{R'_E\left(\dfrac{R_P R_G}{R_P + R_G} + r_{BE}\right)}{\dfrac{R_P R_G}{R_P + R_G} + r_{BE} + (1 + \beta) R'_E}$$

Dans la mesure où nous avons :

$$(1 + \beta) R'_E \gg \frac{R_P R_G}{R_P + R_G} + r_{BE}$$

nous pouvons écrire :

$$R_s \approx \frac{\dfrac{R_P R_G}{R_P + R_G} + r_{BE}}{1 + \beta}$$

Cette résistance est assez faible si le quotient $\dfrac{R_P R_G}{R_P + R_G}$ n'est pas trop grand ; R_s peut être égale à quelques dizaines d'ohms.

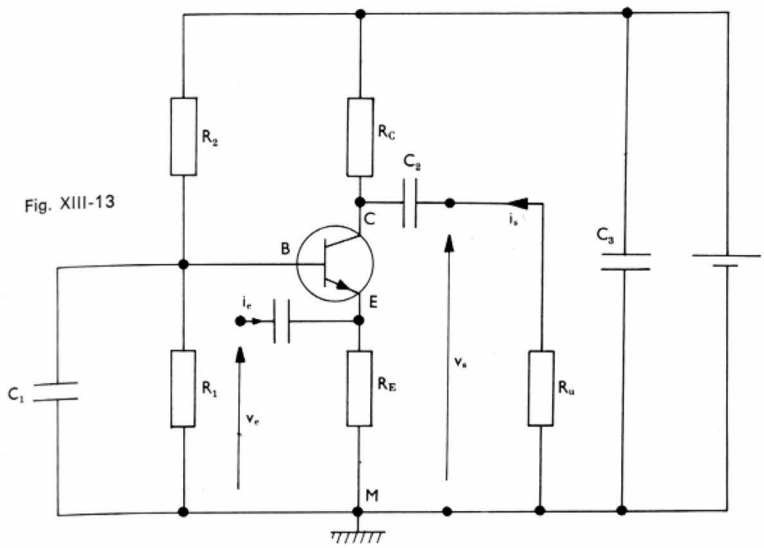
3.2.3. Amplification en tension

1° *Aucune charge n'est placée entre S_1 et S_2.* — L'amplification en tension de l'étage est égale à A_{v0} :

$$\underline{A}_{v0} = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{(1 + \beta) R'_E \underline{I}_B}{[r_{BE} + (1 + \beta) R'_E] \underline{I}_B}$$

$$= \frac{(1 + \beta) R'_E}{r_{BE} + (1 + \beta) R'_E}$$

Fig. XIII-13



$\underline{A}_{v0}$ est une grandeur réelle et positive : l'amplificateur collecteur commun n'introduit donc pas de déphasage entre la tension d'entrée et la tension de sortie. L'amplification obtenue A_{v0} (module de $\underline{A}_{v0}$) est plus petite que l'unité mais elle est cependant très voisine de cette valeur (ordre de grandeur : 0,98).

2° *Une résistance de charge R_u est placée entre S_1 et S_2.* — En utilisant la même méthode que précédemment, nous déduisons le résultat suivant :

$$\underline{A}_v = \frac{(1+\beta)\,\dfrac{R'_E\,R_u}{R'_E + R_u}}{r_{BE} + (1+\beta)\,\dfrac{R'_E\,R_u}{R'_E + R_u}}$$

Les conclusions précédentes s'appliquent également à ce résultat.

En conclusion, un étage amplificateur collecteur commun présente les caractéristiques suivantes :

— une impédance d'entrée très grande,
— une impédance de sortie très faible,
— une amplification en tension très voisine de l'unité.

3.3. Étage base commune. — La constitution de cet étage (fig. XIII-13) est très proche de celle d'un montage émetteur commun (V. fig. XIII-2). Leurs fonctionnements en régime statique sont d'ailleurs identiques. En revanche, en régime dynamique des différences essentielles séparent ces montages. En effet, dans un étage base commune, d'une part, la base B est réunie à la masse M du montage à travers un condensateur C_1 (dont l'impédance est supposée nulle à toutes les fréquences de la bande passante désirée), d'autre part, la tension d'entrée est appliquée entre les bornes de la résistance d'émetteur R_E qui n'est pas découplée.

La figure XIII-14 représente le schéma équivalent d'un étage base commune. Les caractéristiques de ce montage se déterminent en appliquant les lois de Kirchhoff au circuit figuré par ce schéma. Nous nous contenterons d'indiquer les résultats.

3.3.1. Impédance d'entrée. — L'impédance d'entrée Z_e se réduit à une résistance R_e :

$$R_e = \frac{\left(\rho + \dfrac{R_C\,R_u}{R_C + R_u}\right) r_{BE}}{(1+\beta)\,\rho + r_{BE} + \dfrac{R_C\,R_u}{R_C + R_u}}$$

Si le quotient $\dfrac{R_C\,R_u}{R_C + R_u}$ et r_{BE} sont très inférieurs à ρ (cas fréquent), alors la résistance d'entrée est égale à :

$$R_e \approx \frac{r_{BE}}{1+\beta} \approx \frac{r_{BE}}{\beta} \quad (\text{avec} : \beta \gg 1)$$

L'impédance d'entrée du montage base commune est extrêmement faible ; cette propriété est rarement intéressante, et c'est pourquoi cet étage amplificateur n'est utilisé que dans des cas très particuliers.

3.3.2. Impédance de sortie. — L'impédance de sortie se réduit à une résistance R_s. Cette résistance est équivalente à R_C associée en parallèle avec une résistance R_{CB} dont la valeur est la suivante :

$$R_{CB} = \frac{\dfrac{R_G\,R_P\,\rho}{R_G + R_P}(1+\beta) + \left(\dfrac{R_G\,R_P}{R_G + R_P} + \rho\right) r_{BE}}{\dfrac{R_G\,R_P}{R_G + R_P} + r_{BE}}$$

Si le quotient $\dfrac{R_G\,R_P}{R_G + R_P}$ est très supérieur à ρ (et donc à $r_{BE} \ll \rho$), cette résistance est égale à :

$$R_{CB} \approx \rho\,(1+\beta)$$

et
$$R_s = \frac{R_C\,R_{CB}}{R_C + R_{CB}} = \frac{\rho\,R_C\,(1+\beta)}{R_C + \rho\,(1+\beta)}$$

Dans le cas d'une commande en tension, la résistance R_G est nulle et la résistance R_{CB} est sensiblement égale à ρ. La résistance de sortie de l'étage est alors égale à :

$$R_s = \frac{\rho\,R_C}{\rho + R_C}$$

comme pour un montage émetteur commun.

3.3.3. Amplification en tension

1° *Aucune charge n'est placée entre S_1 et S_2.* —

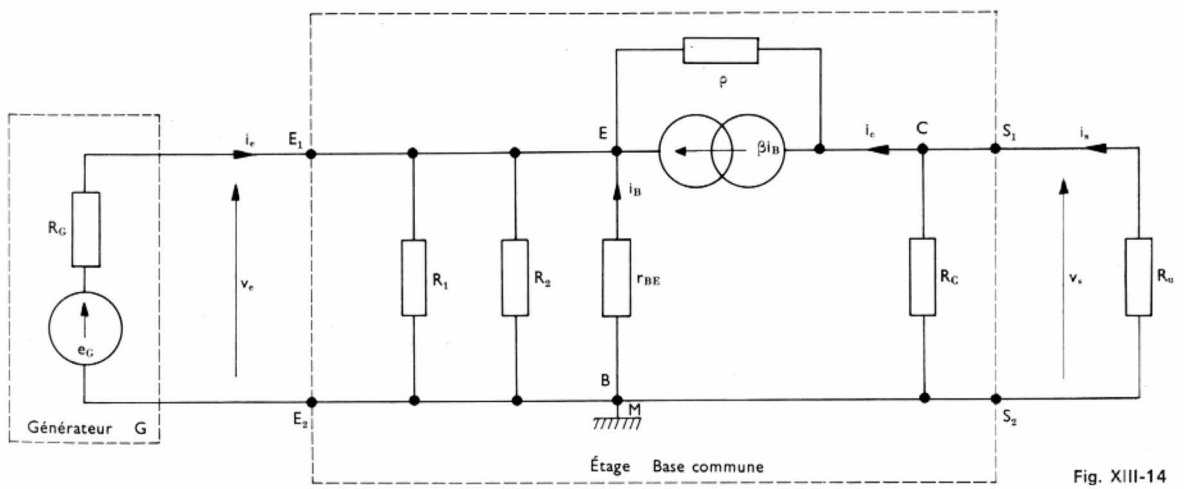


Fig. XIII-14

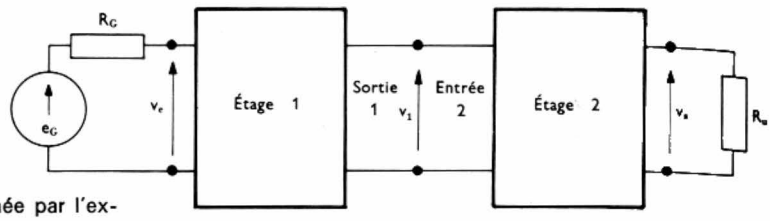


Fig. XIII-15

L'amplification en tension A_{v0} est alors donnée par l'expression suivante :

$$\underline{A}_{v0} = \frac{R_C}{R_C + \rho} \cdot \frac{r_{BE} + \rho\beta}{r_{BE}}$$

La résistance r_{BE} est toujours bien inférieure à $\rho\beta$; par ailleurs, si la résistance de collecteur R_C est plus petite que ρ (cas très fréquent), nous aurons :

$$\underline{A}_{v0} \approx \frac{R_C}{\rho} \cdot \frac{\rho\beta}{r_{BE}} = \frac{\beta R_C}{r_{BE}}$$

Cette valeur ne diffère de celle obtenue pour le montage émetteur commun que par son signe : le montage base commune n'introduit pas de *déphasage entre la tension d'entrée et la tension de sortie.*

2° *Une résistance de charge R_u est placée entre S_1 et S_2.* — L'amplification est donnée par une formule analogue : la résistance R_C doit être remplacée par le quotient $\frac{R_C R_u}{R_C + R_u}$, qui représente la valeur de la résistance équivalente à R_C et R_u, résistances associées en parallèle pour le régime dynamique :

$$\underline{A}_v \approx \frac{\beta}{r_{BE}} \cdot \frac{R_C R_u}{R_C + R_u}$$

Les conclusions précédentes s'appliquent également dans ce cas.

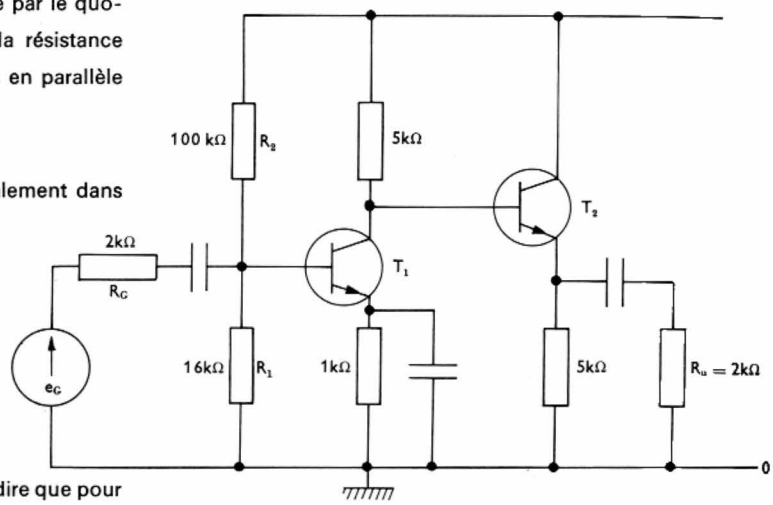


Fig. XIII-16

Amplificateur à deux étages (un étage émetteur commun et un étage collecteur commun)

Pour récapituler ces résultats, nous pouvons dire que pour un montage base commune :

— l'impédance d'entrée est très petite ;
— l'impédance de sortie peut être très grande ;
— l'amplification en tension à vide est sensiblement la même que dans le montage émetteur commun.

Ce montage est intéressant aux fréquences élevées car les capacités parasites ($C_{B'E}$ et $C_{B'C}$) n'introduisent qu'un couplage extrêmement faible entre l'entrée et la sortie et il permet d'obtenir facilement un étage amplificateur stable (risques d'oscillations très réduits).

4. ASSOCIATION DE PLUSIEURS ÉTAGES : AMPLIFICATEURS EN CASCADE

4.1. Caractéristiques de l'ensemble. — Lorsque l'amplification apportée par un seul étage est insuffisante, ou bien lorsque les valeurs des impédances d'entrée ou de sortie ne sont pas compatibles avec les autres éléments de l'ensemble dans lequel s'intègre l'amplificateur, il faut associer plusieurs étages en cascade (fig. XIII-15). Dans un tel montage, la tension d'entrée d'un étage est la tension de sortie de celui qui le précède. La *valeur complexe* de l'amplification globale est égale au *produit des valeurs complexes des amplifications* des divers étages. En effet, avec deux étages nous pouvons écrire :

$$\underline{A}_v = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_1} \cdot \frac{\underline{V}_1}{\underline{V}_e} = \underline{A}_{v1} \cdot \underline{A}_{v2}$$

soit :

$$\underline{A}_v = \underline{A}_{v1} \cdot \underline{A}_{v2}$$

L'*impédance d'entrée* de l'amplificateur est celle du *premier étage ;* l'*impédance de sortie* est celle du *dernier.*

Pour étudier un amplificateur à plusieurs étages, il faut d'abord chercher les caractéristiques du dernier puis remonter progressivement la chaîne. En effet, l'impédance de charge du dernier étage étant connue, nous pouvons calculer son amplification en tension et son impédance d'entrée. Celle-ci constitue l'impédance de charge de l'avant-dernier étage, et nous sommes ainsi ramenés au problème précédent.

4.2. Exemple d'amplificateur à deux étages. — À titre d'exemple, étudions un amplificateur formé d'un étage émetteur commun suivi d'un étage collecteur commun (fig. XIII-16) ; les paramètres des transistors T et T' sont respectivement égaux et ont les valeurs suivantes : $r_{BE} = 2500\ \Omega$, $\beta = 100$, $\rho = 20$ kΩ.

Sur le schéma équivalent pour le régime dynamique (fig. XIII-17), nous pouvons nettement séparer les deux étages. La résistance R_e est la résistance d'entrée du premier étage et celle de l'ensemble également. Si nous appelons R'_E la résistance équivalente aux résistances ρ et R_E $\left(R'_E = \frac{\rho R_E}{\rho + R_E}\right)$, nous pouvons utiliser les formules données au paragraphe précédent (étage collecteur commun). Les calculs fournissent les résultats suivants : amplification en tension du deuxième étage : $\underline{A}_v' = 0{,}98$; résistance d'entrée du second étage : $R'_e = 136{,}5$ kΩ.

Pour le premier étage, R'_e représente la résistance d'utilisation. Nous appliquons alors les formules du montage émetteur commun et cela conduit aux résultats suivants : amplification en tension du premier étage : $\underline{A}_v = -156$; résistance d'entrée du premier étage : $R_e = 2{,}12$ kΩ.

Pour l'ensemble, l'amplification en tension est le produit des amplifications A'_v et A_v : $-156 \times 0{,}98 \approx -153$. Si la tension d'entrée est sinusoïdale et a une valeur efficace égale à 5 mV, la tension de sortie est également sinusoïdale, sa valeur efficace est égale à $153 \times 5 = 765$ mV environ et elle est en opposition de phase avec la tension d'entrée. L'impédance de sortie du montage est égale à celle du dernier étage. En appliquant les formules démontrées précédemment, nous constatons que la résistance de sortie R_s est égale à 65 Ω environ.

4.3. Montage cascode. — C'est l'association en cascade d'un étage émetteur commun et d'un étage base commune (fig. XIII-18). Pour étudier plus facilement ce montage, nous pouvons faire abstraction des éléments

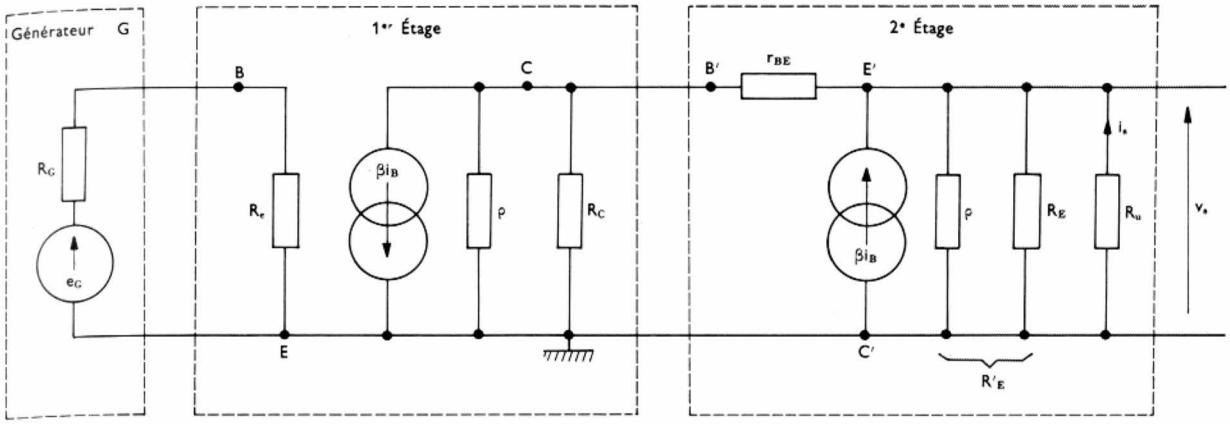


Fig. XIII-17

nécessaires seulement pour le *fonctionnement statique* et établir un schéma simplifié (fig. XIII-19).

Les transistors T et T' sont supposés identiques (r_{BE}, β, ρ) ; les caractéristiques du montage base commune sont les suivantes :

— amplification en tension : $\dfrac{\beta R_C}{r_{BE}}$

— résistance d'entrée : $R'_e = \dfrac{r_{BE}}{1+\beta} \approx \dfrac{r_{BE}}{\beta}$ $(\beta \gg 1)$

Pour le premier étage (montage émetteur commun) nous obtenons : amplification en tension : $-\dfrac{\beta R'_e}{r_{BE}}$; l'amplification de l'ensemble est donc égale à :

$$\underline{A}_v = \frac{\beta R_C}{r_{BE}} \cdot \frac{\beta R'_e}{r_{BE}} \approx -\frac{\beta R_C}{r_{BE}}$$

L'amplification est identique à celle d'un seul étage émetteur commun utilisé avec la même résistance de charge R_C ; l'impédance d'entrée est aussi la même. L'impédance de sortie de l'étage base commune est très grande, et cela pourrait être mis à profit pour obtenir une amplification plus importante (en augmentant la valeur de R_C). Cependant, le véritable intérêt du montage n'est pas là : un amplificateur à bande étroite fonctionne de façon stable à une

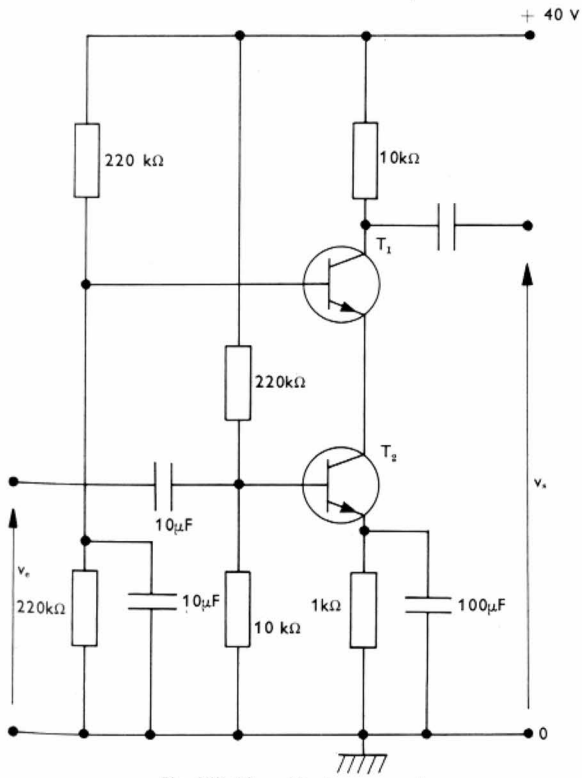
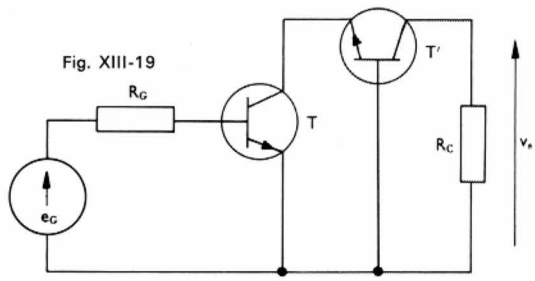


Fig. XIII-18 — Montage cascode

Fig. XIII-19



fréquence très élevée, si le montage utilisé est exempt de couplages parasites internes entre l'entrée et la sortie ; le **montage cascode** possède cette propriété. En effet, le transistor T ayant une amplification volsine de l'unité est peu sensible aux couplages parasites et T' monté en base commune est très stable aux fréquences élevées. Le premier étage (dont l'amplification est très faible) sert d'adaptateur d'impédance pour le second qui est caractérisé par une faible résistance d'entrée et qui est donc difficile à utiliser directement. Le montage cascode peut être réalisé avec deux triodes à vide ; sous cette forme il est encore utilisé comme étage d'entrée dans certains récepteurs de télévision.

4.4. Montages à grande impédance d'entrée. — Avec un transistor déterminé le montage collecteur commun est l'étage amplificateur qui présente la plus grande impédance d'entrée. Si la valeur ainsi obtenue est encore insuffisante, il est possible d'associer deux étages collecteur commun en cascade : c'est le **montage Darlington** (fig. XIII-20). Pour le régime dynamique, le montage à considérer est celui de la figure XIII-21.

Fig. XIII-20

Montage Darlington utilisé ici en collecteur commun

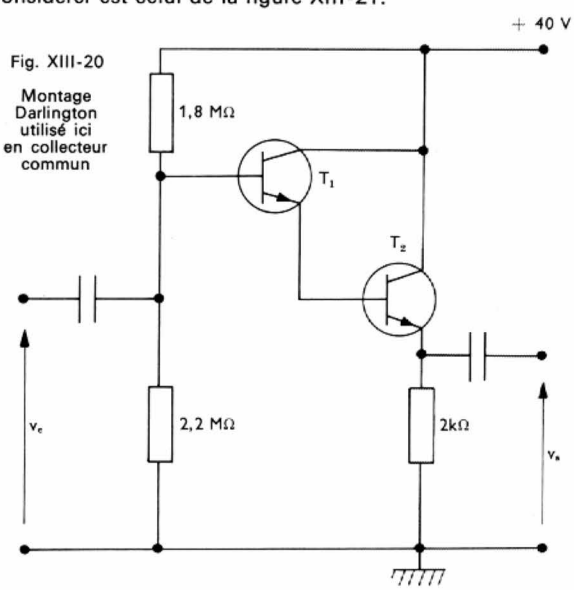
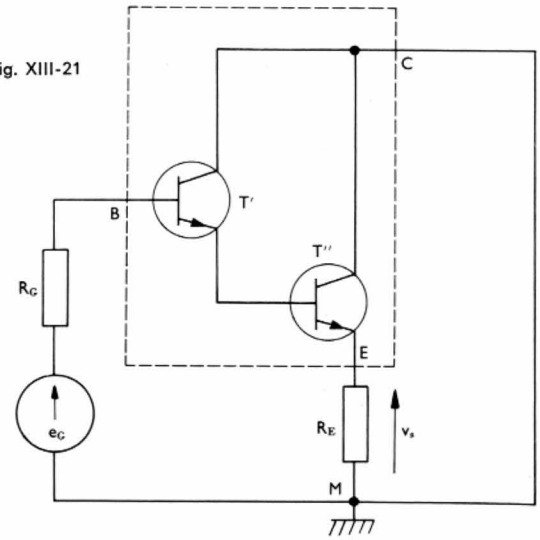


Fig. XIII-21



Pour l'utilisateur, l'ensemble des transistors est équivalent à un transistor unique T dont les électrodes sont : l'émetteur de T'', la base de T' et les collecteurs de T' et T'' qui sont reliés l'un à l'autre (fig. XIII-22). Les paramètres de ce transistor T (r_{BE}, β, ρ et μ) se déduisent de ceux de T' (r'_{BE}, β', ρ') et de T'' (r''_{BE}, β'', ρ'').

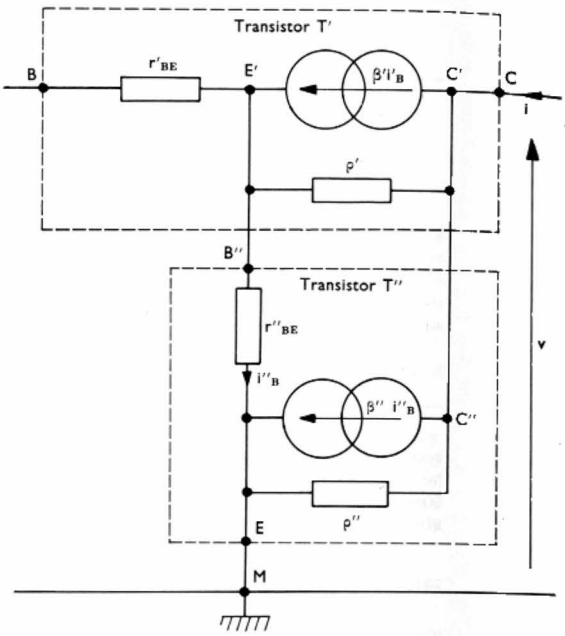
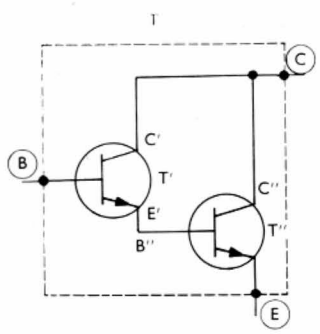


Fig. XIII-24

Fig. XIII-22



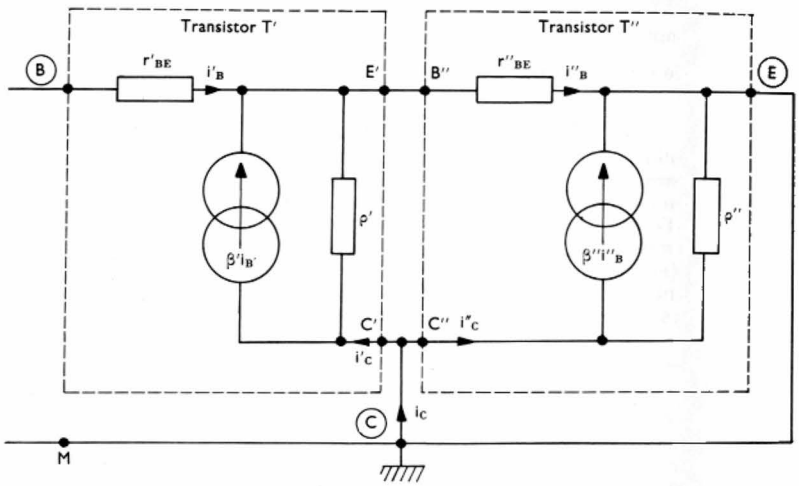


Fig. XIII-23 — Schéma équivalent du montage Darlington lorsque la sortie est en court-circuit

— *Calcul de* r_{BE}. — C'est la résistance d'entrée à sortie en court-circuit ($R_E = 0$). Elle peut être déterminée en utilisant le schéma équivalent du montage (fig. XIII-23) :

$$r_{BE} = r'_{BE} + \frac{r''_{BE} \cdot \rho'}{r''_{BE} + \rho'} (1 + \beta)$$

— *Calcul de* β. — β est l'amplification en courant à sortie en court-circuit (fig. XIII-23). Si nous négligeons le faible courant passant dans la résistance ρ' nous pouvons écrire : $\underline{I}_C = \beta'' \underline{I}''_B + \beta' \underline{I}'_B$ et : $\underline{I}''_B = \underline{I}'_B (1 + \beta')$ d'où :

$$\beta = \frac{\underline{I}_C}{\underline{I}'_B} = \beta'' (1 + \beta') + \beta' \approx \beta' \beta''$$

— *Calcul de* ρ. — La résistance de sortie à entrée ouverte peut être calculée en utilisant le schéma équivalent de la figure XIII-24. L'entrée étant ouverte, le courant i'_B est nul ainsi que $\beta' i'_B$. Si nous appliquons une tension v entre C et M, le courant i est donné par la relation suivante :

$$\underline{I} = \frac{\underline{V}}{\rho' + r''_{BE}} + \beta'' \frac{\underline{V}}{\rho' + r''_{BE}} + \frac{\underline{V}}{\rho''} \approx \underline{V} \left[\frac{\beta'' + 1}{\rho'} + \frac{1}{\rho''} \right]$$

(car la résistance ρ' est nettement supérieure à r''_{BE}).
Donc, la résistance ρ est la résistance équivalente à deux résistances associées en parallèle : ρ'' et $\frac{\rho'}{\beta'' + 1}$:

$$\rho = \frac{\rho' \rho''}{\rho' + \rho'' (\beta'' + 1)}$$

— *Calcul de* μ. — Le facteur de report à entrée ouverte ne peut être négligé pour le transistor équivalent T : une tension v_{BM} apparaît entre les points B et M lorsque la d.d.p. entre C et M est égale à v : $v_{BM} = v \cdot \frac{r''_{BE}}{r''_{BE} + \rho'}$; donc :

$$\mu = \frac{r''_{BE}}{r''_{BE} + \rho'}$$

Pour le transistor T équivalent à l'ensemble, le coefficient β est très grand (si $\beta' = \beta'' = 100$, $\beta = 10^4$), et le facteur de report μ est beaucoup plus grand que celui d'un transistor (souvent 50 à 100 fois plus grand). C'est cette dernière caractéristique qui ne permet pas de réaliser des étages amplificateurs de ce type ayant une impédance d'entrée supérieure à quelques mégohms.

Pour éviter que le pont de polarisation ne diminue trop l'impédance d'entrée, le *montage « bootstrap »* est souvent utilisé (fig. XIII-25). Si le condensateur C_1 peut être considéré comme un court-circuit à toutes les fréquences de la bande utile, la résistance R est alimentée sous la tension (v_e — v_s) en régime dynamique. Elle est alors traversée par un courant i dont la valeur complexe $\underline{I}$ est donnée par l'expression suivante :

$$\underline{I} = \frac{\underline{V}_e - \underline{V}_s}{R} = \frac{\underline{V}_e (1 - \underline{A}_v)}{R}$$

c'est le courant qui traverserait une impédance de valeur

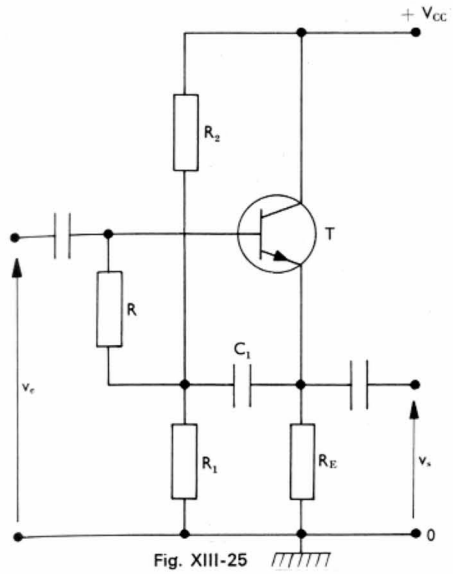


Fig. XIII-25

complexe égale à $\underline{Z} = \dfrac{R}{1 - \underline{A}_v}$ et alimentée sous la tension v_e.

Pour un montage collecteur commun, $\underline{A}_v$ est voisin de 1, et le circuit de polarisation (R, R_1, R_2) est équivalent à une très grande impédance. Par exemple, si $\underline{A}_v = 0{,}98$, nous obtenons : $\underline{Z} = 50\,R$ soit 2,5 MΩ si $R = 50$ kΩ. En appliquant ce principe à un montage Darlington, il est possible d'obtenir un étage présentant une grande impédance d'entrée (fig. XIII-26).

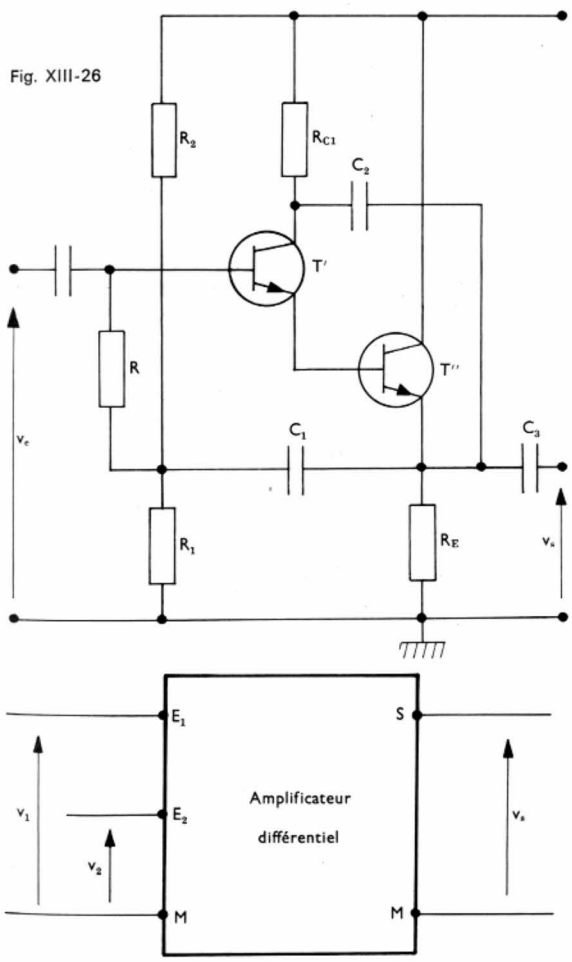


Fig. XIII-26

Fig. XIII-27

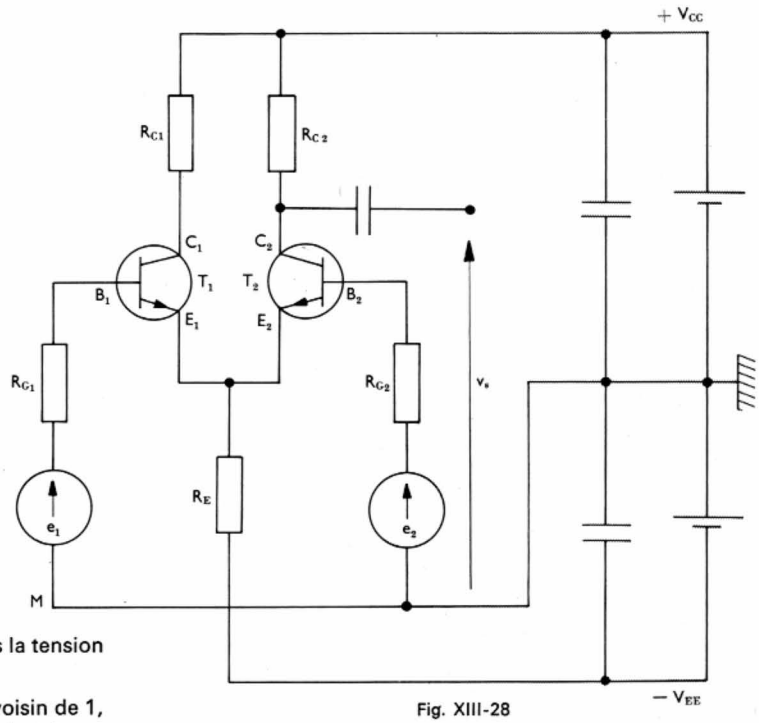


Fig. XIII-28

5. AMPLIFICATEUR DIFFÉRENTIEL

Un amplificateur différentiel est utilisé pour amplifier la différence ($v_1 - v_2$) entre deux signaux v_1 et v_2, (fig. XIII-27). Il n'existe pas d'amplificateur différentiel parfait ; d'une façon générale, les montages utilisés dans ce but délivrent une tension de sortie v_s qui est une combinaison linéaire des signaux v_1 et v_2 : $\underline{V}_s = \underline{A}_1\,\underline{V}_1 + \underline{A}_2\,\underline{V}_2$; comme cette égalité peut toujours être mise sous la forme suivante :

$$\underline{V}_s = \underline{A}_d\,(\underline{V}_1 - \underline{V}_2) + \underline{A}_c\left(\frac{\underline{V}_1 + \underline{V}_2}{2}\right)$$

le signal de sortie d'un amplificateur différentiel peut être considéré comme la somme de deux tensions dont l'une est effectivement proportionnelle à la différence ($v_1 - v_2$) tandis que l'autre est proportionnelle à la moyenne des signaux d'entrée $\left(\dfrac{v_1 + v_2}{2}\right)$. Les facteurs $\underline{A}_d$ et $\underline{A}_c$ sont appelés respectivement *amplification différentielle du montage* et *amplification en mode commun*. Le taux de réjection du mode commun est le rapport :

$$\rho = \left|\frac{\underline{A}_d}{\underline{A}_c}\right|$$

Il renseigne sur le degré de perfection de l'amplificateur. Le taux de réjection en mode commun est un nombre abstrait. Souvent les techniciens considèrent non pas le nombre ρ mais l'expression (20 lg ρ) qui est également appelée taux de réjection en mode commun mais qui est exprimée en *décibels* (V. t. 1, Préliminaires, chap. 4).

5.1. Amplificateur à couplage d'émetteur. — Le montage fondamental dont dérivent pratiquement tous les amplificateurs différentiels est totalement symétrique (fig. XIII-28). Nous supposerons notamment que les transistors T_1 et T_2 sont identiques. Afin qu'aucun condensateur de couplage ne soit nécessaire pour relier les générateurs fournissant les signaux v_1 et v_2 et les bases des transistors, la polarisation des transistors est réalisée au moyen d'une alimentation double fournissant les tensions $+ V_{CC}$ et $- V_{EE}$; le fonctionnement statique est convenable lorsque $V_{B_1} = V_{B_2} = 0$.

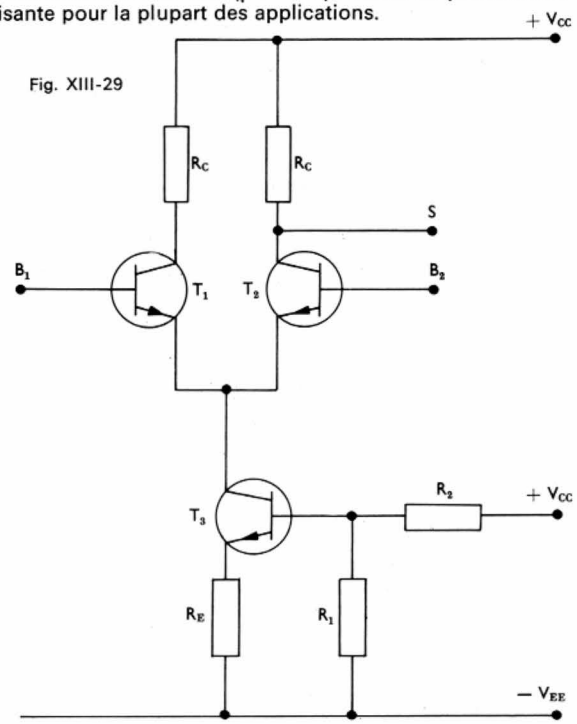
Si la résistance R_E est très grande, en régime dynamique le circuit des émetteurs est pratiquement ouvert ; quelles que soient les amplitudes des signaux v_1 et v_2, les composantes alternatives i_{E_1} et i_{E_2} des courants d'émetteurs sont opposées : $i_{E_1} = -i_{E_2} \Rightarrow \underline{I}_{E_1} = -\underline{I}_{E_2}$. *Or, si les tensions* v_1 et v_2 *sont égales*, du fait de la symétrie du montage, ces courants doivent êtres égaux : $i_{E_1} = i_{E_2} \Rightarrow \underline{I}_{E_1} = \underline{I}_{E_2}$. La seule solution possible est donc : $\underline{I}_{E_1} = \underline{I}_{E_2} = 0$.

La composante alternative i_{C_2} qui est sensiblement égale à i_{E_2} est donc également nulle et il en est de même de la tension alternative aux bornes de R_C, c'est-à-dire de la tension de sortie v_s : $\underline{V}_s = \underline{A}_c \dfrac{\underline{V}_1 + \underline{V}_2}{2} = 0$; cela implique : $A_c = 0$. Le taux de réjection du mode commun est alors infini.

En général la résistance R_E n'est pas suffisamment grande pour que les résultats précédents soient vérifiés mais le calcul montre que le taux de réjection est d'autant plus grand que R_E est plus grande (toutes choses égales, par ailleurs).

5.2. Autres montages. — De nombreux montages ont été proposés pour augmenter la valeur de l'impédance commune du circuit des émetteurs ; le plus couramment utilisé est celui de la figure XIII-29. Si l'ensemble R_1-R_2 a une valeur suffisamment faible, le courant collecteur de T_3 est pratiquement constant, c'est-à-dire que tout se passe comme si le transistor T_3 était équivalent à une très grande impédance. Le taux de réjection du mode commun peut alors atteindre 100 dB ($\rho = 10^5$), valeur amplement suffisante pour la plupart des applications.

Fig. XIII-29



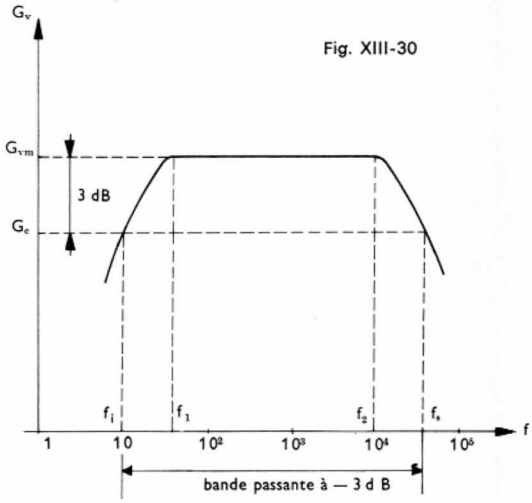
Cependant, une valeur élevée du taux de réjection n'est pas suffisante pour que le fonctionnement d'un amplificateur différentiel soit satisfaisant. Ces amplificateurs sont souvent utilisés pour amplifier des différences de potentiel dont les variations sont infiniment lentes (amplificateurs dits à *courant continu*) et alors les variations des tensions bases-émetteurs, du courant résiduel I_{CBO} et de β sous l'effet d'un changement de température se répercutent sur la tension de sortie. Elles sont particulièrement gênantes lorsqu'elles ne sont pas les mêmes pour les deux transistors car toute différence de tension est fortement amplifiée par le montage. Pour réaliser un amplificateur différentiel, il faut utiliser un transistor double : T_1 et T_2, fabriqués dans un même monocristal de silicium afin que toutes les jonctions soient pratiquement à la même température. Avec les circuits intégrés (tous les éléments du montage sont réalisés sur une seule plaquette de silicium), les dérives sont extrêmement réduites et les performances sont excellentes ; les amplificateurs différentiels sous forme de circuits intégrés sont de plus en plus employés dans tous les domaines de l'électronique.

6. COURBE DE RÉPONSE EN AMPLITUDE D'UN ÉTAGE AMPLIFICATEUR

L'amplification A_v d'un amplificateur dépend de la fréquence f des signaux à amplifier. Pour s'en rendre compte, il suffit de tracer la courbe représentative de A_v en fonction de f. Plus souvent c'est le gain en tension G_v qui est considéré ($G_v = 20 \lg A_v$; V. t. 1, Préliminaires, chap. 4) et la courbe G_v (f) est appelée *courbe de réponse en amplitude* de *l'amplificateur*.

Pour un amplificateur à large bande, ce gain est sensiblement constant tant que la fréquence est comprise entre deux limites f_1 et f_2 (fig. XIII-30). De part et d'autre de cet

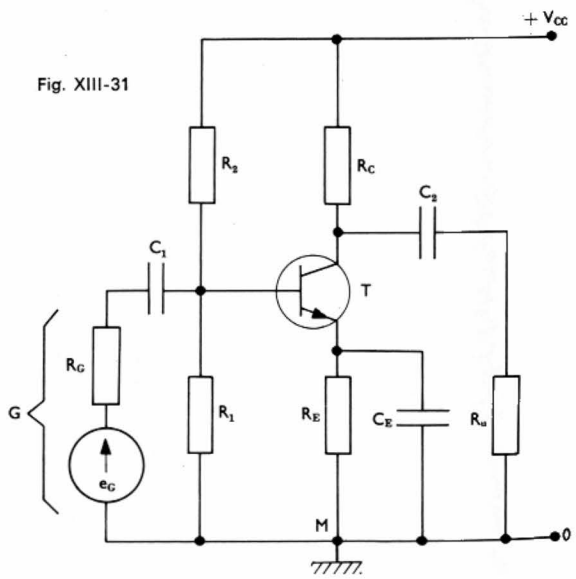
Fig. XIII-30



intervalle G_v décroît et le domaine d'utilisation de l'amplificateur est limité par les fréquences f_i et f_s pour lesquelles l'affaiblissement de G_v est de 3 dB par rapport à sa valeur maximale G_{vm}. L'intervalle (f_s-f_i) est appelé *bande passante* à — 3 dB ; f_i et f_s sont les *fréquences* de coupure à —3 décibels. Rappelons à ce propos que lorsque le gain en tension diminue de 3 dB en passant de G_{vm} à G_c, l'amplification en tension décroît de A_{vm} à $A_{vc} = \dfrac{A_{vm}}{\sqrt{2}}$.

Dans un montage amplificateur en émetteur commun (fig. XIII-31), les trois condensateurs C_1, C_2 et C_E s'op-

Fig. XIII-31



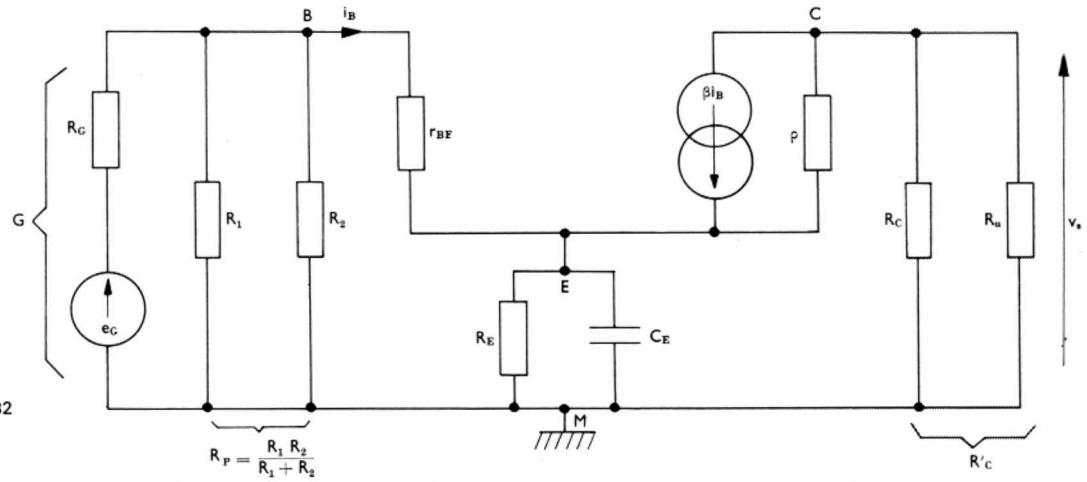


Fig. XIII-32

posent à la transmission des *fréquences basses*. La principale limitation est imposée par le condensateur C_E qu'il faut choisir de capacité suffisamment grande (fig. XIII-32). Un calcul sortant du cadre de cet ouvrage montre que la fréquence inférieure de la bande passante est sensiblement égale à :

$$f_i = \frac{1}{2\,\pi\,R_E C_E}\left[1 + \frac{(1+\beta)\,R_E}{r_{BE} + \dfrac{R_G R_P}{R_G + R_P}}\right] \text{ avec } R_P = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

(si le terme entre crochets a une valeur suffisamment grande.) Par exemple, pour que la fréquence f_i soit égale à 50 Hz avec un montage tel que $R_E = 1$ kΩ, $r_{BE} = 1$ kΩ, $\dfrac{R_G R_P}{R_G + R_P} = 3$ kΩ et $\beta = 100$, il faut que C_E soit égale à 84 μF.

Aux *fréquences élevées*, ce sont les capacités parasites du transistor lui-même qui limitent l'amplification tandis que C_1, C_2 et C_E peuvent être considérés comme des courts-circuits (fig. XIII-33). Le condensateur $C_{B'C}$ est

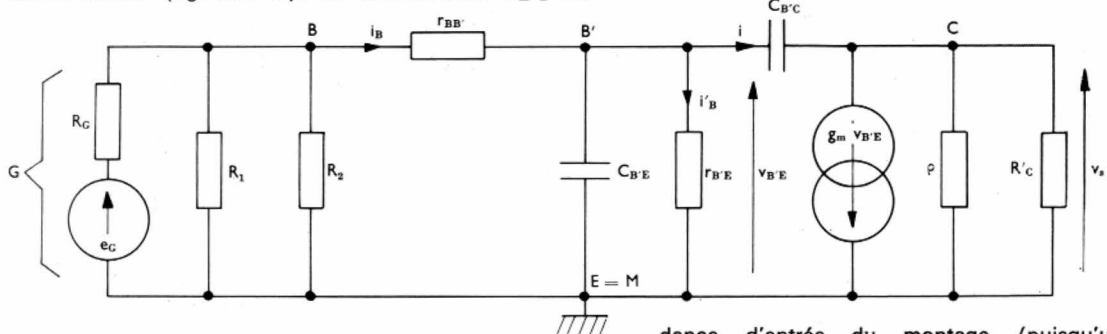


Fig. XIII-33

traversé par un courant i dont la valeur complexe est égale à :

$$\underline{I} = j\,C_{B'C}\,\omega\,(\underline{V}_{B'E} - \underline{V}_s) = j\,C_{B'C}\,\omega\,\underline{V}_{B'E}\left(1 - \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_{B'E}}\right)$$

Posons : $\underline{A}_{v0} = \dfrac{\underline{V}_s}{\underline{V}_{B'E}}$

il vient : $\underline{I} = j\,C_{B'C}\,\omega\ \ \underline{V}_{B'E}\,(1 - \underline{A}_{v0})$

Si nous négligeons le courant i qui reste toujours très inférieur au courant $g_m\,v_{B'E}$, l'amplification $\underline{A}_{v0}$ peut être facilement calculée : $\underline{A}_{v0} = g_m R'_C = -A_{v0}$; c'est un nombre réel négatif et la quantité $(1 - \underline{A}_{v0})$ est un nombre positif (ρ est supposé très supérieur à R'_C).

Vis-à-vis du circuit d'entrée, la capacité $C_{B'C}$ absorbe donc le même courant qu'un condensateur de capacité $C_{B'C}$ $(1 + A_{v0})$ alimenté sous la tension $v_{B'E}$ (c'est-à-dire branchée entre B' et E). Cette capacité est très importante puisque $A_{v0} \gg 1$ (fig. XIII-34).

Vis-à-vis de la sortie, puisque nous pouvons écrire :

$$\underline{I} = -j\,C_{B'C}\,\omega\left(1 - \frac{1}{\underline{A}_{v0}}\right)\underline{V}_s \approx -j\,C_{B'C}\,\omega\,\underline{V}_s$$

(car A_{v0} est grand), tout se passe comme si un condensateur de capacité $C_{B'C}$ était branché entre C et la masse M (fig. XIII-34).

L'impédance d'un condensateur diminue quand la fréquence du courant augmente. Il en est de même de l'impédance d'entrée du montage (puisqu'une capacité $C_e = C_{B'E} + C_{B'C}\,(1 + A_{v0})$ est en parallèle avec $r_{B'E}$) et de l'impédance de sortie ($C_{B'C}$ est en parallèle avec R'_C). Pour ces deux raisons, l'amplification diminue ; cependant, l'expérience montre que l'influence de C_e est prépondérante et détermine la valeur de la fréquence de coupure f_s qui est égale à : $f_s = \dfrac{1}{2\,\pi\,C_e r_{B'E}}\left[1 + \dfrac{r_{B'E}}{r_{BB'} + \dfrac{R_G R_P}{R_G + R_P}}\right]$

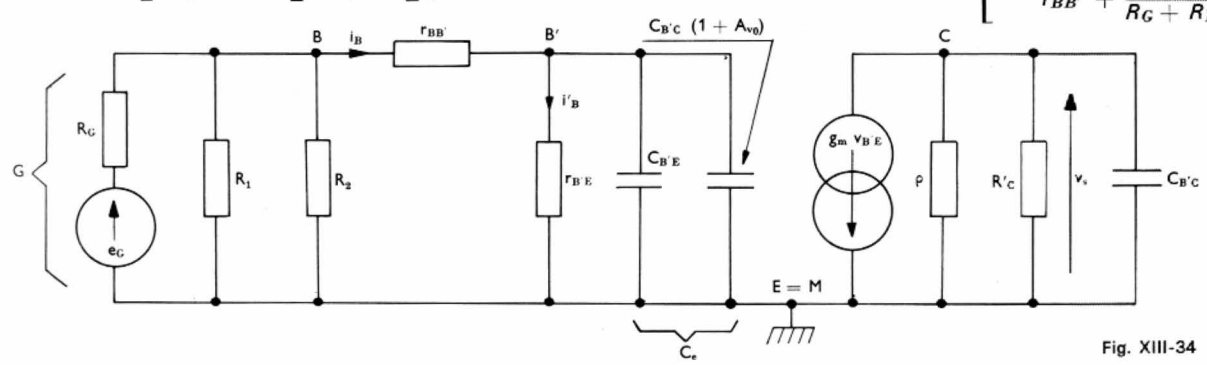


Fig. XIII-34

Dans le cas d'une *attaque en courant* $\left(\frac{R_G R_P}{R_G + R_P} \gg r_{B'E}\right)$, la fréquence f_s est alors donnée par l'expression suivante :

$$f_s \approx \frac{1}{2\pi C_e r_{B'E}} \ll f_\beta = \frac{1}{2\pi C_{B'E} r_{B'E}}$$

Dans le cas d'une *attaque en tension* $\left(\frac{R_G R_P}{R_G + R_P} \ll r_{B'E}\right)$, elle est plus grande et égale à : $f_s \approx \frac{1}{2\pi C_e r_{BB'}}$. C'est la résistance $r_{BB'}$ qui limite alors la bande passante vers les fréquences élevées, et si l'amplification A_{v0} n'est pas trop grande, f_s peut être supérieure à f_β.

Remarque : La courbe de réponse d'un amplificateur comportant plusieurs étages a une allure analogue à celle d'un amplificateur ne comportant qu'un seul étage ; la détermination des fréquences de coupures est cependant moins aisée. La fréquence de coupure inférieure dépend des capacités des condensateurs de liaison entre étages et des condensateurs de découplages. La fréquence de coupure supérieure dépend des capacités d'entrée des divers étages ou de l'une d'entre elles seulement, selon sa valeur et selon le montage.

7. BRUITS

Il peut arriver qu'un amplificateur fournisse en permanence un signal de sortie important bien qu'aucun signal ne soit appliqué à l'entrée. Ces signaux parasites ou bruits ont des origines très diverses et nous allons voir quelles sont leurs causes.

7.1. Oscillations parasites. — Des oscillations peuvent prendre naissance dans un amplificateur lorsqu'une fraction du signal de sortie est appliquée entre les bornes d'entrée par l'intermédiaire des capacités parasites du montage. Les fréquences des oscillations sont parfois beaucoup plus grandes que les fréquences pour lesquelles l'amplificateur est prévu ; les oscillations sont souvent très difficiles à déceler. Pour les faire cesser, il faut changer la disposition des éléments du montage, diminuer les capacités parasites dues au câblage, utiliser des éléments de circuits de dimensions plus réduites (cas des tubes).

7.2. Bruit thermique. — Même en l'absence de signal d'entrée, nous pouvons toujours déceler une tension entre les bornes de sortie ; elle est appelée *bruit de l'amplificateur*. Lorsque la tension amplifiée a une très faible amplitude (écho radar faible, par exemple), le signal utile de sortie peut être masqué par ce bruit. Celui-ci limite donc les performances d'un amplificateur et il est très important de prévoir quel sera son niveau.

Le *bruit thermique* est dû au mouvement aléatoire des électrons dans les éléments du circuit (dont la température n'est évidemment pas 0 kelvin). Du fait de cette agitation thermique, il apparaît une d.d.p. aux bornes de toute portion de circuit ; la valeur efficace de cette tension parasite est donnée par l'expression suivante :

$$V^2_{\text{eff}} = 4kTRB$$

si nous désignons par k la constante de Boltzmann, par T la température absolue du circuit (supposée uniforme), par R la résistance de la portion de circuit, et par B la bande passante du dispositif utilisé par la mesure. Si nous appelons R_e la résistance du circuit d'entrée du premier étage d'un amplificateur (dont l'amplification est A_{v0}), le bruit minimal qui puisse être obtenu est :

$$V_{\text{eff}} = A_{v0}\sqrt{4kTR_eB}$$

Malheureusement, il existe de nombreuses autres sources de bruits, et le bruit réel est en général beaucoup plus important. Un amplificateur est caractérisé par son *facteur de bruit F* :

$$F \text{ décibels} = 10 \lg \frac{\text{puissance totale de bruit à la sortie}}{\text{puissance de bruit à la sortie dû à } R_e}$$

7.3. Bruit d'un transistor. — Le mouvement aléatoire des porteurs dans l'épaisseur de la base ainsi que les recombinaisons électrons-trous qui en résultent sont la cause de fluctuations du courant de collecteur. Lorsque ce courant traverse la résistance de charge R'_C de l'étage amplificateur, nous obtenons une tension qui peut être considérée comme la somme du signal utile et d'une tension parasite appelée *tension de bruit*. La tension de bruit d'un transistor dépend de la fréquence centrale de la bande dans laquelle elle est mesurée (contrairement au bruit thermique dans une résistance qui est souvent appelé *bruit blanc*). Cette tension dépend également du point de repos choisi et de la résistance du générateur alimentant le circuit de base.

Le facteur de bruit d'un transistor est sensiblement constant entre 1 kHz et 1 MHz (transistor planar) mais il croît rapidement à l'extérieur de cet intervalle. Aux fréquences basses le bruit est particulièrement gênant ; en effet, le facteur F est inversement proportionnel à la fréquence. Par ailleurs, pour une valeur déterminée de la résistance R_G du générateur d'attaque, le facteur de bruit F est minimal ; cette valeur dépend du transistor mais aussi du point de repos choisi. Le bruit d'un transistor à effet de champ est beaucoup plus faible que celui d'un transistor à jonctions et, il est indépendant du point de repos choisi.

8. AMPLIFICATION D'UN SIGNAL, EN CRÉNEAUX CARRÉS

Pour un amplificateur, le signal le plus difficile à transmettre a la forme d'un « créneau carré » (fig. XIII-35). En effet, ce signal possède à la fois des « flancs » abrupts qui représentent des variations extrêmement rapides de la tension d'entrée et des « plateaux » équivalents à des variations infiniment lentes de cette tension. Pour amplifier

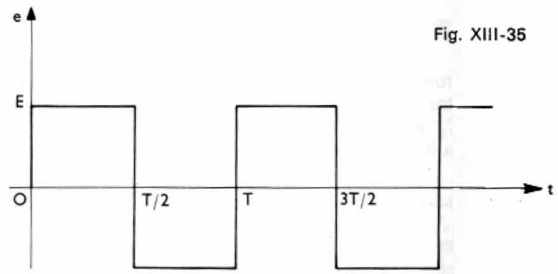


Fig. XIII-35

correctement un créneau carré, il faut donc disposer d'un amplificateur dont la fréquence de coupure supérieure est très élevée et dont la fréquence de coupure inférieure est très basse. Le créneau carré est donc un signal particulièrement intéressant pour tester rapidement un amplificateur.

8.1. Temps de montée. — C'est le temps t_r (*rise-time* en anglais) pendant lequel la tension de sortie v_s croît de $\frac{\hat{V}_s}{10}$ à $\frac{9\hat{V}_s}{10}$, $\hat{V}_s$ représentant la valeur maximale de cette tension (fig. XIII-36).

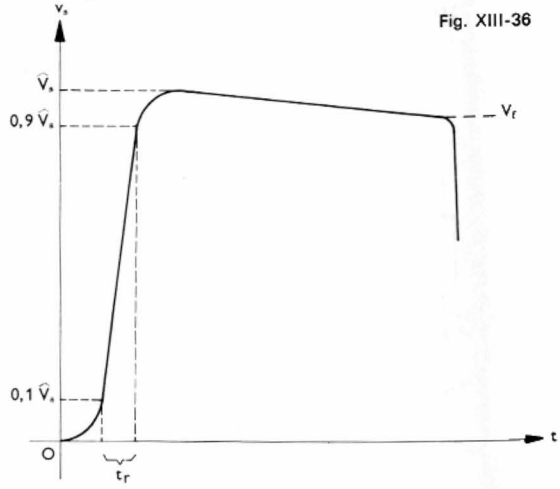


Fig. XIII-36

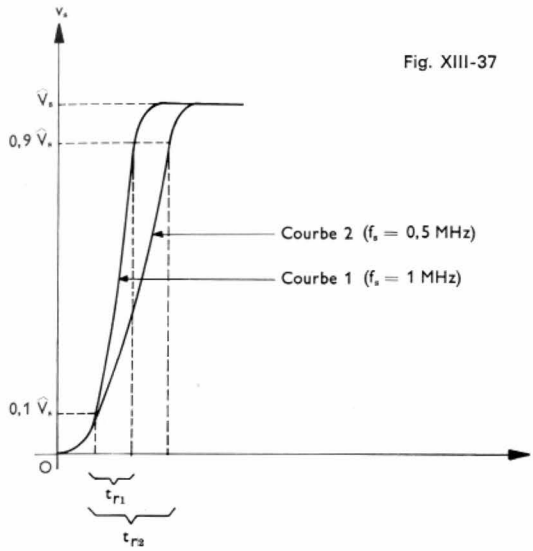
Pour un amplificateur dont l'amplification $\underline{A}_v$ aux fréquences supérieures à la fréquence de coupure f_s est représentée par l'expression suivante :

$$\underline{A}_v = \frac{\underline{A}_{vm}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_s}} \quad (\text{avec } \omega_s = 2\pi f_s)$$

le temps de montée est égal à : $t_r = \dfrac{0{,}35}{f_s}$

Cette relation est très simple ; elle montre bien que t_r est d'autant plus petit que la fréquence de coupure supérieure est plus grande ; par exemple, si $f_s = 1$ MHz, $t_r = 0{,}35$ µs (fig. XIII-37).

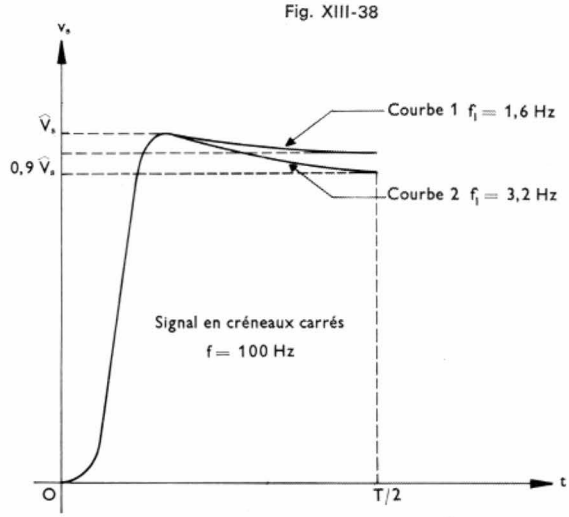
Fig. XIII-37



8.2. Déformation du plateau. — Pour de nombreux amplificateurs, l'amplification aux fréquences inférieures à la fréquence de coupure f_i est égale à :

$$\underline{A}_v = \frac{\underline{A}_{vm}}{1 + j\frac{\omega_i}{\omega}} \quad (\text{avec } \omega_i = 2\pi f_i)$$

Fig. XIII-38



Si la durée d'un créneau est très inférieure à $\dfrac{1}{f_i}$, lorsque la tension d'entrée est constante (plateau du créneau) la tension v_s décroît sensiblement linéairement. Cette décroissance est caractérisée au moyen de la *perte de hauteur* (V. fig. XIII-36) : $p = 100\,\dfrac{\hat{V}_s - \hat{V}_f}{\hat{V}_s}$ (p étant exprimé en centièmes).

Dans les conditions indiquées elle est aussi égale à :

$$p = 100\,\pi\,\frac{f_i}{f}$$

Pour transmettre un signal en créneaux de fréquence $f = 100$ Hz, avec une perte en hauteur maximale de 10 %, il faut que la fréquence inférieure de coupure soit égale à 3,2 Hz (fig. XIII-38).

L'essai des amplificateurs avec des signaux en créneaux carrés est un excellent test pour connaître rapidement la bande passante. Il est également utilisé pour le réglage des dispositifs compensateurs destinés à modifier de manière appropriée l'amplification aux fréquences élevées afin d'augmenter la bande de certains amplificateurs.

CHAPITRE XIV
AMPLIFICATEUR À BANDE ÉTROITE

1. EXEMPLE D'AMPLIFICATEURS À BANDE ÉTROITE (AMPLIFICATEUR ACCORDÉ OU SÉLECTIF)

Il est souvent nécessaire (radio, télécommunications) d'amplifier des signaux dont les fréquences sont comprises dans une bande dont les limites f_1 et f_2 sont séparées par un écart Δf ($\Delta f = f_2 - f_1$) très petit devant la fréquence centrale f_0 $\left(f_0 = \dfrac{f_1 + f_2}{2}\right)$ de cette bande. Il est alors nécessaire d'utiliser un amplificateur dont la charge est un circuit bouchon (V. t. 1, Électricité, chap. 32 § 5) de fréquence de résonance f_0. À titre d'exemple, nous considérons un transistor à effet de champ dans un montage source commune (fig. XIV-1).

Le schéma équivalent de l'étage est établi en utilisant comme point de départ le schéma équivalent du transistor à effet de champ (V. chap. 10, § 4). Nous supposons la fréquence f_0 suffisamment faible pour que les

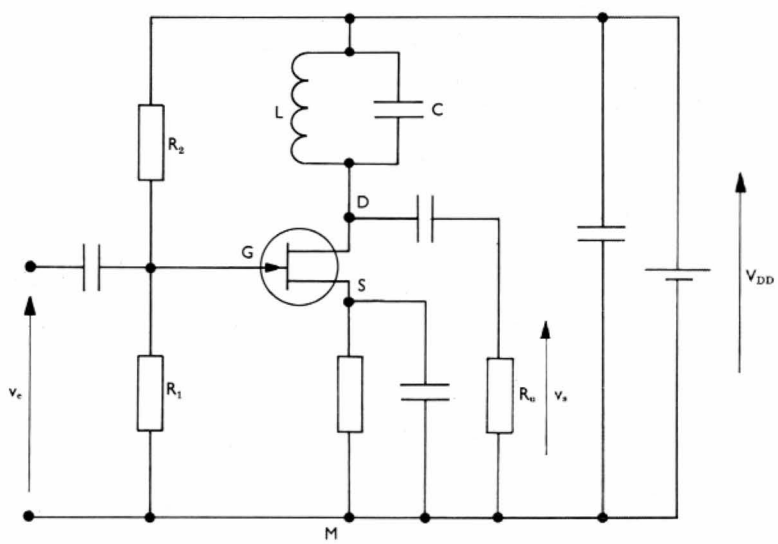


Fig. XIV-1

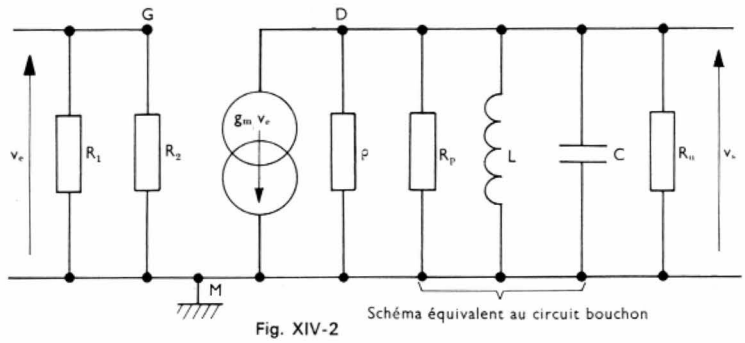


Fig. XIV-2

Schéma équivalent au circuit bouchon

capacités parasites du montage soient négligeables. Entre la porte *G* et la masse *M* du montage, nous plaçons les résistances R_1 et R_2 du pont de polarisation. Le circuit bouchon doit être disposé entre le drain *D* et la masse *M* car nous supposons que le générateur qui alimente le circuit en courant continu est toujours parfaitement découplé pour le courant alternatif. Par ailleurs, pour tenir compte des pertes de puissance dues à la bobine du circuit bouchon, nous considérons celle-ci comme équivalent à une inductance *L* parfaite (résistance nulle) en parallèle avec une résistance R_p (résistance de pertes du schéma parallèle de la bobine).

Rappelons à ce propos qu'une bobine peut être représentée indifféremment par un schéma-série ou par un schéma-parallèle. C'est le second qui a été choisi pour le schéma équivalent de l'étage amplificateur car l'étude de celui-ci est ainsi facilitée. Les valeurs des éléments R_p et L_p dépendent évidemment de celles des éléments R_s et L_s du schéma-série en basse fréquence où les seules pertes sont dues à l'effet Joule (R_s est alors égale à la résistance mesurée en courant continu) ; aux fréquences élevées le coefficient R_s représente une résistance apparente qui permet de tenir compte de l'effet de peau (V. t. 1, Électricité, chap. 31, § 1) et des pertes dans le fer (V. t. 1, Électrotechnique, chap. 2). La valeur complexe de l'impédance de la bobine est la même dans les deux cas :

$$\underline{Z} = R_s + j L_s\omega = \left(\frac{R_p \,.\, j L_p\omega}{R_p + j L_p\omega}\right)$$

cela nous permet d'écrire les relations suivantes :

$$R_p = R_s\,(1 + Q^2) \quad \text{et} \quad L_p = L_s\left(1 + \frac{1}{Q^2}\right)$$

en posant : $Q = \dfrac{L_s\omega}{R_s} = \dfrac{R_p}{L_p\omega}$ (facteur de qualité de la bobine).

Si Q^2 est grand devant 1, nous avons : $R_p \approx Q^2 R_s$ et $L_p \approx L_s$. Par exemple, si $Q = 10$, ces égalités sont vérifiées à 1 % près.

2. COURBE DE RÉPONSE DE L'AMPLIFICATEUR

Le schéma équivalent de l'étage amplificateur permet de constater que le générateur de courant placé entre le drain et la masse fournit le courant $g_m v_e$ à un circuit d'impédance *Z* dont la valeur complexe est donnée par l'expression suivante :

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{R_p} + \frac{1}{R_u} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega$$

En posant :

$$\frac{1}{R'_p} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{R_p} + \frac{1}{R_u}$$

nous obtenons :

$$\underline{Z} = \frac{j L\omega\, R'_p}{R'_p\,(1 - LC\omega^2) + jL\omega}$$

L'amplification en tension est donc égale à :

$$\underline{A_v} = \frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = \frac{-\,g_m \underline{V_e}\,\underline{Z}}{\underline{V_e}} = -\,g_m\,\underline{Z}$$

soit :

$$\underline{A_v} = \frac{-\,jg_m L\omega\, R'_p}{R'_p\,(1 - LC\omega^2) + j L\omega}$$

Le module A_v de ce nombre complexe varie en fonction de la pulsation ω (fig. XIV-3) :

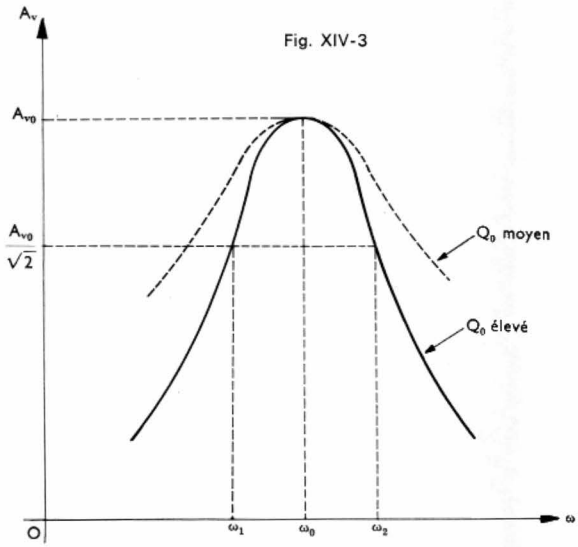
$$A_v = \frac{V_{s\ \text{eff}}}{V_{e\ \text{eff}}} = \frac{g_m L\omega\, R'_p}{\sqrt{R'^2_p\,(1 - LC\omega^2)^2 + (L\omega)^2}}$$

L'amplification A_v passe par un maximum A_{v0} lorsque ω est égal à la pulsation $\omega_0 = 2\pi f_0$ pour laquelle le circuit bouchon est à la résonance (c'est-à-dire lorsque $LC\omega^2_0 = 1$ et que l'impédance *Z* est maximale) :

$$\omega = \omega_0 \Rightarrow LC\omega_0^2 = 1 \Rightarrow A_{v0} = g_m\, R'_p$$

Lorsque la pulsation ω s'écarte de ω_0, A_v décroît d'autant plus rapidement que le *facteur de qualité* du circuit (à la résonance) $Q_0 = \dfrac{L\omega_0}{R}$ est plus grand.

Fig. XIV-3



3. BANDE PASSANTE

La bande passante à — 3 dB est définie par les fréquences f_1 et f_2 pour lesquelles $A_v = \dfrac{A_{v0}}{\sqrt{2}}$. L'expression donnant A_v peut se mettre sous la forme suivante :

$$A_v = \frac{g_m\, R'_p}{\sqrt{\left(\dfrac{R'_p}{L\omega}\right)^2 (1 - LC\omega^2)^2 + 1}} = \frac{A_{v0}}{\sqrt{\left(\dfrac{R'_p}{L\omega}\right)^2 (1 - LC\omega^2)^2 + 1}}$$

À la fréquence f_1 (ou f_2), $A_v = \dfrac{A_{v0}}{\sqrt{2}}$, et par conséquent

$$\left(\frac{R'_p}{L\omega}\right)^2 (1 - LC\omega^2)^2 = 1$$

Cette équation admet deux solutions $\omega_1 = 2\pi f_1$ et $\omega_2 = 2\pi f_2$ qui sont les pulsations extrêmes de la bande passante. Lorsque le facteur de qualité du circuit (Q_0) est grand, les pulsations ω_1 et ω_2 sont voisines de ω_0.

$$\omega_1 = \omega_0 - \Delta\omega = \omega_0\left(1 - \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) \text{ avec } \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1 ;$$

$$\omega_2 = \omega_0 + \Delta\omega = \omega_0\left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) ;$$

L'équation précédente peut alors être transformée en introduisant la pulsation ω_0. Il vient :

$$\left(\frac{R'_p}{L\omega_0}\right)^2 \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = Q_0^2 \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = 1$$

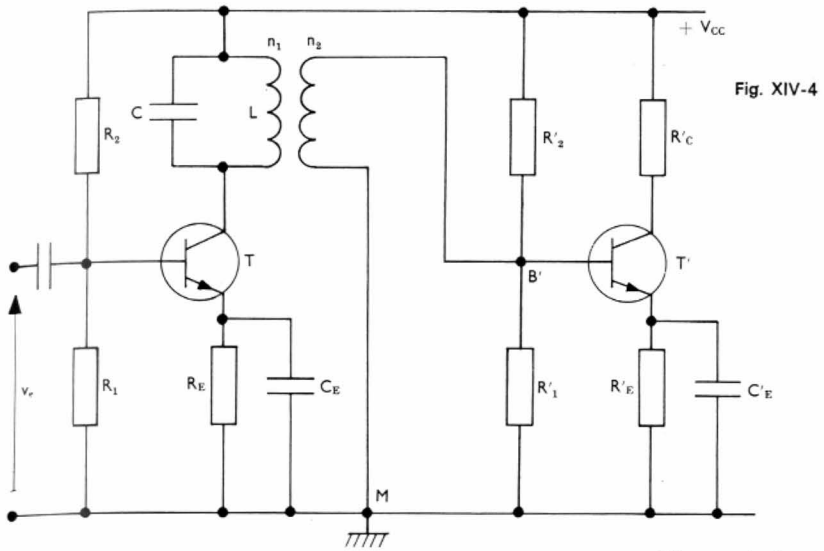


Fig. XIV-4

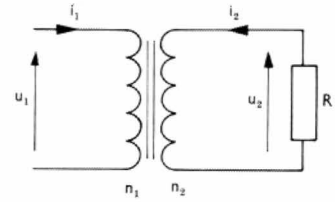


Fig. XIV-5

Cette relation est vérifiée pour $\omega = \omega_1$ et $\omega = \omega_2$. Si $\omega = \omega_1$, nous pouvons écrire :

$$\frac{\omega_0}{\omega_1} = \frac{\omega_0}{\omega_0 - \Delta\omega} \approx \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)$$

et :
$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \left(1 - \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)$$

L'équation se réduit alors à l'égalité suivante :

$$Q^2_0 \left(\frac{2\,\Delta\omega}{\omega_0}\right)^2 = 1 \text{ ; d'où : } \Delta\omega = \frac{\omega_0}{2Q_0}$$

L'intervalle $(\omega_2 - \omega_1)$ peut être facilement calculé à présent :

$$\omega_2 - \omega_1 = 2\,\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q_0}$$

La bande passante de cet étage amplificateur est donc égale à :

$$B = f_2 - f_1 = \frac{f_0}{Q_0}$$

Pour une fréquence f_0 déterminée la bande B est d'autant plus réduite que le facteur de qualité Q_0 du circuit est grand.

4. AUTRES EXEMPLES D'AMPLIFICATEURS À BANDE ÉTROITE

Il est possible d'employer un transistor à jonctions pour réaliser un étage amplificateur accordé mais nous allons voir qu'il est parfois nécessaire de prendre certaines précautions.

Dans un récepteur de radiodiffusion à modulation d'amplitude (V. t. 2, Radioélectricité, chap. 5), parmi les étages amplificateurs utilisés, certains sont accordés sur la fréquence de 455 kHz (amplificateur à fréquence intermédiaire). La bande passante de ces étages étant 9 kHz (largeur du canal attribué à un émetteur), il faut que le facteur de qualité Q_0 soit égal à :

$$Q_0 = \frac{455}{9} \approx 50$$

Afin que l'influence des capacités parasites soit négligeable, il faut que la capacité C du circuit oscillant soit supérieure à 200 pF environ. Comme $Q_0 = \dfrac{R'_P}{L\omega_0} = R'_P C\omega_0$, nous voyons que si $C = 200$ pF, la résistance R'_p est alors parfaitement déterminée :

$$C = 200 \text{ pF} \Rightarrow R'_p = \frac{Q_0}{C\omega_0}$$

$$R'_p = \frac{50}{200 \times 10^{-12} \times 2 \times 3{,}14 \times 455 \times 10^3} \approx 87 \text{ k}\Omega.$$

Rappelons que cette résistance R'_p est la résistance équivalente à trois résistances : ρ, R_p et R_u qui sont associées en parallèle ; R'_p est donc inférieure à la plus faible des trois. La résistance d'entrée de l'étage qui suit l'amplificateur (symbolisée par R_u dans le montage étudié) étant souvent la plus petite de ces trois résistances, nous sommes amenés à la choisir convenablement pour qu'elle soit supérieure à la valeur de R'_p trouvée ci-dessus.

Le montage de la figure XIV-4 met en œuvre une propriété du transformateur pour réaliser cette adaptation d'impédance. La bobine du circuit bouchon est couplée par mutuelle inductance à une autre bobine. Si la résistance d'entrée du second étage (résistance vue des points B' et M) est désignée par R'_e, tout se passe comme si une résistance $R_u = R'_e \left(\dfrac{n_1}{n_2}\right)^2$ était disposée en parallèle avec le circuit bouchon. En effet, si un transformateur parfait (V. t. 1, Électrotechnique, chap. 5) alimente une résistance R (fig. XIV-5) nous pouvons écrire :

$$U_{1\,\text{eff}} = \frac{n_1}{n_2} U_{2\,\text{eff}} = \frac{n_1}{n_2} R I_{2\,\text{eff}} = \frac{n_1 R}{n_2}\left(I_{1\,\text{eff}} \frac{n_1}{n_2}\right)$$

$$= R\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 I_{1\,\text{eff}}$$

Tout se passe donc comme si une résistance $R\left(\dfrac{n_1}{n_2}\right)^2$ était alimentée directement sous la tension u_1 ; l'ensemble transformateur-résistance R peut être remplacé par cette résistance $R\left(\dfrac{n_1}{n_2}\right)^2$, appelée *résistance ramenée au primaire*.

Par exemple, si $R'_e = 2$ kΩ, et si le rapport $\left(\dfrac{n_1}{n_2}\right)$ est égal à 10, la résistance R_u est égale à 200 kΩ. Le transformateur étant abaisseur, la tension transmise au second étage est atténuée (dans le rapport $\dfrac{1}{10}$ puisque $\dfrac{n_1}{n_2} = 10$) mais cela ne constitue pas réellement un handicap car l'amplification est toujours suffisante.

Lorsque la résistance dynamique de sortie ρ du transistor n'est pas assez grande, il faut réaliser une adaptation d'impédance du même genre. La bobine du circuit bouchon doit alors être utilisée en autotransformateur (fig. XIV-6). Par ce procédé la résistance ramenée en parallèle avec le circuit bouchon (pour le signal alternatif) est égale à : $\rho\left(\dfrac{n'}{n''}\right)^2$.

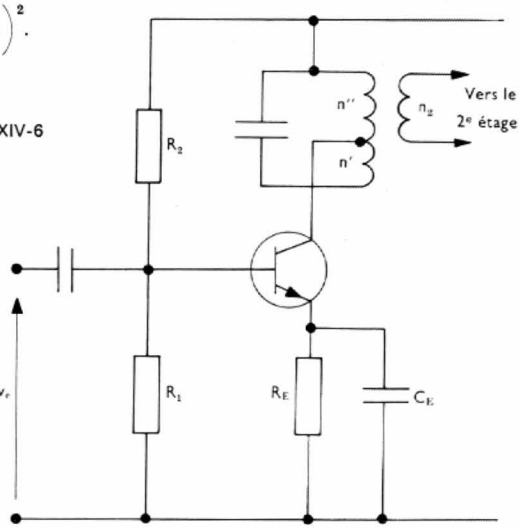


Fig. XIV-6

CHAPITRE XV
AMPLIFICATEUR DE PUISSANCE

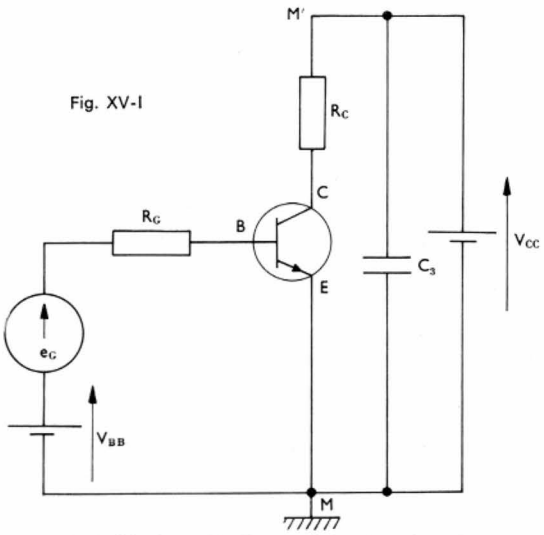
Un amplificateur de puissance peut être utilisé pour alimenter directement un haut-parleur, un moteur de servomécanisme, un tube cathodique d'oscillographe de radar ou de télévision. En général, il fournit à la fois une tension très grande (jusqu'à plusieurs centaines de volts) et un courant intense (jusqu'à plusieurs ampères). Les problèmes de linéarité et de rendement dont nous n'avons pas parlé jusqu'ici prennent maintenant une importance capitale. Nous allons étudier particulièrement les amplificateurs à large bande; nous ne traiterons pas ici les problèmes particuliers posés par les amplificateurs sélectifs utilisés dans les émetteurs de radiofréquences.

1. AMPLIFICATEUR FONCTIONNANT EN CLASSE A

Un étage amplificateur à transistor fonctionne en classe A, si le courant de collecteur n'est jamais interrompu au cours d'une période du signal alternatif amplifié. C'était le cas des étages amplificateurs étudiés dans les chapitres précédents.

1.1. Bilan des puissances. — L'amplification de signaux de grande amplitude peut être réalisée au moyen de montages analogues à ceux employés pour des petits signaux (V. chap. 13). Nous considérons ici un montage émetteur commun (fig. XV-1) dont le fonctionnement a été

Fig. XV-I



étudié en détail (V. chap. 8). En amplification de puissance, les signaux doivent avoir l'amplitude la plus grande possible et l'excursion du point de fonctionnement sur la droite de charge n'est limitée que par la déformation admissible pour le signal de sortie (fig. XV-2). Dans un premier temps, nous négligeons cette distorsion et nous admettons que le point de repos M_0 est exactement au milieu du segment M_1M_2 qui est décrit par le point de fonctionnement.

La puissance utile P_u est celle reçue par la résistance R_C placée dans le circuit de collecteur. En alternatif, la tension aux bornes de R_C est à chaque instant égale à la tension v_{CE} (fig. XV-1) car les points M' et M sont au même potentiel (C_3 découple parfaitement le générateur de courant continu). Par conséquent, si nous désignons par $V_{CE\,\text{eff}}$ la valeur efficace de v_{CE} et par $I_{C\,\text{eff}}$ l'intensité efficace du courant de collecteur nous pouvons écrire:

$$P_u = R_C\ I_{C\,\text{eff}}{}^2 = V_{CE\,\text{eff}}\ I_{C\,\text{eff}}$$

Par ailleurs, le graphique (fig. XV-2) montre que:

$$I_{C\,\text{eff}} = \frac{I_{C\,\max} - I_{C\,\min}}{2\sqrt{2}},\quad V_{C\,\text{eff}} = \frac{V_{CE\,\max} - V_{CE\,\min}}{2\sqrt{2}}$$

La puissance utile P_u est donc aussi donnée par la relation suivante:

$$P_u = \frac{(V_{CE\,\max} - V_{CE\,\min})\ (I_{C\,\max} - I_{C\,\min})}{8}$$

La puissance P fournie par la source de courant continu et perdue en chaleur dans le circuit est donnée par le produit suivant: $P = V_{CC}.I_{C_0}$; c'est la valeur moyenne du produit de la tension V_{CC} (constante) et du courant de collecteur moyen (courant de repos). Puisque le point M_0 est supposé au milieu du segment M_1M_2, ses coordonnées sont données par les relations suivantes:

$$V_{CE_0} = \frac{V_{CE\,\max} + V_{CE\,\min}}{2} \text{ et } I_{C_0} = \frac{I_{C\,\max} + I_{C\,\min}}{2}$$

et la puissance P est aussi égale à:

$$P = V_{CC}\left(\frac{I_{C\,\max} + I_{C\,\min}}{2}\right)$$

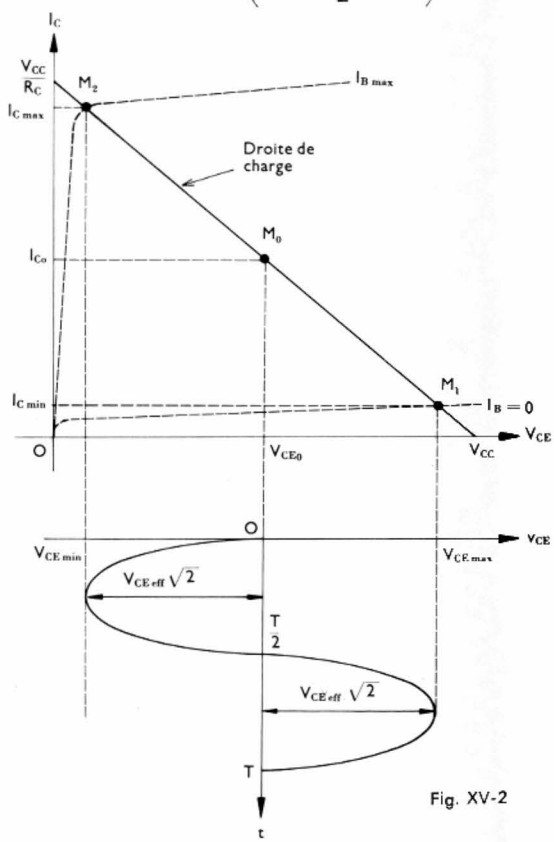
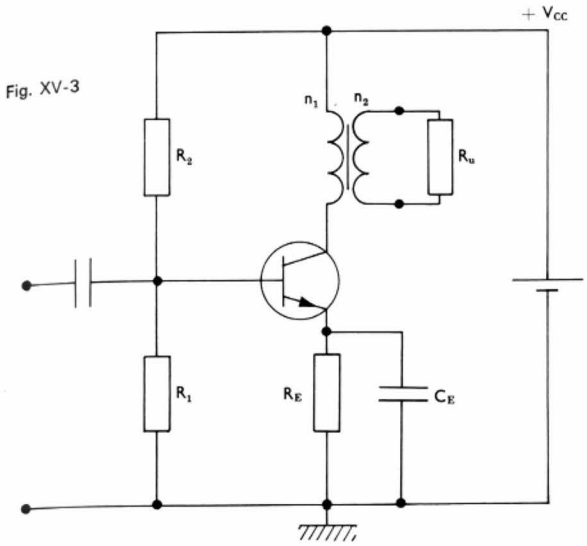


Fig. XV-2

1.2. Emploi d'un transformateur de liaison. — La charge R_u est placée au secondaire d'un transformateur supposé parfait (fig. XV-3); elle n'est plus traversée par le courant de repos I_{C_0} du transistor et aucune puissance n'est perdue inutilement en chaleur dans cette résistance. C'est uniquement le signal alternatif amplifié qui est appliqué aux bornes de R_u. L'adaptation d'impédance ainsi réalisée permet, par exemple, de placer un haut-parleur, dont l'impédance peut être assimilée à une résistance très faible ($R_u = 5\ \Omega$), dans un montage amplificateur construit pour fonctionner avec une charge R'_u beaucoup plus élevée ($R'_u = 2\,000\ \Omega$); pour cela il suffit que le rapport de transformation $\frac{n_2}{n_1}$ du transformateur ait une valeur telle que la résistance ramenée au primaire soit (V. chap. 14, § 4):

$$R'_u = R_u\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2$$

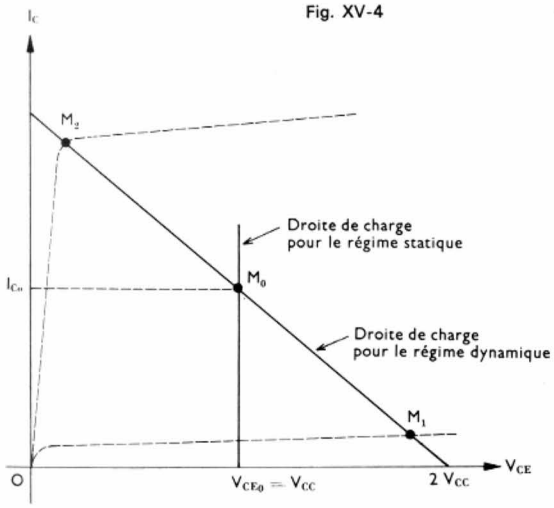
Fig. XV-3



Graphiquement, nous devons considérer deux régimes de fonctionnement :

— *le régime statique* (absence de signal alternatif à l'entrée de l'étage) pour lequel la résistance de charge est celle présentée par le primaire du transformateur. Si nous admettons qu'elle est très faible ou nulle, la droite de charge pour le régime statique est une droite verticale passant par le point dont l'abscisse correspond à la tension V_{CC} (fig. XV-4) ;

Fig. XV-4



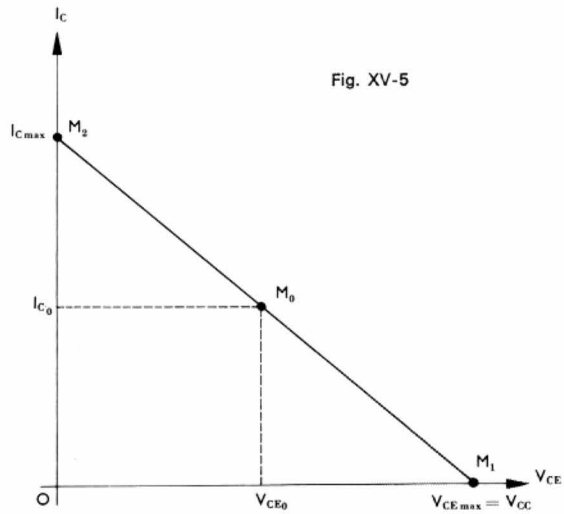
— *le régime dynamique*, c'est-à-dire en amplificateur ; la résistance de charge est alors égale à R'_u. Nous sommes ramenés à un fonctionnement analogue à celui de l'étage précédent. L'emploi d'un transformateur offre des possibilités intéressantes : par exemple, en choisissant le rapport de transformation nous pouvons obtenir la droite de charge la mieux adaptée (son coefficient directeur est égal à : $-\frac{1}{R'_u}$) tout en conservant un transducteur déterminé.

1.3. Rendement. — Le rendement de l'étage est le rapport η de la puissance utile P_u et de la puissance P fournie par la source de courant continu : $\eta = \frac{P_u}{P}$.

Ce rapport ne correspond pas exactement au rendement réel car il n'est pas tenu compte de la puissance nécessaire pour alimenter le circuit de base. Cependant, il donne une valeur suffisamment précise du rendement pour que nous puissions l'utiliser pour comparer entre eux divers montages.

Calculons tout d'abord la limite théorique maximale de η dans le cas où la charge résistive est directement placée dans le circuit de collecteur du transistor. Pour cela, supposons que le réseau de caractéristiques de sortie de ce transistor soit parfaitement régulier et négligeons le courant de fuite I_{CEO}, et la tension de saturation. Dans ces conditions, le point M_1 se trouve sur l'axe des abscisses et le point M_2 sur l'axe des ordonnées (fig. XV-5). Les

Fig. XV-5



coordonnées du point de repos sont alors les suivantes :

$$\begin{cases} V_{CE_0} = \dfrac{V_{CC}}{2} = \dfrac{V_{CE\ \max}}{2} \\ I_{C_0} = \dfrac{I_{C\ \max}}{2} \end{cases}$$

et les puissances P_u et P sont égales à :

$$P_u = \frac{V_{CE\ \max} \cdot I_{C\ \max}}{8}$$

$$P = \frac{V_{CC} \cdot I_{C\ \max}}{2}$$

Nous déduisons facilement le rendement maximal :

$$\eta_{\max} = \frac{V_{CE\ \max}\ I_{C\ \max}}{V_{CC}\ I_{C\ \max}} \times \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 25\ \%$$

Ce rendement théorique maximal de l'étage n'est jamais atteint ; le rendement réel ne dépasse pas 20 %.

Dans le cas où la charge est couplée par un transformateur dont la résistance primaire est nulle, nous pouvons écrire les relations suivantes :

$$\begin{cases} V_{CE_0} = V_{CC} \\ I_{C_0} = \dfrac{I_{C\ \max}}{2} \\ V_{CE\ \max} = 2\,V_{CC} \end{cases}$$

Donc :

$$P_u = \frac{V_{CE\ \max}\ I_{CE\ \max}}{8} = \frac{V_{CC}\ I_{CE\ \max}}{4}$$

$$P = \frac{V_{CC}\ I_{C\ \max}}{2}$$

et :

$$\eta = \frac{1}{2} = 50\ \%$$

Le rendement théorique maximal est donc deux fois plus grand que dans le cas précédent. La puissance P_C dissipée dans le transistor est également plus faible puisque cette puissance P_C est égale à P en l'absence de signal et à $(P - P_u)$ lorsque le signal est amplifié par l'étage.

2. DISTORSION EN CLASSE A

Bien souvent, les non-linéarités des caractéristiques du transistor imposent des limites plus étroites pour le domaine utile de fonctionnement et le rendement se trouve abaissé.

2.1. Taux de distorsion d'harmonique. — Le signal de sortie est déformé si les segments M_0M_1 et M_0M_2 ne sont pas égaux (fig. XV-6) et tout se passe comme si des harmoniques indésirables se superposaient au signal utile. Un exemple simple va le mettre en évidence; pour traduire la non-linéarité des caractéristiques, nous admettrons que le courant i_C n'est pas proportionnel à la tension d'entrée v_e (comme dans le cas de petits signaux) mais est donné par la relation suivante: $i_C = g_1 v_e + g_2 v^2_e$.
Si v_e est un signal sinusoïdal: $v_e = \widehat{V}_e \cos \omega t$, nous pouvons écrire:

$$i_C = g_1 \widehat{V}_e \cos \omega t + g_2 \widehat{V}_e^2 \cos^2 \omega t$$

ou encore:

$$i_C = g_1 \widehat{V}_e \cos \omega t + \frac{1}{2} g_2 \widehat{V}_e^2 (1 + \cos 2\omega t)$$

Donc, au lieu du courant $g_1 \widehat{V}_e \cos \omega t$ désiré (qui reproduit effectivement le signal d'entrée), nous voyons que nous obtenons un courant somme de trois composantes:

— une composante i_{C_1} (appelée *fondamentale*):

$$i_{C_1} = g_1 \widehat{V}_e \cos \omega t = \widehat{I}_{C_1} \cos \omega t$$

— une composante $I_0 = \frac{1}{2} \widehat{g}_2 V_e^2$, constante (si $\widehat{V}_e$ est constante): il y a glissement du point de repos (négligeable le plus souvent);

— une composante $i_{C_2} = \frac{1}{2} g_2 \widehat{V}_e^2 \cos 2\omega t = \widehat{I}_{C_2} \cos 2\omega t$

de fréquence double de celle du signal d'entrée, appelée harmonique 2. Elle entraîne une distorsion caractérisée par le *taux de distorsion d'harmonique 2*, D_2:

$$D_2 = \frac{\text{valeur efficace de } i_{C_2}}{\text{valeur efficace de } i_C}$$

Or la valeur efficace d'un courant i_C égal à:

$$i_C = \widehat{I}_{C_1} \cos \omega t + \widehat{I}_{C_2} \cos \omega t$$

ou: $i_C = I_{C_1\,\text{eff}} \sqrt{2} \cos \omega t + I_{C_2\,\text{eff}} \sqrt{2} \cos 2\omega t$

(nous négligeons I_0) est donnée par l'expression suivante

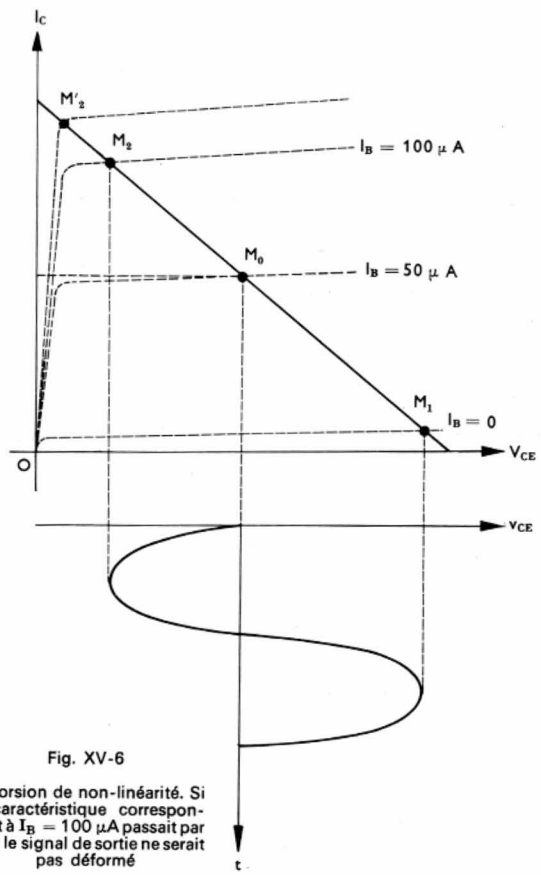


Fig. XV-6

Distorsion de non-linéarité. Si la caractéristique correspondant à $I_B = 100\ \mu A$ passait par M'_2, le signal de sortie ne serait pas déformé

(V. t. 1, Électricité, chap. 28): $I^2_{C\,\text{eff}} = \frac{1}{T} \int_0^T i^2_C\, dt$

Le calcul montre que: $I^2_{C\,\text{eff}} = I^2_{C_1\,\text{eff}} + I^2_{C_2\,\text{eff}}$.

Cela traduit le fait que la puissance, apportée par le courant i_C à une résistance de 1 Ω, est égale à la somme des puissances apportées par les diverses composantes. Par conséquent, en négligeant I_0 nous pouvons écrire:

$$D_2 = \frac{I_{C_2\,\text{eff}}}{\sqrt{I^2_{C_1\,\text{eff}} + I^2_{C_2\,\text{eff}}}}$$

La valeur de D_2 étant toujours assez faible (inférieure à 10 %), nous faisons une erreur négligable en écrivant:

$$D_2 = \frac{I_{C_2\,\text{eff}}}{I_{C_1\,\text{eff}}}$$

Si le signal d'entrée contient deux composantes de pulsations ω_1 et ω_2, nous trouvons, dans le signal de sortie, des composantes de pulsations $(\omega_1 + \omega_2)$ et $(\omega_1 - \omega_2)$: il y a *intermodulation;* (pour définir de la même façon un taux d'intermodulation, il faudrait connaître les caractéristiques exactes des deux signaux appliqués).

2.2. Généralisation: taux de distorsion totale. — Dans le cas général l'intensité du courant i_C est donnée par une expression ayant la forme suivante:

$$i_C = g_1 v_e + g_2 v_e^2 + g_3 v_e^3 + \ldots + g_n v_e^n + \ldots$$

ou: $i_C = i_{C_1} + i_{C_2} + i_{C_3} + \ldots + i_{C_n} + \ldots$

Nous pouvons alors définir:

— le taux de distorsion d'harmonique 2:

$$D_2 = \frac{\text{valeur efficace de } i_{C_2}}{\text{valeur efficace de } i_C}$$

— le taux de distorsion d'harmonique 3:

$$D_3 = \frac{\text{valeur efficace de } i_{C_3}}{\text{valeur efficace de } i_C}$$

et de même:

— le taux de distorsion d'harmonique n:

$$D_n = \frac{\text{valeur efficace de } i_{C_n}}{\text{valeur efficace de } i_C}$$

Si les taux de distorsion sont assez faibles, les dénominateurs de ces rapports peuvent être remplacés par la valeur efficace du fondamental i_{C_1}. Ainsi nous pouvons écrire:

$$D_n \approx \frac{\text{valeur efficace de } i_{C_n}}{\text{valeur efficace de } i_{C_1}}$$

Du fait de la relation entre les valeurs efficaces de ces composantes

$$I^2_{C\,\text{eff}} = I^2_{C_1\,\text{eff}} + I^2_{C_2\,\text{eff}} + \ldots + I^2_{C_n\,\text{eff}} + \ldots$$

le taux de distorsion totale est donné par la relation suivante:

$$D = \sqrt{D_2^2 + D_3^2 + \ldots + D_n^2 + \ldots}$$

Très souvent, le développement en série de i_C n'est pas connu mais nous disposons la représentation graphique de la fonction $i_C = f(v_e)$. Pour évaluer la distorsion totale, nous pouvons alors utiliser une construction graphique. En donnant au temps t des valeurs convenables (t_1, t_2, etc.) nous déduisons des valeurs de i_C et nous pouvons écrire autant d'égalités qu'il est nécessaire:

— valeur de i_C au temps $t_1 = I_0 + I_{C_1\,\text{eff}} \sqrt{2} \cos \omega t_1 + I_{C_2\,\text{eff}} \sqrt{2} \cos 2\omega t_1 + \ldots + I_{C_n\,\text{eff}} \sqrt{2} \cos \omega t_1 + \ldots$

— valeur de i_C au temps $t_2 = I_0 + I_{C_1\,\text{eff}} \sqrt{2} \cos \omega t_2 + I_{C_2\,\text{eff}} \sqrt{2} \cos 2\omega t_2 + \ldots + I_{C_n\,\text{eff}} \sqrt{2} \cos n\omega t_2 + \ldots$

Il est ensuite possible de calculer les coefficients $I_{C_1\,\text{eff}}$, $I_{C_2\,\text{eff}}$, ..., de ces équations. Les taux de distorsion tolérés pratiquement sont très variables suivant les applications. Pour certains amplificateurs de reproduction sonore, le taux de distorsion peut atteindre 10 % tandis que des amplificateurs de laboratoire ont des taux de distorsion inférieurs à 0,1 %.

3. RÉALISATION PRATIQUE D'UN AMPLIFICATEUR CLASSE A

3.1. Amplificateur à couplage par transformateur. — Avec un amplificateur à couplage par transformateur, en l'absence de signal, la totalité de la puissance d'alimentation P est transformée en chaleur dans le transistor. Le premier impératif est donc de placer le transistor sur un radiateur pour que la puissance maximale admissible soit plus grande que 2 P_u si P_u est la puissance utile désirée. Pour choisir ensuite la droite de charge en régime dynamique, il faut connaître la tension d'alimentation V_{CC} disponible ; bien entendu celle-ci doit être inférieure à $\frac{V_{CE\,max}}{2}$; $V_{CE\,max}$ étant la tension collecteur maximale autorisée pour le transistor choisi. Le point de repos peut alors être fixé et nous pouvons calculer le rapport de transformation du transformateur de couplage (la résistance d'utilisation R_u est en général imposée). Il reste alors à assurer la stabilité thermique en utilisant le montage classique avec pont de base et résistance d'émetteur. De grandes difficultés sont alors rencontrées et il faut souvent consentir une très forte baisse de rendement. La résistance R_E utilisée étant toujours faible, il n'est pas nécessaire de la découpler.

3.2. Montage push-pull. — Un étage push-pull est constitué par l'association de deux étages amplificateurs de puissance identiques (fig. XV-7). Le signal d'entrée est appliqué à chacun des transistors T' et T'' par l'intermédiaire d'un transformateur à point milieu ; ils reçoivent donc simultanément des tensions en opposition de phase. Les signaux amplifiés, sont recombinés au moyen d'un second transformateur à point milieu. Le même générateur de courant continu alimente les deux transistors et un seul pont de résistances permet de polariser les deux bases. L'utilisation de deux résistances d'émetteurs séparées permet par contre-réaction d'atténuer (V. chap. 16) une éventuelle dissymétrie des caractéristiques des transistors.

Le montage push-pull est intéressant car il permet une réduction nette du taux de distorsion. En effet, si nous désignons par v'_e le signal appliqué au transistor T' ($v'_e = \widehat{V}_e \cos \omega t$), le courant de collecteur de celui-ci est égal à :

$$i'_C = \widehat{I}_{C_1} \cos \omega t + \widehat{I}_{C_2} \cos 2\omega t + \widehat{I}_{C_3} \cos 3\omega t + \ldots$$

Si pour le transistor T'' le signal d'entrée est :

$$v''_e = \widehat{V}_e \cos (\omega t + \pi),$$

le courant de collecteur de ce transistor est :

$$i''_C = \widehat{I}_{C_1} \cos (\omega t + \pi) + \widehat{I}_{C_2} \cos 2 (\omega t + \pi) + \widehat{I}_{C_3} \cos 3 (\omega t + \pi) + \ldots$$

Il est aussi égal à :

$$i''_C = -\widehat{I}_{C_1} \cos \omega t + \widehat{I}_{C_2} \cos 2\omega t - \widehat{I}_{C_3} \cos 3\omega t + \ldots$$

Le transformateur de sortie réalisant la recombinaison, le courant dans la charge est égal à :

$$i_u = \frac{n_1}{n_2} (i_{C_1} - i_{C_2})$$

Nous constatons qu'il ne contient plus aucun terme de rang pair : le push-pull permet d'éliminer les harmoniques pairs dans le courant de sortie.

D'autre part, les courants de repos I'_{C_0} et I''_{C_0} créant dans le circuit magnétique du transformateur de sortie des flux opposés : le noyau n'est plus soumis à une polarisation magnétique permanente ; l'encombrement et le poids de ce transformateur peuvent être réduits. Un mauvais filtrage de la tension V_{CC} est moins gênant que dans le cas de l'étage unique, puisque les tensions de ronflement induites dans chaque demi-primaire du transformateur de sortie sont en opposition de phase pour le circuit d'utilisation.

Grâce au montage push-pull, à distorsion égale, nous obtenons une puissance plus grande que celle d'une paire de transistors donnée ; à puissance égale, c'est la distorsion qui est plus faible.

4. AMPLIFICATEURS FONCTIONNANT EN CLASSE B

4.1. Montage push-pull en classe B. — Un étage amplificateur fonctionne en classe B lorsque le point de repos choisi se trouve en M_1 (fig. XV-8) c'est-à-dire lorsque

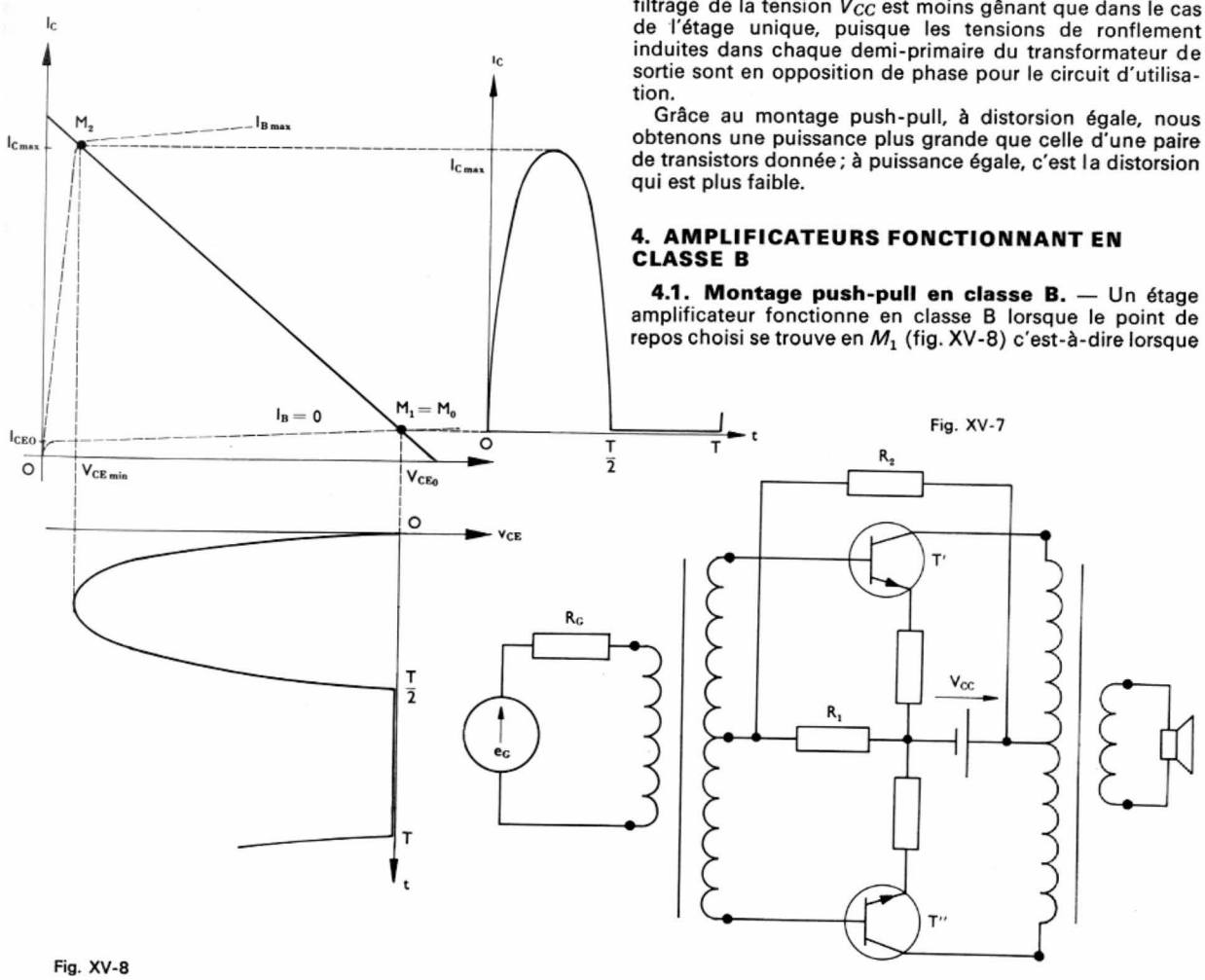


Fig. XV-7

Fig. XV-8

les courants de support dans la base et dans le collecteur sont nuls (ou extrêmement faibles) : le *transistor est bloqué pendant une demi-période du signal à amplifier.* Pour obtenir un signal de sortie sinusoïdal, il faut associer deux étages

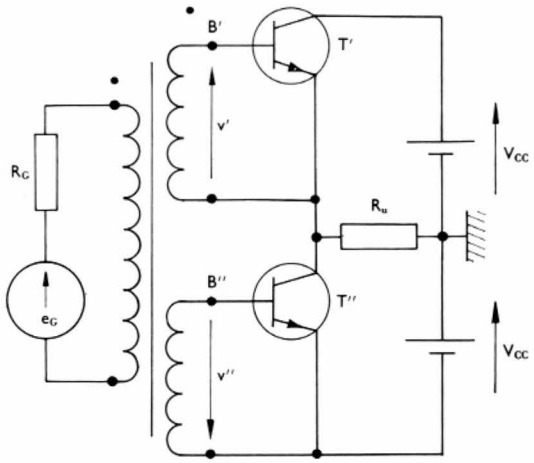


Fig. XV-9

de ce type dans un montage push-pull (fig. XV-9). Les tensions de commande des transistors T' et T'' sont en opposition de phase (les points placés sur le schéma indiquent les entrées des enroulements et si l'entrée de l'un est reliée à B', c'est la sortie de l'autre qui est réunie à B''). Les transistors sont donc débloqués à tour de rôle (lorsque la tension base-émetteur est positive) et chacun d'eux n'amplifie qu'une alternance du signal.

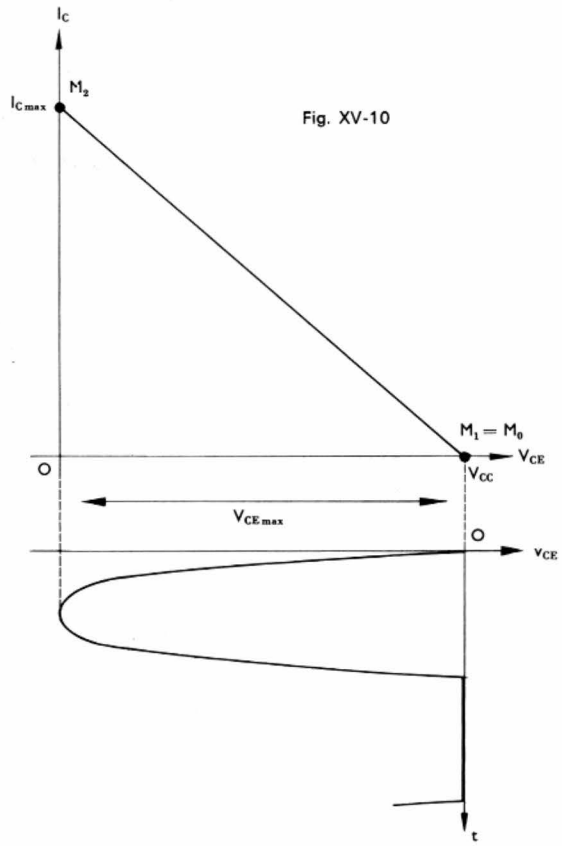


Fig. XV-10

Amplificateur en classe B. Droite de charge et courant de collecteur dans un transistor supposé idéal ($I_B = 0 \Rightarrow I_C = 0$; $V_{CE\,sat} = 0$)

Pour calculer le *rendement théorique maximal*, nous supposons que le signal appliqué est sinusoïdal, que le courant de repos de chacun des deux transistors est rigoureusement nul et que la tension de saturation est négligeable (fig. XV-10). Dans ces conditions, la puissance utile est donnée par l'expression suivante :

$$P_u = \frac{I_{C\,max}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{V_{C\,max}}{\sqrt{2}} = \frac{I_{C\,max} \cdot V_{CC}}{2}$$

($I_{C\,max}$ et $V_{CE\,max}$ représentent en effet les amplitudes du courant sinusoïdal dans la charge R_u et de la d.d.p. sinusoïdale aux bornes de celle-ci). Le courant fourni par la source de courant continu a la forme d'une suite d'arches de sinusoïde ; la puissance fournie est encore le produit de la tension V_{CC} et du courant moyen dans ce générateur :

$$P = V_{CC}\ I_{moy}$$

La valeur moyenne du courant est donnée par l'expression suivante :

$$I_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T i\ dt = \frac{1}{T}\int_0^T I_{C\,max}\,|\cos \omega t|\ dt,$$

$$I_{moy} = \frac{2}{\pi}\, I_{C\,max},$$

donc :

$$P = \frac{2}{\pi}\, V_{CC} \cdot I_{C\,max}$$

Le rendement η est donc égal à : $\eta = \frac{\pi}{4} = 0{,}78$.

Cette valeur est nettement plus grande que celle qui peut être obtenue avec un montage fonctionnant en classe A ; de plus, tandis qu'en classe A, la consommation est la même *avec* ou *sans* signal à amplifier, en classe B, la *consommation est nulle en l'absence de signal.* Par ailleurs, le bilan énergétique est d'autant plus favorable à la classe B que le fonctionnement à pleine excitation est rare. Il faut donc toujours choisir la classe B, lorsque la capacité de la source d'alimentation est limitée (matériel portatif et matériel embarqué alimentés par accumulateurs, par exemple). Signalons que la puissance dissipée par les transistors dans un montage push-pull, fonctionnant en classe B, est maximale pour un signal d'entrée d'amplitude $\frac{2V_{CC}}{\pi}$, inférieure au signal d'amplitude maximale ; elle est alors égale à :

$$P_C = \frac{2}{\pi^2}\, P_{u\,max} \approx 0{,}2\ P_{u\,max}$$

Ainsi, un étage push-pull fonctionnant en classe B et devant délivrer une puissance utile de 10 watts devra être réalisé avec des transistors susceptibles de dissiper chacun une puissance de 2 W. Les mêmes transistors utilisés en push-pull et en classe A délivreraient au maximum une puissance utile de 4 W.

Ainsi apparaît l'intérêt véritable de l'amplificateur fonctionnant en classe B : pour obtenir une puissance utile déterminée, il permet d'utiliser des transistors plus petits donc moins chers, ainsi que des radiateurs beaucoup moins encombrants.

4.2. Montages utilisant des transistors à symétrie complémentaire. — Un montage push-pull peut être réalisé avec des transistors à symétrie complémentaire (fig. XV-11). Les avantages énumérés précédemment

Fig. XV-11

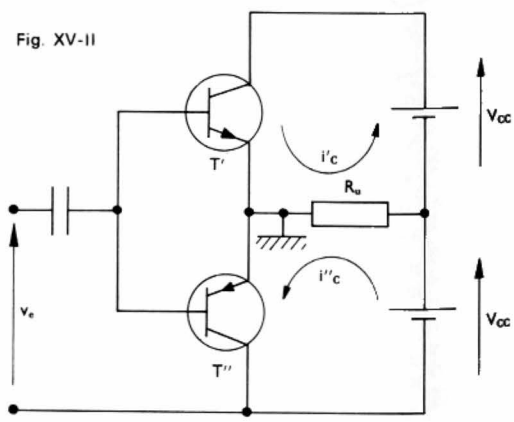
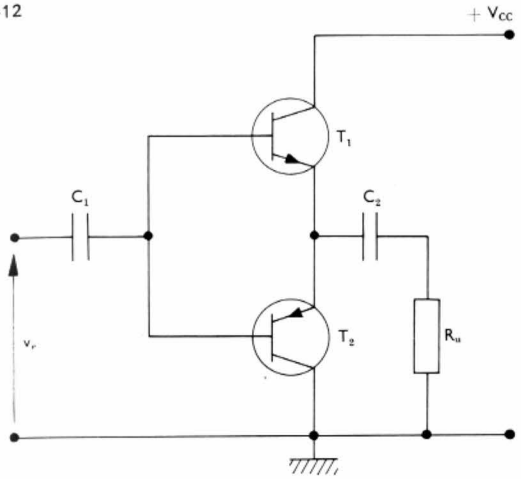


Fig. XV-12



sont conservés et, de plus, aucun transformateur n'est nécessaire. Les deux transistors dits à *symétrie complémentaire* doivent avoir des caractéristiques aussi voisines que possible tout étant l'un PNP et l'autre NPN. Pendant l'alternance positive de la tension d'entrée v_e le transistor T' devient conducteur et fonctionne en amplificateur tandis que T'', dont la jonction base-émetteur est polarisée en inverse, ne laisse passer aucun courant. Durant l'alternance négative de v_e, T'' est débloqué et T' est bloqué. Les courants fournis par les étages ont des sens opposés dans la résistance R_u et le signal sinusoïdal est ainsi reconstitué. Le montage de principe que nous venons de considérer doit être modifié : le point commun aux circuits d'entrée et de sortie est placé à l'autre extrémité de la résistance R_u afin qu'une borne du générateur de courant continu soit reliée à la ligne commune à l'ensemble de l'amplificateur (fig. XV-12), T' et T'' fonctionnent alors en collecteur commun et le signal d'entrée v_e doit avoir une amplitude au moins égale à $\frac{V_{CC}}{2}$ afin que l'excitation de l'étage de sortie soit maximale. S'il en est ainsi, la puissance de sortie délivrée est égale à :

$$P_u = \frac{V^2_{CC}}{8\,R_u}$$

Le point milieu de l'alimentation est supprimé et R_u est branchée en série avec un condensateur de grande capacité, qui élimine la composante continue sans perturber le fonctionnement dynamique.

Fig. XV-13

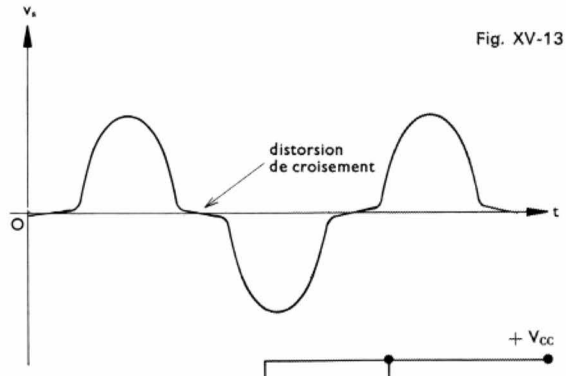
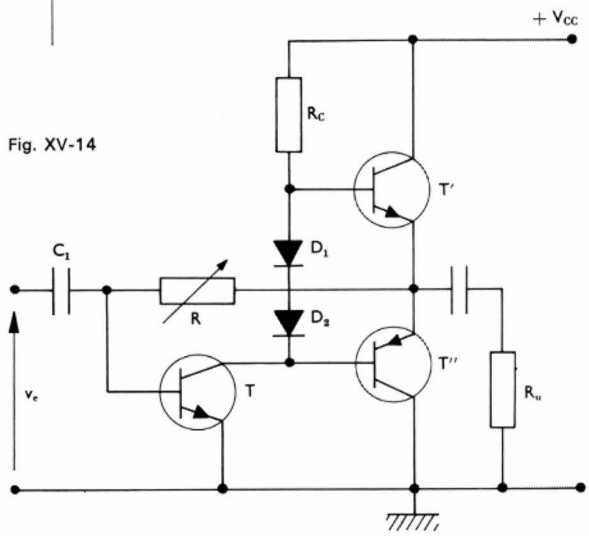


Fig. XV-14



Cependant, ce montage ne peut encore donner satisfaction car la conduction de T' ne commence que lorsque la tension v_{BE_1} dépasse 0,6 V tandis que celle de T'' se produit lorsque V_{BE} devient inférieure à — 0,6 V. Lorsque la tension d'entrée v_e est comprise entre — 0,6 V et + 0,6 V, le signal de sortie est déformé (fig. XV-13). Le montage de la figure XV-14 permet de remédier à ce défaut. La polarisation de T est obtenue à partir du point commun à T' et T'' afin de réaliser un équilibrage automatique du montage ; la chute de tension aux bornes des diodes D_1 et D_2 assure la suppression de la déformation, appelée *distorsion de croisement*.

CHAPITRE XVI

AMPLIFICATEURS AVEC RÉACTION

La plupart des performances des amplificateurs sont modifiées lorsqu'une partie du signal de sortie est renvoyée dans le circuit d'entrée, c'est-à-dire lorsqu'il y a **réaction** de la sortie sur l'entrée.

1. DIFFÉRENTES SORTES DE RÉACTIONS

Pour qu'un amplificateur A soit transformé en un amplificateur avec réaction, il faut lui adjoindre :

— un *réseau d'échantillonnage* pour prélever une partie du signal de sortie (tension ou courant),

— un *réseau de réaction* permettant de faire subir les transformations nécessaires au signal prélevé,

— un *réseau de mixage* utile pour appliquer un signal de réaction au circuit d'entrée.

L'ensemble doit être considéré comme un nouvel amplificateur dont les propriétés dépendent de celles de l'amplificateur A et de celles des divers circuits (V. fig. XVI-5).

Les moyens d'échantillonnage et de mixage employés peuvent être classés en quatre catégories.

1.1. Échantillonnage série. — La tension v' est prélevée aux bornes d'une résistance r placée en série avec l'impédance de charge Z (fig. XVI-1). Cette résistance r est toujours assez faible pour que l'impédance totale du circuit de charge de l'amplificateur A soit toujours sensiblement égale à Z. La tension v' appliquée au réseau de réaction étant proportionnelle au courant de sortie i_s, l'amplificateur est dit à **réaction de courant.**

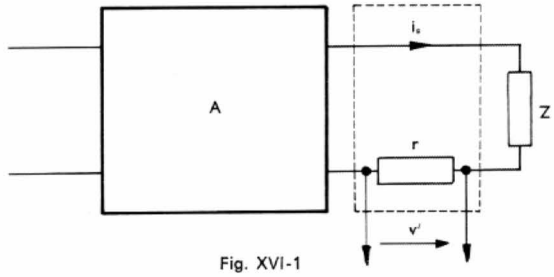


Fig. XVI-1

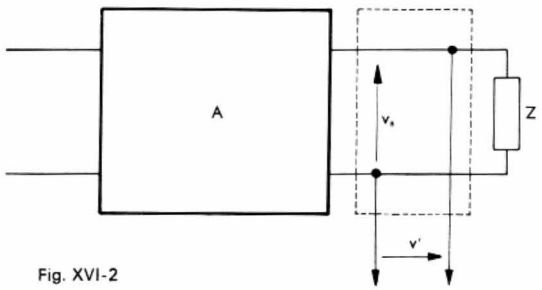


Fig. XVI-2

1.2. Échantillonnage parallèle. — La tension v' est la d.d.p. entre les bornes de sortie de l'amplificateur (fig. XVI-2). L'amplificateur est à **réaction de tension.**

1.3. Mixage série. — La tension de réaction v_r (fournie par le réseau de réaction) est appliquée entre deux bornes du circuit d'entrée de façon que les tensions v'_e et v_r s'ajoutent (algébriquement) à chaque instant (fig. XVI-3).

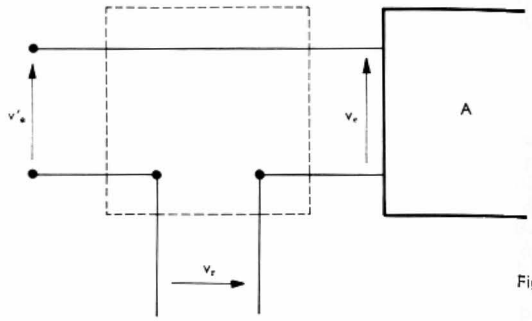


Fig. XVI-3

1.4. Mixage parallèle. — La tension de réaction v_r est appliquée entre les deux bornes du circuit d'entrée auxquelles est relié le générateur fournissant la tension v'_e (fig. XVI-4). Il n'y a réellement réaction que si la résistance interne de ce générateur n'est pas nulle.

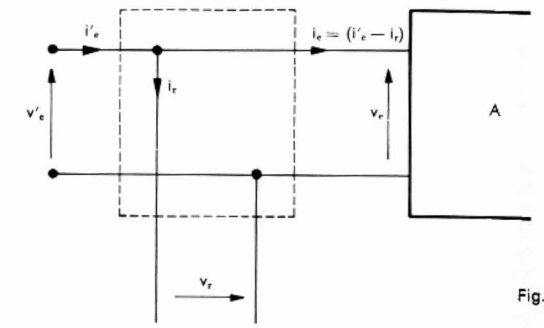


Fig. XVI-4

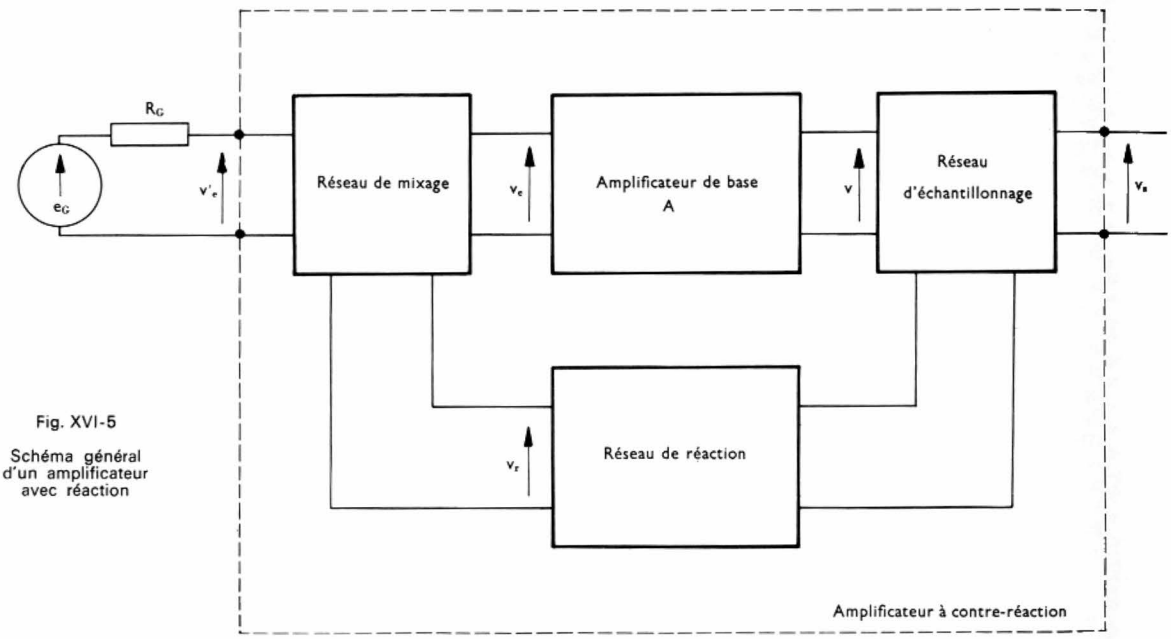


Fig. XVI-5

Schéma général d'un amplificateur avec réaction

Nous sommes donc amenés à distinguer quatre sortes de réactions appelées :

— *réaction série de tension* (mixage série, échantillonnage parallèle),

— *réaction série de courant* (mixage série, échantillonnage série),

— *réaction parallèle de tension* (mixage parallèle, échantillonnage parallèle),

— *réaction parallèle de courant* (mixage parallèle, échantillonnage série).

2. RÉACTION SÉRIE DE TENSION

2.1. Étude de l'amplification. — Supposons que le réseau de réaction n'absorbe aucun courant et qu'il fournisse un signal de sortie v_r dont la valeur complexe soit égale à :

$$\underline{V}_r = \underline{\beta}\,\underline{V}_s$$

$\underline{V}_s$ désignant la valeur complexe de la tension de sortie de l'amplificateur avec réaction et $\underline{\beta}$ représentant un *nombre complexe indépendant de la fréquence* (fig. XVI-6). Nous considérons donc un réseau de réaction restituant un signal d'amplitude proportionnelle à la tension de sortie v_s mais déphasé par rapport à celle-ci (sauf lorsque $\underline{\beta}$ est un nombre réel positif).

L'amplificateur A peut être représenté schématiquement :

— vu de ses bornes d'entrée E_1 et E_2, nous l'assimilerons à une résistance R_e (sa résistance d'entrée),

— vu de ses bornes de sortie S_1 et S_2, nous le considérerons comme équivalent à un générateur de tension de f.é.m. $\underline{A}_{v0} \cdot \underline{V}_e$ ($\underline{A}_{v0}$, amplification de A seul et à vide) et de résistance interne R_s (résistance de sortie de A).

La valeur complexe de la tension qui peut être relevée entre les bornes de sortie S'_1 et S'_2 de l'amplificateur A' est égale à :

$$\underline{V}_s = \underline{A}_{v0}\,\underline{V}_e - \underline{R}_s\,\underline{I}_s$$

La valeur complexe de la tension d'entrée $\underline{V}_e$ (d.d.p. entre E_1 et E_2) est obtenue en appliquant la loi d'Ohm au

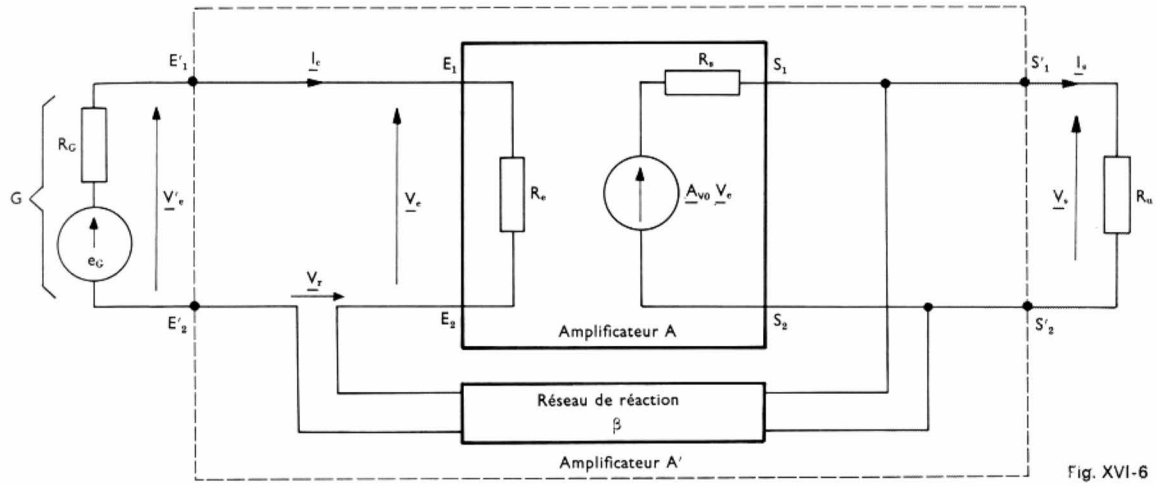


Fig. XVI-6

circuit d'entrée (les sens des flèches représentent les sens positifs choisis pour les tensions) :

$$\underline{V}_e = (\underline{E}_G - \underline{V}_r)\,\frac{R_e}{R_e + R_G} = (\underline{E}_G - \underline{\beta}\,\underline{V}_s)\,\frac{R_e}{R_e + R_G}$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\underline{V}_s = \underline{A}_{v0}\,(\underline{E}_G - \underline{\beta}\,\underline{V}_s)\,\frac{R_e}{R_e + R_G} - R_s\,\underline{I}_s$$

Le produit $\underline{A}_{v0} \cdot \dfrac{R_e}{R_e + R_G}$ représente l'amplification de l'ensemble amplificateur A-générateur G (V. chap. 13, § 3). Nous le désignerons par $\underline{A}_{ve}$:

$$\underline{A}_{ve} = \underline{A}_{v0}\,\frac{R_e}{R_e + R_G}$$

En tenant compte de ce résultat, la tension de sortie est donnée par l'expression suivante :

$$\underline{V}_s\,(1 + \underline{\beta}\,\underline{A}_{ve}) = \underline{A}_{ve} \cdot \underline{E}_G - R_s\,\underline{I}_s$$

Donc :

$$\underline{V}_s = \frac{\underline{A}_{ve}}{1 + \underline{\beta}\,\underline{A}_{ve}}\,\underline{E}_G - \frac{R_s}{1 + \underline{\beta}\,\underline{A}_{ve}}\,\underline{I}_s$$

Si la *sortie est ouverte*, le courant de sortie est nul et l'amplification $\underline{A}'_{ve}$ de l'étage avec réaction est égale à :

$$\underline{A}'_{ve} = \frac{\underline{V}_s}{\underline{E}_G} = \frac{\underline{A}_{ve}}{1 + \underline{\beta}\,\underline{A}_{ve}}$$

Cette relation, extrêmement utilisée, est appelée quelquefois *loi générale de la contre-réaction*. Il faut cependant se garder de la considérer comme telle et ne l'appliquer que si toutes les hypothèses du calcul qui vient d'être fait sont vérifiées pour le circuit considéré.

2.2. Conséquences. — L'amplification en tension à *sortie ouverte* permet de définir précisément la réaction.

— Nous dirons qu'il y a **contre-réaction** si l'amplification $\underline{A}'_{ve}$ est inférieure à l'amplification $\underline{A}_{ve}$. Dans ces conditions, le module du dénominateur est supérieur à 1 :

$$|1 + \underline{\beta}\,\underline{A}_{ve}| > 1$$

Dans le cas particulier où $\underline{\beta}\,\underline{A}_{ve}$ est réel, la condition de contre-réaction se réduit à :

$$\underline{\beta}\,\underline{A}_{ve} > 0$$

Si $\underline{\beta}$ et $\underline{A}_{ve}$ sont tous deux réels, pour que cette condition soit satisfaite, il faut que la transmittance $\underline{\beta}$ du réseau de réaction et l'amplification $\underline{A}_{ve}$ soient simultanément réelles et positives ou réelles et négatives. En effet, si $\underline{\beta} = \beta$ et $\underline{A}_{ve} = A_{ve}$ nous pouvons écrire :

$$\beta\,A_{ve} > 0 \Rightarrow \text{ou } \beta > 0 \text{ et } A_{ve} > 0$$
$$\text{ou } \beta < 0 \text{ et } A_{ve} < 0$$

— Nous dirons qu'il y a **réaction positive** si l'amplification $\underline{A}'_{ve}$ est supérieure à A_{ve}, c'est-à-dire si :

$$|1 + \underline{\beta}\,\underline{A}_{ve}| < 1$$

3. CONTRE-RÉACTION SÉRIE DE TENSION

3.1. Amplification en tension. — La valeur complexe de la tension de sortie $\underline{V}_s$ (fig. XVI-6) a été calculée précédemment :

$$\underline{V}_s = \frac{\underline{A}_{ve}}{1 + \underline{\beta}\,\underline{A}_{ve}}\,\underline{E}_G - \frac{R_s}{1 + \underline{\beta}\,\underline{A}_{ve}}\,\underline{I}_s$$

L'amplification en tension à vide est donc égale à :

$$\boxed{\underline{A}'_{ve} = \frac{\underline{V}_s}{\underline{E}_G} = \frac{\underline{A}_{ve}}{1 + \underline{\beta}\,\underline{A}_{ve}}}$$

3.2. Impédance de sortie. — La relation donnant la valeur complexe de la tension de sortie montre que l'amplificateur avec contre-réaction est équivalent à un générateur ayant les caractéristiques suivantes :

— f.é.m. : $\underline{A}'_{ve} \cdot \underline{E}_G$

— impédance interne : $\underline{Z}'_s = \dfrac{R_s}{1 + \underline{\beta}\,\underline{A}_{ve}}$

Cette impédance est précisément l'impédance de sortie de l'amplificateur avec contre-réaction. Son module est égal à :

$$\boxed{Z'_s = \frac{R_s}{|1 + \underline{\beta}\,\underline{A}_{ve}|}}$$

3.3. Impédance d'entrée. — Par définition, la valeur complexe de cette impédance est égale au quotient des valeurs complexes de la tension d'entrée et de l'intensité du courant d'entrée :

$$\underline{Z}'_e = \frac{\underline{V}'_e}{\underline{I}_e} = \frac{\underline{V}_e + \underline{V}_r}{\underline{I}_e}$$

Calculons $\underline{V}_r$: $\quad \underline{V}_r = \underline{\beta}\,\underline{V}_s = \underline{\beta}\,\underline{A}_{v0}\,\dfrac{R_u}{R_u + R_s}\,\underline{V}_e$

Le quotient $\underline{A}_{v0}\,\dfrac{R_u}{R_u + R_s}$ représente l'amplification de A lorsque la résistance R_u est placée entre les bornes de sortie (V. chap. 13, § 3). Nous le désignerons par $\underline{A}_{vs}$:

$$\underline{A}_{vs} = \underline{A}_{v0}\,\frac{R_u}{R_u + R_s}$$

d'où : $\quad \underline{Z}'_e = \dfrac{\underline{V}_e}{\underline{I}_e}\,(1 + \underline{\beta}\,\underline{A}_{vs})$

et : $\quad \underline{Z}'_e = R_e\,(1 + \underline{\beta}\,\underline{A}_{vs})$

L'impédance d'entrée est donc égale à :

$$\boxed{Z_e = R_e\,|1 + \underline{\beta}\,\underline{A}_{vs}|}$$

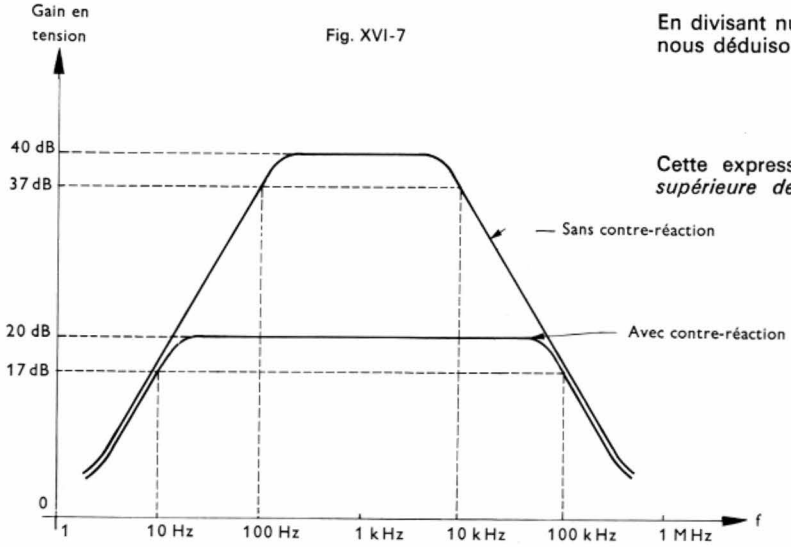


Fig. XVI-7

3.4. Propriétés générales de la contre-réaction série de tension. — La contre-réaction série de tension entraîne une augmentation de l'impédance d'entrée et une diminution de l'impédance de sortie de l'amplificateur. Ces deux propriétés sont souvent très intéressantes. Elles sont particulièrement recherchées dans les amplificateurs destinés à transmettre les fréquences audibles (audiofréquences). En effet, un haut-parleur fonctionne d'autant mieux que l'amplificateur qui l'alimente a une résistance de sortie faible; en revanche, une tête de lecture piézoélectrique doit être reliée à un amplificateur à très haute impédance d'entrée.

L'amplification est fortement réduite lorsqu'il y a contre-réaction; ce résultat défavorable est heureusement accompagné d'un certain nombre d'avantages très importants : *élargissement de la bande passante, réduction de la distorsion* et *des bruits parasites, stabilisation du fonctionnement.*

3.4.1. Augmentation de la bande passante. — Un exemple simple permet de mettre en évidence cette augmentation de la bande passante. Considérons un amplificateur A dont l'amplification maximale en tension $\underline{A}_{ve}$ est égale à 100 (ce qui correspond à un gain en tension $G_{ve} = 20 \lg A_{ve} = 40$ dB); les fréquences de coupures inférieures f_i et supérieure f_s sont respectivement 100 Hz et 10 kHz (fig. XVI-7). La transmittance du réseau de réaction est positive et est égale à $\beta = \frac{9}{100}$. En appliquant la formule donnant l'amplification en tension A'_{ve} à sortie ouverte :

$$\left(A'_{ve} = \frac{A_{ve}}{|1 + \underline{\beta}\,\underline{A}_{ve}|} \right)$$

nous obtenons pour $f = 1$ kHz ($A_{ve} = A_{vm} = 100$) :

$$A'_{ve} = A'_{vm} = \frac{A_{vm}}{1 + \beta\, A_{vm}} = \frac{100}{1 + \frac{9}{100} \times 100} = 10$$

$G'_{ve} = 20 \lg 10 = 20$ dB.

Aux *fréquences supérieures* de la bande passante de A, supposons que, comme c'est généralement le cas, l'amplification A_{ve} soit égale à (V. chap. 13, § 6) :

$$\underline{A}_{ve} = \frac{A_{vm}}{1 + j\frac{f}{f_s}} \qquad (A_{vm} = 100)$$

Pour les mêmes fréquences, nous pouvons écrire :

$$\underline{A}'_{ve} = \frac{\frac{A_{vm}}{1 + j\frac{f}{f_s}}}{1 + \frac{\beta\, A_{vm}}{1 + j\frac{f}{f_s}}} = \frac{A_{vm}}{1 + \beta\, A_{vm} + j\frac{f}{f_s}}$$

En divisant numérateur et dénominateur par $(1 + \beta A_{vm})$, nous déduisons :

$$\underline{A}'_{ve} = \frac{A'_{vm}}{1 + j\frac{f}{f_s\,(1 + \beta\, A_{vm})}}$$

Cette expression montre que la *fréquence de coupure supérieure de A' est égale à* $f'_s = f_s\,(1 + \beta\, A_{vm})$. En effet, pour $f = f'_s$, $A'_{ve} = \frac{A'_{vm}}{\sqrt{2}}$ et le gain est devenu égal à 17 dB. Dans l'exemple considéré nous trouvons :

$$f'_s = f_s\,(1 + \beta A_{vm})$$
$$= 10^4 \left(1 + \frac{9}{100} \times 100\right) = 10^5 \text{ Hz}$$

De même, aux *fréquences inférieures* de la bande passante de A, si l'amplification A_{ve} est donnée par une relation pouvant se mettre sous la forme suivante (cas très général) :

$$\underline{A}_{ve} = \frac{A_{vm}}{1 + j\frac{f_i}{f}}$$

nous pouvons écrire :

$$\underline{A}'_{ve} = \frac{A'_{vm}}{1 + j\frac{f_i}{f\,(1 + \beta\, A_{vm})}}$$

Cela permet de dire que la *fréquence de coupure inférieure de A' est égale à* $f'_i = \frac{f_i}{1 + \beta\, A_{vm}}$.

$$f'_i = \frac{f_i}{1 + \beta\, A_{vm}} = \frac{100}{1 + \frac{9}{100} \times 100} = 10 \text{ Hz}$$

La bande passante de A' à — 3 dB est donc nettement supérieure à la bande passante de A (fig. XVI-7).

3.4.2. Réduction de la distorsion de non-linéarité. La distorsion de non-linéarité totale introduite par l'amplificateur est réduite dans le même rapport que l'amplification. Lorsqu'il est nécessaire d'ajouter un étage amplificateur supplémentaire pour compenser la diminution d'amplification due à la contre-réaction, il faut veiller à ce que cet étage n'apporte pas lui-même une distorsion telle que l'avantage précédent disparaisse.

Lorsque $(\underline{\beta}.\underline{A}_{ve})$ est un nombre réel positif très supérieur à 1, l'amplification A'_{ve} est alors donnée par l'expression suivante :

$$\underline{A}'_{ve} = \frac{\underline{A}_{ve}}{\underline{\beta}\,\underline{A}_{ve}} = \frac{1}{\underline{\beta}}$$

En prenant $\underline{\beta}$ constant et indépendant de la fréquence, toute distorsion est éliminée (du moins dans le domaine de fréquences pour lequel la condition précédente est satisfaite).

3.4.3. Réduction des bruits parasites. — Les bruits internes d'un amplificateur (ronflements dus à un filtrage insuffisant de la tension d'alimentation, par exemple) sont réduits dans le même rapport que l'amplification. Ce résultat intéressant ne conduit cependant pas toujours à une amélioration considérable du rapport signal/bruit de l'amplificateur, la principale source de bruit étant toujours le circuit d'entrée dont une grande partie se trouve en amont du circuit de réaction.

3.4.4. Stabilisation de l'amplification. — Supposons que l'amplification de A' soit réelle et égale à :

$$A'_{ve} = \frac{A_{ve}}{1 + \beta\, A_{ve}} \quad (A_{ve} \text{ étant aussi réel})$$

Pour une raison fortuite, s'il se produit une variation dA_{ve}

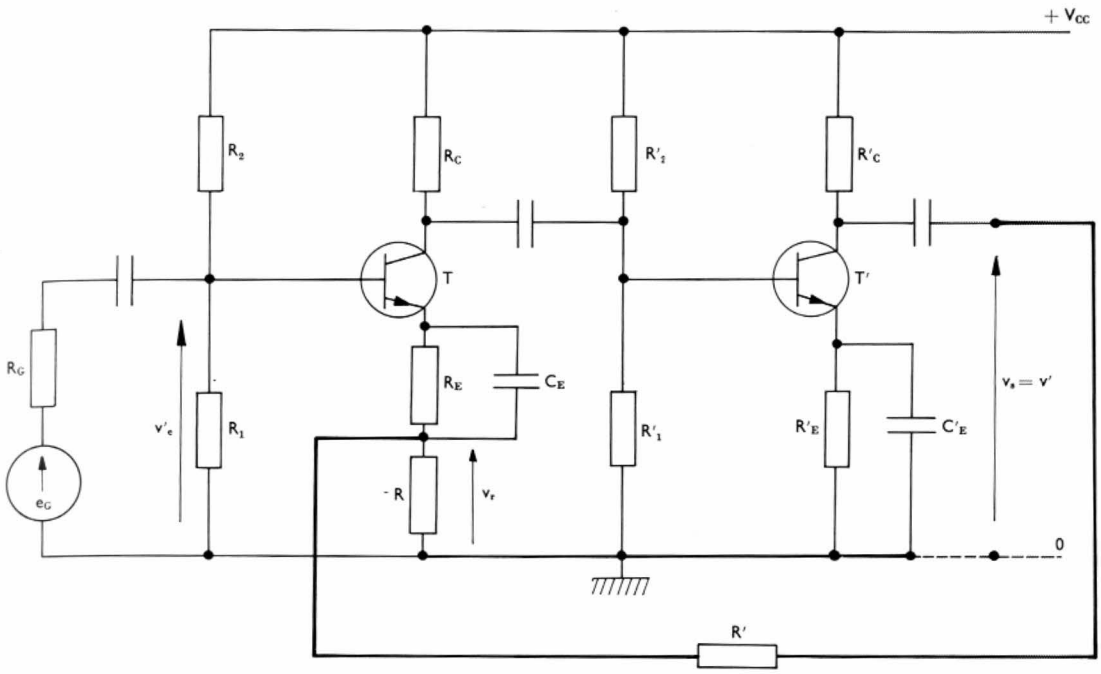


Fig. XVI-8

de l'amplification A_{ve}, la dérive de l'amplification A'_{ve} correspondante est : $\frac{dA'_{ve}}{A'_{ve}} = \frac{dA_{ve}}{A_{ve}} \cdot \frac{1}{1 + \beta A_{ve}}$.

(expression obtenue en différenciant la relation précédente). Pour réaliser un amplificateur dont l'amplification A'_{ve} ait une valeur très précise, il suffit de construire un amplificateur d'amplification beaucoup plus grande que A'_{ve} et de placer un circuit de réaction. Par exemple, pour obtenir $A'_{ve} = 100$ à 0,1 % près, nous pouvons prendre un amplificateur A d'amplification $A_{ve} = 10\,000$ et choisir le circuit de réaction de façon à avoir : $(1 + \beta A_{ve}) = 100$.

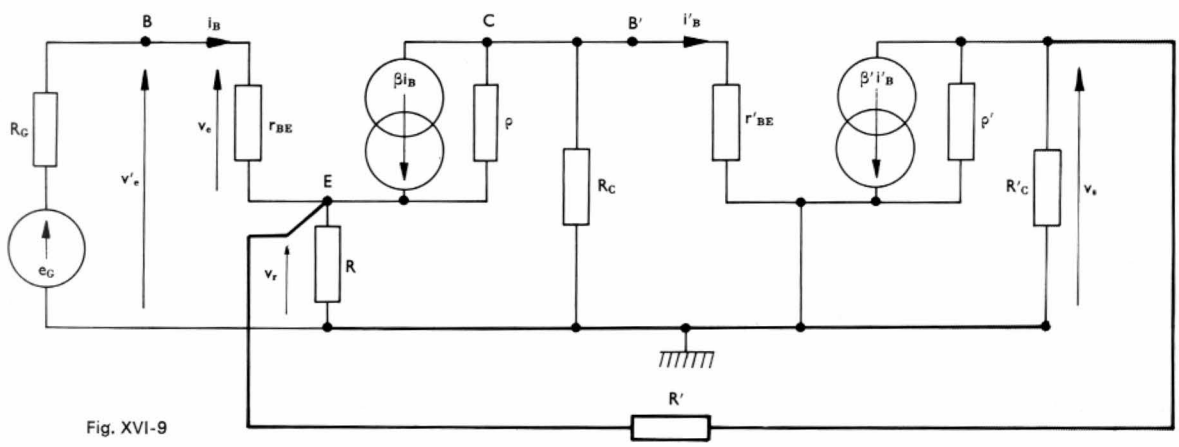


Fig. XVI-9

Dans ce cas, nous aurons :

$$\frac{dA'_{ve}}{A'_{ve}} \leqslant 0{,}1\ \%\ \text{tant que}\ \frac{dA_{ve}}{A_{ve}} \leqslant 10\ \%$$

L'amplification A'_{ve} est connue très précisément et est très peu influencée par la dispersion des caractéristiques ou par les tolérances des éléments du montage.

3.5. Exemple. — La figure XVI-8 représente un amplificateur à deux étages où une contre-réaction série de tension est mise en œuvre. La tension de sortie (qui est égale à la tension d'entrée v' du circuit de réaction) est appliquée à deux résistances R et R' associées en série, R étant dans le circuit d'émetteur de T. Le schéma équivalent correspondant (fig. XVI-9), pour les signaux de fréquences moyennes de la bande passante, montre bien que la tension v_e, tension de commande du transistor T, est la différence entre les tensions v'_e et v_r.

4. CONTRE-RÉACTION SÉRIE DE COURANT

Cette contre-réaction peut être obtenue très simplement en plaçant une résistance R dans une branche commune au circuit d'entrée et au circuit de sortie de l'amplificateur (fig. XVI-10). Dans un amplificateur à transistor, il suffit

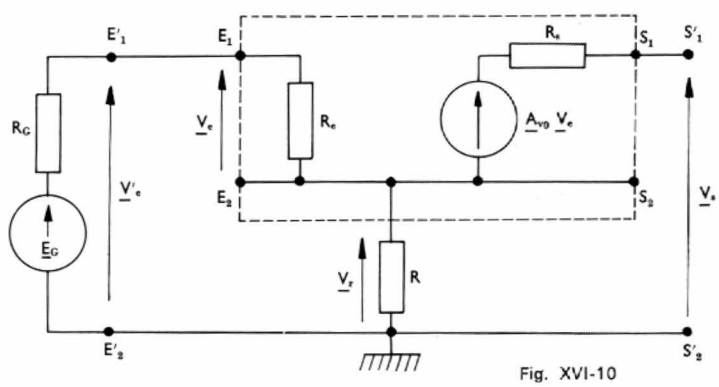
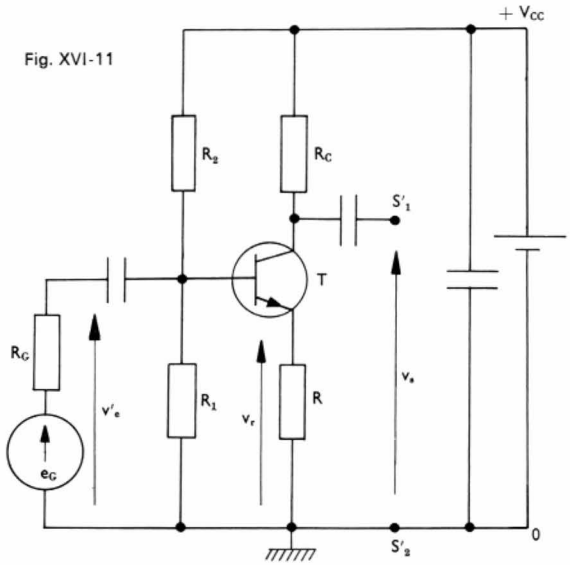


Fig. XVI-10

Fig. XVI-11



d'insérer la résistance R entre l'émetteur et la masse du montage (fig. XVI-11).

L'étude de ce montage (pour les fréquences moyennes de la bande passante) peut être réalisée au moyen du schéma équivalent de l'étage (fig. XVI-12). Si la résistance

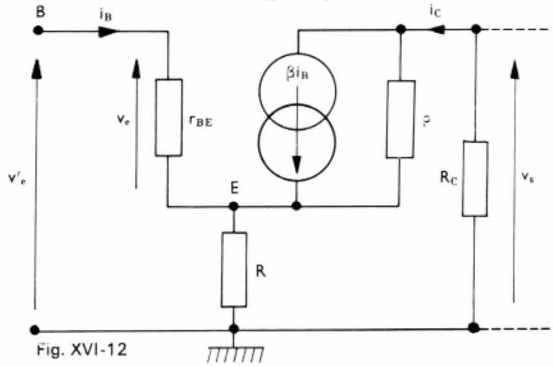


Fig. XVI-12

R est très inférieure à $(R_C + \rho)$ (cas très fréquent), le rapport de réaction $\underline{\beta}$ est égal à $-\dfrac{R}{R_C}$ et alors l'amplification de l'étage est sensiblement égale à :

$$\underline{A}'_{ve} = \frac{1}{\underline{\beta}} = -\frac{R_C}{R}$$

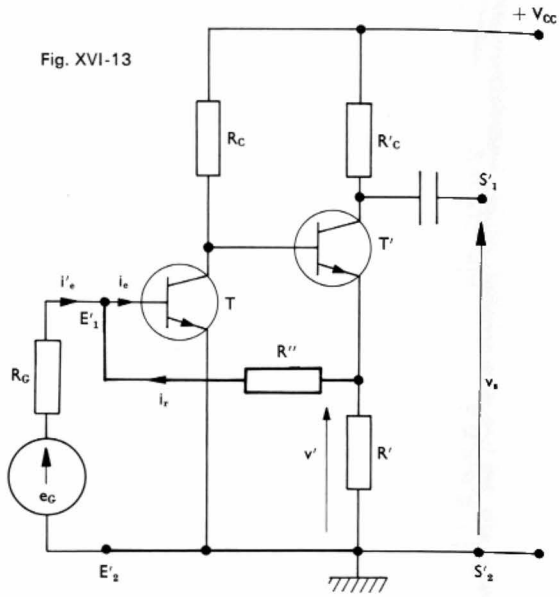
L'amplification avec contre-réaction est pratiquement égale à l'inverse de la transmittance du réseau de réaction. L'emploi de la contre-réaction série de courant permet de stabiliser l'amplification, d'augmenter la bande passante et l'impédance d'entrée $\underline{Z}'_e = R_e\left(1 + \underline{A}_{v0}\dfrac{R}{R_C}\right)$, de diminuer le bruit de la même façon qu'une contre-réaction série de tension. En revanche, l'impédance de sortie est augmentée au lieu d'être diminuée comme dans le premier cas.

5. CONTRE-RÉACTION PARALLÈLE DE COURANT

Cette contre-réaction est moins utilisée que les deux précédentes car elle entraîne une diminution de l'impédance d'entrée et une augmentation de l'impédance de sortie. Ces deux résultats sont rarement recherchés simultanément dans les amplificateurs à transistors.

Pour la réaliser, il faut renvoyer entre les bornes d'entrée de l'amplificateur un signal prélevé aux bornes d'une résistance parcourue par le courant de sortie. Le montage de la fig. XVI-13 est un exemple d'amplificateur mettant en œuvre cette contre-réaction. Du fait de l'absence de condensateur de liaison dans le circuit de contre-réaction, la

Fig. XVI-13



stabilisation apportée au fonctionnement en régime dynamique subsiste en régime statique. Ainsi la stabilité thermique de ce montage peut être excellente.

6. CONTRE-RÉACTION PARALLÈLE DE TENSION. AMPLIFICATEUR OPÉRATIONNEL

6.1. Étude de l'amplification. — Cette contre-réaction est facilement réalisée en reliant les bornes de sortie de l'amplificateur et les bornes d'entrée correspondantes à travers un montage comportant généralement des résistances ou (et) des condensateurs. Les impédances d'entrée et de sortie de l'amplificateur sont diminuées. L'amplification du montage ne dépend plus de l'amplificateur si l'amplification $\underline{A}_{v0}$ de ce dernier est suffisamment grande (V. ci-après).

Cet amplificateur est surtout utilisé dans les calculateurs analogiques; il est alors appelé *amplificateur opérationnel*. Pour être précis, cette appellation est réservée à des amplificateurs de grande amplification et dont la bande passante s'étend jusqu'aux fréquences très basses (cela impose des *liaisons directes* entre étages, c'est-à-dire des liaisons sans condensateur).

L'amplificateur opérationnel ayant une très grande importance pratique, nous allons déterminer précisément son amplification (fig. XVI-14).

L'amplificateur A est caractérisé :

— par sa résistance d'entrée R_e,

— par sa résistance de sortie R_s que nous supposerons de *faible valeur* (son influence pourra être négligée),

— par son amplification à circuit ouvert $\underline{A}_{v0}$ dont le *module est très grand* (10^5, par exemple).

La valeur complexe de l'intensité du courant d'entrée est égale à : $\underline{I} = \underline{I}_e - \underline{I}'$. Le circuit de réaction ayant une impédance Z', nous pouvons connaître $\underline{I}'$ en appliquant la loi d'Ohm :

$$\underline{I}' = \frac{\underline{V}_s - \underline{V}_e}{\underline{Z}'} = \underline{V}_s\left(\frac{1}{\underline{Z}'} - \frac{1}{\underline{A}_{v0}\,\underline{Z}'}\right)$$

(la résistance R_s étant négligée : $\underline{A}_{v0}\,\underline{V}_e = \underline{V}_s$).

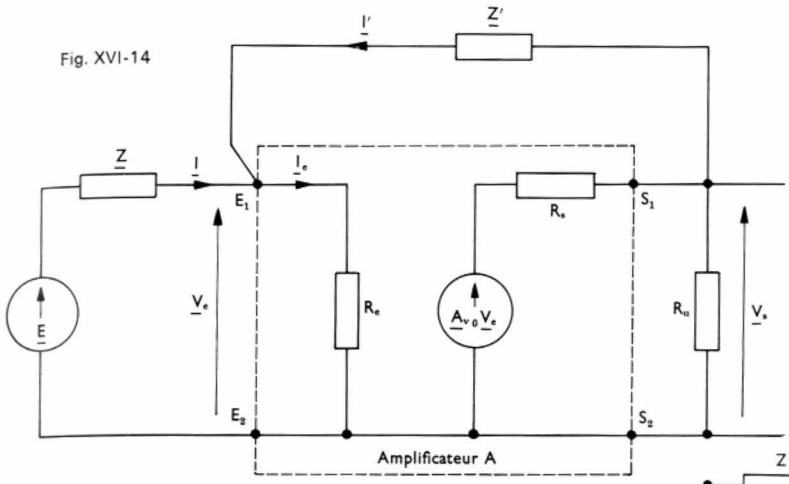
De même, si nous considérons le circuit d'entrée de l'amplificateur, nous pouvons obtenir la valeur complexe $\underline{I}_e$ du courant d'entrée en fonction de $\underline{V}_s$:

$$\underline{I}_e = \frac{\underline{V}_e}{R_e} = \frac{\underline{V}_s}{\underline{A}_{v0}\,R_e}$$

Donc $\underline{I}$ est égal à :

$$\underline{I} = \underline{V}_s\left[\frac{1}{\underline{A}_{v0}\,R_e} - \frac{1}{\underline{Z}'} + \frac{1}{\underline{A}_{v0}\,\underline{Z}'}\right]$$

Fig. XVI-14



Mais ce courant est fourni par le générateur de f.é.m. E :

$$\underline{I} = \frac{\underline{E} - \underline{V_e}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}} - \frac{\underline{V_s}}{\underline{A_{v0}}\,\underline{Z}}$$

En égalant les deux expressions donnant $\underline{I}$, nous déduisons :

$$\frac{\underline{E}}{\underline{Z}} = \underline{V_s}\left[\frac{1}{\underline{A_{v0}}}\left(\frac{1}{\underline{Z}} + \frac{1}{R_e} + \frac{1}{\underline{Z'}}\right) - \frac{1}{\underline{Z'}}\right]$$

L'amplification $\underline{A_{v0}}$ ayant un module très grand, le premier terme de la différence est négligeable devant le second et il vient :

$$\frac{\underline{E}}{\underline{Z}} \approx -\frac{\underline{V_s}}{\underline{Z'}}$$

L'amplification $\underline{A'_{ve}}$ de l'étage est donc égale à :

$$\boxed{\underline{A'_{ve}} = \frac{\underline{V_s}}{\underline{E}} = -\frac{\underline{Z'}}{\underline{Z}}}$$

Ce résultat montre que l'amplification ne dépend plus de l'amplificateur mais uniquement des deux impédances Z et Z' (si l'amplification A_{v0} est grande).

6.2. Usages fondamentaux des amplificateurs opérationnels

6.2.1. Changeur de signe ou inverseur. — Si $\underline{Z} = \underline{Z'}$ (fig. XVI-15), l'amplification de l'étage est alors égale à :

$$\underline{A'_{ve}} = -1$$

À chaque instant, le signal de sortie est l'opposé du signal d'entrée ($v_s = -e$). En régime sinusoïdal permanent, le signal de sortie est déphasé de 180° par rapport au signal d'entrée.

6.2.2. Changeur d'échelle. — Si Z et Z' sont deux impédances de même nature mais de modules différents ($\underline{Z'} = k\underline{Z}$, k étant un nombre réel positif), $\underline{A'_{ve}}$ est un nombre réel négatif (fig. XVI-16) : $\underline{A'_{ve}} = -k$.

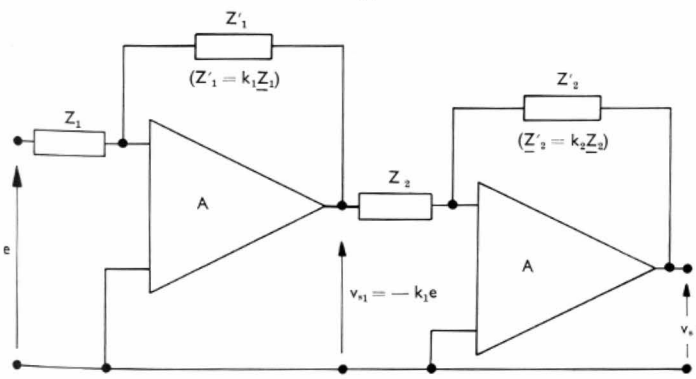
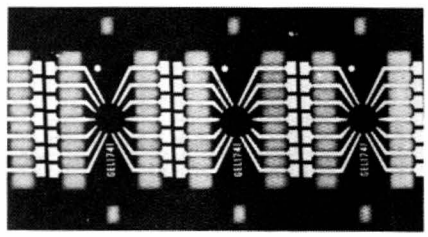


Fig. XVI-17 — Amplificateur opérationnel changeur d'échelle (multiplication par une constante positive)



Amplificateur opérationnel (*General Electric*)

Fig. XVI-15 — Représentation conventionnelle d'un amplificateur opérationnel inverseur

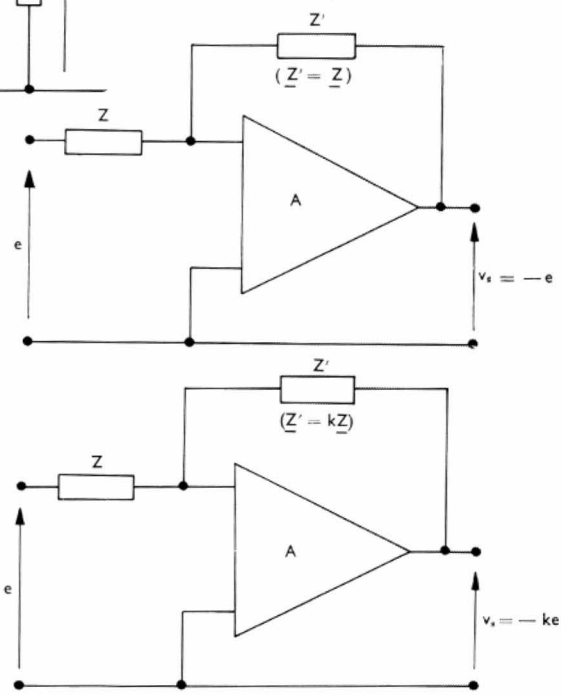
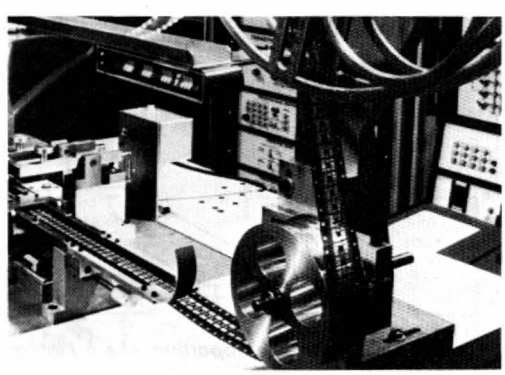


Fig. XVI-16 — Amplificateur opérationnel changeur d'échelle (multiplication par une constante négative)

À tout instant le signal de sortie est k fois plus grand que le signal d'entrée et leurs signes sont opposés ($v_s = -ke$). Cet amplificateur permet donc de réaliser une multiplication par une constante négative.

Pour la multiplication par une constante positive, il faut deux étages d'amplificateurs en cascade (fig. XVI-17).

Dans la pratique, $\underline{Z}$ et $\underline{Z'}$ sont des résistances.



Fabrication d'amplificateurs opérationnels sous forme de circuits intégrés (*General Electric*)

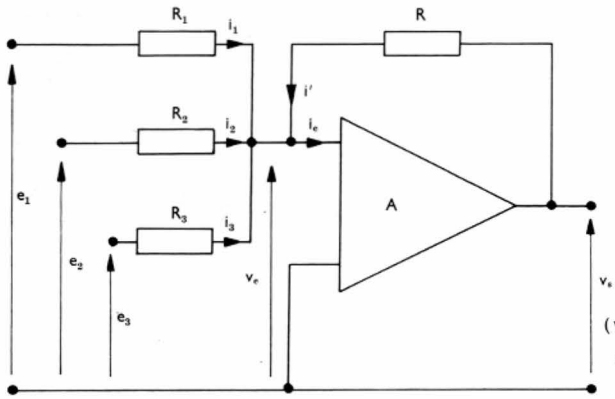


Fig. XVI-18

6.2.3. Additionneur. — L'amplificateur A (fig. XVI-18), ayant une amplification $\underline{A}_{v0}$ très grande, fonctionne avec un signal d'entrée v_e négligeable devant v_s et aussi devant e_1, e_2, e_3. Le courant d'entrée i_e est alors également négligeable devant i_1, i_2, i_3 et i' si la résistance d'entrée R_e n'est pas trop petite. Nous pouvons alors écrire :

$$i_1 + i_2 + i_3 = -i'$$

ou encore :

$$\frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2} + \frac{e_3}{R_3} = -\frac{v_s}{R} \left(\text{car } i_1 = \frac{e_1 - v_e}{R_1} \approx \frac{e_1}{R_1}, \text{ etc.} \right)$$

Si $R_1 = R_2 = R_3 = R'$, il vient :

$$v_s = -\frac{R}{R'} (e_1 + e_2 + e_3)$$

À une constante multiplicative près (qui peut être égale à — 1 si $R = R'$), le signal de sortie v_s est égal à la somme des trois signaux d'entrée e_1, e_2, e_3. Le nombre d'entrées peut être augmenté pour réaliser l'addition de plus de trois signaux.

En combinant éventuellement l'additionneur avec des changeurs d'échelle ou de signe, il est possible d'obtenir une combinaison linéaire des signaux d'entrée (par exemple : $e_1 + e_2 - e_3 + e_4$).

6.2.4. Intégrateur. — En négligeant encore le courant d'entrée i_e et la tension d'entrée v_e, nous pouvons écrire (fig. XVI-19) :

$$i = -i'$$

$$v_s - v_e \approx v_s = \frac{1}{C} \int_0^t i' \, dt$$

$$e - v_e \approx e = Ri$$

ainsi :

$$v_s = -\frac{1}{RC} \int_0^t e \, dt$$

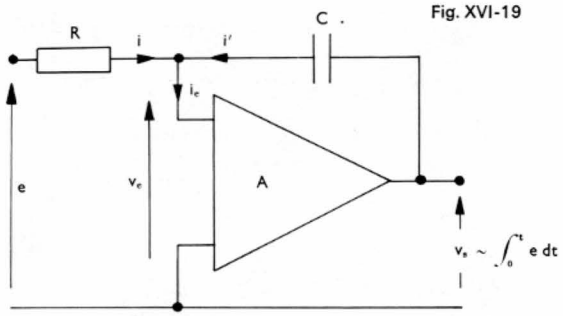


Fig. XVI-19

La tension de sortie est proportionnelle à l'intégrale de la tension d'entrée. La constante de proportionnalité dépend du produit RC appelée *constante de temps de l'intégrateur.*

Ce montage est très souvent utilisé pour obtenir un signal en dents de scie à partir d'une tension en créneaux. Il reçoit alors le nom d'*intégrateur de Miller ;* il est utilisé dans les oscillographes cathodiques, par exemple, pour fournir la tension de balayage (V. chap. 5).

6.2.5. Différenciateur. — Par rapport au montage précédent, les positions de R et C sont inversées (fig. XVI-20). En utilisant toujours les mêmes hypothèses de calcul, nous pouvons écrire :

$$i = -i'$$

$$e - v_e \approx e = \frac{1}{C} \int_0^t i \, dt \quad \text{ou :} \quad i = C \frac{de}{dt}$$

$$v_s - v_e \approx v_s = Ri'$$

Donc :

$$v_s = -RC \frac{de}{dt}$$

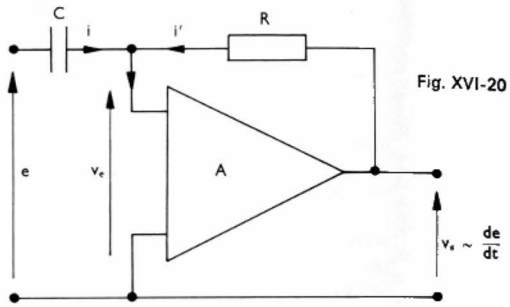


Fig. XVI-20

Le signal de sortie est proportionnel à la dérivée du signal d'entrée par rapport au temps.

Alors que le montage intégrateur est très souvent utilisé, le montage différenciateur est évité autant que possible par les électroniciens car il est instable. Pour le comprendre, il suffit de comparer les transmittances des deux montages en régime sinusoïdal permanent. La transmittance de l'intégrateur est égale à :

$$\underline{A}'_{ve} = \frac{\underline{V}_s}{\underline{E}} = \frac{-1}{jRC\omega}$$

tandis que celle du différenciateur est : $\underline{A}'_{ve} = -jRC\omega$.

Dans le premier cas, l'amplification décroît régulièrement lorsque la fréquence à transmettre augmente (diminution de 6 dB quand ω double) ; la *bande passante du montage est donc très réduite* et l'amplificateur est peu sensible aux bruits parasites. Dans le second cas, au contraire, l'amplification est très grande aux fréquences élevées et les signaux parasites sont d'autant mieux transmis que leur fréquence est grande. De plus, des couplages parasites infimes entre l'entrée et la sortie, risquent de provoquer l'auto-oscillation du montage.

6.3. Applications des amplificateurs opérationnels. — Ils sont utilisés dans des calculateurs analogiques pour lesquels les grandeurs d'entrée sont des tensions proportionnelles aux nombres intervenant dans les calculs. Pour bien comprendre le principe du calcul analogique, prenons l'exemple de la résolution de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dv}{dt} + K_1 v + v' = 0$$

où v' représente une grandeur fonction du temps.

Nous cherchons donc la fonction v, connaissant v' et K_1 (constante). Supposons que v' puisse être représentée par une tension périodique fournie par un générateur approprié et, *provisoirement*, admettons qu'un autre générateur puisse fournir la tension $\frac{-dv}{dt}$. En appliquant cette tension à un intégrateur dont la constante de temps est $RC = \frac{1}{K_1}$, nous obtenons la tension $K_1 v$ (fig. XVI-21). Elle peut être additionnée à v' grâce à un second amplificateur opérationnel monté en additionneur ; celui-ci fournit donc le signal $-(K_1 v + v')$. Comme l'équation de départ s'écrit aussi :

$$\frac{dv}{dt} = -(K_1 v + v')$$

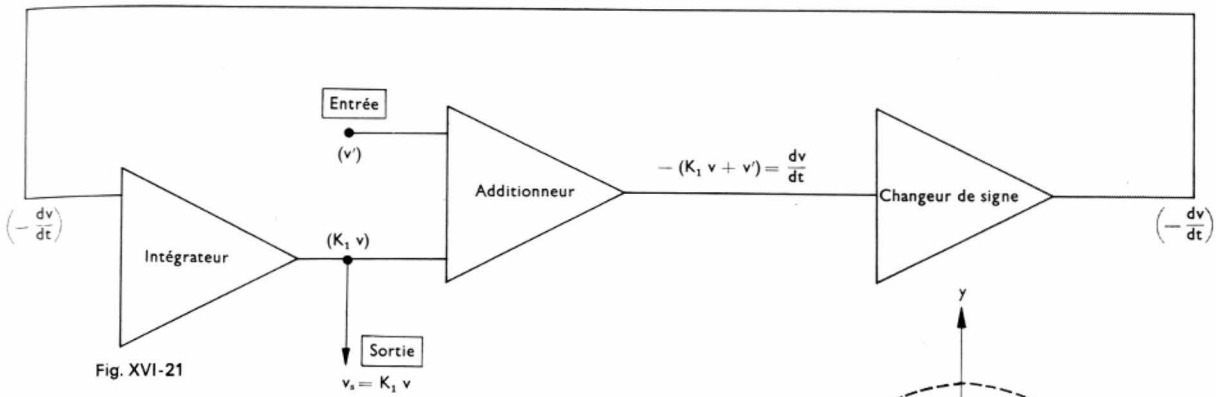


Fig. XVI-21

nous voyons que la tension fournie par l'additionneur représente au signe près la tension appliquée à l'entrée de l'intégrateur. Un générateur n'est donc pas nécessaire pour obtenir la tension représentant la dérivée $\frac{-dv}{dt}$: il suffit de relier la sortie de l'additionneur à l'entrée de l'intégrateur à travers un changeur de signe (fig. XVI-22). La solution v de l'équation proposée est représentée par la tension de sortie de l'intégrateur (elle est proportionnelle à v). Cette tension est enregistrée sur l'écran d'un oscillographe ou relevée au moyen d'un traceur de courbes.

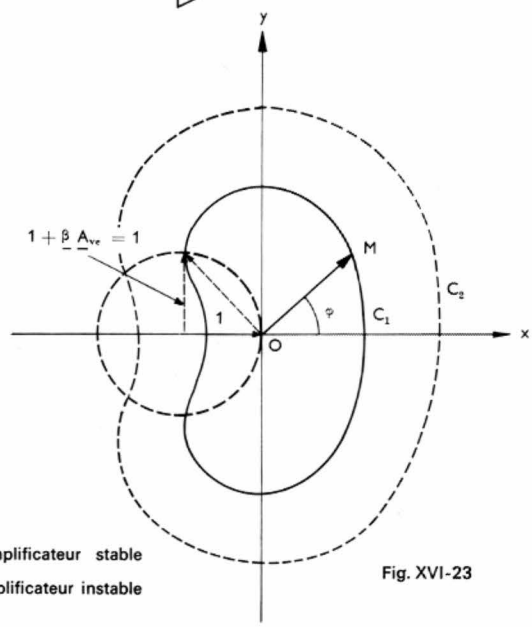
Si des conditions initiales sont imposées pour la résolution de problèmes analogues à celui qui vient d'être étudié, il est possible d'en tenir compte en communiquant une charge initiale aux condensateurs des intégrateurs, ou en faisant passer des courants continus dans les résistances d'entrée des additionneurs.

La résolution de toutes les équations différentielles linéaires est très simple par ce procédé. La résolution des équations non linéaires impose l'utilisation de circuits *multiplicateurs*, c'est-à-dire qui permettent d'effectuer l'opération suivante : $v_s = K\, v_{s1} \cdot v_{s2}$.

Ces circuits, assez complexes, mettent en œuvre la non-linéarité de certaines caractéristiques des transistors ou parfois l'*effet Hall* (V. chap. 6).

7. STABILITÉ DES SYSTÈMES À CONTRE-RÉACTION

Dans l'étude qui précède, nous n'avons pratiquement jamais considéré ce qui se passe en dehors du domaine des fréquences moyennes. Or, pour une fréquence f, la réaction peut être positive et alors le système ne fonctionne plus en amplificateur. En effet, si à un signal d'entrée v'_e, de fréquence f, correspond un signal de sortie v_s ($\underline{V}_s = \underline{A}_{v0}\, \underline{V}_e$ avec $\underline{V}_e = \underline{V}'_e - \underline{V}_r$) tel que la tension de réaction v_r ($\underline{V}_r = \underline{\beta}\, \underline{A}_{v0}\, \underline{V}_e$) soit en phase avec v'_e et d'amplitude égale (ou supérieure) à cette d.d.p., le montage



C_1 : amplificateur stable

C_2 : amplificateur instable

Fig. XVI-23

régénère le signal d'entrée et dès lors, même si le signal v'_e appliqué initialement est supprimé, le fonctionnement n'est pas interrompu. Il faut bien voir que, lorsque ce fonctionnement est amorcé, si la tension à l'entrée est égale à v_e, l'amplificateur délivre une tension v_s entre ses bornes de sortie et, grâce au circuit de réaction, une tension v_e est ramenée à l'entrée : l'ensemble est devenu un *oscillateur*. Un tel système ne peut pas être normalement utilisé en amplificateur.

7.1. Critère de Nyquist. — Pour savoir si un amplificateur avec contre-réaction est stable ou instable, nous pouvons utiliser le critère de Nyquist. Au nombre complexe $\underline{\beta}\, \underline{A}_{ve}$, nous faisons correspondre un vecteur $\overrightarrow{OM}$ de module $\underline{\beta}\, \underline{A}_{ve}$ (à une échelle déterminée) et d'angle polaire égal à l'argument φ de ce nombre complexe (fig. XVI-23).

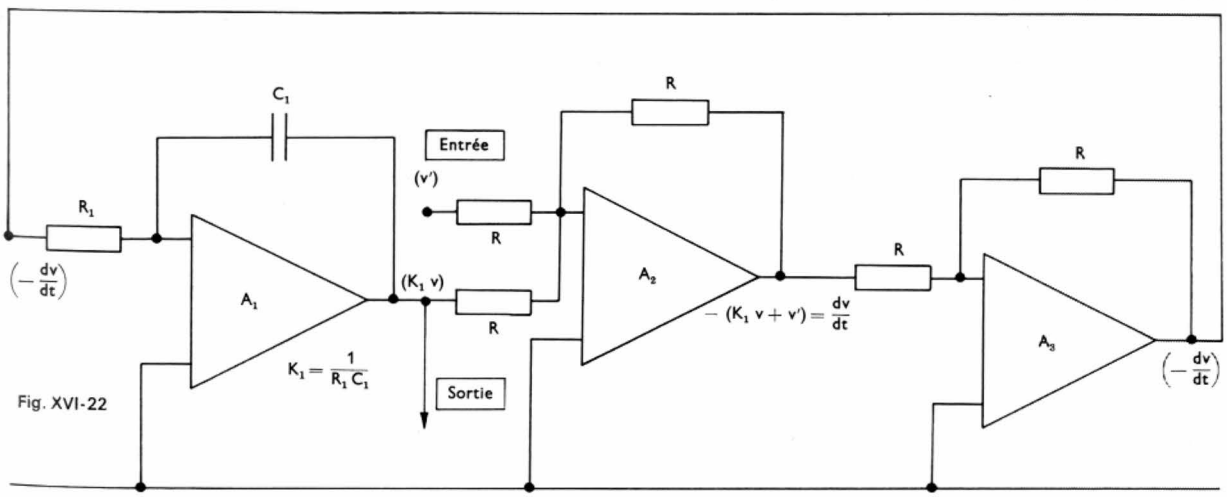


Fig. XVI-22

Lorsque la fréquence f varie, l'extrémité M de ce vecteur décrit en général une courbe fermée. L'amplificateur est stable si cette courbe n'entoure pas le point de coordonnées $(x = -1, \varphi = 0)$.

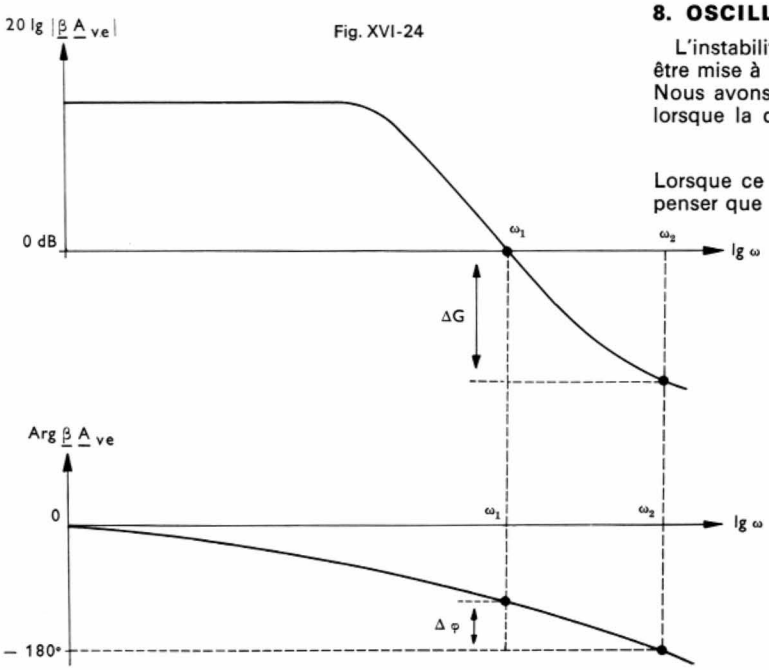
Rappelons qu'il y a réaction positive si la relation suivante est satisfaite :

$$|1 + \underline{\beta}\,\underline{A}_{ve}| \leqslant 1$$

Les points pour lesquels le premier membre de cette inégalité est égal à 1 ($|1 + \beta A_{ve}| = 1$) sont sur le cercle de centre $(-1, 0)$ et de rayon unité. Il y a donc réaction positive chaque fois que le point représentant l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{OM}$ se trouve à l'intérieur de ce cercle.

7.2. Marge de gain, marge de phase. — Si nous traçons les courbes représentatives des variations de l'expression $20 \lg |\underline{\beta}\,\underline{A}_{ve}|$ et de l'argument φ en fonction de $\lg \omega$ (diagrammes de Bode), nous mettons en évidence deux pulsations particulières (fig. XVI-24) :

Fig. XVI-24



— ω_1 est la pulsation pour laquelle :
$20 \lg |\underline{\beta}\,\underline{A}_{ve}| = 0$ dB ; le module du produit $\underline{\beta}\,\underline{A}_{ve}$ est alors égal à 1.

— ω_2 est celle pour laquelle $\varphi = \text{Arg}\,\underline{\beta}\,\underline{A}_{ve} = 180°$.

Si ω_1 est plus grand que ω_2, le module du nombre $\underline{\beta}\,\underline{A}_{ve}$ est plus grand que 1 lorsque l'argument φ est égal à 180°. Le point représentatif du diagramme de Nyquist est alors situé sur l'axe horizontal au-delà du point $(-1, 0)$: le *système est instable* (sauf rarissime exception).

Si ω_1 est inférieur ou égal à ω_2, le module de $\underline{\beta}\,\underline{A}_{ve}$ est au contraire plus petit que 1 lorsque $\varphi = 180°$: le *système est probablement stable*.

Ce critère n'est pas rigoureux au sens mathématique du terme ; il est cependant très utilisé car il suffit de s'assurer que ω_1 et ω_2 sont suffisamment écartés pour être raisonnablement sûr que le système est stable.

En général, les servomécaniciens considèrent qu'un système est stable lorsque :

— la *marge de gain*
$\Delta G = 20\,[\lg |\underline{\beta}\,\underline{A}_v|_{\omega = \omega_1} - \lg |\underline{\beta}\,\underline{A}_v|_{\omega = \omega_2}]$
est égale ou supérieure à 6 dB.

— la *marge de phase* $\Delta\varphi = (\pi - \varphi)_{\omega = \omega_1}$ est égale ou supérieure à $\frac{\pi}{4}$ rad.

8. OSCILLATEURS

L'instabilité des amplificateurs à réaction peut parfois être mise à profit pour réaliser des générateurs de signaux. Nous avons vu qu'un amplificateur devient un générateur lorsque la condition suivante est satisfaite (fig. XVI-25) :

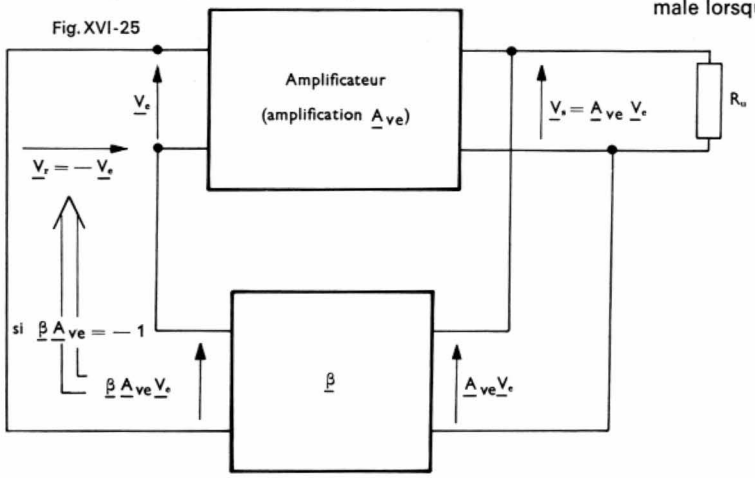
$$|\underline{\beta}\,\underline{A}_{ve}| \geqslant 1$$

Lorsque ce nombre est plus grand que 1, nous pourrions penser que le signal de sortie va tendre à augmenter indéfiniment ; en réalité, la non-linéarité de l'amplificateur limite très rapidement l'amplitude du signal de sortie. Ainsi apparaît la principale difficulté de réalisation d'un oscillateur sinusoïdal. Pour que le signal v_s ne soit pas distordu, il faut que $|\underline{\beta}\,\underline{A}_{ve}|$ soit très voisin de l'unité et pour que l'oscillation soit entretenue, ce nombre ne doit jamais devenir inférieur à 1.

Il y a donc un compromis à trouver pour obtenir une valeur de $|\underline{\beta}\,\underline{A}_{ve}|$ suffisamment proche de l'unité sans que les dérives de toutes natures de l'amplificateur entraînent une diminution de sa valeur au-dessous de 1. Par ailleurs, s'il faut que l'oscillation soit sinusoïdale, la condition précédente ne doit être réalisée que pour une seule fréquence f. L'amplificateur utilisé dans ce cas comprend obligatoirement un circuit sélectif qui peut être une combinaison de résistances et de condensateurs, ou un circuit bouchon comme nous allons le voir en étudiant quelques oscillateurs sinusoïdaux.

8.1. Oscillateur à pont de Wien. — Le circuit de Wien (fig. XVI-26) est un circuit sélectif. La tension de sortie dépend de la fréquence et son amplitude est maximale lorsque le produit $RC\omega$ est égal à 1. La valeur efficace

Fig. XVI-25



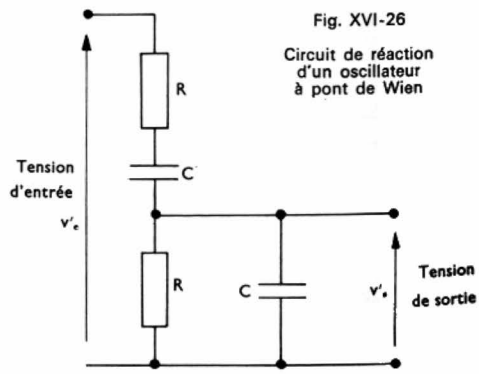
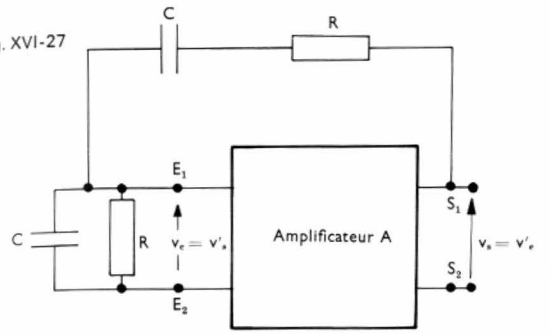


Fig. XVI-26
Circuit de réaction d'un oscillateur à pont de Wien

Fig. XVI-27



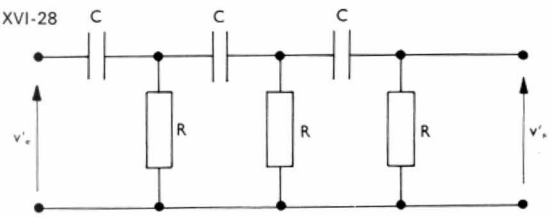
de la tension de sortie $V'_{s\ \text{eff}}$ est alors le tiers de la valeur efficace de la tension d'entrée $V'_{e\ \text{eff}}$ $\left(\frac{V'_{s\ \text{eff}}}{V'_{e\ \text{eff}}} = \frac{1}{3}\right)$ et les tensions v'_s et v'_e sont en phase.

Pour obtenir un oscillateur sinusoïdal, nous pouvons associer ce circuit à un amplificateur A ayant une amplification $\underline{A}_{v0}$ un peu supérieure à $+ 3$ (fig. XVI-27). Un tel amplificateur peut être constitué par l'association d'un transistor à effet de champ (intéressant ici pour sa grande impédance d'entrée) et d'un transistor à jonctions. Comme l'amplification de l'ensemble est beaucoup trop grande, nous pouvons la ramener à une valeur voisine de $+ 3$ en utilisant une seconde boucle de contre-réaction. La variation de la fréquence du signal obtenu peut être réalisée en utilisant simplement un condensateur variable à deux cages. Cet oscillateur est utilisé dans des générateurs de signaux sinusoïdaux dont les fréquences peuvent être comprises entre 10 Hz et 1 MHz.

8.2. Oscillateur à déphasage ou phase-shift. — Le circuit représenté sur la figure XVI-28 permet d'obtenir un déphasage de 180° entre les tensions v'_s et v'_e lorsque la pulsation satisfait la condition suivante : $RC\omega\sqrt{6} = 1$. La valeur complexe de la tension de sortie est alors égale à :

$$\underline{V}'_s = -\frac{1}{29}\underline{V}'_e$$

Fig. XVI-28



Pour réaliser un oscillateur utilisant ce circuit, il faut disposer d'un amplificateur ayant une amplification de 30 tandis que le déphasage entre les tensions de sortie et d'entrée est égal à 180° : ainsi, le signal, ramené à l'entrée par le réseau de réaction, est bien en phase avec un signal d'entrée fictif qui donnerait le même signal de sortie. Un transistor à effet de champ peut permettre d'obtenir ce résultat à condition qu'il ait une transconductance suffisante. Avec un transistor à jonctions, le problème est un peu plus compliqué du fait de la très faible impédance d'entrée (perturbation pour le réseau de réaction au niveau de la troisième cellule) et du fait de la résistance de sortie de l'étage (modification au niveau de la première cellule). La variation de fréquence est également un peu plus difficile à obtenir puisqu'il faut modifier simultanément trois éléments du circuit.

8.3. Oscillateurs à circuit résonnant. — Le circuit résonnant peut être placé dans le circuit de drain d'un transistor à effet de champ T monté en amplificateur sélectif (fig. XVI-29). Un enroulement auxiliaire L_2 permet d'appliquer une partie du signal de sortie dans le circuit d'entrée. Pour ramener le signal de réaction en phase avec le signal d'entrée fictif qui donnerait la même tension de sortie $\underline{v}_s$ (l'amplificateur introduit un déphasage de 180°), il faut connecter correctement L_2 : selon la façon dont cette

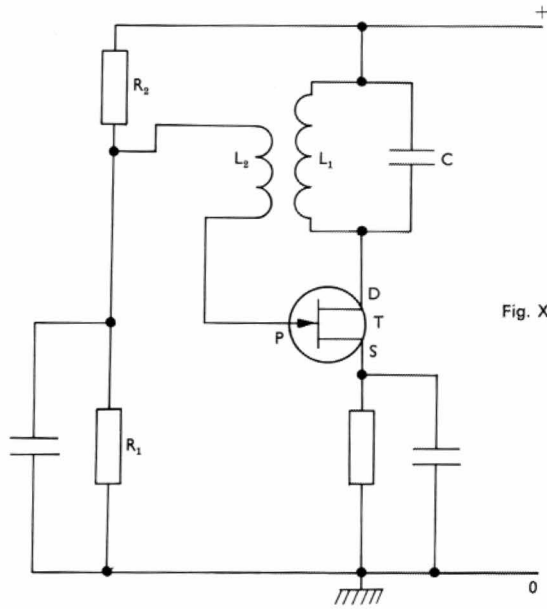
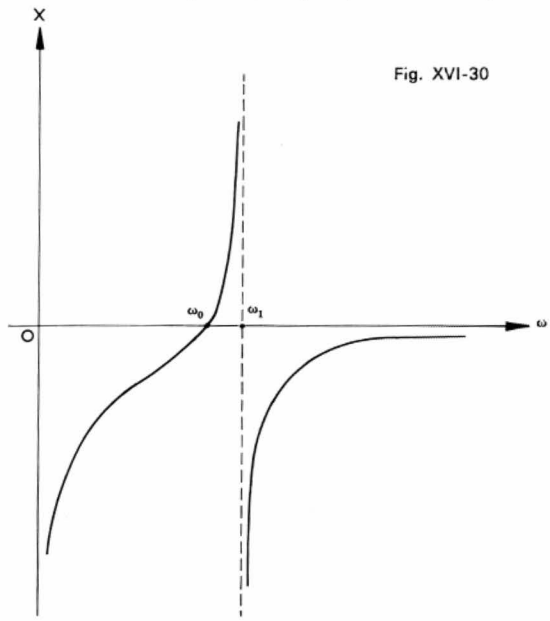


Fig. XVI-29

inductance est connectée dans le circuit de la porte de T, la tension ramenée est soit en phase, soit en opposition de phase avec le signal d'entrée fictif. La condition d'amplitude fait intervenir les paramètres du T.E.C. et le coefficient de couplage de L_1 avec L_2. L'inconvénient principal de ce montage tient à son extrême sensibilité à la charge qui doit être placée en parallèle avec le circuit bouchon L_1-C dont l'impédance est très grande à la résonance.

8.4. Oscillateurs utilisant un cristal piézoélectrique. — Une lame taillée dans un cristal piézoélectrique est utilisée comme diélectrique d'un condensateur ; pour cela, deux de ces faces opposées sont métallisées. Si nous appliquons entre les armatures de ce condensateur une tension alternative sinusoïdale de fréquence variable, nous constatons l'apparition de vibrations mécaniques ; il y a résonance au voisinage d'une fréquence f, appelée *fréquence propre du cristal*. C'est l'*effet piézoélectrique* qui est d'ailleurs réversible : s'il y a vibration mécanique, nous pouvons mettre en évidence une d.d.p. entre les armatures. Dans un circuit électrique, un tel cristal (par exemple, du quartz) se comporte comme un circuit oscillant (V. t. 1, Électricité, chap. 32) ayant un facteur de qualité Q atteignant plusieurs milliers (avec les meilleurs circuits bouchons le facteur Q ne dépasse pas quelques centaines). La réac-

Fig. XVI-30



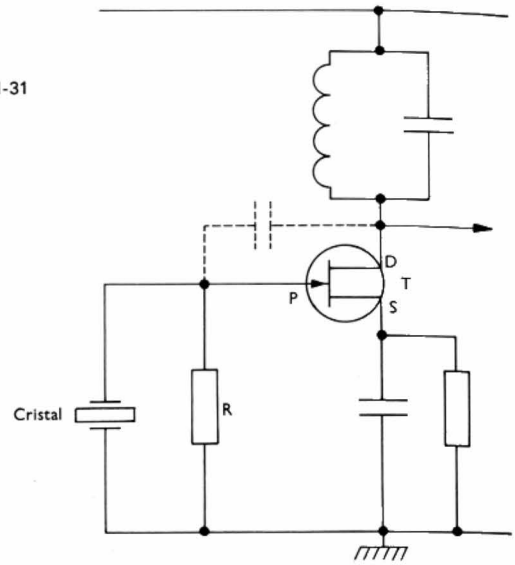
tance X (partie imaginaire de l'impédance du cristal) varie très rapidement au voisinage de la résonance ; nulle (par définition) à la résonance, elle devient inductive et tend rapidement vers l'infini lorsque la fréquence augmente légèrement. Elle change ensuite brusquement de signe, devient donc capacitive et décroît lentement (fig. XVI-30. V. page précédente). L'écart relatif entre les pulsations ω_1 et ω_0 est à peine de quelques pour cent.

La présence d'un circuit aussi sélectif dans un oscillateur garantit une précision excellente de la fréquence du signal produit. La stabilité de la fréquence est excellente car le cristal est insensible aux variations des paramètres électriques du circuit et très peu sensible à la température.

De nombreuses sortes d'oscillateurs à cristal piézoélectrique sont utilisés. Le montage de la figure XVI-31 est un exemple. Le cristal est employé ici comme un circuit oscillant complémentaire ; il est peu amorti puisque le circuit porte-source du transistor à effet de champ a une impédance très élevée. De même, la résistance R qui est connectée entre la porte et la masse et qui sert à fixer le potentiel de repos de la porte, est très grande (10 MΩ).

Les oscillateurs à cristal sont surtout utilisés en radioélectricité ; ils permettent d'obtenir des signaux dont les fréquences sont comprises entre une dizaine de kilohertz et quelques dizaines de mégahertz.

Fig. XVI-31



CHAPITRE XVII

APPLICATION DES SEMICONDUCTEURS EN COMMUTATION

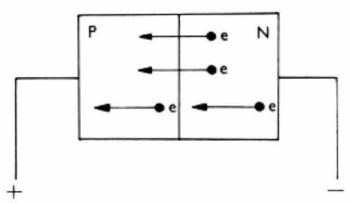
Les diodes et les transistors peuvent être utilisés dans les circuits de commutation ; ces éléments jouent alors le rôle d'interrupteurs plus ou moins parfaits comme nous allons le voir. Leurs performances sont cependant très largement suffisantes pour permettre de concrétiser les nombreuses fonctions logiques mises en œuvre dans les automatismes. Dans ce domaine d'ailleurs, les perfectionnements apportés à la fabrication des semiconducteurs et, en particulier, l'amélioration de la fiabilité des circuits ont ouvert d'immenses perspectives.

1. DIODE À JONCTION EN COMMUTATION

Nous avons déjà étudié la diode à jonction (V. chap. 7) et nous devons préciser maintenant quel est son comportement lors de changements d'état brusques.

1.1. Passage de l'état passant à l'état bloqué. — Une jonction sous tension directe est traversée par un grand nombre de porteurs (fig. XVII-1) ; si elle est brusquement soumise à une tension inverse, elle reste passante pendant un certain temps. Les électrons se trouvant dans la zone P peuvent se recombiner avec des trous mais un grand nombre d'entre eux retournent dans la zone N ; de même, la plupart des trous qui se trouvent dans la zone N reviennent dans la zone P : un courant inverse décroissant circule pendant un temps très court après l'application de la tension inverse du fait du retour de ces porteurs majoritaires dans leur zone d'équilibre. Pendant un court instant, l'intensité de ce courant inverse est très supérieure à celle du courant inverse normal de la jonction. Le temps nécessaire pour que la diode recouvre une résistance inverse élevée est appelé *temps de recouvrement inverse;* il est noté $t_{s\ off}$.

Fig. XVII-1



1.2. Passage de l'état bloqué à l'état passant. — Sous tension inverse une jonction est traversée par un courant très faible. Si nous soumettons brusquement la diode à une tension directe, le courant direct n'atteint pas instantanément sa valeur maximale mais il croît progressivement d'une valeur nulle jusqu'à un maximum, au fur et à mesure que les porteurs majoritaires se mettent en mouvement. Ce temps d'établissement du courant direct est appelé *temps de recouvrement direct* et est noté $t_{s\ on}$. Pour une diode de commutation $t_{s\ off}$ et $t_{s\ on}$ sont voisins de 10 nanosecondes.

Les temps de recouvrements direct et inverse peuvent être mis en évidence au moyen d'un montage comportant une diode polarisée dans le sens direct par une pile (fig. XVII-2). Une impulsion bloquante est appliquée à instant t_1 au moyen d'un générateur G en parallèle avec la pile ; elle est supprimée à un instant t_2 (sa durée est égale à : $t_p = t_2 - t_1$). Les courbes représentatives du courant i dans la diode et de la chute de tension Ri dans la résistance R en fonction du temps montrent l'influence des régimes transitoires au passage d'un état à un autre (fig. XVII-3).

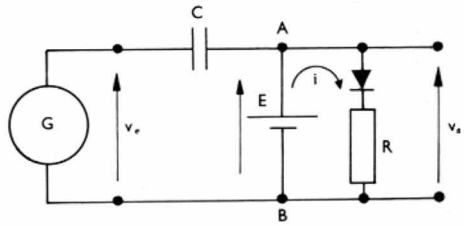
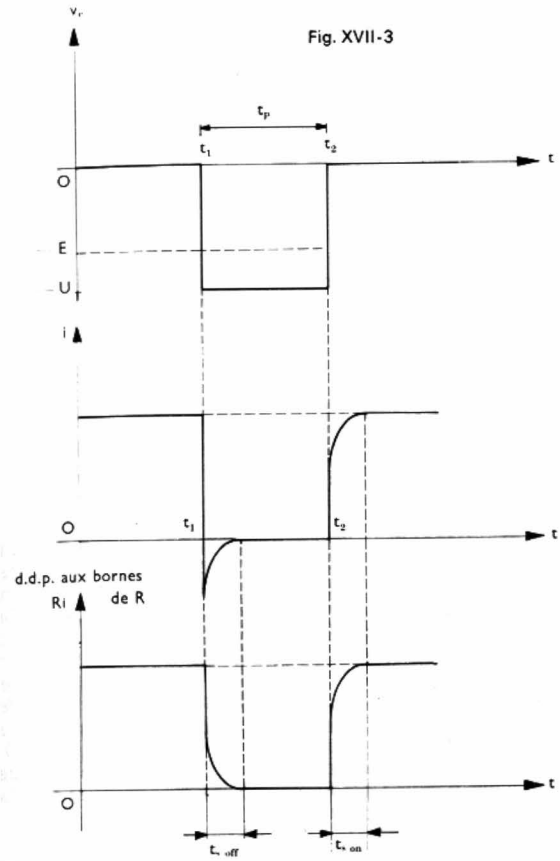


Fig. XVII-2

L'emploi des diodes à jonction en commutation est limité par les temps de recouvrements direct et inverse. Ainsi, une impulsion appliquée dans le sens direct ou dans le sens inverse ne sera transmise (au moins partiellement) que si sa durée t_p est au moins égale à $t_{s\ off}$ ou à $t_{s\ on}$. Autre conséquence : la transmission d'un train d'impulsions périodiques de période T est possible si T est supérieure à la somme $(t_{s\ off} + t_{s\ on})$.

Fig. XVII-3



Les diodes tunnel et les diodes pour commutation rapide (diodes *snap-off*) sont très utilisées en commutation à cause de leur temps de recouvrement très bref, voisin de la nanoseconde.

2. TRANSISTOR EN COMMUTATION

2.1. Fonction relais. — Un transistor employé en commutation peut être considéré comme un *relais statique* (fig. XVII-4). Si son courant de base est nul (interrupteur K ouvert), la charge R n'est traversée que par un courant très faible et pratiquement, toute la tension V_{CC} est appliquée entre les bornes C et E du transistor : on dit qu'il est à l'*état bloqué*. Si l'interrupteur K est fermé, un courant I_C passe dans la charge R, la chute de tension entre C et E est faible et la presque totalité de la tension V_{CC} est appliquée à la charge R : le transistor est à l'*état conducteur*.

Pour ces deux états, les points de fonctionnement du transistor se trouvent sur la *droite de charge* (V. chap. 8) d'équation :

$$I_C = \frac{V_{CC}}{R} - \frac{V_{CE}}{R}$$

Lorsque le courant de base est nul, le point de fonctionnement est en P sur la caractéristique correspondant à $I_B = 0$ (fig. XVII-5). Quand K est fermé, le point de fonctionnement se trouve en Q sur la caractéristique correspondant au courant de base choisi. La puissance dissipée par le transistor étant sensiblement égale au produit de la tension V_{CE} et de l'intensité I_C du courant de collecteur correspondant, il faut rapprocher P et Q des axes des coordonnées pour que ce produit soit faible aussi bien à l'état bloqué qu'à l'état passant. En prenant un courant I_B suffisamment grand, le point Q vient en Q' sur la partie commune aux différentes caractéristiques : le courant I_C atteint la valeur maximale compatible avec la charge R imposée : le transistor est dit *saturé* (pratiquement, dans ces conditions I_C est sensiblement égal à $\frac{V_{CC}}{R}$). Le point

Fig XVII-4a

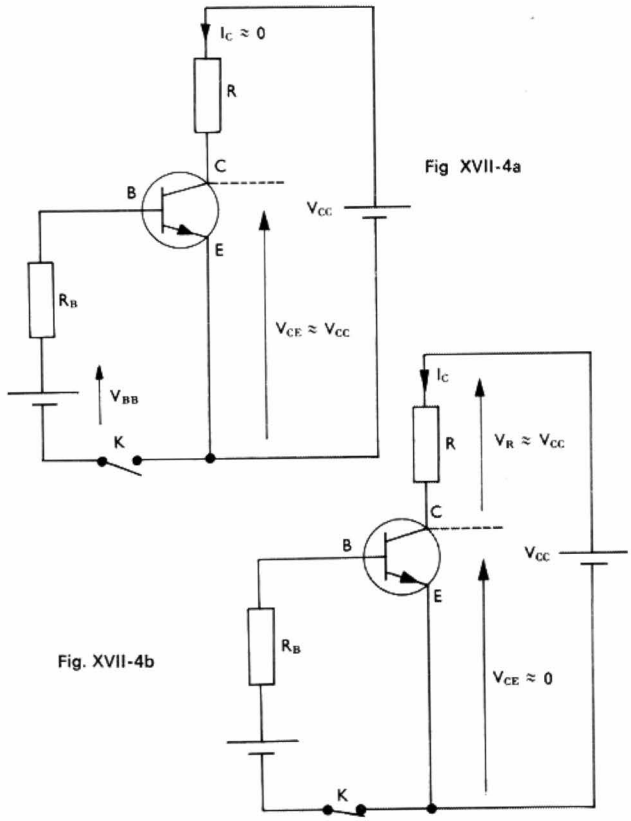
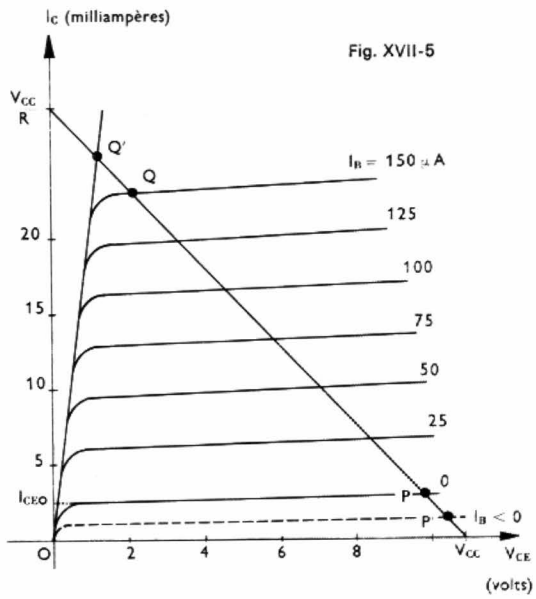


Fig. XVII-4b

P peut être placé le plus près possible de l'axe des abscisses en choisissant un transistor à très faible courant résiduel, comme un transistor au silicium. Avec un transistor au germanium, il est parfois nécessaire de placer la jonction base-émetteur sous tension inverse ; elle est alors traversée par un courant I_B négatif auquel correspond une caractéristique située entre la courbe $I_B = 0$ et l'axe des abscisses. Le point de fonctionnement vient alors en P'.

Remarque : Cela permet de distinguer divers régimes de fonctionnement pour un transistor. Au *fonctionnement normal* étudié lors de l'amplification (V. chap. 9), nous pouvons donc ajouter le *fonctionnement bloqué* et le *fonctionnement saturé*. Par ailleurs, en commutation un fonctionnement dit *inversé* est parfois utilisé : les rôles du collecteur et de l'émetteur sont alors inversés et les jonctions se trouvent polarisées dans le sens contraire du fonc-

Fig. XVII-5



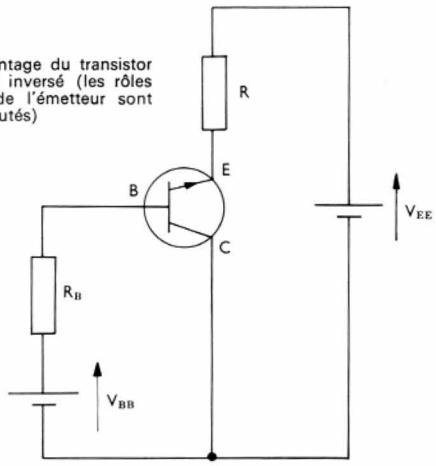


Fig. XVII-6 — Montage du transistor en fonctionnement inversé (les rôles du collecteur et de l'émetteur sont permutés)

tionnement normal (fig. XVII-6). Le courant résiduel et la tension de déchet sont très faibles dans ce montage et il en est de même de la puissance dissipée en commutation. L'amplification en courant β' du transistor est inférieure, pour ce régime de fonctionnement, à β (amplification en courant en fonctionnement normal), pour des raisons de dissymétrie entre collecteur et émetteur.

Ces quatre régimes de fonctionnement sont résumés dans le tableau suivant :

Fonctionnement	Normal	Bloqué	Saturé	Inversé
Jonction émetteur base sous tension	directe	inverse	directe	inverse
Jonction collecteur base sous tension	inverse	inverse	directe	directe
Résultats (transistor NPN) . . .	$I_C = \beta I_B$ $V_{CE} > 0$	$I_C \approx 0$ $V_{CE} = V_{CC}$	$I_C < \beta I_B$ $V_{CE} \approx 0$	$I_E = \beta' I_B$ $V_{CE} < 0$

2.2. Commutation sans blocage ni saturation. — En commutation, un transistor peut être utilisé pour amplifier un signal impulsionnel; nous allons donc voir le fonctionnement d'un étage émetteur commun lorsque des impulsions rectangulaires sont appliquées à l'entrée de l'étage (fig. XVII-7).

En l'absence de signal, les courants de base et de collecteur sont égaux à I_{B0} et I_{C0} ; en présence d'une impulsion de courant i_B ils deviennent $(I_{B0} + i_B)$ et $(I_{C0} + i_C)$ avec

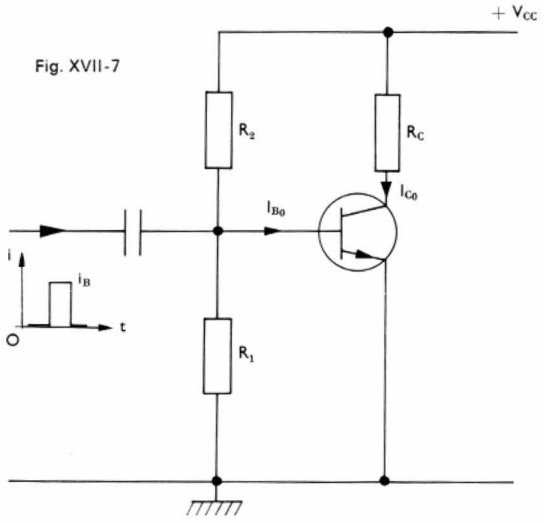


Fig. XVII-7

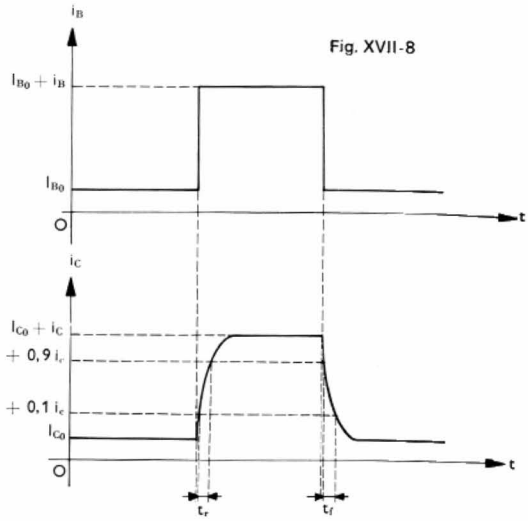


Fig. XVII-8

$i_C = \beta i_B$. Cependant ils ne prennent pas immédiatement cette valeur; quand nous appliquons l'impulsion i_B les porteurs diffusent à travers la base, et nous observons un *temps de montée* t_r (fig. XVII-8) ; en pratique t_r est le temps qui s'écoule entre l'instant où l'intensité du courant collecteur est égale à $(I_{C_0} + 0,1\ i_C)$ et celui où elle est égale à $(I_{C_0} + 0,9\ i_C)$. De même, à la suppression de l'impulsion de courant base correspond un *temps de descente* t_f égal au temps qui sépare les instants où le courant passe de la valeur $(I_{C_0} + 0,9\ i_C)$ à $(I_{C_0} + 0,1\ i_C)$. Nous avons évidemment supposé que la durée T de l'impulsion d'entrée est suffisamment grande pour que la valeur $(I_{C_0} + i_C)$ soit atteinte.

2.3. Commutation avec blocage et saturation. — Dans un montage émetteur commun (fig. XVII-9), lorsque le courant de base est nul et en l'absence de signal de commande, le courant collecteur de repos est égal au courant résiduel I_{CEO}; celui-ci est en général très faible et nous pouvons le considérer comme nul : le transistor est bloqué. Lors de l'application d'un signal d'entrée impulsionnel, le transistor conduit ; si le courant de base est suffisamment grand, le transistor est saturé. Le courant de collecteur ne prend pas instantanément sa valeur maximale I_{Cm} : le temps qui s'écoule lorsque i_C passe de 0 à 10 % de I_{Cm} est appelé *temps de délai* t_d, et celui qui est nécessaire pour que i_C passe de 10 % à 90 % de I_{Cm} est appelé *temps de montée* t_r (de l'anglais *rise time*). Il est admis qu'à l'issue du temps de montée du signal, le courant est suffisant pour faire fonctionner le dispositif commandé par le transistor.

À la suppression de l'impulsion de courant de base, le transistor ne passe pas instantanément de la saturation au blocage. En effet, dans l'état saturé, les deux jonctions du transistor sont polarisées dans le sens direct ; pour un

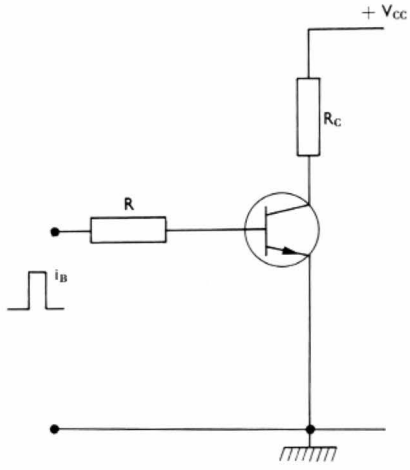


Fig. XVII-9

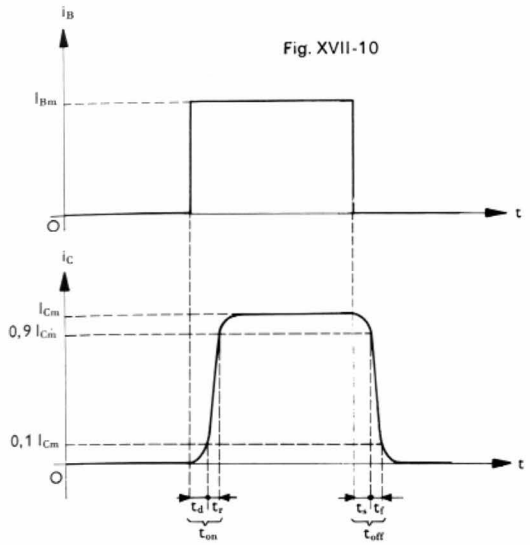


Fig. XVII-10

transistor NPN, cela signifie que les électrons sont envoyés dans la base aussi bien à partir de la zone de collecteur que de la zone d'émetteur. Une importante accumulation d'électrons se produit dans la base et cela entraîne une diminution de l'effet du dopage ; tout se passe alors comme si le taux d'impuretés dans la base était bien supérieur à la valeur pour laquelle le corps présente des propriétés semiconductrices. Aussi, lorsque l'impulsion d'entrée prend fin, les électrons « stockés » dans la base retournent-ils dans la zone de collecteur et prolongent le courant de collecteur. Ce temps supplémentaire de passage du courant est appelé *temps de stockage* t_s ; il est égal au temps qui sépare l'instant de fin de l'impulsion et l'instant où le courant de collecteur est égal à 90 % de I_{Cm}. Faisant suite au temps de stockage, le *temps de descente* t_f (de l'anglais *fall time*) est égal au temps nécessaire pour que l'amplitude de i_C passe de 90 % de I_{Cm} à 10 % de I_{Cm} (fig. XVII-10).

Les quatre intervalles de temps que nous venons de définir permettent de caractériser un transistor : ce sont ses *paramètres de commutation*.

Exemples de caractéristiques pour un transistor dit pour commutation rapide :

$t_d = 20$ ns, $t_r = 60$ ns, $t_s = 30$ ns, $t_f = 140$ ns.

À ces caractéristiques sont souvent ajoutés les deux intervalles de temps suivants :

— le *temps de fermeture* : $t_{on} = t_d + t_r$ (en anglais *turn-on time*) ;

— le *temps d'ouverture* : $t_{off} = t_s + t_f$ (en anglais *turn-off time*).

De leurs valeurs dépendent la durée minimale et la période minimale des impulsions à transmettre.

3. COMMUTATION ET ALGÈBRE DE BOOLE

La fonction commutation est fondamentale dans les automatismes complexes qui sont de plus en plus utilisés. Pour bien comprendre ces derniers, nous donnerons d'abord quelques rappels d'algèbre de Boole, et nous étudierons ensuite les fonctionnements des principaux montages mis en œuvre dans les circuits de commutation. Pour un grand nombre de dispositifs électriques ou électroniques utilisés dans les circuits de commutation, deux états de fonctionnement, et deux seulement, sont possibles :

— transistor bloqué ou passant ;

— interrupteur ouvert ou fermé ;

— relais excité ou non...

En affectant conventionnellement **la valeur 1** à l'un de ces états et **la valeur 0** à l'autre, il est possible d'appliquer les règles de l'algèbre de Boole à l'étude de ces circuits.

En effet, dans cette algèbre, les grandeurs considérées, y compris les fonctions, ne peuvent prendre que deux valeurs, soit 1, soit 0, et il est facile de faire correspondre l'état d'un circuit à la valeur d'une variable booléenne.

L'état d'un système qui dépend d'un certain nombre de conditions peut ainsi être défini à l'aide d'une équation (équation logique ou de Boole) et, réciproquement, à toute relation logique il est possible de faire correspondre un schéma électrique. L'utilisation des règles de cette algèbre binaire permet de transformer et de simplifier les équations logiques, d'éliminer les éléments redondants et ainsi de trouver des schémas simples.

Les principales opérations de l'algèbre de Boole sont la négation, la somme logique et le produit logique. (V. t. 2, Informatique, chap. 2). Pour la suite, nous désignons par *a* et *b* deux nombres ne pouvant prendre que les valeurs 0 ou 1.

3.1. Somme logique (ou booléenne) ou réunion. — La somme logique de deux nombres *a* et *b* est représentée symboliquement par l'égalité : $s = a + b$. Cette loi de composition se définit à l'aide du tableau suivant :

a	*b*	*s*
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

La somme *s* est égale à 1 si au moins l'une des variables est égale à 1 (*a* ou *b*). La somme booléenne correspond à la proposition logique *OU inclusif*.

3.2. Produit (logique ou booléen) ou intersection. — Le produit logique de deux nombres *a* et *b* est représenté symboliquement par l'égalité : $p = a.b$. Cette loi de composition est définie à l'aide du tableau suivant :

a	*b*	*p*
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Le produit *p* est égal à 1 lorsque *a* et *b* sont égaux à 1. Le produit logique correspond à la proposition logique *ET*.

3.3. Négation. — La négation *NON a*, ou *a complémenté* ou encore *a barré*, est un nombre noté $\bar{a}$ qui est égal à 1 quand *a* est égal à 0 et inversement.

a	$\bar{a}$
0	1
1	0

3.4. Principaux résultats. — À l'aide des tableaux précédents il est facile de vérifier les résultats suivants :

$a + 0 = a$ $\qquad$ $a.0 = 0$
$a + 1 = 1$ $\qquad$ $a.1 = a$
$a + a = a$ $\qquad$ $a.a = a$
$a + \bar{a} = 1$ $\qquad$ $a.\bar{a} = 0$
$a + ab = a$ $\qquad$ $a.(a + b) = a$
$\bar{\bar{a}} = a$

Par exemple, pour vérifier la relation $a + \bar{a} = 1$, il faut considérer le cas où $a = 1$ puis le cas où $a = 0$. Dans les deux cas le premier membre est égal à $(1 + 0)$ soit à 1.

3.5. Théorèmes de Morgan. — Certains théorèmes permettent de simplifier les relations logiques. Pour les vérifier, il faut opérer comme au paragraphe précédent.

— Le complément d'une somme est égal au produit des compléments des termes de cette somme :

$$\overline{a + b} = \bar{a}.\bar{b}$$

— Le complément d'un produit est égal à la somme des compléments des facteurs de ce produit :

$$\overline{a.b} = \bar{a} + \bar{b}.$$

Ces résultats peuvent être généralisés et permettent d'énoncer deux lois :

— Pour écrire la négation d'une expression booléenne nous pouvons remplacer chaque terme par sa négation, le signe de la somme $(+)$ par le signe de la multiplication $(\times$ ou $.)$ et inversement.

Exemple : $\overline{a + (b.c)} = \bar{a}.(\bar{b} + \bar{c})$

— De toute identité entre expressions booléennes nous pouvons déduire une nouvelle identité en remplaçant le signe de la somme par le signe de la multiplication et inversement.

Exemple : $a.(a + b) = a \Longleftrightarrow a + (a.b) = a$

4. CIRCUITS DE COMMUTATION

Conventions. — Un circuit de commutation comporte généralement une ou plusieurs *entrées* et une *sortie* (fig. XVII-11). Pour chacune de ces bornes deux états sont possibles, et deux seulement : l'un est appelé **état 1** et l'autre **état 0.** Par exemple, en logique dite *positive* une borne est dans un état 1 lorsque son potentiel (par rapport à un point de référence, la masse souvent) est positif et est supérieur à une valeur déterminée (+ 6 V ou + 15 V, par exemple), et elle est dans l'état 0 lorsque son potentiel est voisin de zéro volt. En logique dite *négative* l'état 1 correspond à un potentiel négatif inférieur à une valeur choisie arbitrairement (— 6 V ou — 15 V) et l'état 0 à un potentiel sensiblement nul. Dans tous les cas, lorsqu'une borne, par exemple, une entrée e_1, est dans l'état 1, nous écrirons symboliquement $e_1 = 1$, et lorsqu'elle est dans l'état 0 : $e_1 = 0$. Ces conventions permettent d'appliquer directement les résultats de l'algèbre de Boole à un grand nombre de circuits de commutation et nous allons voir à présent quelques montages pouvant représenter les principales opérations de cette algèbre.

Dans la suite, nous ne considérons que des circuits utilisables en logique positive ; les résultats et les raisonnements peuvent être facilement adaptés aux circuits employés en logique négative.

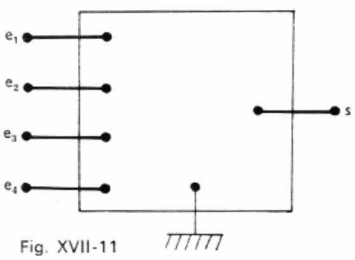


Fig. XVII-11

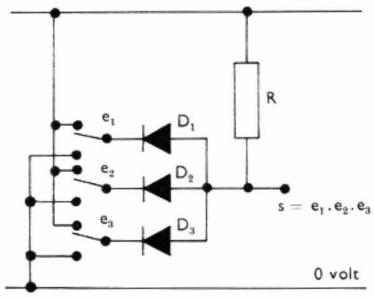


Fig. XVII-13a

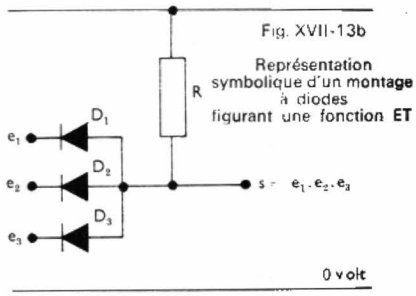


Fig. XVII-13b

Représentation symbolique d'un montage à diodes figurant une fonction ET

4.1. Fonction NON. — Dans le montage de la figure XVII-12, si l'entrée e est dans l'état 1, le transistor est saturé et la tension de sortie $V_s = V_{CE}$ est sensiblement nulle (V. ci-dessus § 2.1). Nous pouvons donc écrire :

$$e = 1 \Rightarrow s = 0$$

Inversement si e est dans l'état 0, le transistor est bloqué et la tension V_s est égale à V_{CC} : s est dans l'état 1. Donc,

$$e = 0 \Rightarrow s = 1$$

Dans les deux cas nous pouvons écrire symboliquement : $s = \bar{e}$. La sortie est toujours dans l'état contraire de l'entrée ; l'ensemble concrétise donc bien la *fonction NON* ou *fonction complément.*

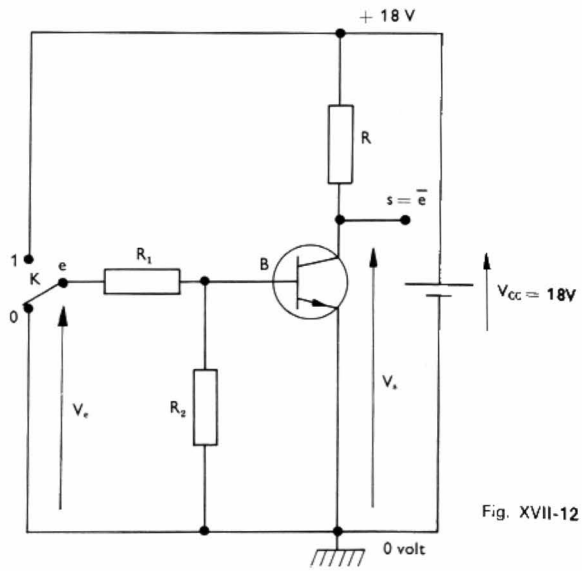


Fig. XVII-12

4.2. Circuits à diodes. — Aux produits et aux sommes logiques nous pouvons faire correspondre des circuits à diode. Pour la *fonction ET* (fig. XVII-13 a et b) la sortie est effectivement dans l'état 1 si les trois entrées sont *simultanément* dans l'état 1 ; en revanche, si l'une des entrées (par exemple e_3) est dans l'état zéro, une diode (D_3 ici) est passante et le potentiel de s est sensiblement égal à zéro (la chute de tension dans la diode D_3 est négligeable). Avec une fonction *ET* à trois entrées nous écrivons symboliquement :

$$s = e_1 . e_2 . e_3$$

la sortie s est dans l'état 1 si e_1 et e_2 et e_3 sont dans l'état 1.

Pour la *fonction OU* (fig. XVII-14 a et b), il suffit qu'une

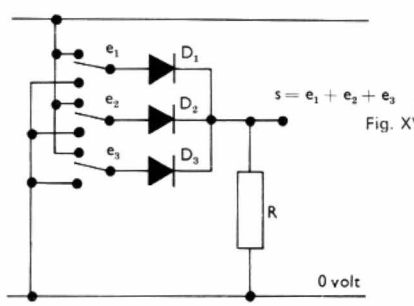


Fig. XVII-14a

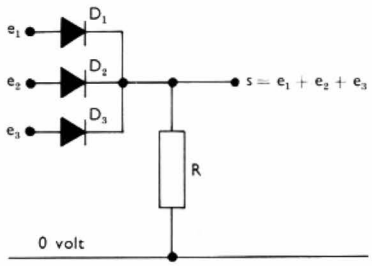


Fig. XVII-14b

Représentation symbolique d'un montage à diodes figurant une fonction OU

entrée soit dans l'état 1 (e_1, par exemple) pour qu'une diode (D_1 ici) soit passante. En négligeant la chute de tension dans la diode, nous voyons que la sortie est alors dans l'état 1. Avec une fonction *OU* à trois entrées nous pouvons donc écrire :

$$s = e_1 + e_2 + e_3$$

et avec le montage, comme avec cette relation, s est égal à 1 si e_1 ou e_2 ou e_3 sont dans l'état 1.

4.3. Circuits à diodes et à transistors. — En associant diodes et transistors, nous pouvons réaliser la fonction $\overline{\text{ET}}$ (*ET* complémenté) appelée aussi NAND (de l'anglais *no and*, non et ; fig. XVII-15) ou encore la fonction $\overline{\text{OU}}$ (*OU complémenté*), appelée aussi NI ou NOR, (de l'anglais *no or*, non ou ; fig. XVII-16).

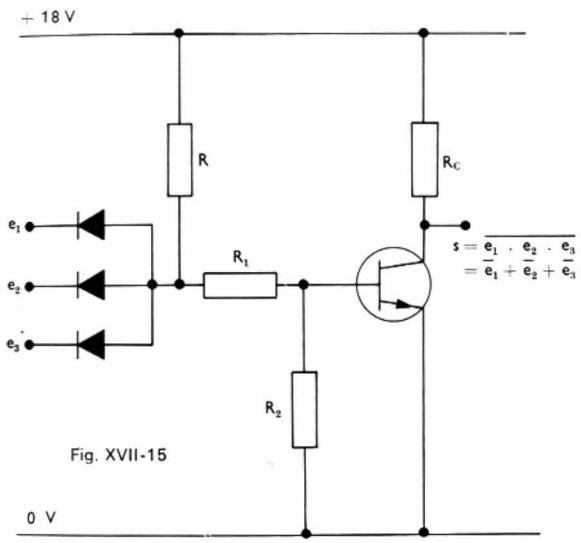


Fig. XVII-15

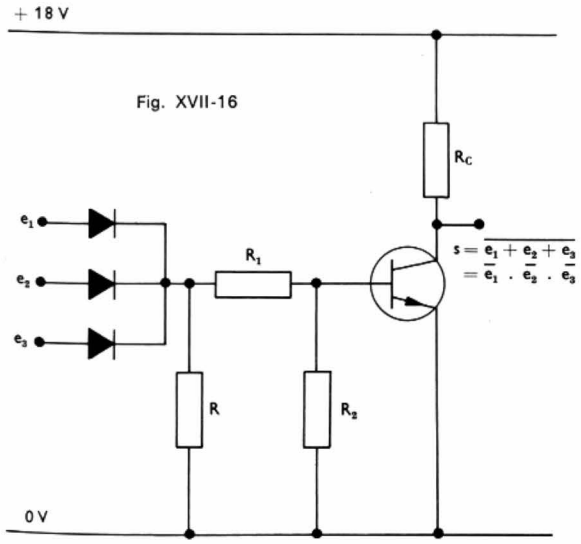


Fig. XVII-16

Fonction $\overline{\text{ET}}$: $s = \overline{e_1 . e_2 . e_3} = \overline{e_1} + \overline{e_2} + \overline{e_3}$ (Théorème de Morgan).

Fonction $\overline{\text{OU}}$: $s = \overline{e_1 + e_2 + e_3} = \overline{e_1} . \overline{e_2} . \overline{e_3}$. (Théorème de Morgan).

Pour répondre à des critères d'amélioration précis comme :

— la réduction de l'encombrement,
— la réduction de la consommation,
— la réduction de la sensibilité aux parasites,
— l'augmentation de la rapidité,
— l'augmentation de la fiabilité,

plusieurs systèmes ont été mis au point. Nous allons passer en revue les principaux rencontrés dans la pratique.

— *Système à résistances et transistors* (R.T.L. *Resistors Transistors Logic*). Les transistors sont utilisés pour la régénération des signaux et la complémentation (fonction *NON*). Ce système n'est plus guère employé et son inconvénient principal est l'interaction des différentes entrées (fig. XVII-17).

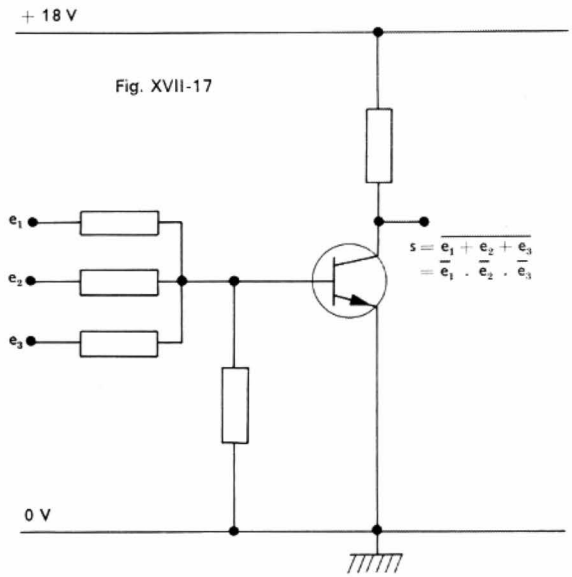


Fig. XVII-17

— *Système à diodes et transistors* (D.T.L., *Diodes Transistors Logic*). Il est semblable au précédent mais des diodes isolent les différentes entrées ; elles améliorent l'immunité aux parasites, et elles rendent la commutation dans le circuit plus rapide du fait de leur faible résistance directe (fig. XVII-18).

— *Système à transistors à couplage direct* (D.C.T.L., *Direct Coupled Transistors Logic*). C'est un circuit relative-

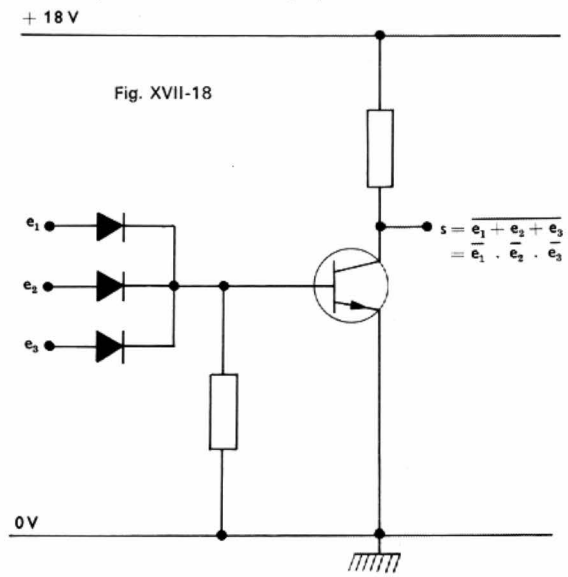


Fig. XVII-18

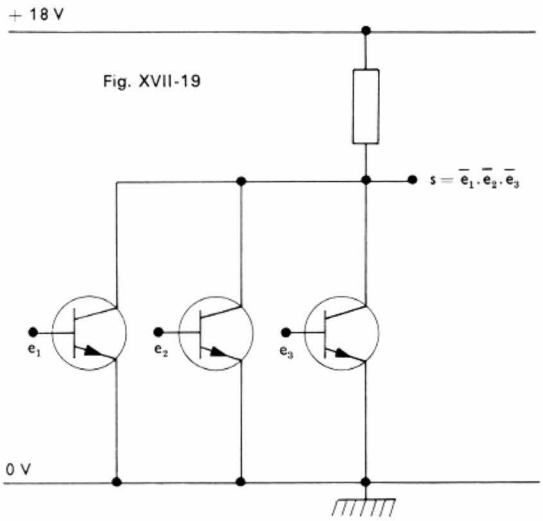


Fig. XVII-19

ment simple et de fabrication facile puisqu'il comporte des transistors associés en parallèle (fig. XVII-19). Si *l'un d'eux est passant* (entrée dans l'état 1), la sortie est dans l'état 0. La sortie est donc dans l'état 1 si ni e_1, ni e_2, ni e_3 ne sont dans l'état 1.

— *Système à transistors à émetteurs couplés* (E.C.T.L., *Emetters Coupled Transistors Logic*). Avec ce circuit pour commutation rapide, les seuils d'entrée sont ajustables et la consommation est sensiblement constante quel que soit « l'état logique » du montage (fig. XVII-20).

— *Système à transistors multiples* (T.T.L. *Transistors Transistors Logic*). Le transistor à émetteurs multiplesré duit le temps de propagation du signal, ce qui en fait un circuit assez rapide et fiable (fig. XVII-21).

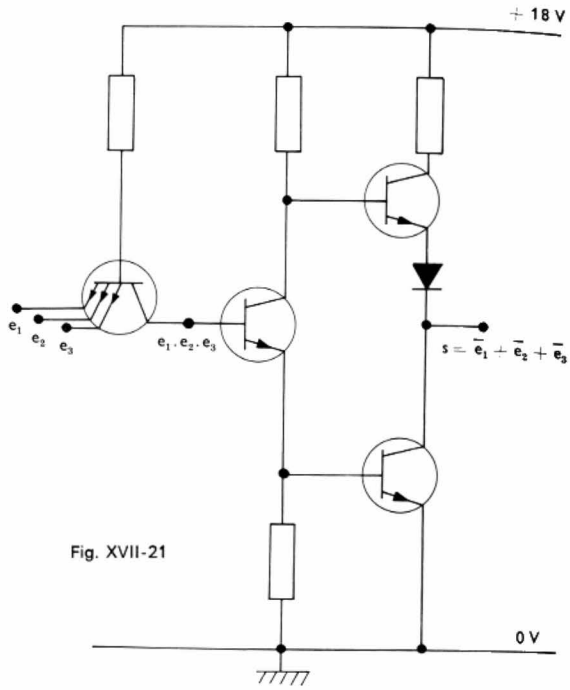


Fig. XVII-21

5. AUTRES MONTAGES ; LES MULTIVIBRATEURS

Ces montages comportent notamment deux transistors reliés de telle façon que lorsque l'un d'eux est passant, l'autre est bloqué. Les deux transistors ne sont jamais simultanément dans le même état.

Il existe de nombreux montages multivibrateurs mais ils sont généralement classés en trois catégories :

— *les multivibrateurs bistables* qui nécessitent une impulsion de commande pour changer d'état. Ils restent dans l'état (stable) où ils sont placés aussi longtemps qu'une autre impulsion ne se présente pas à l'entrée ;

— *les multivibrateurs monostables* qui possèdent un état instable et un état stable ; une impulsion les fait « basculer » dans leur état instable et ils retournent ensuite spontanément à leur état stable ;

— *les multivibrateurs astables* qui oscillent d'eux-mêmes et qui délivrent un signal périodique rectangulaire.

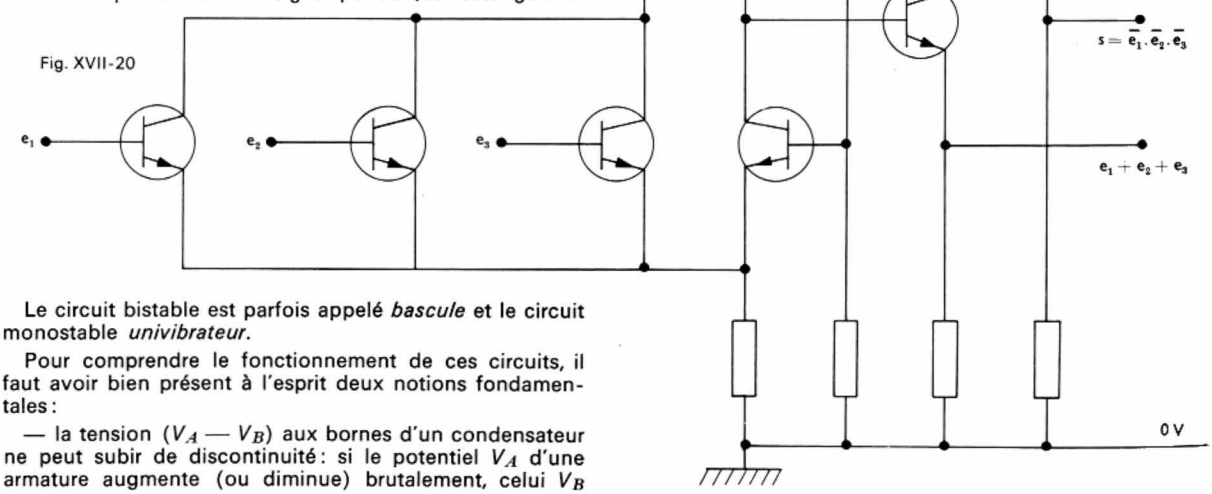


Fig. XVII-20

Le circuit bistable est parfois appelé *bascule* et le circuit monostable *univibrateur*.

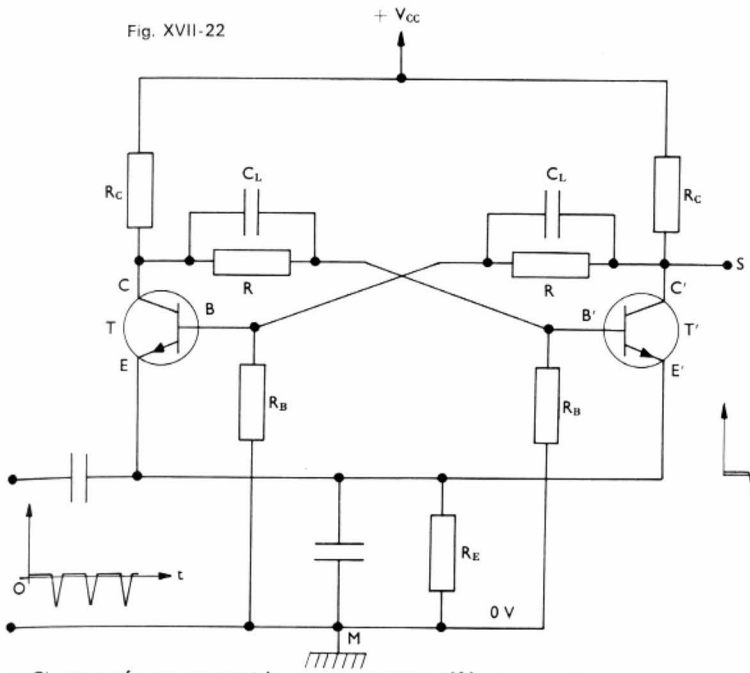
Pour comprendre le fonctionnement de ces circuits, il faut avoir bien présent à l'esprit deux notions fondamentales :

— la tension (V_A — V_B) aux bornes d'un condensateur ne peut subir de discontinuité : si le potentiel V_A d'une armature augmente (ou diminue) brutalement, celui V_B de l'autre armature subit la même variation (ainsi la différence (V_A — V_B) reste constante pendant le temps de la variation). Cela fait dire qu'un condensateur transmet les signaux à « front raide », c'est-à-dire à temps de montée très court ;

— après la transmission du signal à front raide, la tension varie exponentiellement car le condensateur est placé en série avec une résistance (V. t. 1, Électricité, chap. 19).

5.1. Multivibrateur bistable (bascule Ecclès-Jordan). — Supposons au départ que l'un des transistors, T par exemple (fig. XVII-22), soit conducteur et que T' soit bloqué. Dans ce cas, les potentiels des collecteurs C

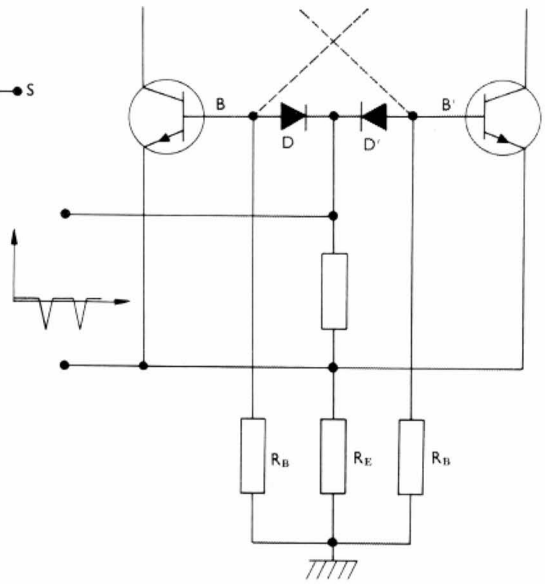
Fig. XVII-22



et C', mesurés en prenant la masse comme référence, sont égaux à $V_C \approx V_{CC} - R_C I_C$ et $V_{C'} \approx V_{CC}$. Les résistances de polarisation R et R_B sont choisies pour avoir : $V_{BE} > 0$ et $V_{B'E'} < 0$. Si une impulsion négative est envoyée sur les émetteurs, cela entraîne la diminution du courant I_B dans T qui conduit, donc de I_C et de $R_C I_C$: V_C croît. Cette variation est transmise à la base B' et un courant I'_B prend alors naissance ainsi qu'un courant I'_C. La tension $V_{C'M}$ décroît et cela a pour effet d'accélérer la décroissance de V_B, de I_B et de I_C. Chaque transistor aide aussi au basculement de l'autre et cet effet cumulatif (effet de boule de neige) aboutit très rapidement à inverser les états des transistors. À chaque impulsion d'entrée correspond ainsi un changement d'état de la bascule.

Nous avons envisagé une commande par les émetteurs mais celle-ci peut également s'effectuer par les bases (fig. XVII-23) ou par les collecteurs. Dans ces deux cas, des diodes D et D' sont placées en opposition pour permettre d'appliquer l'impulsion négative sur l'électrode de potentiel le plus grand.

Fig. XVII-23



5.2. Multivibrateur monostable. — *L'état stable* du montage de la figure XVII-24 est celui dans lequel *T conduit et T' est bloqué*. Si une impulsion négative est envoyée sur la base B, les intensités des courants I_B et I_C diminuent tandis que la tension V_{CM} croît ; cela entraîne la naissance de courants de base et de collecteur I'_B et I'_C dans T' et la diminution du potentiel $V_{C'}$ de C'. Cette diminution de $V_{C'}$ est transmise par C_1 à la base B et le basculement est ainsi accéléré. Les états des transistors s'inversent : T est bloqué pendant que T' est conducteur. Mais, contrairement à la bascule bistable, ce montage ne peut rester dans cet état car C_1 se décharge à travers R_1 et T' et le potentiel V_B de la base de T peut dépasser V_E (fig. XVII-25) : le montage revient de lui-même à son état initial.

La période de ce multivibrateur monostable dépend du produit $R_1 C_1$. Ce montage permet d'obtenir des impulsions de durée déterminée à partir de signaux d'entrée de forme quelconque (impulsions, créneaux, sinusoïdes).

Fig. XVII-24

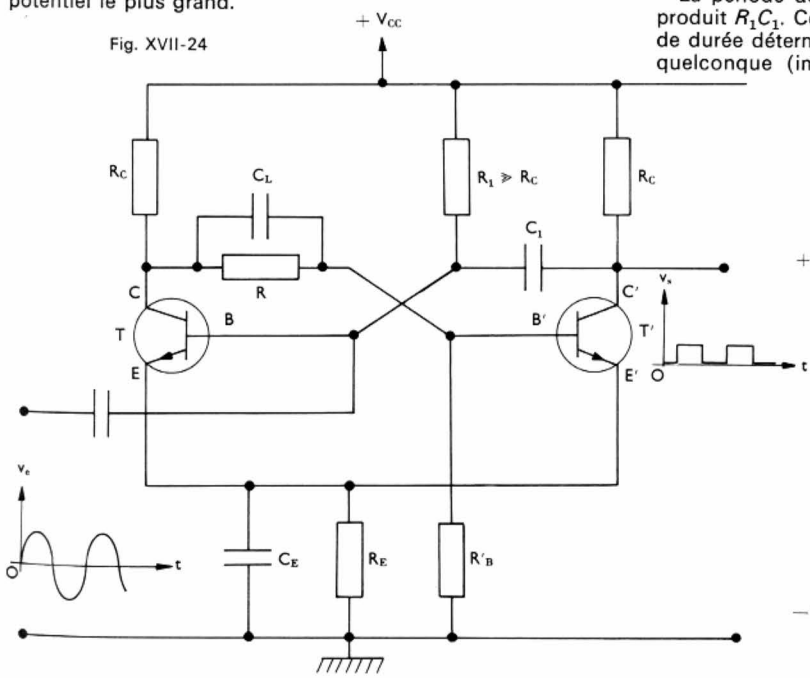
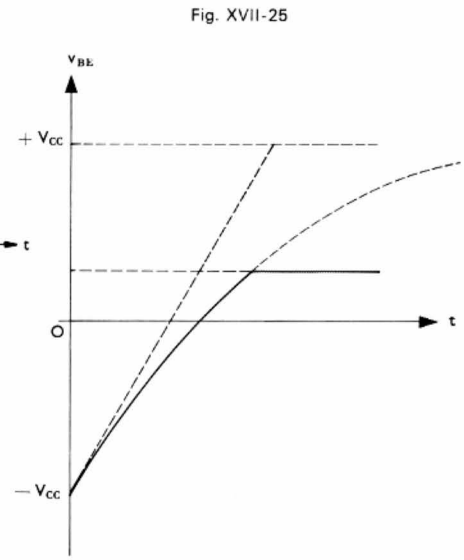


Fig. XVII-25



5.3. Multivibrateur astable (type Abraham et Bloch). — Supposons qu'à l'instant initial le transistor T conduise et que T' soit bloqué. En mesurant les potentiels par rapport à la masse M ($V_M = 0$), nous voyons que $V_C = V_{CC} - R_C I_C \approx 0$, $V_B \approx 0$, $V_{C'} \approx V_{CC}$ et $V_{B'}$ est négatif parce que le condensateur C_L est encore chargé dans le sens indiqué. Progressivement C_L se décharge à travers R'_1 et T, puis tend à se charger en sens contraire, tandis que C'_L se charge à travers R'_C, et la diode base-émetteur de T. Ainsi le potentiel $V_{B'}$ de B' croît et devient même légèrement positif ; un courant I'_B apparaît ainsi qu'un courant I'_C. Le potentiel V'_C, diminue brusquement et C'_L transmet cette brusque diminution en B. Tout se passe comme si la base de B recevait une impulsion négative : I_C décroît et $V_C = V_{CC} - R_C I_C$ croît. Dans le même temps C_L transmet une impulsion positive à B' du fait de l'augmentation brutale du potentiel V_C. C'est l'effet cumulatif que nous connaissons déjà. À la fin de ce basculement, T est bloqué et T' conduit. Par suite de la symétrie générale du montage, nous comprenons bien que les transistors ne vont pas rester indéfiniment dans cet état et que le multivibrateur va basculer à nouveau. La durée de fonctionnement de T est égale à celle de T' si cette symétrie est parfaite. Ce montage constitue un véritable oscillateur fournissant des signaux carrés. Les multivibrateurs sont de plus en plus utilisés en commutation, ils servent à compter des impulsions, (bistables) ils permettent d'ouvrir et de fermer des circuits, de produire ou de modifier des impulsions (multivibrateur monostable). Ce sont des circuits fondamentaux dans les calculateurs digitaux, la télévision, les radars et les oscillographes.

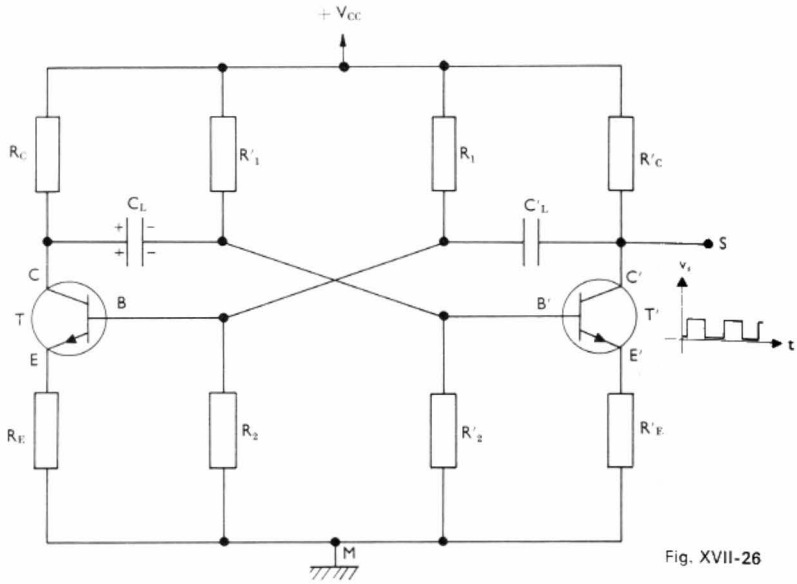


Fig. XVII-26

CHAPITRE XVIII

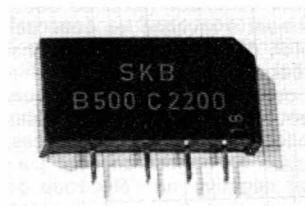
REDRESSEMENT

Lorsque nous avons étudié le fonctionnement des amplificateurs, nous avons toujours supposé que nous disposions de générateurs de tension continue pouvant débiter les courants nécessaires aux circuits de base et de collecteur de tous les transistors du montage. Des piles et des accumulateurs sont parfois utilisés dans ce but, très souvent aussi le courant continu est obtenu à partir du courant alternatif (délivré par un réseau de distribution) et ayant subi successivement les transformations suivantes :

— *redressement* pour fournir un courant unidirectionnel,

— *filtrage* pour éliminer toute ondulation,

— *stabilisation* afin que la tension obtenue soit indépendante à la fois des variations de la tension du réseau et des variations de l'intensité du courant débité.



Petit redresseur moulé au sélénium (*Semikron*)

Élément tubulaire haute tension (*Semikron*)

1. ALIMENTATION D'UNE CHARGE RÉSISTANTE EN COURANT UNIDIRECTIONNEL

1.1. Redressement simple alternance. Alimentation monophasée. — La conduction unidirectionnelle de la diode a conduit à utiliser ce composant pour le redressement d'un courant alternatif. En effet, si une diode est placée dans un circuit électrique alimenté par une source de courant alternatif, le courant ne peut circuler que dans un seul sens, de l'anode à la cathode (fig. XVIII-1). Le passage de ce courant ne peut avoir lieu que pendant le temps où la tension aux bornes de la diode est supérieure à son seuil de redressement E_0 (fig. XVIII-2). Pratiquement, E_0 étant toujours très inférieure à l'amplitude de la tension alternative, nous pouvons négliger l'existence de ce seuil de redressement et assimiler la diode à une résistance r constante dans le sens direct, et à une résistance infinie (interrupteur ouvert) dans le sens inverse (V. chap. 7. § 5). La résistance r est la résistance dynamique de la diode ;

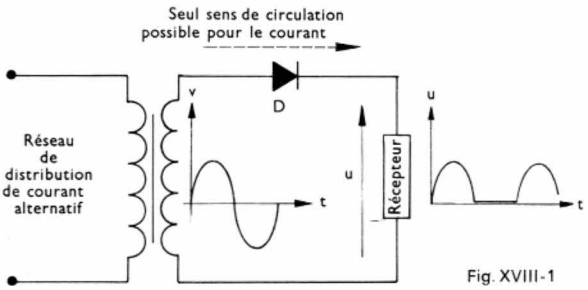


Fig. XVIII-1

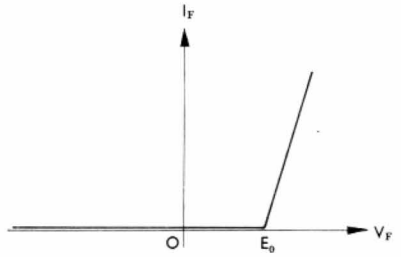


Fig. XVIII-2

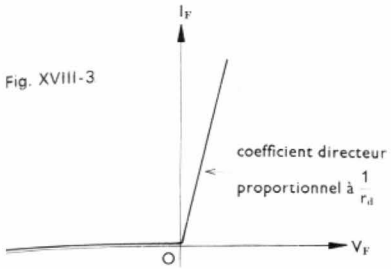


Fig. XVIII-3

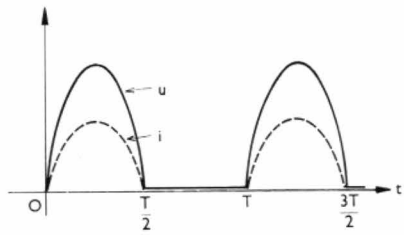


Fig. XVIII-4

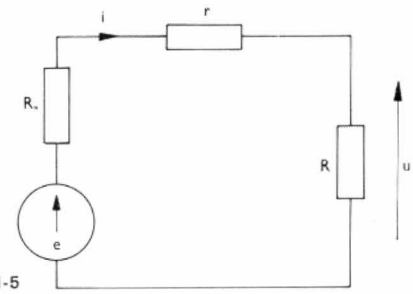


Fig. XVIII-5

elle est proportionnelle à l'inverse du coefficient directeur de la caractéristique directe idéale (fig. XVIII-3).

Le courant passant dans la résistance et la tension aux bornes de celle-ci sont représentés par des courbes formées d'arches de sinusoïdes (fig. XVIII-4).

Le courant unidirectionnel i peut être défini en tenant compte de la quantité d'électricité qu'il transporte ou de l'effet Joule qu'il produit, et nous le caractérisons :

— par sa **valeur moyenne** I_{moy} :

$$I_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T i\,dt$$

Elle est égale à l'intensité du *courant continu* qui transporterait la même quantité d'électricité que i pendant une période.

— par sa **valeur efficace** I_{eff} :

$$I^2_{eff} = \frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt$$

Elle est égale à l'intensité du courant continu qui produirait le même dégagement de chaleur que i en passant dans la même résistance pendant le même temps.

Par analogie, nous caractérisons la tension aux bornes de la résistance R :

— par sa **valeur moyenne** U_{moy} :

$$U_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T u\,dt$$

Comme à tout instant nous pouvons appliquer la loi d'Ohm à la résistance R, nous avons les relations suivantes :

$$u = Ri \Rightarrow U_{moy} = R\,I_{moy}$$

— par sa **valeur efficace** U_{eff} :

$$U^2_{eff} = \frac{1}{T}\int_0^T u^2 dt$$

Comme précédemment, nous pouvons écrire :

$$U_{eff} = R\,I_{eff}$$

Si le montage redresseur considéré (V. fig. XVIII-1) peut être représenté par le schéma de la figure XVIII-5 où le transformateur est remplacé par un générateur équivalent de f.é.m. $e = \hat{E}\sin\omega t$ et une résistance interne R_s (résistance ramenée au secondaire $R_s = R_2 + R_1\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2$ avec R_2 et R_1 : résistances des enroulements secondaire et primaire, N_2 et N_1 : nombre de spires des enroulements secondaire et primaire), nous avons la possibilité de calculer les valeurs moyennes et les valeurs efficaces de la tension et du courant :

À l'instant t :

$$u = Ri = \frac{R}{R + R_s + r}\,e = ke \qquad \left(k = \frac{R}{R + R_s + r}\right)$$

Le plus souvent, les résistances R_s et r sont très inférieures à R : k est donc sensiblement égal à 1 et nous admettrons qu'il en est toujours ainsi pour la suite.

Tension moyenne :

$$U_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T e\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{E}\sin\omega t\,dt$$

Par intégration, nous obtenons :

$$U_{moy} = \frac{\hat{E}}{\pi} = 0{,}318\,\hat{E}$$

Intensité moyenne du courant :

$$I_{moy} = \frac{U_{moy}}{R} = \frac{\hat{E}}{\pi R}$$

Tension efficace :

$$U^2_{eff} = \frac{1}{T}\int_0^T e^2\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{E}^2\sin^2\omega t\,dt$$

Par intégration, nous obtenons le résultat suivant :

$$U_{eff} = \frac{\hat{E}}{2} = 0{,}5\,\hat{E}$$

Intensité efficace du courant :

$$I_{eff} = \frac{U_{eff}}{R} = \frac{\hat{E}}{2R}$$

1.2. Redressement double alternance. Alimentation monophasée. — Il est plus intéressant d'utiliser les deux alternances de la tension alternative pour produire le courant unidirectionnel et deux montages ont été mis au point dans ce but.

Le *montage va-et-vient* (fig. XVIII-6) nécessite un transformateur à point milieu. La diode D_1 est conductrice lorsque la tension $(v_A - v_B)$ est positive ; lorsqu'il en est ainsi, la tension $(v_{A'} - v_B)$ est négative et D_2 est polarisée en sens inverse. La situation opposée est obtenue durant l'alternance suivante de e_1 et de e_2. Chaque demi-période, le fonctionnement est donc identique à celui du redresseur simple alternance durant la phase conductrice. La résistance R est traversée par un courant durant les deux alternances de la tension alternative et la courbe représentative de la tension entre ses bornes est une succession d'arches de sinusoïde dont l'expression algébrique peut être :

$$e = \hat{E}.|\sin\omega t|$$

La valeur moyenne de cette tension est le double de celle obtenue dans un redressement simple alternance (toutes choses égales par ailleurs) :

$$U_{moy} = \frac{2\,\hat{E}}{\pi} = 0{,}637\,\hat{E}$$

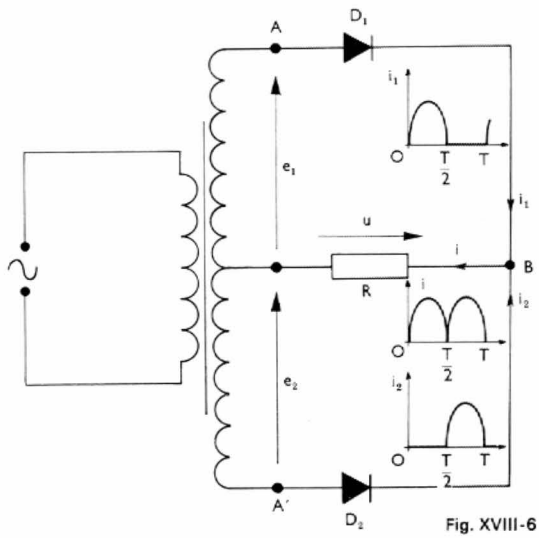


Fig. XVIII-6

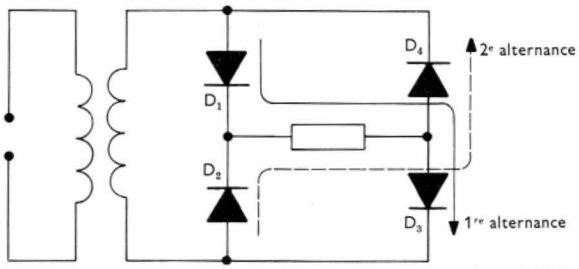


Fig. XVIII-7

L'effet Joule est deux fois plus grand mais, comme il est proportionnel à U^2_{eff} la valeur efficace de la tension est seulement $\sqrt{2}$ fois plus grande que dans un redressement simple alternance : $U_{\text{eff}} = \dfrac{\hat{E}}{\sqrt{2}} = 0{,}707\ E$

Cette valeur efficace est aussi celle de la tension sinusoïdale e : cela se conçoit facilement puisque l'effet Joule ne dépend pas du sens du courant.

Un autre montage permet d'obtenir le même résultat sans utiliser de transformateur à point milieu : c'est le *pont de Graëtz* (fig. XVIII-7). Il nécessite quadre diodes mais la tension inverse maximale appliquée à chacune d'elles est égale à la valeur de crête $\hat{E}$ au lieu de $2\hat{E}$ dans le montage va-et-vient pour une tension aux bornes de R de même valeur moyenne dans les deux cas.

1.3. Redressement avec une alimentation triphasée. — Ce mode de redressement est intéressant lorsqu'il s'agit de fournir de grandes puissances sous une tension unidirectionnelle. Pour un redressement simple alternance, il suffit de trois diodes, une par phase (fig. XVIII-8). Chacune des diodes D_1, D_2, D_3 conduit lorsque

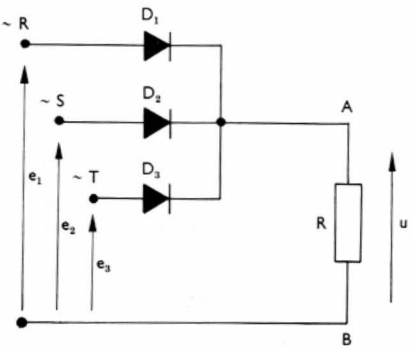


Fig. XVIII-8

la tension à ses bornes est positive (nous comptons positivement la tension directe). Si les tensions alternatives e_1, e_2 et e_3 sont données par les expressions suivantes :

$$e_1 = \hat{E} \sin \omega t$$

$$e_2 = \hat{E} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \qquad e_3 = \hat{E} \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

la diode D_1 est conductrice entre les instants $\dfrac{T}{12}$ $\dfrac{5T}{12}$ (fig. XVIII-9), puis c'est la diode D_2 qui est passante entre les instants $\dfrac{5T}{12}$ et $\dfrac{9T}{12}$, et c'est le tour de la diode D_3 également durant un tiers de période. Il y a *commutation naturelle* aux instants $\dfrac{T}{12}$, $\dfrac{5T}{12}$, $\dfrac{9T}{12}$, lorsqu'une diode cesse d'être conductrice et qu'une autre le devient. Pendant l'intervalle de temps où D_1 conduit, le potentiel du point A (v_A) est à tout instant sensiblement égal à e_1 (nous négligeons la chute de tension due à D_1) et les diodes D_2 et D_3 sont sous tension inverse ($e_1 - e_2 < 0$ et $e_1 - e_3 < 0$). Cela est général : lorsqu'une diode conduit, les deux autres sont bloquées et la plus grande tension qu'elles supportent est la valeur maximale de la tension composée $\hat{E}\sqrt{3}$.

Pendant une période, la tension aux bornes de la résistance R ne s'annule pas ; sa valeur moyenne peut être calculée en ne considérant la tension u que durant un intervalle de temps égal à $\dfrac{T}{3}$ (c'est la période de la tension unidirectionnelle).

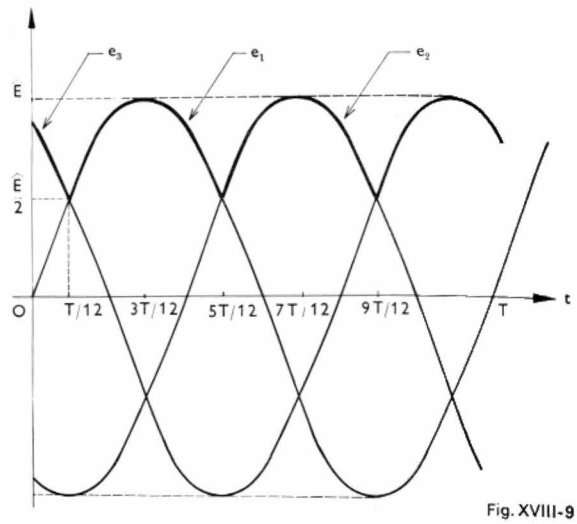


Fig. XVIII-9

$$U_{\text{moy}} = \frac{1}{T/3} \int_{T/12}^{5\,T/12} e_1\, dt$$

$$U_{\text{moy}} = \frac{3\sqrt{3}\,\hat{E}}{2\pi} = 0{,}827\,\hat{E} \quad (\hat{E} = E_{\text{eff}}\sqrt{2})$$

La valeur efficace de cette tension est donnée par la relation suivante :

$$U^2_{\text{eff}} = \frac{1}{T/3} \int_{T/12}^{5\,T/12} e^2_1\, dt$$

Ce calcul fournit le résultat suivant : $U_{\text{eff}} = 0{,}841\ \hat{E}$.

Pour un redressement double alternance, nous pouvons utiliser un pont de Graëtz triphasé (fig. XVIII-10) formé de six diodes identiques. Le point neutre du réseau n'est pas utilisé. À un instant donné, deux diodes seulement sont conductrices et, pour trouver le chemin parcouru par le courant, il suffit de suivre le sens des potentiels décroissants. Si, par exemple, nous avons à un instant t : $e_1 > e_2 > e_3$, la diode D_1 conduit et le potentiel de A est plus grand que celui de S et T : D_2 et D_3 sont polarisées en inverse. Le potentiel de T étant le plus bas, D_6 conduit et le potentiel de B est le même que celui de T : les diodes D_4 et D_5 sont donc aussi bloquées. Donc, seules D_1 et D_6 sont conductrices car elles sont placées sous la tension composée ($e_1 - e_3$) qui est la plus grande à l'instant considéré. Les deux alternances étant redressées, nous pouvons dire que pour

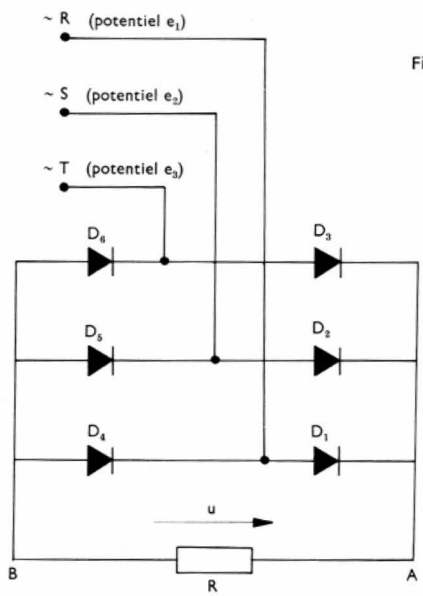
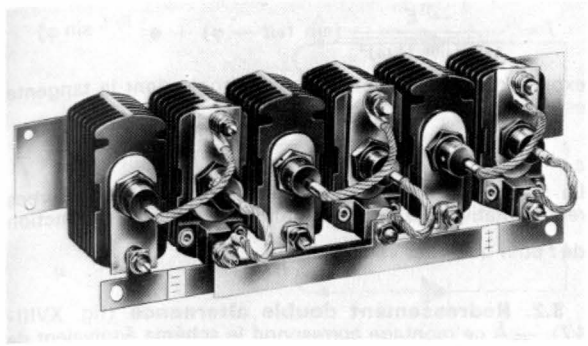


Fig. XVIII-10



Montage redresseur : pont triphasé à diodes (*Semikron*)

connaître quelles sont les diodes conductrices à un instant t, il suffit de chercher quelle est la tension composée de plus grande valeur absolue. La tension redressée est périodique et sa période est six fois plus petite que celle du secteur alternatif utilisé (fig. XVIII-11).

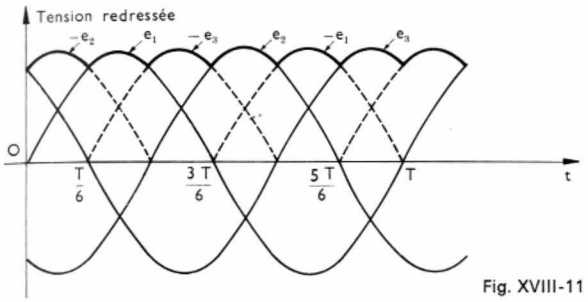


Fig. XVIII-11

Le calcul montre que les valeurs moyenne et efficace de la tension unidirectionnelle sont presque égales à la valeur de crête de e :

$$U_{moy} = 0{,}955\ \widehat{E}$$
$$U_{eff} = 0{,}956\ \widehat{E}$$

En triphasé, la tension inverse maximale appliquée à une diode est la même dans les deux montages (si la valeur moyenne de la tension unidirectionnelle est la même) ; cette tension inverse est égale à la valeur de crête de la tension composée $\sqrt{3}\ \widehat{E}$.

1.4. Ondulation. — La tension aux bornes de la charge alimentée par un montage redresseur est plus ou moins ondulée. Elle peut être considérée comme la somme d'une tension continue (U_{moy}) et de plusieurs tensions sinusoïdales (les harmoniques) ayant des fréquences multiples de la fréquence de la tension alternative alimentant le montage (V. t. 1, Mathématiques, chap. 23).

En effet, dans le cas d'un redressement simple alternance, à partir d'une tension $e = \widehat{E} \cos \omega t$, la tension unidirectionnelle est égale à :

$$u = \frac{\widehat{E}}{\pi}\left(1 + \frac{\pi}{2}\cos \omega t + \frac{2}{3}\cos 2\omega t - \frac{2}{15}\cos 4\omega t - \dots\right)$$

Lorsqu'il s'agit d'un redressement double alternance, nous avons :

$$u = \frac{2\widehat{E}}{\pi}\left(1 + \frac{2}{3}\cos 2\omega t - \frac{2}{15}\cos 4\omega t - \frac{2}{35}\cos 6\omega t - \dots\right)$$

De même, dans un redressement simple alternance de tensions triphasées, la d.d.p. unidirectionnelle aux bornes de la charge est donnée par l'expression suivante :

$$u = 0{,}827\ \widehat{E}\ (1 + 0{,}25 \sin 3\omega t + 0{,}057 \cos 6\omega t - 0{,}025 \sin 9\omega t + \dots)$$

Ces exemples montrent bien que l'expression donnant la tension unidirectionnelle fournie par un redresseur peut se mettre sous la forme suivante :

$$u = U_{moy} + u_0$$

La tension u_0 est appelée **tension d'ondulation** ou **ondulation** de la tension redressée.

Pour caractériser l'importance de l'ondulation devant la tension moyenne, nous utiliserons :

— le **taux d'ondulation** β

$$\beta = \frac{\text{valeur efficace de } u_0}{U_{moy}} = \frac{U_{0\,eff}}{U_{moy}}$$

— le **facteur de forme F**

$$F = \frac{U_{eff}}{U_{moy}} = \frac{\sqrt{U^2_{moy} + U_0{}^2_{eff}}}{U_{moy}} = \sqrt{1 + \beta^2}$$

Les valeurs de β et F pour les différents redressements étudiés sont rassemblées dans le tableau suivant :

Alimentation alternative	Redressement	β	F
Monophasée	simple alternance	121 %	1,57
	double alternance	48 %	1,11
Triphasée	simple alternance	18,4 %	1,017
	double alternance	4,3 %	1,001

2. ALIMENTATION D'UN RÉCEPTEUR PRÉSENTANT UNE F.C.É.M.

Analysons, à titre d'exemple, le fonctionnement d'un redresseur double alternance (montage va-et-vient ; fig. XVIII-12) débitant sur un circuit comportant une résistance

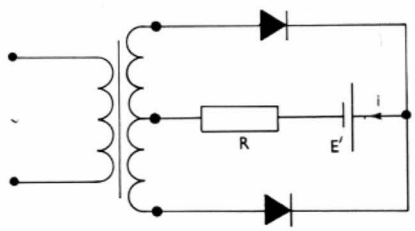


Fig. XVIII-12

R en série avec un récepteur de force contre-électromotrice E' (générateur monté en opposition). Le schéma équivalent du montage (fig. XVIII-13) montre que le courant i ne circule que si la tension e est supérieure à E' (fig.

Fig. XVIII-13

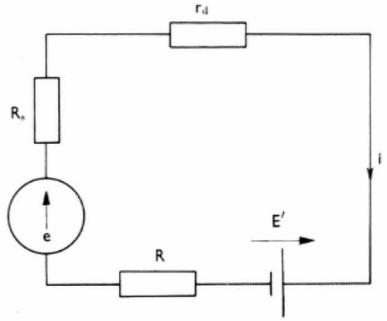
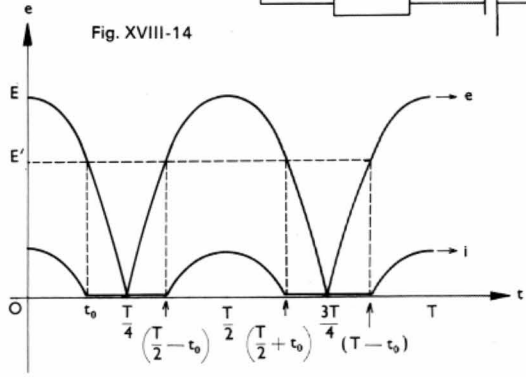


Fig. XVIII-14



XVIII-14). À l'instant t, l'intensité du courant est égale à :

$$i = \frac{e - E'}{R + r_d + R_s} \quad (\text{avec } E' = \widehat{E} \cos \omega t_0)$$

et la valeur moyenne de ce courant est donnée par l'expression suivante :

$$I_{moy} = \frac{1}{T/4} \int_0^{t_0} \frac{\widehat{E}}{R + r_d + R_s} (\cos \omega t - \cos \omega t_0)\, dt$$

$$I_{moy} = \frac{2\widehat{E}}{\pi(R + r_d + R_s)} (\sin \omega t_0 - \omega t_0 \cos \omega t_0)$$

Ce montage est utilisé pour recharger les batteries d'accumulateurs. Pour ajuster l'intensité du courant de charge, E' étant supposé constant, il faut régler l'amplitude $\widehat{E}$ de la tension alternative (en utilisant un transformateur à prises multiples, par exemple) ou la valeur R de la résistance qui sert à limiter l'intensité du courant circulant dans les diodes (réglage progressif du courant). L'utilisation de tensions triphasées, en simple ou en double alternance, ne pose pas de problèmes particuliers ; il peut y avoir débit ininterrompu si la f.c.é.m. E' est inférieure à la tension minimale redressée obtenue à l'instant de la commutation ($\frac{\widehat{E}}{2}$ en simple alternance, $\frac{3}{2}\widehat{E}$ en double alternance).

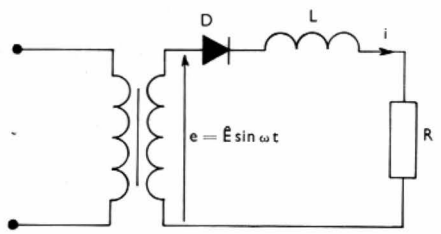
3. ALIMENTATION D'UN CIRCUIT INDUCTIF

Supposons que le circuit d'utilisation comporte maintenant une résistance R en série avec une inductance L. Celle-ci est souvent utilisée pour réduire l'intensité du courant alternatif d'ondulation circulant dans R. Quelquefois, cette inductance est simplement l'inductance de fuite du transformateur d'alimentation ou l'inductance de l'enroulement du moteur alimenté par le redresseur.

3.1. Redressement simple alternance (fig. XVIII-15). — L'intensité i du courant dans ce circuit est la solution de l'équation différentielle suivante :

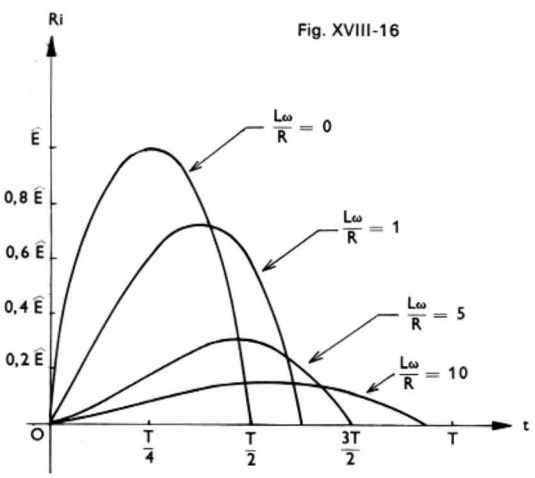
$$L \frac{di}{dt} + R i = \widehat{E} \sin \omega t$$

Fig. XVIII-15



Dans cette équation, L est la somme de toutes les inductances placées en série dans le circuit et R la somme de toutes les résistances. Cette solution est :

Fig. XVIII-16



$$i = \frac{-\widehat{E}}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} [\sin(\omega t - \varphi) + e^{-Rt/L} \sin \varphi]$$

expression dans laquelle φ est un angle dont la tangente est égale à :

$$\text{tg } \varphi = \frac{L\omega}{R}$$

La figure XVIII-16 donne l'allure générale des courbes représentatives de la chute ohmique $u = R\,i$ en fonction de t pour quelques valeurs de $\frac{L\omega}{R}$.

3.2. Redressement double alternance (fig. XVIII-17). — À ce montage correspond le schéma équivalent de

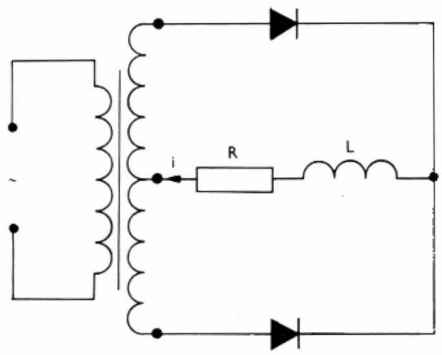


Fig. XVIII-17

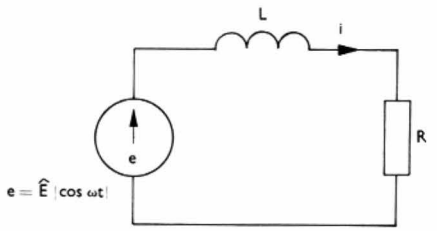


Fig. XVIII-18

la figure XVIII-18 où le générateur fournit une tension $e = \widehat{E}\,|\cos \omega t|$. Supposons le débit du courant ininterrompu : le circuit étant linéaire, nous pouvons alors utiliser le théorème de superposition. Remplaçons e par son développement en série de Fourier et, étant donné la décroissance rapide de l'amplitude des harmoniques d'ordre élevé, limitons ce développement aux deux premiers termes :

$$e \approx \frac{2\widehat{E}}{\pi}\left(1 + \frac{2}{3} \cos 2\omega t\right.$$

Nous pouvons alors calculer les courants dus à chacune de ces deux tensions. Le courant dû à la composante continue de e est égal à :

$$I_{moy.} = \frac{2\widehat{E}}{\pi R} \quad (L \text{ n'intervient pas en continu})$$

La valeur efficace du courant dû à la f.é.m. alternative est donnée par la loi d'Ohm :

$$I_{2\omega\,eff} = \frac{4\widehat{E}}{3\pi\sqrt{2}\,\sqrt{R^2 + 4(L\omega)^2}}$$

Supposons que la réactance du circuit soit très supérieure à sa résistance : $4L^2\omega^2 \gg R^2$; alors nous avons :

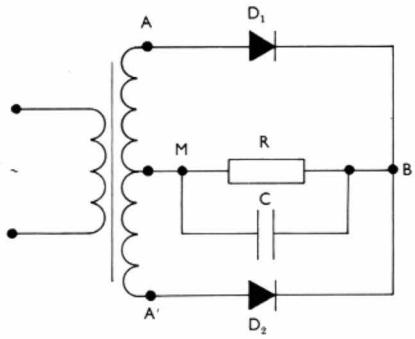
$$I_{2\omega\,eff} \approx \frac{2\widehat{E}}{3\pi\sqrt{2}\,L\omega}$$

Le taux d'ondulation est donc sensiblement égal à :

$$\beta = \frac{I_{2\omega\,eff}}{I_{moy}} = \frac{R}{3\sqrt{2}\,L\omega}$$

Le taux d'ondulation est plus faible aux forts courants (R petit). L'utilisation d'une inductance est donc particulièrement intéressante lorsqu'il s'agit d'obtenir un courant unidirectionnel très intense.

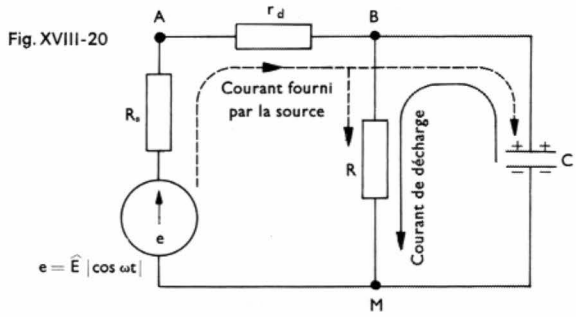
Fig. XVIII-19



4. REDRESSEMENT AVEC DÉBIT DANS UN CONDENSATEUR

Choisissons le cas du redressement double alternance : un condensateur est placé en parallèle avec la charge résistante R alimentée par le redresseur (fig. XVIII-19). Le schéma équivalent est donné sur la figure XVIII-20. Lorsque le régime permanent est établi le condensateur se charge pendant une partie de la période (de t_1 à t_2) et se décharge dans la résistance durant le reste de cette période (fig. XVIII-21).

Fig. XVIII-20



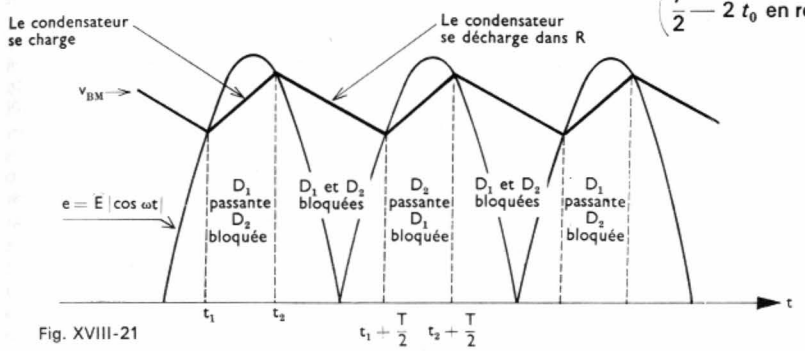


Fig. XVIII-21

En effet, lorsque le potentiel du point A est supérieur à celui du point B, la diode D_1 est passante et elle est traversée par un courant i qui se partage entre R et C. Le condensateur se recharge et la tension v_{BM} s'élève jusqu'à être égale à v_{AB}. À partir de cet instant, e décroît plus vite que v_{BM} et la diode n'est plus conductrice : le condensateur C se décharge alors dans la résistance R. Cette décharge se poursuit jusqu'à ce que la tension e croisse à nouveau et atteigne la valeur de la d.d.p. aux bornes de C : le courant de charge passe alors à travers la diode D_2. En général, la capacité C est toujours très grande : la constante de temps RC du circuit de décharge (V. t. 1, Électricité, chap. 19) est grande et la tension v_{BM} varie très peu au cours d'une période : elle est sensiblement égale à : $U_{moy} = \hat{E} \cos \omega t_0$ (fig. XVIII-22). L'intensité du courant traversant la diode conductrice à l'instant t, est donnée par l'expression suivante :

$$i = \frac{e - U_{moy}}{R_s + r_d} = \frac{\hat{E}\,(\cos \omega t - \cos \omega t_0)}{R_s + r_d}$$

et sa valeur moyenne est (puisque $t'_0 \approx t_0$) :

$$I_{moy} = \frac{2\hat{E}}{T/2} \int_0^{t_0} \frac{(\cos \omega t - \cos \omega t_0)}{R_s + r_d}\, dt$$

$$\text{soit : } I_{moy} = \frac{2\hat{E}}{\pi} \left[\frac{\sin \theta_0 - \theta_0 \cos \theta_0}{R_s + r_d} \right] \text{ avec : } \theta_0 = \omega t_0$$

Remarquons que comme $U_{moy} = \hat{E} \cos \theta_0 = R I_{moy}$ nous pouvons obtenir facilement une relation fournissant la valeur de l'angle θ_0.

$$\text{tg } \theta_0 - \theta_0 = \frac{\pi\,(R_s + r_d)}{2R}$$

(En simple alternance (fig. XVIII-23), ce même calcul conduit à : $\text{tg } (\theta_0 - \theta_0) = \pi \dfrac{R_s + r_d}{R}$). La tension moyenne est indépendante de la capacité du condensateur utilisé (à condition toutefois que celle-ci soit suffisamment grande), mais elle dépend des valeurs des résistances R_s et r_d. Éventuellement, pour ajuster la valeur moyenne de la tension (U_{moy}), il est possible de placer une résistance additionnelle r en série avec la diode. Cette résistance est aussi nécessaire parfois pour diminuer la « pointe » de courant dans la diode au moment de la charge. En effet, plus la durée de charge est courte et plus le courant peut atteindre des valeurs élevées puisqu'il faut fournir, durant un laps de temps très limité, toute la quantité d'électricité qui sera dissipée dans la résistance en un temps beaucoup plus long $\left(\dfrac{T}{2} - 2t_0 \text{ en redressement double alternance}\right)$. L'intensité du courant de charge peut dépasser la valeur maximale autorisée par le constructeur de la diode.

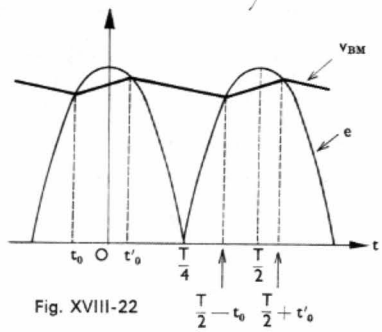


Fig. XVIII-22

La tension aux bornes de la résistance R a une valeur moyenne plus grande et son ondulation est beaucoup plus faible. La *valeur crête à crête* ΔU de cette ondulation (fig. XVIII-23) peut être obtenue en écrivant que la quantité d'électricité Q reçue pendant la charge ($Q = C\Delta U$) est égale à celle qui est restituée durant la décharge ($Q = I_{moy} \cdot \Delta t$, si Δt désigne le temps de cette décharge au cours d'une période de la tension unidirectionnelle) :

$$\Delta U = \frac{I_{moy}\,\Delta t}{C} = \frac{U_{moy}\,\Delta t}{RC}$$

Pour le redressement simple alternance $\Delta t = T - 2t_0$ et en double alternance $\Delta t = \dfrac{T}{2} - 2t_0$.

La forme de la tension d'ondulation est assez proche d'une dent de scie dissymétrique. Sa valeur efficace est sensiblement égale à :

$$\Delta U_{eff} = \frac{\Delta U}{2\sqrt{3}}$$

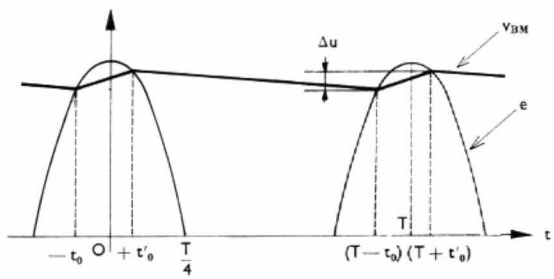


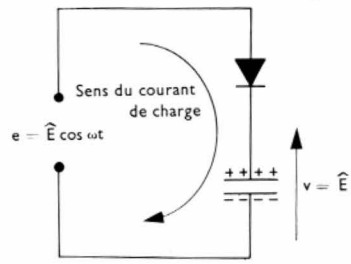
Fig. XVIII-23

Des condensateurs électrochimiques, ayant des capacités atteignant une dizaine de milliers de microfarads (tension maximale d'utilisation voisine de 100 V), d'encombrement faible, sont fréquemment placés aux bornes de la charge dans les montages redresseurs.

5. MULTIPLICATEURS DE TENSION

Un multiplicateur de tension est un redresseur particulier qui fournit une tension continue dont la valeur est sensiblement un multiple de la tension alternative sous laquelle il est alimenté. Si un condensateur est placé en série avec une diode (fig. XVIII-24) et une source de courant alternatif délivrant une tension donnée par l'équation $e = \hat{E} \cos \omega t$, il prend une charge égale à celle que lui fournirait un générateur de courant continu de f.é.m. égale

Fig. XVIII-24



à $\hat{E}$. La diode impose un sens de circulation au courant ; elle permet de charger le condensateur et empêche qu'il ne se décharge. Évidemment, la même source peut être utilisée pour obtenir des tensions continues opposées avec des circuits comprenant les mêmes éléments, mais dans lesquels les diodes sont placées en sens contraire. Ainsi dans le **doubleur Latour** (fig. XVIII-25), la tension entre les points A et B est égale à $2\hat{E}$.

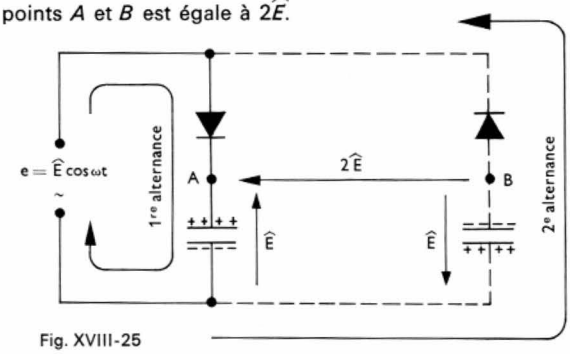


Fig. XVIII-25

Dans le **doubleur de Schenkel** (fig. XVIII-26), lorsque le condensateur C_1 est chargé, C_2 est alimenté sous une tension égale à la somme de la d.d.p. entre les bornes de C_1 et de celle fournie par la source de courant alternatif (pendant le laps de temps où il se charge) ; comme dans le montage précédent, la tension entre les bornes A et B est égale à $2\hat{E}$.

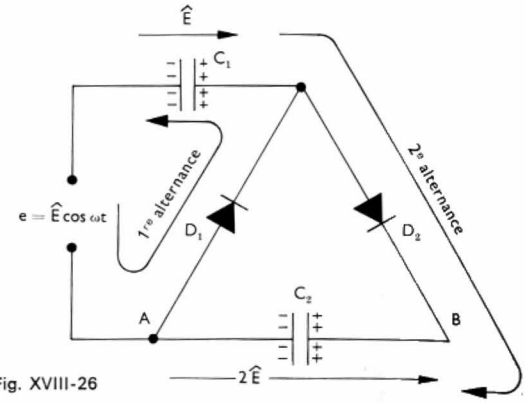


Fig. XVIII-26

Le principe de ce doubleur peut être mis en œuvre avec un nombre quelconque de groupements formés d'une diode et d'un condensateur (fig. XVIII-27) ; la tension aux bornes de chaque condensateur est égale à $2\hat{E}$, excepté pour C_1. Ainsi, nous obtenons une tension égale à $2n\hat{E}$ volts entre les points A et B_n et à $(2n - 1)\,\hat{E}$ volts entre les points M et M_n.

6. FILTRAGE

La *tension d'ondulation* obtenue aux bornes de la résistance d'utilisation d'un redresseur est beaucoup trop grande en général, même lorsqu'un condensateur est placé en parallèle avec cette charge. Pour réduire cette ondulation, il faut intercaler un filtre entre le redresseur et l'utilisation ; le plus souvent, il est formé de deux condensateurs et d'une inductance (ou d'une résistance) associés selon les trois branches d'un triangle (fig. XVIII-28). Dans ce filtre,

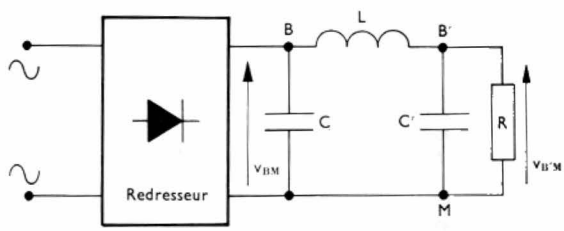


Fig. XVIII-28

appelé **filtre en** π, l'inductance présente une impédance qui augmente en même temps que la fréquence du courant ; en la plaçant en série dans le circuit, les harmoniques sont d'autant mieux atténués que leur fréquence est élevée. Pour compléter l'action de l'inductance, les condensateurs (dont l'impédance diminue quand la fréquence augmente) permettent de dériver ces courants et de les éliminer presque totalement de la branche qui contient le récepteur. Avec un condensateur de capacité C suffisante pour que la ten-

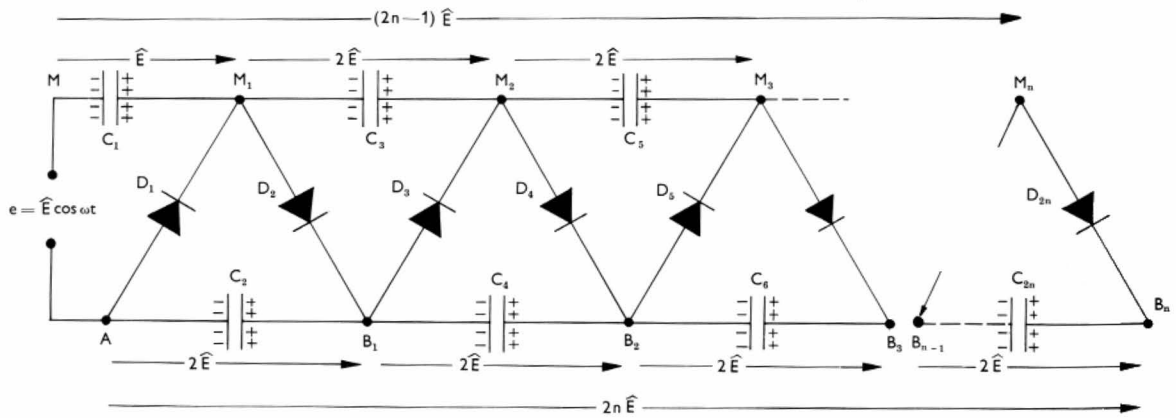


Fig. XVIII-27 — Multiplicateur de tension obtenu en associant en cascade des doubleurs de Schenkel

sion v_{BM} varie peu (V. § 4), l'efficacité du filtre est d'autant plus grande que l'inductance L de la bobine et que les capacités C sont plus grandes.

Dans certains cas, la surintensité due au courant de charge traversant le condensateur C placé en tête de filtre peut constituer une gêne ou un danger. Ce condensateur est alors supprimé et le filtre prend alors le nom de filtre en L. Moins employé que le précédent, il permet cependant d'obtenir un filtrage suffisant pour de nombreuses utilisations. Avec les redresseurs employés en électrotechnique,

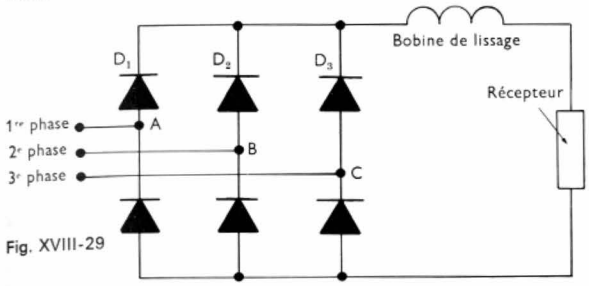


Fig. XVIII-29

il n'est pas toujours nécessaire d'éliminer complètement l'ondulation (elle n'apporte pas de perturbation) et le filtre peut être réduit à une seule inductance; elle prend alors le nom de **bobine de lissage** (fig. XVIII-29).

Les montages redresseurs, avec ou sans filtre, sont utilisés dans les **redresseurs statiques**, appareils destinés à fournir un courant unidirectionnel à partir d'un courant alternatif. Ces redresseurs ont rendu possible l'emploi de l'énergie électrique transportée par le réseau de courant alternatif pour alimenter de nombreuses machines (moteurs à courant continu, par exemple) ne pouvant fonctionner que sous une tension continue. Les redresseurs statiques ne comportent aucune pièce en mouvement (d'où leur nom), et ils fonctionnent silencieusement sans vieillir ni s'user. Pratiquement, ils ont remplacé tous les dispositifs mis au point avant leur découverte (commutatrice par exemple, V. chap. 19), car aux avantages énumérés il faut en ajouter un, extrêmement important: leur encombrement relativement très faible.

7. STABILISATION

Lorsqu'à la sortie d'un filtre la tension d'ondulation est trop grande pour l'utilisation envisagée, il faut avoir recours au filtrage dynamique obtenu automatiquement en plaçant un stabilisateur de tension à la suite du redresseur et du filtre. De cette façon, il est aussi possible d'éliminer toute répercussion d'une variation de la tension du réseau ou de l'intensité du courant fourni à la charge.

7.1. Stabilisation par diode Zener. — Lorsque le courant à fournir n'est pas trop grand, une diode Zener (V. chap. 7 § 7) peut suffire pour stabiliser la tension aux bornes de la charge (fig. XVIII-30). En effet, si la tension

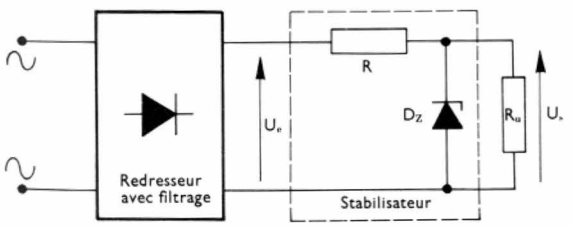
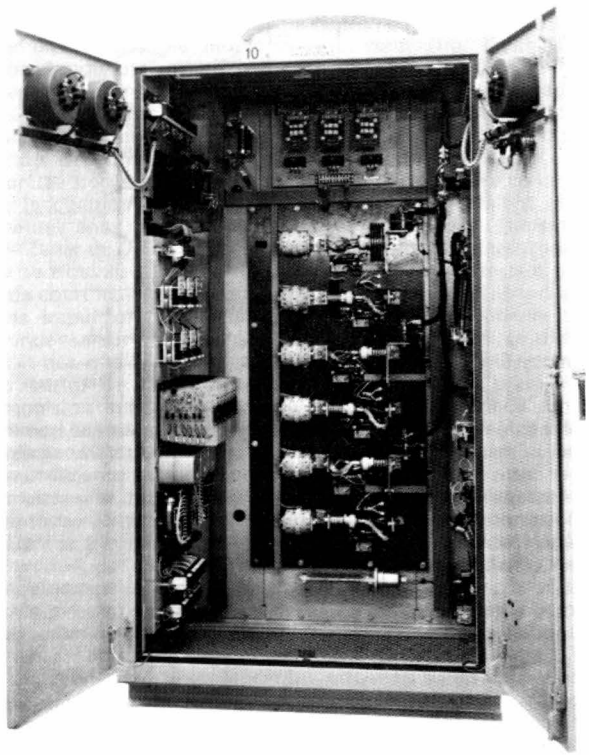


Fig. XVIII-30

de Zener est bien constante, il en est de même de la d.d.p. U_s sous laquelle on alimente R_u. Une étude complète de ce montage montre que la stabilisation apportée est bonne si la résistance R est bien supérieure à la résistance dynamique de la diode $\left(r_d = \frac{dV}{dI}\right)$; cependant, si R est grand, la tension U_s est bien inférieure à U_e, et une partie importante de la puissance fournie par le redresseur est dissipée dans cette résistance R. Ce système ne peut délivrer qu'une seule



Redresseur statique à thyristors 150 A — 460 V (*Alsthom*)

tension, très voisine de la tension de Zener de la diode utilisée. Par ailleurs, la stabilisation n'est possible que si le courant dans R_u est inférieur ou égal au courant dans la diode Zener lorsque R_u est enlevée. Autrement dit, la puissance délivrée par ce régulateur est au maximum égale à la puissance dissipée à vide dans la diode Zener. Par ailleurs, la température de la diode de Zener peut varier dans de grandes proportions et la dérive thermique (variation de U_s en fonction de la température) peut être importante.

7.2. Utilisation d'un transistor monté en collecteur commun (fig. XVIII-31). — Toute variation de la tension aux bornes de R_u (due à une variation de U_e ou de R_u) entraîne une variation de la tension $V_{BE} = U_z - U_s$, donc du courant de base I_B et de la tension $V_{CE} = U_e - U_s$. La tension U_s est toujours sensiblement égale à U_z (un

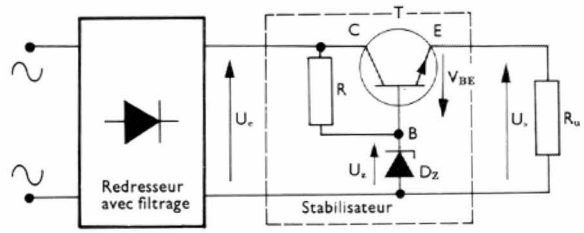


Fig. XVIII-31

peu inférieure à U_z seulement). Pour la charge R_u, l'ensemble redresseur-stabilisateur présente une résistance de sortie assez faible (souvent inférieure à 1 Ω). Pour obtenir une tension stable, de valeur déterminée, ce montage est très intéressant. La dérive thermique est cependant encore assez grande car la dérive due à la diode s'ajoute à celle du transistor.

7.3. Régulateur-série (fig. XVIII-32). — Ce montage est souvent utilisé car ses performances sont bien supérieures à celles des montages précédents. Un de ces avantages est d'offrir la possibilité de régler la tension de sortie très simplement.

La diode Zener, en série avec une résistance R, est

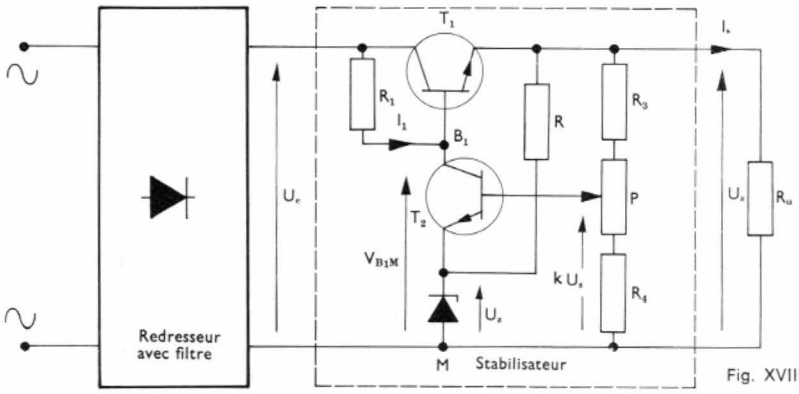
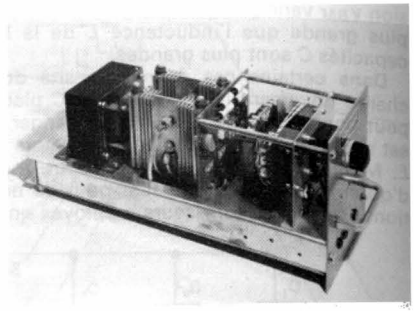


Fig. XVIII-32



Cellule à thyristors de 2kW
(*Sartony-Clémançon*)

alimentée sous la tension U_s ; la tension U_z entre ses bornes peut être considérée comme une *tension de référence fixe* car cette diode est parcourue par un courant sensiblement constant. Comme dans le montage précédent, le transistor T_1 est monté en collecteur commun : la tension U_s est donc légèrement inférieure à V_{B_1M} et elle ne varie pas si V_{B_1M} est constante.

Pour bien comprendre le fonctionnement de ce montage, imaginons que la tension U_e augmente et que cela entraîne une légère croissance de U_s. La tension base-émetteur de T_2, égale à $(kU_s - U_z)$, croît légèrement et le courant collecteur de ce transistor augmente dans de grandes proportions (du fait de l'amplification apportée par T_2). Or, ce courant est sensiblement égal à celui qui traverse la résistance R_1 ; la chute de tension dans R_1 augmente donc et, en revanche, la tension $V_{B_1M} = U_e - R_1 I_1$ reste sensiblement constante car les deux termes varient dans le même sens. Il en est donc de même de la tension U_s.

Les circuits régulateurs réalisés entièrement sous forme intégrée (sur une seule microplaquette de silicium) permettent de bien compenser les dérives thermiques, car tous les composants du montage sont à la même température.

Remarque : Tous les stabilisateurs de tension doivent être protégés contre les surcharges ou les courts-circuits éventuels. En effet, dans un montage comme celui de la figure XVIII-32, la puissance dissipée par le transistor T_1 est :

$$P_C = (U_e - U_s)\, I_s$$

En cas de court-circuit, I_s est très grand et U_s est nul. La puissance dissipée par T_1 devient très grande et il peut être détruit si rien n'est prévu pour dissiper cette puissance ou pour couper le circuit (fusible, par exemple).

8. REDRESSEMENT CONTRÔLÉ

L'un quelconque des montages redresseurs que nous venons d'étudier, permet d'obtenir une tension unidirectionnelle de valeur moyenne déterminée. Le réglage de cette valeur peut être réalisé en ajustant la tension alternative sous laquelle le montage redresseur est alimenté. Cependant, pour des variations assez grandes, cela impose l'emploi d'un autotransformateur à rapport de transformation variable, c'est-à-dire d'un matériel assez volumineux et coûteux. Pour cette raison, ce mode de réglage de la tension continue est peu utilisé surtout depuis que les *thyristors* ont permis la mise au point de matériels simples et peu encombrants. Dans ce cas, ce n'est pas l'amplitude de la tension alternative qui est modifiée mais la *durée d'application de la tension unidirectionnelle* aux bornes de la charge : c'est le *redressement contrôlé*.

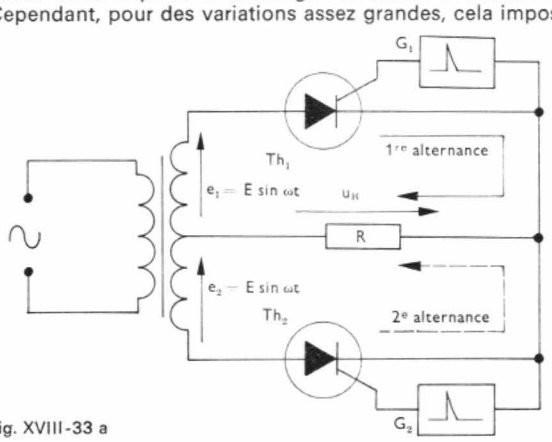


Fig. XVIII-33 a

8.1. Alimentation monophasée. — Avec une alimentation monophasée, c'est le redressement double alternance qui est systématiquement mis en œuvre. Nous retrouvons des montages semblables à ceux employés pour le redressement non contrôlé mais les diodes sont remplacées par des thyristors (fig. XVIII-33 a et b). Toutefois,

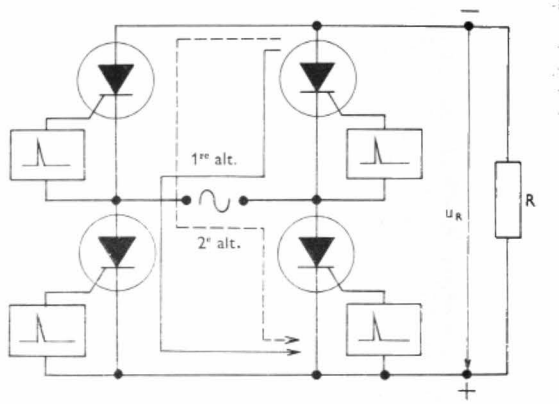


Fig. XVIII-33 b

dans le montage en pont, il est possible de conserver une diode par branche (fig. XVIII-34) : le courant passe obligatoirement à travers une diode et un thyristor, et le contrôle peut être réalisé par l'intermédiaire de ce dernier. Dans tous les cas, si la charge est *purement résistante :*

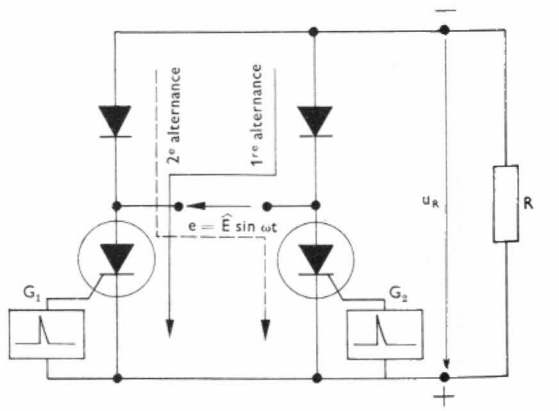


Fig. XVIII-34

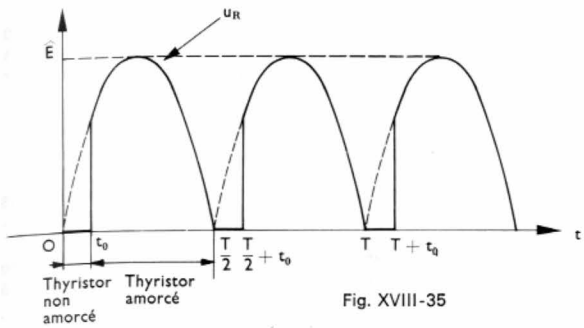


Fig. XVIII-35

— lorsque le thyristor n'est pas amorcé, la d.d.p. aux bornes de la charge est nulle (fig. XVIII-35) ;

— lorsque le thyristor est amorcé, nous pouvons négliger la chute de tension due à celui-ci et la d.d.p. u_R aux bornes de la charge R est égale à la tension alternative appliquée à l'entrée du montage.

La valeur moyenne $U_{R\,moy}$ de la tension unidirectionnelle u_R est donnée par l'expression suivante :

$$U_{R\,moy} = \frac{1}{T/2}\int_{t_0}^{\frac{T}{2}} \hat{E}\sin\omega t\,dt = \frac{2E}{\pi}\left(\frac{1+\cos\omega t_0}{2}\right)$$

Elle diminue quand le retard à l'amorçage augmente et tend vers $\frac{T}{2}$ (fig. XVIII-36).

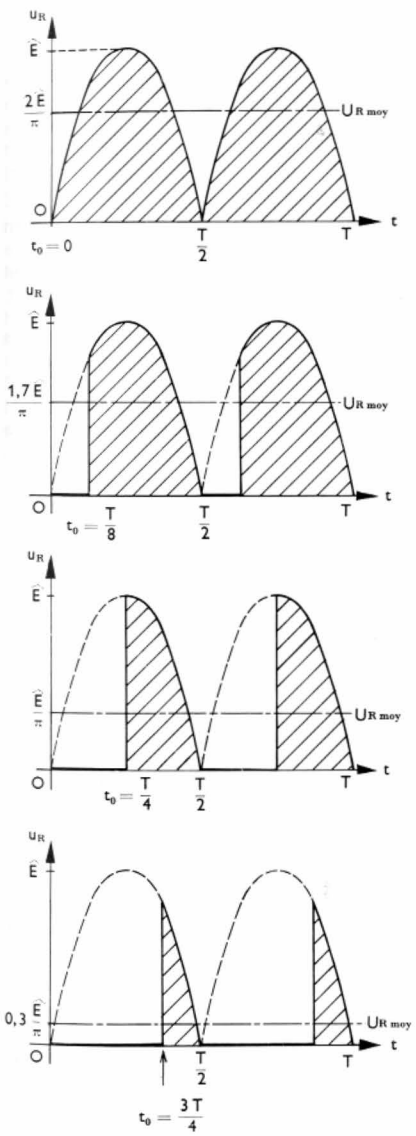


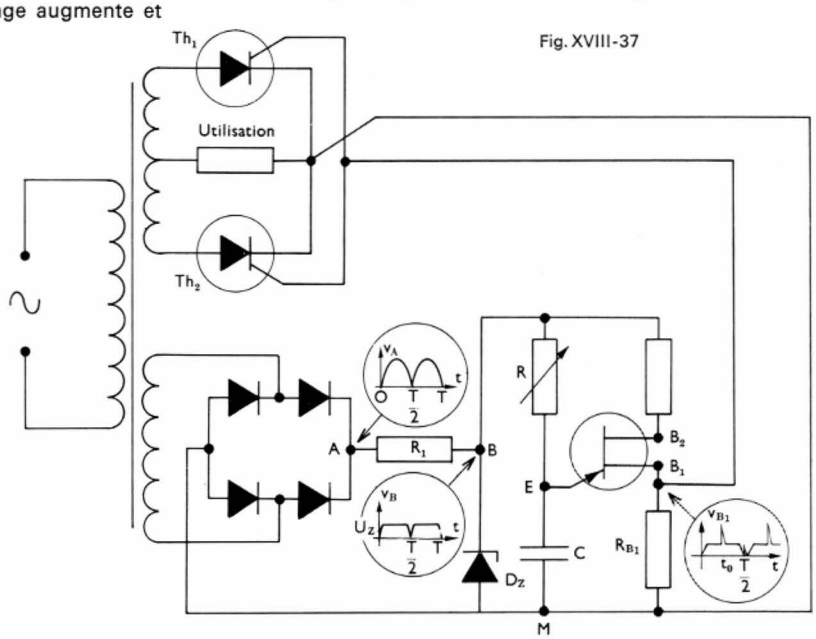
Fig. XVIII-36

Valeur moyenne de la tension aux bornes d'une résistance R dans un redressement double alternance contrôlé selon la valeur du retard à l'amorçage t_0

À titre d'exemple, nous donnons le schéma complet d'un redresseur contrôlé montage va-et-vient (fig. XVIII-37) commandé par un transistor unijonction (V. chap. 11). Les impulsions de commande des thyristors du montage va-et-vient sont fournies par un oscillateur à relaxation alimenté sous une tension unidirectionnelle. La d.d.p. entre les points A et M (sortie du pont redresseur) est écrêtée par une diode Zener D_z. Ainsi, tout se passe comme si le circuit R-C et le transistor unijonction étaient alimentés sous une tension constante et égale à U_z (tension de Zener de D_z) pendant la presque totalité de l'alternance, et se trouvaient placés sous une tension nulle pendant un très court instant au début et à la fin de chaque alternance. Les impulsions de commande sont obtenues lorsque le condensateur C se décharge à travers R_{B_1}, ce qui se produit dès que la tension V_{EM} entre les bornes de C atteint la tension de pic V_p du transistor unijonction. La première impulsion engendrée après le début de l'alternance provoque l'amorçage du thyristor se trouvant sous tension directe ; l'autre thyristor, qui est sous tension inverse, ne peut être rendu conducteur.

Le seuil V_p étant sensiblement égal à une fraction de la tension interbase $V_{B_1B_2}$, il décroît lorsque cette tension diminue. À la fin de chaque alternance, la tension $V_{B_1B_2}$ devenant nulle, il en est de même de V_p et le condensateur se décharge complètement à travers R_{B_1} à ce moment-là

Fig. XVIII-37



(fig. XVIII-38) ; ainsi, la d.d.p. aux bornes de C est bien nulle au début de chaque alternance. De cette manière, le temps t_0 qui s'écoule entre le début d'une alternance et la

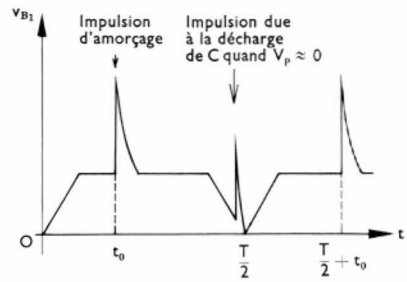


Fig. XVIII-38

production de la première impulsion (temps pour que la d.d.p. aux bornes de C soit égale à V_p) est bien toujours le même. Cette commande par impulsions est particulièrement intéressante : sa mise en œuvre est facile et la puissance fournie aux circuits de commande est limitée au strict minimum.

Si la charge alimentée par le redresseur est inductive

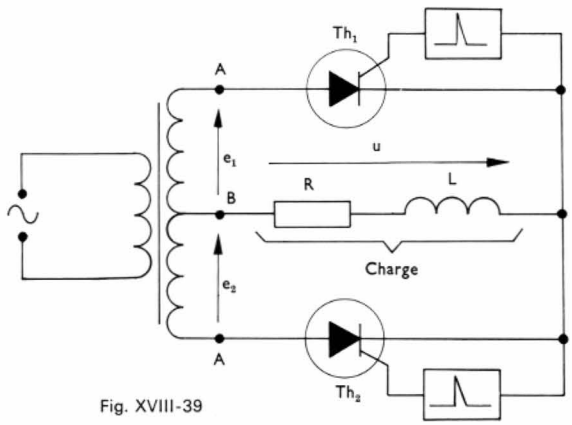


Fig. XVIII-39

(résistance R, inductance L) (fig. XVIII-39), les résultats précédents ne sont plus applicables. L'établissement du courant i se fait progressivement puisque la f.é.m. d'auto-induction $\left(-L\frac{di}{dt}\right)$ s'oppose au passage de ce courant (fig. XVIII-40). En revanche, lorsque la tension alternative et le courant i décroissent, cette f.é.m. d'auto-induction tend à prolonger ce courant. La valeur absolue de cette f.é.m. peut être supérieure à la tension alternative et, bien que celle-ci soit négative, le thyristor se trouve sous tension directe pendant un certain temps.

Si nous négligeons la chute de tension due à un thyristor *lorsqu'il est passant*, la tension u aux bornes de la charge

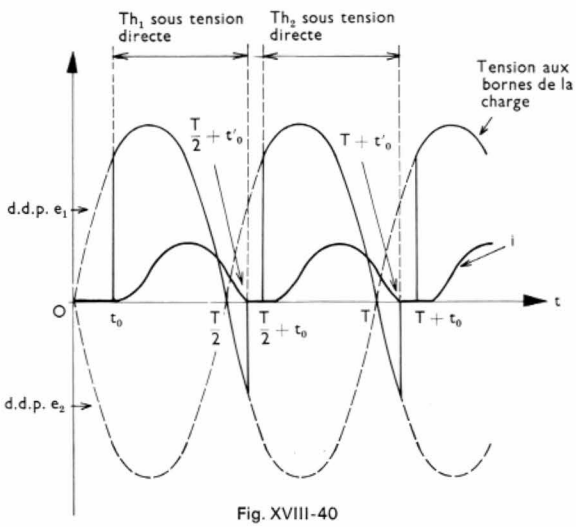


Fig. XVIII-40

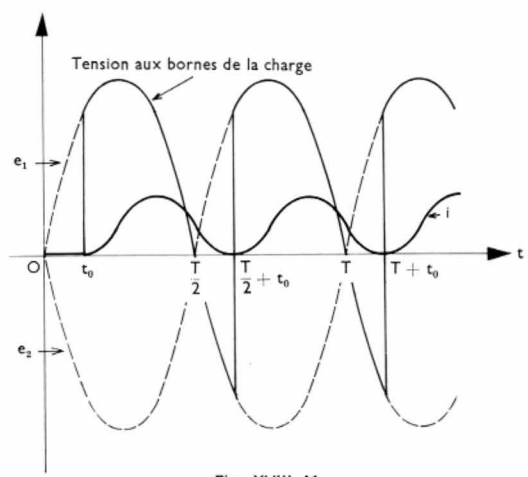


Fig. XVIII-41

est égale à e_1 tant que Th 1 est conducteur et elle est égale à e_2 quand Th 2 est conducteur (fig. XVIII-40). Cette tension u est alternativement positive et négative; sa valeur moyenne U_{moy} est donnée par la relation suivante:

$$U_{moy} = \frac{2\widehat{E}}{\pi}\,\frac{\cos \omega t_0 + \cos \omega t'_0}{2}$$

(si nous prenons encore $e_1 = -e_2 = \widehat{E} \sin \omega t$ et si nous appelons le retard à l'amorçage t_0 et le retard à l'extinction t'_0).

Pour une valeur L_c du coefficient d'auto-induction de la charge, t'_0 est égal à t_0 (fig. XVIII-41); L_c est appelé *inductance critique*. Si l'inductance L est supérieure à L_c, le courant dans la charge n'est jamais interrompu (fig. XVIII-42), et ses ondulations sont très atténuées.

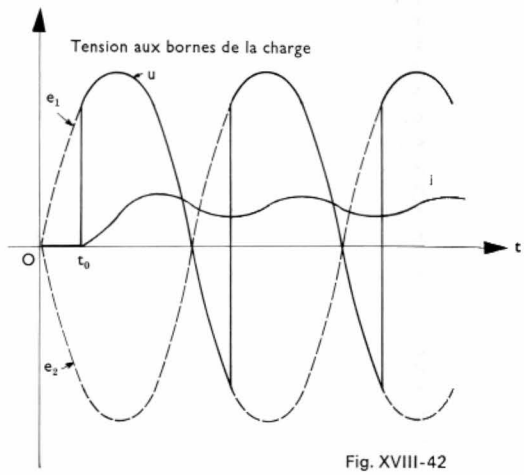


Fig. XVIII-42

8.2. Alimentation triphasée. — Les montages utilisés pour le redressement non contrôlé peuvent facilement être adaptés au cas du redressement contrôlé: il suffit de remplacer les diodes par des thyristors (fig. XVIII-43 et XVIII-44). Précisons que, comme dans le cas précédent, chaque branche d'un pont peut comporter une diode et un thyristor au lieu de deux thyristors. Toutefois, si la charge est un moteur pour lequel un freinage par récupération est nécessaire (V. t. 1, Électrotechnique, chap. 18), les six thyristors sont indispensables puisque le pont fonctionne en onduleur durant les périodes de freinage (V. chap. 19).

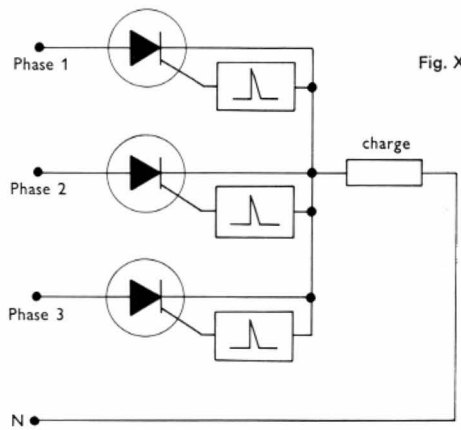


Fig. XVIII-43

8.3. Problèmes posés par l'emploi des thyristors. Les thyristors sont des dispositifs à la fois très robustes et très fragiles. La durée de vie d'un thyristor convenablement utilisé est pratiquement illimitée mais un échauffement anormal ou un court-circuit accidentel peut être la cause d'une destruction extrêmement rapide (les protections par fusibles, même à haut pouvoir de coupure, sont inefficaces dans la plupart des cas). Les circuits de commande et d'utilisation doivent donc être conçus avec

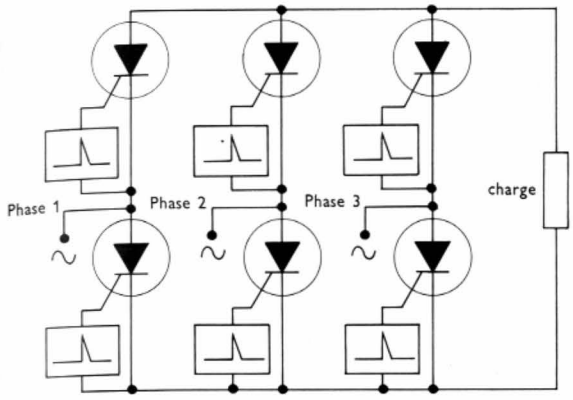


Fig. XVIII-44

beaucoup d'attention. L'impulsion d'amorçage appliquée au circuit de commande doit être convenablement calibrée ; sa montée doit être rapide afin de provoquer une mise en conduction brutale. La valeur de crête (ou « hauteur ») de l'impulsion doit être suffisante pour provoquer à coup sûr l'amorçage ; elle ne doit cependant pas être trop grande pour ne pas échauffer localement la jonction gâchette-cathode (il faut limiter les pertes dans le thyristor pendant l'amorçage afin de ne pas élever la température moyenne de fonctionnement).

Le passage de l'état conducteur à l'état bloqué n'est pas instantané : les électrons qui se trouvent dans la couche de blocage doivent être éliminés (ils peuvent se recombiner avec des trous mais un certain nombre d'entre eux retraversent la jonction de blocage). Le retour à l'état non conducteur peut demander plusieurs microsecondes. Par ailleurs, la croissance du courant direct ne doit pas être trop brutale (les constructeurs précisent la valeur maximale autorisée pour le rapport $\frac{dI}{dt}$). Notons également que les surtensions accidentelles, même de très faible durée, peuvent provoquer l'amorçage du thyristor.

Signalons que les circuits contenant des thyristors provoquent des parasites très importants dus aux mises en conduction et aux ruptures très brutales de courants de grande intensité.

CHAPITRE XIX

CONVERSION DU COURANT CONTINU ET DU COURANT ALTERNATIF

Le *courant continu* est absolument nécessaire pour certaines applications telles que la charge des accumulateurs ou des opérations électrochimiques. En revanche, le *courant alternatif* est particulièrement intéressant pour la production et le transport sous haute tension. Cela explique que la conversion d'une forme de courant en une autre est souvent recherchée et des dispositifs électromécaniques ou électroniques sont utilisés dans ce but. Il faut distinguer :

— les **convertisseurs électromagnétiques** qui comprennent les *groupes convertisseurs* et les *commutatrices* (V. t. 1, Électrotechnique, chap. 20) ;

— les **convertisseurs statiques** qui comportent des éléments semiconducteurs tels des *thyristors* (V. chap. 11), des *diodes à jonction* (V. chap. 7) et éventuellement des tubes à gaz (V. chap. 4).

Nous pouvons aussi classer schématiquement les convertisseurs selon la transformation qu'ils permettent de réaliser.

— Les **redresseurs** sont utilisés pour la conversion du courant alternatif en courant continu.

— Les **onduleurs** sont employés pour la transformation inverse.

— Les **convertisseurs continu-continu** fournissent une tension continue, généralement plus grande que la tension aux bornes du générateur de courant continu qui les alimente.

— Les **convertisseurs alternatif-alternatif** permettent de modifier l'amplitude ou la fréquence du courant.

Les redresseurs ayant déjà été étudiés (V. chap. 18), ce chapitre concerne les onduleurs et les convertisseurs continu-continu ou alternatif-alternatif qui peuvent d'ailleurs être ramenés à des groupements d'onduleurs et de redresseurs.

Un onduleur est alimenté à partir d'une source de courant continu et il fournit du courant alternatif. Nous pouvons distinguer deux sortes d'onduleurs :

— l'**onduleur assisté,** encore appelé **onduleur non autonome,** qui est utilisé pour fournir du courant électrique à un réseau alternatif. Pour satisfaire les conditions d'amplitude, de fréquence et de phase nécessaires pour l'alimentation d'un réseau (V. t. 1, Électrotechnique, chap. 10, § 3), la commande de l'onduleur est assurée par le secteur lui-même (d'où son nom d'onduleur assisté) ;

— l'**onduleur autonome** surtout utilisé pour fournir de l'énergie à un réseau passif ne comportant pas de source de courant. Il délivre une tension d'amplitude, de fréquence et de phase réglables mais dont les valeurs lui sont propres. Dans un *onduleur auto-oscillant,* les impulsions nécessaires à la commande sont prélevées dans le circuit d'utilisation ; dans un *onduleur piloté,* ces signaux de commande sont fournis par un oscillateur indépendant.

1. ONDULEURS MONOPHASÉS

Dans un onduleur nous pouvons distinguer trois parties :

— un ensemble d'éléments permettant la conversion du courant continu en courant alternatif (généralement courant en créneaux), c'est le *mutateur ;*

— un *filtre* dont le rôle est d'éliminer les harmoniques du courant alternatif afin de ne garder que la composante fondamentale sinusoïdale ;

— *un dispositif de commande et de régulation* pour stabiliser l'amplitude de la tension de sortie.

1.1. Le mutateur. — Afin de mieux comprendre le mutateur monophasé qui met en œuvre des thyristors (ou des tubes à gaz) nous rappellerons le fonctionnement du *mutateur à vibreur* dont l'intérêt est surtout didactique.

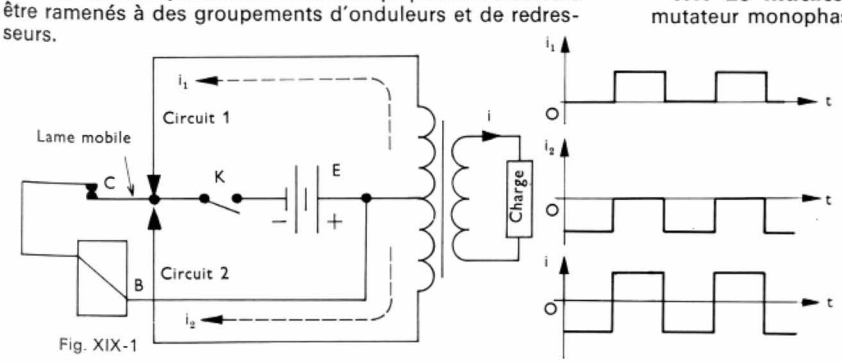


Fig. XIX-1

1.1.1. Le mutateur à vibreur (fig. XIX-1). — Il comporte un contact inverseur *C* qui est actionné par un électroaimant *B* alimenté à travers ce contact *C*. Celui-ci est fermé lorsque l'interrupteur *K* est ouvert. Dès que l'interrupteur *K* est fermé, le courant passe dans *B* et la tige portant le contact *C* est attirée ; celui-ci s'ouvre, la bobine *B*

n'est donc plus alimentée et C revient à sa position de repos. L'alimentation de B est donc interrompue périodiquement et la tige portant C effectue un mouvement de va-et-vient qui permet de fermer alternativement les circuits 1 et 2. Le courant fourni par la batterie passe successivement dans chaque demi-enroulement primaire du transformateur et les courants i_1 et i_2 (en général de même intensité) circulent dans des sens opposés dans le primaire. Le flux magnétique engendré est alternatif ainsi que la f.é.m. induite dans l'enroulement secondaire. Le courant i qui traverse la charge est donc alternatif; il se rapproche davantage d'un courant en créneaux que d'un courant sinusoïdal si le circuit est très résistant.

1.1.2. Le mutateur va-et-vient. — Il est directement inspiré du mutateur à vibreur: le vibreur est remplacé par deux thyristors Th 1 et Th 2 qui sont amorcés à tour de rôle de sorte que l'un est conducteur pendant que l'autre est bloqué et inversement. Un courant alternatif non sinusoïdal traverse la charge (fig. XIX-2). La fréquence du courant alternatif peut être réglée en faisant varier la fréquence des impulsions de commande.

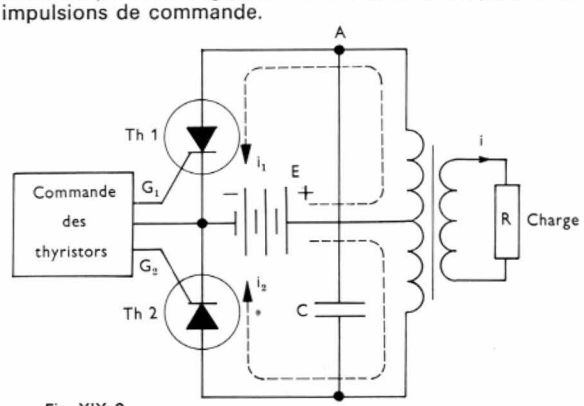


Fig. XIX-2

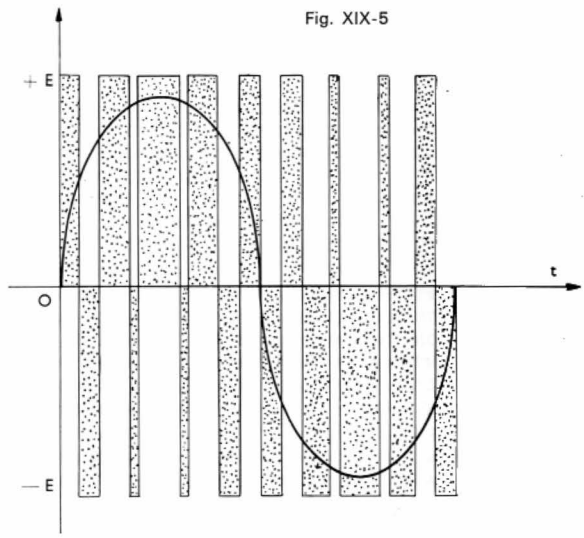
Pour bien comprendre le fonctionnement de ce mutateur, il faut s'arrêter un instant sur les problèmes posés par l'extinction des thyristors; en effet, il faut rappeler qu'un circuit de commande est sans action sur un thyristor amorcé. Pour rendre non conducteur un thyristor traversé par un courant, il faut le placer sous tension inverse pendant un très court instant (temps nécessaire pour que la jonction de blocage soit reformée) ; lorsque le circuit comportant le thyristor est alimenté en courant continu, il faut prévoir des éléments qui permettent de réaliser cette opération. Dans le mutateur va-et-vient, l'emploi d'un condensateur C, en parallèle avec le primaire du transformateur, constitue un moyen simple et commode pour obtenir ce résultat. Pour bien le montrer, supposons initialement Th 1 conducteur et Th 2 bloqué; le condensateur C se charge à travers Th 1, le potentiel V_A du point A étant négatif par rapport au potentiel V_B du point B. Lorsque Th 2 devient conducteur, la d.d.p. à ces bornes devient pratiquement négligeable et la tension V_{AB} est appliquée aux bornes de Th 1 qui est alors placé sous tension inverse et qui se bloque. Le condensateur C se charge ensuite à travers Th 2 de telle sorte que V_A devient supérieur à V_B. Lorsque Th 1 redevient conducteur, l'action du condensateur est inversée et a pour effet de bloquer Th 2.

1.1.3. Le mutateur à thyristors en cascade. — Deux générateurs identiques (G_1 et G_2) et deux thyristors montés en cascade (fig. XIX-3) permettent d'éviter l'emploi du transformateur à point milieu. Comme dans le montage précédent les thyristors sont amorcés à tour de rôle et les courants i_1 et i_2 traversent alternativement la charge R; comme leurs sens sont opposés, le courant i dans la charge est alternatif. Dans la pratique, les deux générateurs G_1 et G_2 sont remplacés par une seule source et deux condensateurs, qui se déchargent à tour de rôle dans la charge et permettent d'obtenir un point milieu fictif (fig. XIX-4).

Ces deux types de mutateurs sont utilisés pour fournir des puissances de 10 à 500 kVA.

1.1.4. Le mutateur à largeur d'impulsions modulée. Si nous appliquons aux gâchettes de commande des thyristors des impulsions possédant une fréquence variable et judicieusement choisie, nous pouvons recueillir un courant de sortie en créneaux de largeur variable (largeur modulée) sensiblement équivalent à un courant sinusoïdal sans qu'il soit nécessaire d'utiliser un dispositif de filtrage (fig. XIX-5).

Fig. XIX-5



1.1.5. Le mutateur en pont. — Ce montage est inspiré du mutateur à thyristors en cascade mais deux thyristors remplacent les deux condensateurs (fig. XIX-6). Dans un premier temps les thyristors Th 1 et Th 4 sont amorcés tandis que Th 2 et Th 3 sont bloqués : le courant i_1 a le sens indiqué sur le schéma. Ensuite, les thyristors Th 2 et Th 3 sont amorcés alors que Th 1 et Th 4 sont bloqués, c'est un courant i_2 qui traverse alors la charge

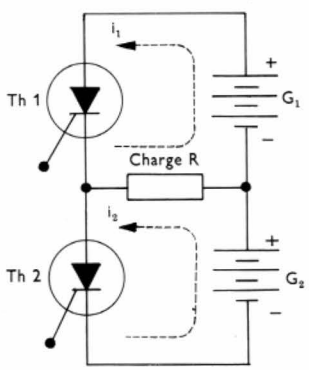


Fig. XIX-3

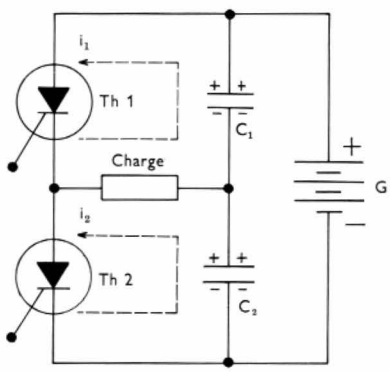


Fig. XIX-4

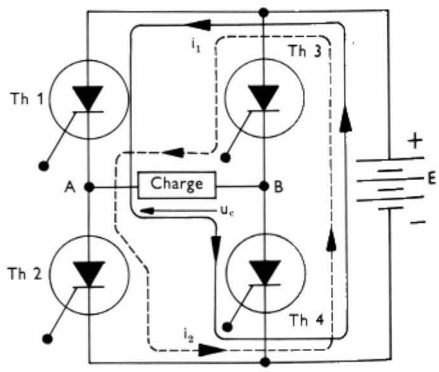


Fig. XIX-6

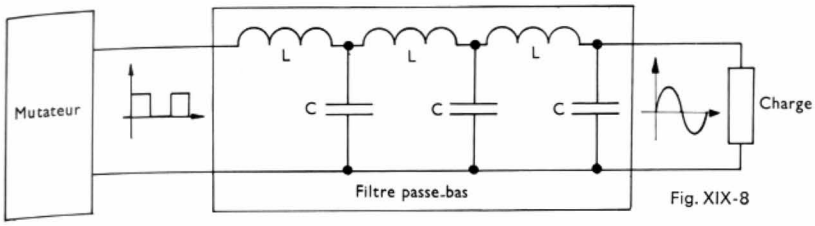


Fig. XIX-8

dans le sens opposé à celui de i_1. Nous obtenons bien un courant alternatif dans la charge. Utilisé de cette façon, ce montage ne présenterait guère d'avantages par rapport au mutateur à thyristors en cascade ; en pratique, il est très intéressant car la tension de sortie est réglable. En effet, si les thyristors Th 1 et Th 4 ne sont pas amorcés simultanément mais si leurs commandes sont décalées d'un temps t_c et s'il en est de même pour Th 2 et Th 3, la conduction dans la charge est interrompue durant certains moments de la période. Pour bien mettre en évidence cette possibilité de réglage, examinons l'état des thyristors durant une période T (fig. XIX-7). De l'instant 0 à $\left(\frac{T}{2} - t_c\right)$, Th 1 et Th 4 étant amorcés, la tension u_c aux bornes de la charge ($u_c = V_A - V_B$) a pour valeur E (nous négligeons la chute de tension dans les thyristors). De $\left(\frac{T}{2} - t_c\right)$ à $\frac{T}{2}$, Th 2 et Th 4 sont bloqués et la tension u_c est nulle. Entre $\frac{T}{2}$ et $(T - t_c)$, Th 2 et Th 3 conduisent et, avec les conventions choisies, u_c est égale à $-E$. De $(T - t_c)$ à T, Th 1 et Th 3 sont bloqués et u_c est nulle de nouveau. En réglant le temps t_c pendant lequel le courant ne passe pas dans la charge nous pouvons bien modifier la valeur efficace de la tension de sortie. Celle-ci est donnée par l'expression suivante :

$$U_c^2{}_{\text{eff}} = \frac{1}{T}\int_0^T u_c^2 dt = \frac{1}{T}\left(\int_0^{t_c} 0\ dt + \int_{t_c}^{T/2} E^2 dt + \int_{T/2}^{T/2\ +\ t_c} 0\ dt + \int_{T/2\ +\ t_c}^{T} E^2 dt\right)$$

En intégrant mathématiquement, nous obtenons :

$$U_c^2{}_{\text{eff}} = \frac{1}{T}\left[E^2 T - 2E^2 t_c\right]$$

et :

$$U_{c\ \text{eff}} = E\sqrt{1 - \frac{2\,t_c}{T}}$$

Plus l'intervalle de temps t_c est grand, plus la tension efficace aux bornes de la charge est faible.

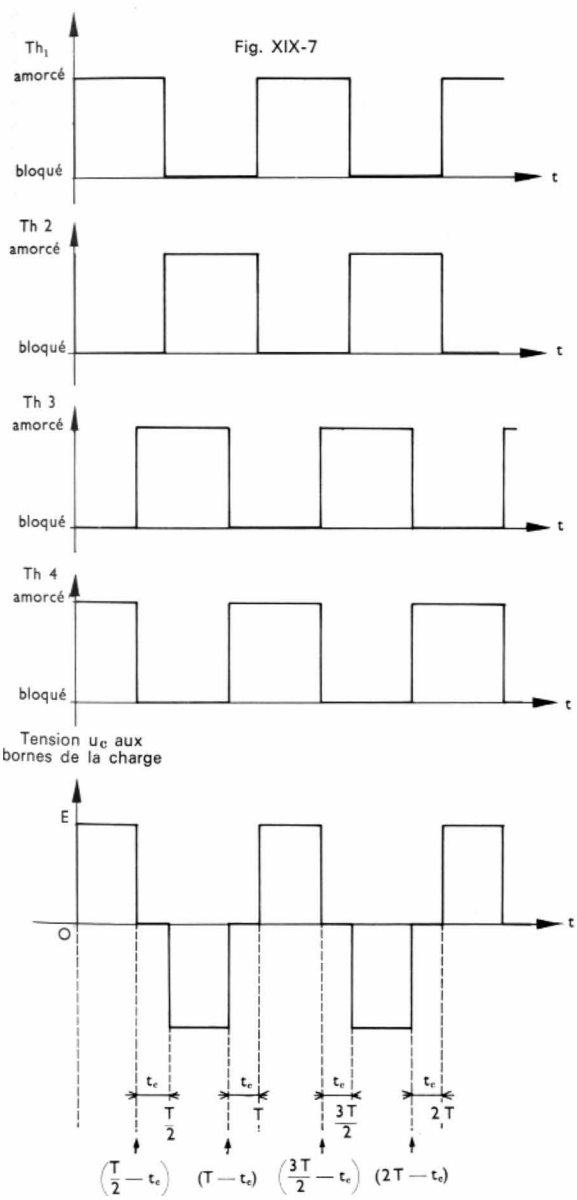


Fig. XIX-7

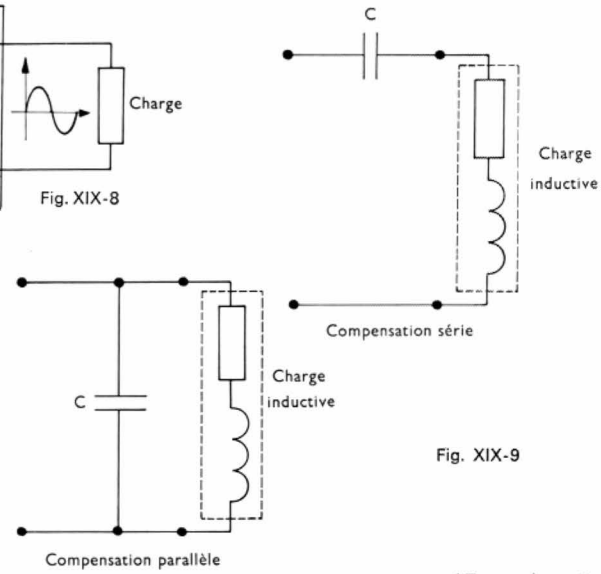


Fig. XIX-9

1.2. Le filtre. — La tension de sortie du mutateur est alternative mais rarement sinusoïdale. Elle peut être rendue sinusoïdale par filtrage au moyen de condensateurs et de bobines groupés en circuits résonnants ou antirésonnants (fig. XIX-8) ; le filtre (V. chap. 12) se place entre le mutateur et la charge.

Le filtrage peut être amélioré du fait de la présence d'un *dispositif de compensation* de facteur de puissance. Ce circuit de compensation est associé à la charge car il convient de réduire le plus possible la puissance réactive qui doit être fournie par le mutateur. Souvent, c'est un condensateur ; il est placé en série ou en parallèle avec la charge à compenser (fig. XIX-9) car celle-ci est inductive. Ce condensateur contribue à éliminer les harmoniques et il améliore beaucoup les qualités du filtrage.

1.3. Le dispositif de commande et de régulation. Dans les différents mutateurs étudiés, la commande des thyristors se fait au moyen d'impulsions. Celles-ci proviennent d'un *oscillateur pilote* (la fréquence peut alors être réglée avec une grande précision) ou bien du *circuit alternatif alimenté* lui-même (secteur, par exemple) dans le cas d'un onduleur assisté ou encore du *circuit d'utilisation* propre de l'onduleur dans le cas d'un onduleur autooscillant. Avant d'être appliquées aux thyristors, ces impulsions peuvent être amplifiées si cela est nécessaire ; elles peuvent aussi être déphasées si une commande dissy-

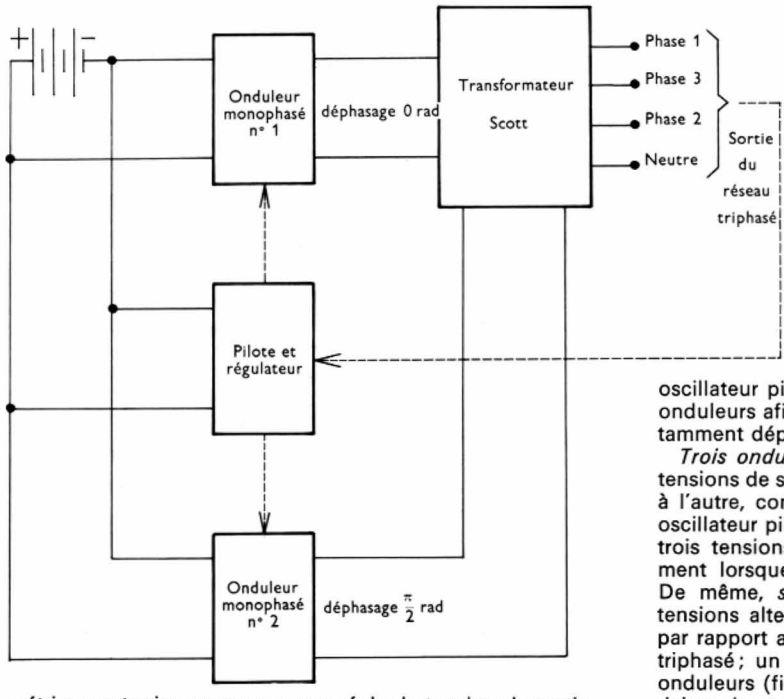


Fig. XIX-10

métrique est mise en œuvre pour régler la tension de sortie comme dans un mutateur en pont.

2. ONDULEURS TRIPHASÉS

Ce sont des onduleurs qui fournissent un système triphasé de courants et qui sont constitués soit par des associations d'onduleurs monophasés, soit par des dispositifs directement dérivés des montages redresseurs triphasés.

2.1. Association d'onduleurs monophasés. — À l'aide d'un transformateur Scott (V. t. 1, Électrotechnique, chap. 8) il est possible d'obtenir un système triphasé de tensions à partir d'un système diphasé. Un onduleur triphasé peut donc être réalisé en associant *deux onduleurs monophasés et un transformateur Scott* (fig. XIX-10). Un oscillateur pilote est nécessaire pour commander les deux onduleurs afin que les deux tensions de sortie soient constamment déphasées de 90° (d.d.p. dites diphasées).

Trois onduleurs monophasés couplés en étoile, dont les tensions de sortie sont déphasées de 120° l'une par rapport à l'autre, constituent également un onduleur triphasé. Un oscillateur pilote permet de conserver le décalage entre les trois tensions et de régler chaque onduleur indépendamment lorsque la charge est déséquilibrée (fig. XIX-11). De même, *six onduleurs* monophasés qui délivrent des tensions alternatives convenablement déphasées les unes par rapport aux autres, permettent de réaliser un onduleur triphasé ; un oscillateur pilote doit commander les divers onduleurs (fig. XIX-12). Un couplage particulier des secondaires des transformateurs de sortie doit être réalisé pour obtenir un système triphasé de tensions. En effet, appelons *A*, *B*, *C*, *D*, *E* et *F* les six onduleurs et $U_{S\ \text{eff}}$ la tension entre une phase et le neutre ; les onduleurs *B*, *C* et *F*, dont les transformateurs de sortie ne comportent qu'un seul secondaire, délivrent une tension égale à $\frac{U_{S\ \text{eff}}}{2}$ tandis que les onduleurs *A*, *D* et *E*, disposant d'un transformateur de sortie à deux secondaires, fournissent à la sortie de chaque secondaire une tension égale à $\frac{U_{S\ \text{eff}}}{2\sqrt{3}}$. Les valeurs des tensions résultantes sont obtenues vectoriellement (fig. XIX-13) ; grâce à des connexions judicieuses entre enroulements, les tensions de sortie forment un système triphasé. Ce montage possède la propriété intéressante d'éliminer

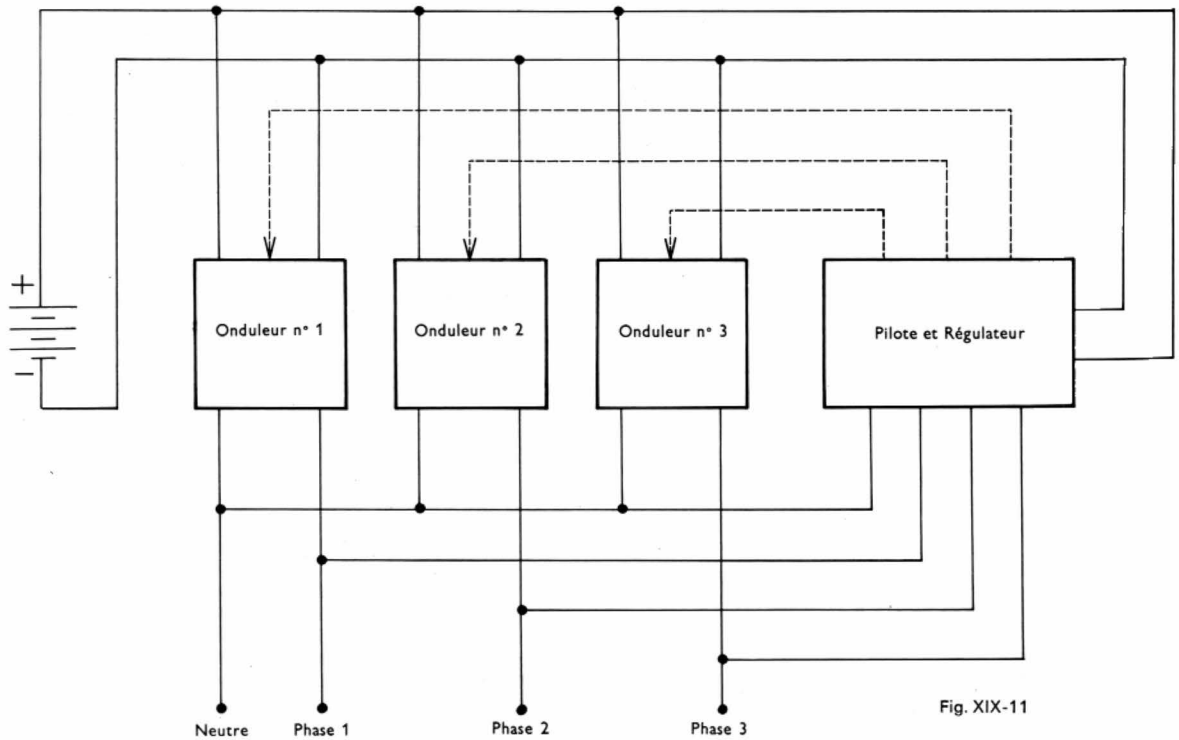


Fig. XIX-11

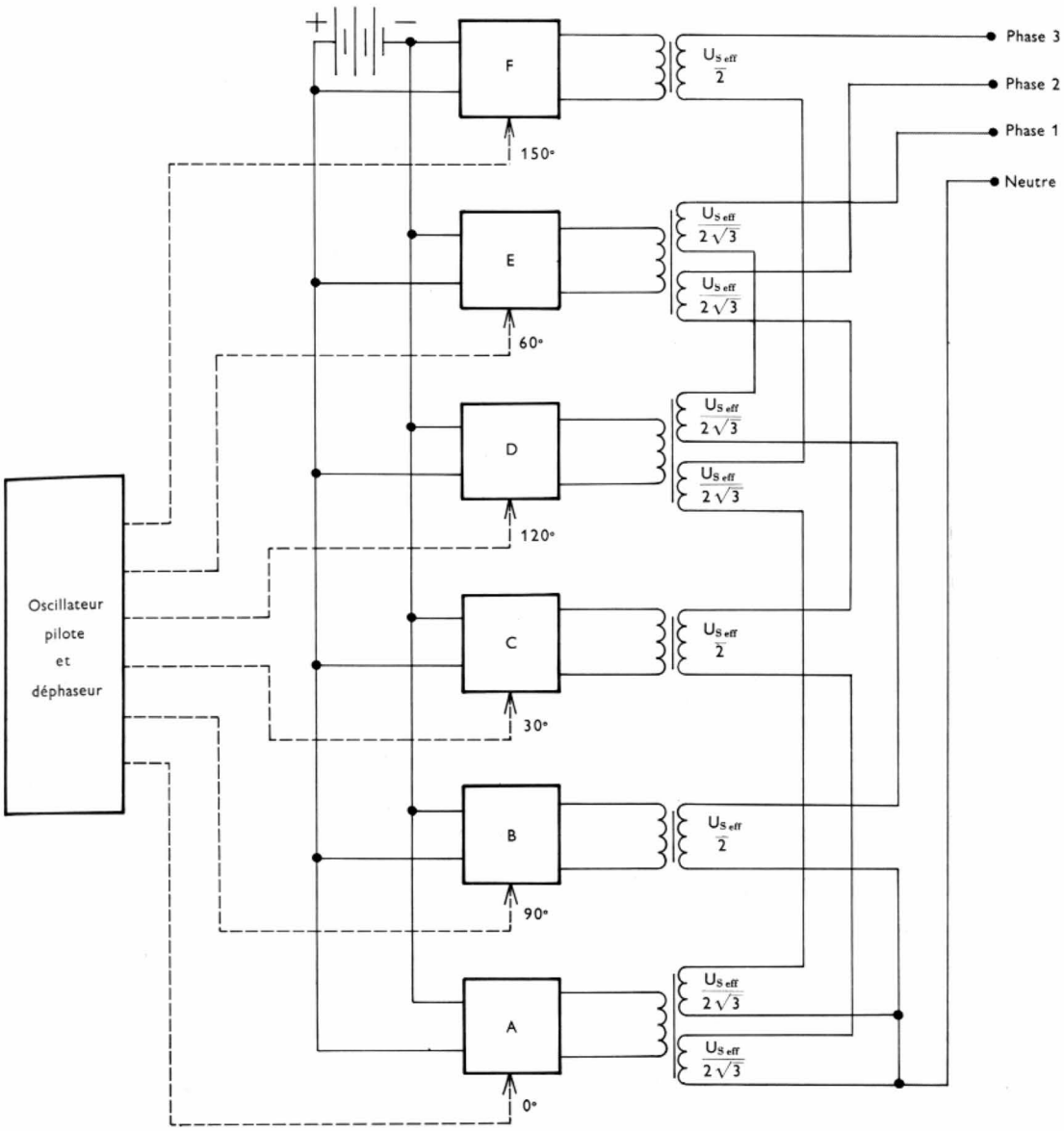


Fig. XIX-12

pratiquement tous les harmoniques jusqu'au dixième, ce qui évite l'emploi d'un filtre pour obtenir une tension sinusoïdale.

2.2. Onduleurs dérivés des montages redresseurs triphasés. — Un *onduleur triphasé étoile* (fig. XIX-14) présente beaucoup de ressemblances avec un redresseur triphasé étoile. Dans les deux cas, trois thyristors sont rendus conducteurs à tour de rôle. La source de courant

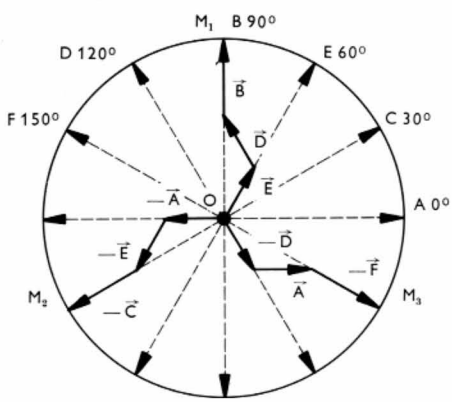


Fig. XIX-13

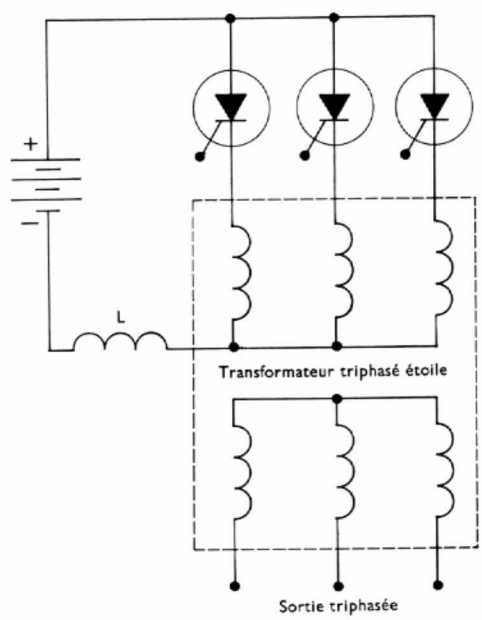


Fig. XIX-14

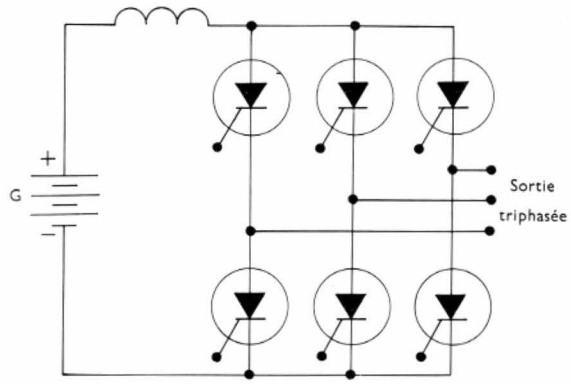


Fig. XIX-15

continu alimente successivement chacun des enroulements pendant un tiers de période du courant alternatif désiré.

Un *onduleur triphasé en pont* (fig. XIX-15), dérivé du redresseur du même nom, peut fonctionner en onduleur ou en redresseur (dans ce cas, le générateur *G* est remplacé par un récepteur).

3. ONDULEUR RÉVERSIBLE

C'est un onduleur qui peut fonctionner indifféremment en redresseur ou bien en onduleur ; il présente notamment l'avantage de pouvoir être utilisé pour recharger les batteries qui l'alimentent lorsqu'il joue le rôle d'un onduleur. Le mutateur va-et-vient, étudié précédemment, se prête aisément à ce fonctionnement réversible : il suffit d'inverser les pôles de la batterie et de remplacer la charge par le réseau alternatif, et inversement (fig. XIX-16).

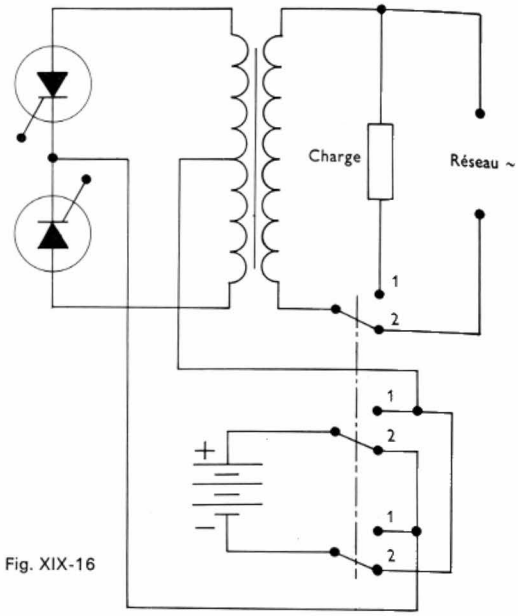


Fig. XIX-16

Position 1: Fonctionnement en onduleur
Position 2: Fonctionnement en redresseur

4. APPLICATIONS DES ONDULEURS

Les applications des onduleurs sont nombreuses, en particulier celles des onduleurs autonomes.

4.1. Applications des onduleurs assistés. — Le transport de l'énergie électrique sous forme de courant continu permet d'éviter certains problèmes posés par le courant alternatif. Des courants alternatifs produits sous une haute tension sont redressés pour obtenir un courant continu sous une très haute tension, par exemple 1 000 kV, afin de réaliser des conditions de transport économiques. C'est ainsi que des lignes de transport de courant continu ont été placées entre la France et la Grande-Bretagne, entre la Suède et le Danemark (souvent lorsqu'il s'agit de traverser des étendues d'eau). Les courants alternatifs sont redressés au départ de la ligne puis convertis à l'arrivée (fig. XIX-17). Le transport de l'énergie s'effectuant tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre sens, il a été nécessaire d'utiliser des onduleurs réversibles en pont puisqu'ils peuvent servir indifféremment d'onduleurs ou de redresseurs.

Des moteurs à courant continu de grande puissance sont parfois alimentés à l'aide de redresseurs. Durant les périodes de freinage, comme le moteur fonctionne alors en générateur (il reçoit de l'énergie mécanique), le courant continu produit peut être transformé en courant alternatif au moyen d'un onduleur assisté. L'énergie ainsi récupérée est renvoyée dans le réseau (freinage avec récupération, V. t. 1, Électrotechnique, chap. 18).

4.2. Applications des onduleurs autonomes. — Ils peuvent remplacer rapidement et automatiquement un réseau défaillant afin que toute panne ou toute baisse de tension affectant celui-ci reste sans conséquence pour l'utilisateur. L'*onduleur réversible de secours* (fig. XIX-18) est disposé en parallèle avec l'installation à suppléer ; durant les instants où il ne fonctionne pas en onduleur, il joue le rôle d'un redresseur et est utilisé pour recharger les batteries qui l'équipent. Lorsqu'une anomalie affecte le

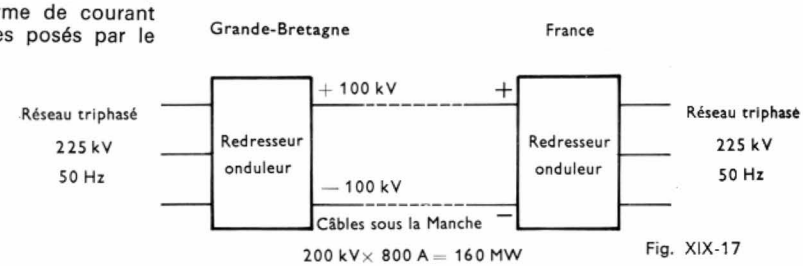


Fig. XIX-17

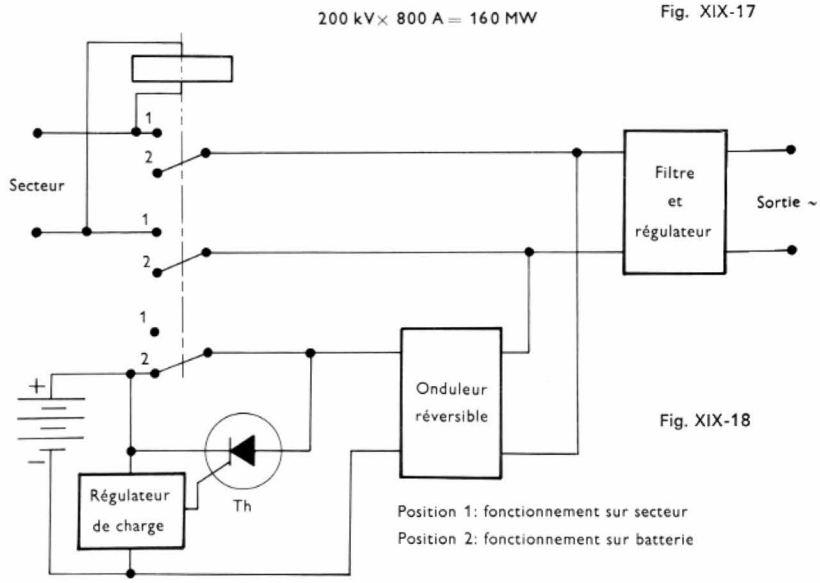


Fig. XIX-18

Position 1: fonctionnement sur secteur
Position 2: fonctionnement sur batterie

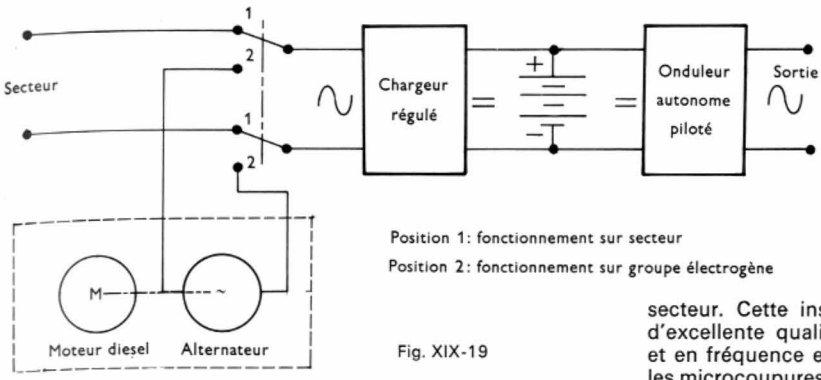


Fig. XIX-19

fonctionnement du réseau, l'onduleur prend aussitôt la relève et fournit une tension sinusoïdale identique en amplitude et en fréquence à celle qui est appliquée normalement aux bornes de ce réseau. Cette substitution des sources de courant est commandée par un contacteur dont la durée d'intervention est inférieure à deux périodes $\left(\frac{1}{25}\text{ de seconde}\right)$. La baisse de tension atteint environ 60 % de la tension de fonctionnement avec un contacteur électromagnétique et 10 % avec un contacteur à thyristors. Cette baisse de tension n'est gênante que pour certains dispositifs électroniques, en particulier pour les ordinateurs où toute variation de la tension d'alimentation doit être soigneusement évitée. Avec ces appareils, les coupures d'alimentation même de courte durée ne sont pas admissibles et il faut employer une *alimentation permanente de sécurité* plus élaborée que la précédente. Le montage de la figure XIX-19 représente un exemple d'une telle alimentation mettant en œuvre un onduleur piloté. La batterie est chargée au moyen du redresseur alimenté par le secteur et la source de courant unidirectionnel ainsi constituée est reliée à l'onduleur qui fonctionne en permanence. En cas de défaillance de courte durée du secteur, la batterie peut alimenter l'onduleur et il n'y a aucune répercussion sur le circuit d'utilisation. Si la panne se prolonge, un groupe électrogène peut être substitué au secteur. Cette installation fournit une tension alternative d'excellente qualité, parfaitement stabilisée en amplitude et en fréquence et exempte d'harmoniques. Par ce moyen les microcoupures sont évitées. Le rendement de l'ensemble est proche de 80 %.

5. LES CONVERTISSEURS CONTINU-CONTINU

Ils permettent de convertir un courant continu en un autre courant continu mais qui est fourni sous une tension différente, plus grande en général. Un tel convertisseur peut être considéré comme l'association d'un onduleur et d'un redresseur: le premier appareil fournit une tension alternative à partir d'une tension continue; la d.d.p. alternative est ensuite élevée au moyen d'un transformateur et le secondaire de ce dernier est relié à l'entrée d'un redresseur qui restitue un courant unidirectionnel (fig. XIX-20).

6. LES CONVERTISSEURS ALTERNATIF-ALTERNATIF

Le changement de tension sans changement de fréquence peut être obtenu très facilement à l'aide d'un transformateur. En revanche, lorsqu'un changement de fréquence est nécessaire, le convertisseur alternatif-alternatif est particulièrement intéressant. Il est équivalent à un redresseur suivi d'un onduleur (fig. XIX-21). Le redresseur est alimenté sous la tension alternative (le secteur, par exemple); il fournit un courant unidirectionnel à un onduleur qui restitue un courant alternatif de fréquence réglable. Ce convertisseur est utilisable pour l'alimentation des moteurs alternatifs dont la vitesse doit être réglée (V. t. 1, Électrotechnique, chap. 12, § 26).

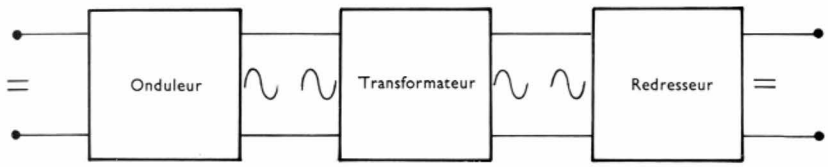


Fig. XIX-20

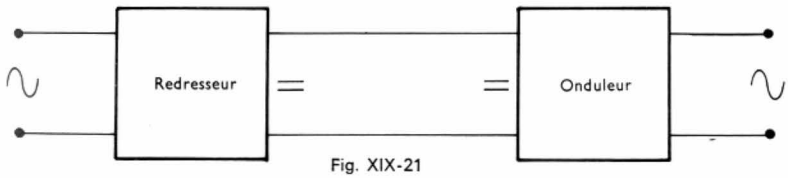


Fig. XIX-21

CHAPITRE XX

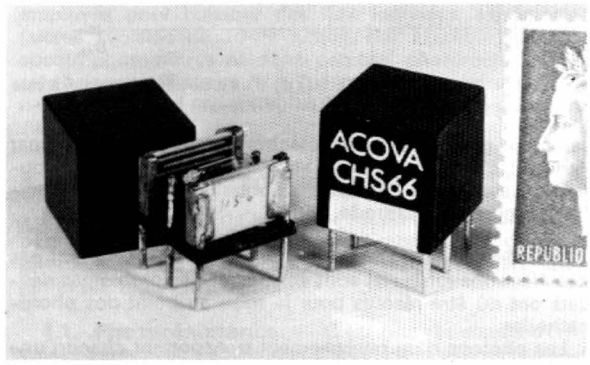
DISPOSITIFS PHOTOÉLECTRIQUES

Lorsque certains corps sont éclairés, autrement dit lorsqu'ils interceptent les photons d'un rayonnement lumineux (V. t. 1, Optique, chap. 4) il peut y avoir:

1° *émission d'électrons*: c'est l'*effet photoélectrique externe* ou *photoémission* (effet découvert par Hertz en 1887);

2° *variation de la résistivité* du corps irradié: c'est l'*effet photoélectrique interne* ou *photoconduction* qui s'observe avec des semiconducteurs faiblement dopés;

3° *apparition d'une f.é.m.* au contact entre deux semiconducteurs de types opposés (jonction P-N) ou entre un métal et un semiconducteur: c'est l'*effet photovoltaïque*. L'étude de ces différents effets constitue l'*optoélectronique*. Divers dispositifs photoélectriques (ou optoélectroniques) mettent en œuvre l'un ou l'autre de ces effets comme nous allons le voir à présent.



Module optoélectronique CHS 66 (*Segor*)

1. TUBES PHOTOÉLECTRIQUES À VIDE

Un tube photoélectrique à vide comprend deux électrodes placées dans un tube où règne un vide poussé : une cathode photoémissive et une anode souvent réduite à un fil afin qu'elle n'intercepte pas le flux lumineux (fig. XX-1).

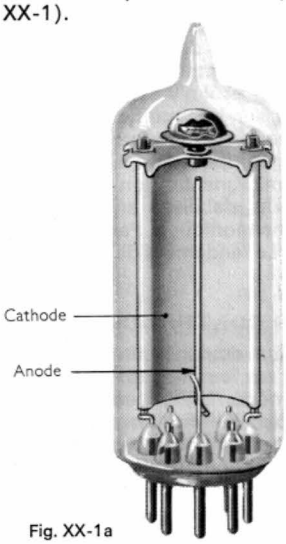


Fig. XX-1a

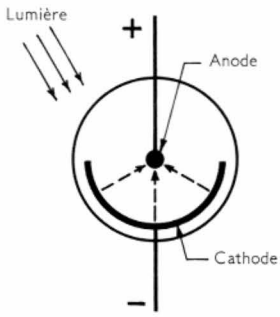


Fig. XX-1b — Symbole

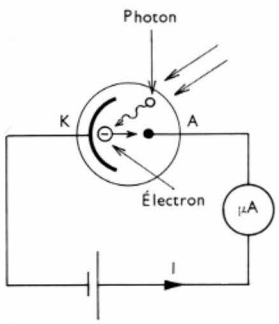


Fig. XX-2

1.1. Fonctionnement. — Lorsque la cathode est éclairée, les photons du rayonnement provoquent l'émission d'électrons ; l'anode portée à un potentiel positif par rapport à la cathode (fig. XX-2) attire les électrons émis et un courant traverse le tube. Dans un premier temps, lorsque U_{AK} est faible, l'émission électronique est limitée par la présence d'une charge d'espace négative qui entoure la cathode : l'intensité I_A du courant dépend alors de la tension U_{AK} appliquée entre l'anode et la cathode (fig. XX-3). Dans un deuxième temps, lorsque U_{AK} est suffisamment grande, tous les électrons émis sont attirés par l'anode : c'est le régime de saturation : l'intensité du courant de saturation croît proportionnellement au flux lumineux reçu par la cathode.

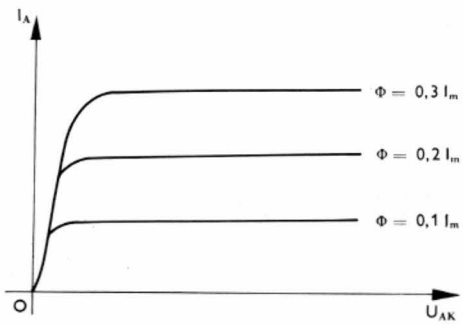


Fig. XX-3 — Caractéristiques I_A (U_{AK}) d'un tube photoélectrique à vide (le flux lumineux Φ est exprimé en lumens)

1.2. Photocathodes. — Tous les corps n'émettent pas des électrons lorsqu'ils sont éclairés et des problèmes délicats ont dû être résolus pour la mise au point des photocathodes.

Les photons d'un rayonnement transportent chacun une énergie égale au produit hf de la fréquence f de la radiation et de la constante de Planck h ($h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J . s). Quelques-uns de ces photons transmettent leur énergie à des électrons qui sortent du métal avec une vitesse v ; c'est ce que traduit la loi d'Einstein : l'énergie hf du photon est égale à la somme de l'énergie de sortie W_s et de l'énergie cinétique $\frac{1}{2}mv^2$ communiquée à l'électron (si nous désignons par m la masse de la particule, et par v sa vitesse) :

$$hf = W_s + \frac{1}{2}mv^2$$

La photoémission ne peut donc se produire que si la fréquence de la radiation est suffisamment élevée pour que l'énergie du photon considéré soit supérieure au travail de sortie du métal ($hf \geqslant W_s$). Les fréquences des radiations lumineuses étant comprises entre deux limites déterminées (sensiblement 375 et 750 THz), il faut choisir judicieusement les corps constituant les photocathodes. En général, elles renferment un métal alcalin car l'énergie de sortie des métaux de cette famille est relativement faible.

Métal	Énergie de sortie	Fréquence du seuil de photo-émission	Longueur d'onde correspondante
Césium	1,8 eV	520 THz	0,58 μm
Potassium ..	2,2 eV	555 THz	0,54 μm
Sodium	2,4 eV	590 THz	0,51 μm
Lithium	2,5 eV	600 THz	0,50 μm

Les photocathodes au césium sont les plus employées. Certaines, en argent oxydé, sont recouvertes d'une mince couche de césium ; leur rendement quantique ne dépasse pas 1 % (rapport du nombre d'électrons émis et du nombre de photons reçus) ; l'énergie de la plupart des photons est transformée en chaleur. Dans d'autres, le césium est contenu dans un dépôt qui tapisse une partie de l'intérieur de l'ampoule du tube photoélectrique ; leur rendement quantique peut alors atteindre 20 %.

1.3. Caractéristiques du tube. — Comme tout dispositif photoélectrique, un tube photoélectrique est caractérisé par sa *sensibilité* S, numériquement égale au quotient de l'intensité I_A du courant anodique et du flux lumineux incident Φ :

$$S = \frac{I_A}{\Phi}$$

Au régime de saturation, pour une radiation déterminée, la sensibilité S est constante et indépendante de la tension U_{AK} ; sa valeur est assez faible. Cette sensibilité varie avec la longueur d'onde λ ($\lambda = \frac{c_0}{f}$, c_0 vitesse de la lumière dans le vide) ; elle passe par un maximum S_{max} pour une longueur d'onde comprise entre 0,4 μm (radiation rouge) et 0,8 μm (radiation violette). Le rapport $\frac{S}{S_{max}}$ est appelé *sensibilité relative* du tube. Ce rapport varie en fonction de λ et la courbe représentative correspondante est nommée *caractéristique spectrale* (fig. XX-4).

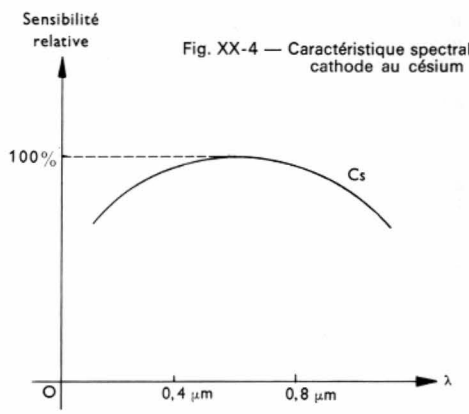
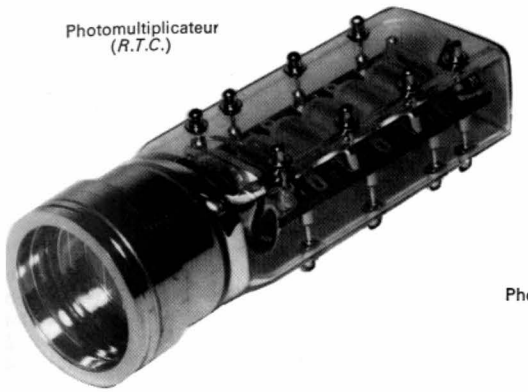
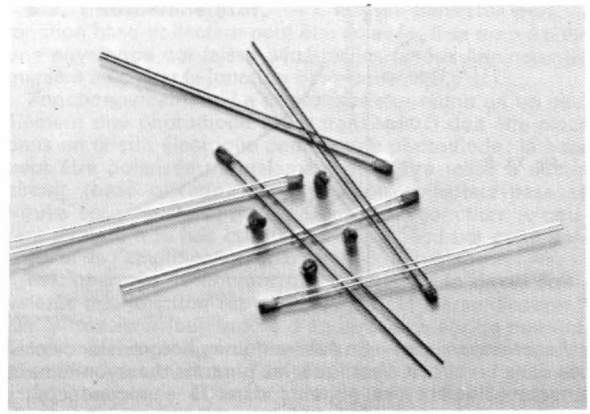


Fig. XX-4 — Caractéristique spectrale d'une photocathode au césium



Photomultiplicateur (*R.T.C.*)



Photorésistances (*Segor*)

2. TUBES PHOTOÉLECTRIQUES À GAZ

Pour obtenir un courant plus intense avec un flux déterminé, un gaz peut être placé dans l'ampoule. Tant que la tension U_{AK} entre l'anode et la cathode n'atteint pas une valeur suffisante pour que l'ionisation par choc puisse se produire, le tube photoélectrique à gaz se comporte comme un tube à vide. Lorsque le seuil nécessaire est atteint, l'intensité du courant se trouve fortement augmentée car les électrons arrachés aux atomes de gaz s'ajoutent aux photoélectrons (fig. XX-5). La sensibilité du tube est ainsi fortement augmentée.

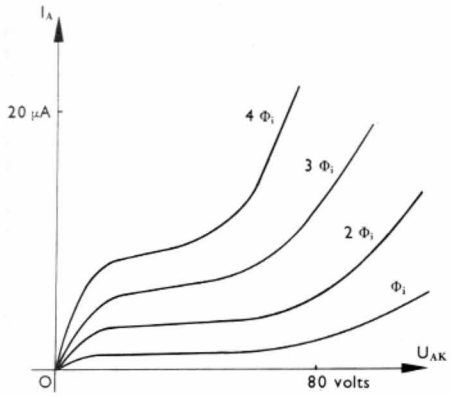


Fig. XX-5

Ces tubes sont encore utilisés mais dans de nombreux dispositifs ils ont été remplacés par des semiconducteurs.

3. PHOTOMULTIPLICATEURS

La sensibilité d'un tube photoélectrique peut être fortement augmentée en mettant en œuvre l'émission secondaire de certains corps. Pour ce faire, un photomultiplicateur comporte une cathode photoémissive, un certain nombre d'électrodes métalliques appelées *dynodes* et une anode (fig. XX-6).

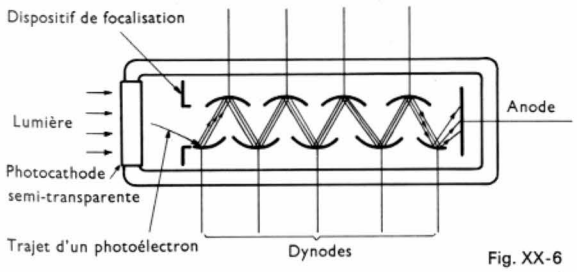


Fig. XX-6

3.1. Fonctionnement. — Le potentiel des électrodes est positif par rapport à celui de la cathode et il est de plus en plus grand au fur et à mesure qu'on s'éloigne de celle-ci ; l'électrode au potentiel le plus élevé est l'anode comme dans tous les tubes électroniques. Lorsque la cathode est éclairée il se produit une émission d'électrons ; ceux-ci sont attirés par la première dynode qui joue un rôle analogue à celui d'une anode puisqu'elle est portée à un potentiel positif par rapport à la cathode. Ce potentiel est suffisamment élevé pour qu'une vitesse relativement grande soit imprimée aux électrons. Au niveau de cette électrode se produit une émission d'électrons secondaires ; leur nombre dépasse nettement celui des électrons primaires. Tous ces électrons sont attirés à leur tour par la seconde dynode et le même phénomène se reproduit sur cette dernière.

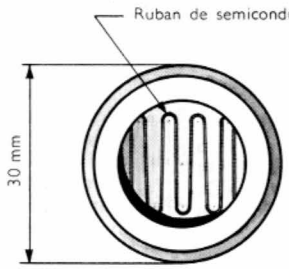
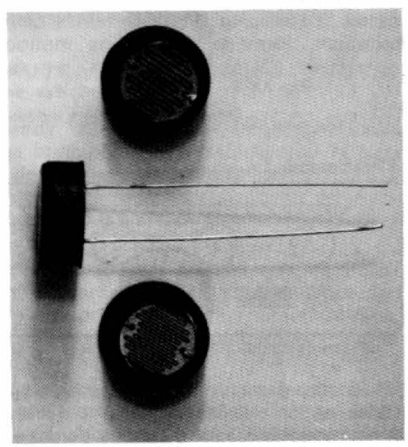


Fig. XX-7



Photorésistances (*Segor*)

Après une succession d'émissions secondaires, le nombre d'électrons qui arrivent à l'anode peut être plusieurs millions de fois plus grand que celui des électrons issus de la cathode. L'amplification de courant donné par un photomultiplicateur comportant une dizaine de dynodes peut atteindre 2 à 3.10^6 (rapport de l'intensité I_A du courant entrant par l'anode à l'intensité I_K du courant sortant par la cathode). La sensibilité peut atteindre plusieurs dizaines d'ampères par lumen.

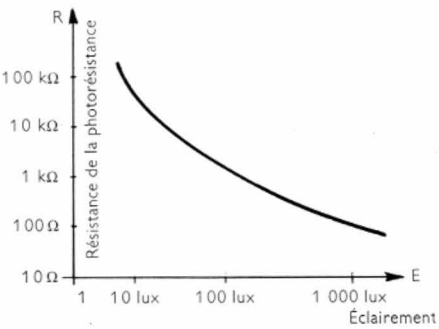
3.2. Applications. — Les photomultiplicateurs sont employés pour mesurer des flux lumineux extrêmement faibles (voisins de 10^{-10} lumen, par exemple) dans des spectrophotomètres et dans certains photomètres. Associés à des scintillateurs (V. t. 1, Physique nucléaire, chap. 2), ils permettent la détection et la mesure de rayonnements (X, α, γ, etc.).

4. CELLULES PHOTOÉLECTRIQUES

Les lois générales de la photoémission demeurent valides pour les semiconducteurs mais la plupart des dispositifs photoélectriques à semiconducteurs mettent en œuvre l'effet photoélectrique interne.

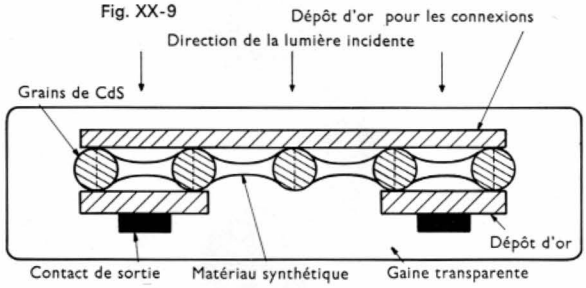
4.1. Photorésistance. — C'est une résistance dont la valeur varie avec l'éclairement. Elle est souvent constituée par une plaquette de semiconducteur portant deux contacts métalliques (fig. XX-7).

Fig. XX-8



Fonctionnement. — En éclairant une photorésistance placée dans un circuit électrique, les photons du rayonnement lumineux libèrent des porteurs dans le semiconducteur : sa conductivité augmente et par conséquent sa résistance diminue (fig. XX-8). Les impuretés jouent un rôle fondamental : des photons d'énergie extrêmement faible (0,01 eV) suffisent à provoquer la photoconduction. La sensibilité des photorésistances, quotient de l'intensité du courant dans la cellule et du flux lumineux reçu, atteint des valeurs très grandes de plusieurs ampères par lumen ; elle varie avec la longueur d'onde du rayonnement employé pour irradier la cellule. Cette sensibilité, inversement proportionnelle au carré de la distance entre électrodes, a été notablement augmentée lorsque le semiconducteur employé a pu être réduit à une couche de quelques dizaines de micromètres d'épaisseur. Pour certaines cellules au sulfure de cadmium, formées des grains monocristallins disposés

Fig. XX-9



côte à côte dans un liant synthétique (fig. XX-9), les électrodes en or placées de part et d'autre de cette couche semiconductrice sont distantes de 40 μm environ (au lieu de 200 μm pour les cellules formées de grains polycristallins).

La caractéristique spectrale de la cellule présente un maximum situé en général dans le domaine des radiations visibles ou infrarouges ; la position de ce maximum dépend des impuretés introduites dans le semiconducteur (fig. XX-10).

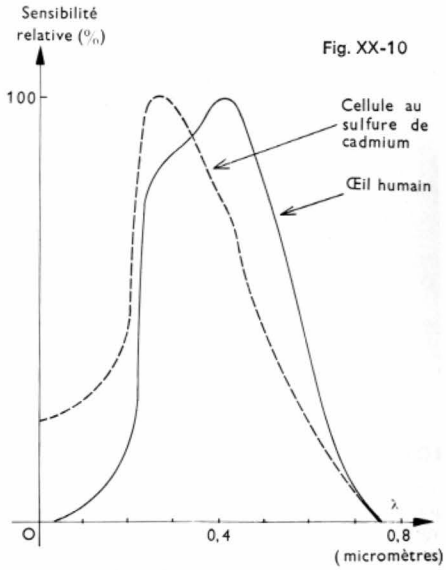
Applications. — Les cellules photorésistantes équipent des posemètres, des photomètres, des colorimètres, des détecteurs d'incendies, des luxmètres, des dispositifs de mesure de rayonnement infrarouge et elles sont aussi utilisées comme capteurs dans de nombreux automatismes.

4.2. Cellule photovoltaïque. Photopile

Description. — Une cellule photovoltaïque peut être constituée par une plaquette de semiconducteur dans laquelle on trouve deux couches de conductibilités opposées ou par l'association intime d'un semiconducteur et d'un métal. Les premières sont obtenues en provoquant la formation d'une couche superficielle d'un type déterminé (silicium P, par exemple) sur une plaquette de semiconducteur de type opposé (silicium N dans le cas choisi) ; des électrodes sont convenablement placées pour permettre l'utilisation de la cellule. Pour les secondes, le semiconducteur est disposé sur une contre-électrode métallique ne jouant qu'un rôle de support ; il est ensuite recouvert d'une couche métallique mince et transparente.

Fonctionnement. — Lorsque la cellule est éclairée, elle présente une d.d.p. entre ses bornes. Si ces dernières sont réunies à un circuit, la cellule débite un courant. Elle constitue un véritable générateur qui transforme de l'énergie lumineuse en énergie électrique. C'est l'effet photovoltaïque : il est dû à la libération de porteurs (électrons et trous) par les photons du rayonnement (V. t. 1, Autres sources d'énergie électrique).

Fig. XX-10



Dans les cellules de la première catégorie, une jonction s'est formée (V. chap. 7) ; les porteurs minoritaires qui sont engendrés dans son voisinage et qui peuvent l'atteindre, sont accélérés par le champ interne et sont à l'origine de la naissance d'une f.é.m. Dans les cellules de la seconde catégorie, dans le voisinage de la surface de contact du métal et du semiconducteur, il se produit un phénomène analogue à celui qui donne naissance à une jonction (V. chap. 7, § 9) et les porteurs minoritaires accélérés par le champ électrique interne sont la cause de l'apparition d'une f.é.m. entre les deux bornes du dispositif.

En circuit ouvert la f.é.m. aux bornes de la cellule n'augmente que faiblement avec la puissance du rayonnement (c'est-à-dire avec le nombre de photons reçus chaque seconde). En revanche, le courant débité dans une résistance R peut croître très rapidement avec cette puissance (fig. XX-11).

Applications. — Les cellules photovoltaïques sont utilisées comme générateur de courant continu pour des applications particulières, dans les satellites, notamment ; elles sont alors appelées photopiles. Elles équipent des luxmètres,

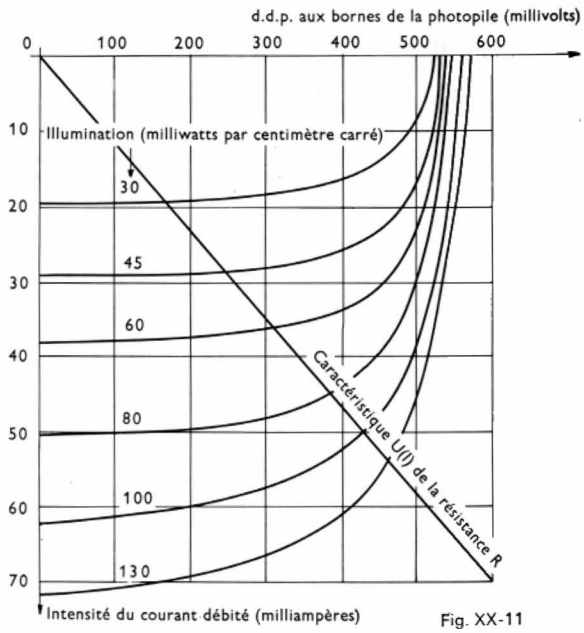


Fig. XX-11

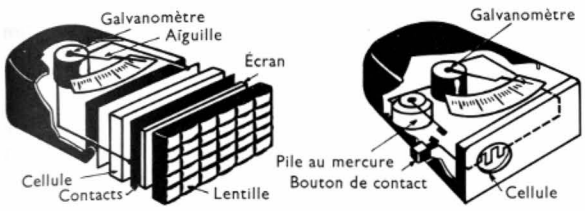


Fig. XX-12

des posemètres (fig. XX-12) et d'une manière générale des dispositifs de précision moyenne. Elles sont alors plus intéressantes que les photorésistances car, contrairement à celles-ci, elles n'exigent aucune source de courant pour leur fonctionnement.

5. PHOTODIODE ET COMPOSANTS DÉRIVÉS

5.1. Photodiode. — C'est une diode dont la jonction peut être éclairée. Elle est placée dans une enveloppe possédant une ouverture obturée par une perle de verre. Ce système optique, bien que rudimentaire, assure la convergence des rayons lumineux vers la jonction (fig. XX-13).

Fonctionnement. — La diode doit être insérée dans un circuit électrique alimenté par un générateur de courant continu et elle doit être branchée de façon à être placée sous tension inverse. Dans l'obscurité la diode se comporte comme toute diode à jonction dont l'enveloppe est opaque ; elle ne laisse passer qu'un courant extrêmement faible, appelé courant d'obscurité. Dès qu'elle est éclairée, le courant augmente parce qu'un certain nombre de porteurs, engendrés dans le voisinage de la jonction, sont accélérés par le champ électrique qui existe dans celle-ci (V. chap. 7).

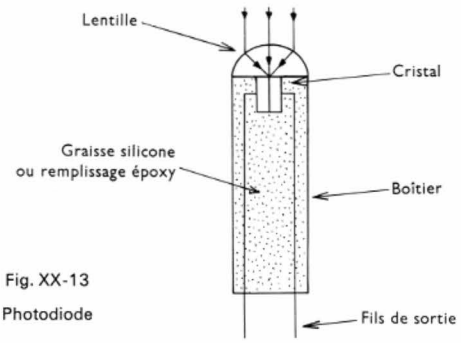


Fig. XX-13
Photodiode

L'intensité I de ce courant croît avec l'éclairement de la jonction comme le montre un réseau de caractéristiques $I(V)$ d'une photodiode (fig. XX-14) ; V désigne la tension inverse aux bornes de la diode.

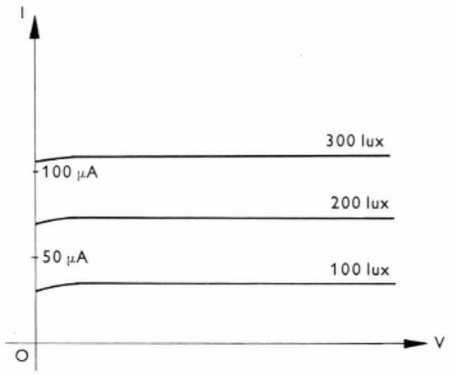


Fig. XX-14

Applications. — Le volume d'une photodiode ne dépasse pas quelques millimètres cubes et la robustesse de cet élément est très grande. Ces deux avantages font utiliser les photodiodes dans de nombreux dispositifs servant à des contrôles industriels : ensembles de comptage, systèmes de sécurité divers.

5.2. Phototransistor. — C'est un transistor dont la jonction base-collecteur peut être éclairée. Il se trouve dans une enveloppe qui laisse pénétrer les rayons lumineux de manière à éclairer la jonction base-collecteur.

Fonctionnement. — Le phototransistor réunit en un seul élément une photodiode et un transistor. Il doit être placé dans un circuit électrique comme une photodiode : la base peut être polarisée normalement ou n'être reliée à aucun circuit (base ouverte) et la jonction collecteur-base se trouve sous tension inverse. Dans cette jonction, le courant dépend à la fois du flux lumineux reçu par cette dernière et de l'amplification en courant β du transistor.

Pratiquement, le courant qui traverserait la diode équivalente à la jonction est multiplié par cette amplification β car le transistor joue le rôle d'un amplificateur de courant. L'ensemble regroupe donc, sous un faible volume, une photodiode et un étage d'amplification.

Applications. — Elles sont identiques à celles des photodiodes ; cependant le phototransistor est particulièrement intéressant lorsque le flux lumineux à détecter est relativement faible.

5.3. Photothyristor. — C'est un thyristor dont la jonction de commande peut être éclairée. Le courant qui prend naissance peut provoquer l'amorçage du thyristor (V. chap. 11), comme un courant de commande normal.

Le photothyristor est utilisé dans certains automatismes : grâce à un flux lumineux, il est possible de provoquer le passage d'un courant assez intense dans un circuit. La commande à distance d'un circuit de puissance peut ainsi être effectué à l'aide d'un faisceau lumineux.

6. QUELQUES AUTRES DISPOSITIFS PHOTOÉLECTRIQUES

6.1. Convertisseur d'images. — Le convertisseur d'images associe les principes mis en œuvre dans le tube photoélectrique et dans le tube à rayons cathodiques. Il comporte une photocathode plane, un dispositif pour accélérer les électrons émis par celle-ci et un écran fluorescent.

Fonctionnement. — L'image est projetée sur la photocathode ; chaque petit élément de sa surface émet des électrons en nombre proportionnel au flux lumineux reçu. Après accélération, ces électrons bombardent l'écran fluorescent où l'image se reproduit.

Applications. — Le convertisseur d'images permet l'observation de documents correspondant à des images invisibles pour l'œil humain comme celles fournies par des télescopes à infrarouges. L'image visible est recueillie sur un écran fluorescent quelles que soient les radiations qui produisent l'excitation de la photocathode. Ce dispositif peut aussi s'utiliser pour réaliser des photographies d'images projetées sur la photocathode. Le temps de pose désiré est obtenu en accélérant les électrons pendant le laps de temps voulu, et seulement pendant celui-ci (véritable obturateur électrique).

6.2. Intensificateur d'images. — Un intensificateur d'images comporte les mêmes éléments qu'un convertisseur d'images et il fonctionne suivant le même principe que ce dernier. Il permet de former sur un écran fluorescent une image qui reproduit fidèlement celle qui est projetée sur la photocathode (fig. XX-15). L'image finale est plus petite

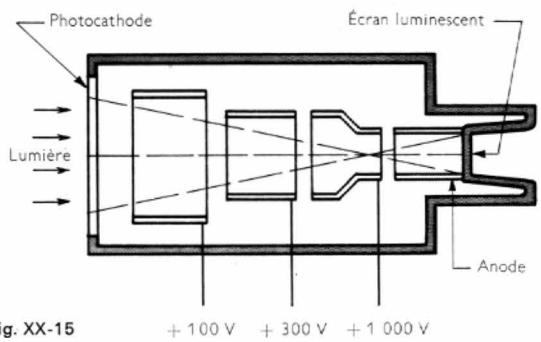


Fig. XX-15

que l'image originale mais elle est beaucoup plus lumineuse. Cet appareil est utilisé pour donner une image facile à observer à partir de celle fournie par certains dispositifs à rayons X. En médecine, il permet une étude commode tout en employant de faibles doses de rayons X, c'est-à-dire en faisant courir le minimum de risques au malade.

Les caméras de télévisions constituent des applications importantes de l'effet photoélectrique. Leur étude sera effectuée ultérieurement (V. t. 2, Radioélectricité).

CHAPITRE XXI

DISPOSITIFS POUR HYPERFRÉQUENCES

1. LIMITES DES TUBES CLASSIQUES

1.1. Notions de champs accélérateurs et décélérateurs. — Deux électrodes P_1 et P_2 portées respectivement aux potentiels continus V_1 et V_2 permettent d'obtenir un champ électrique continu $\vec{E}$. (V. chap. 2). Si V_2 est supérieur à V_1, un électron A entre les deux électrodes est soumis à une accélération $\vec{\gamma}$ dirigée de P_1 vers P_2 (fig. XXI-1). Le champ $\vec{E}$ « cède » de l'énergie à l'électron puisqu'il l'accélère.

Supposons maintenant que la d.d.p. entre P_1 et P_2 soit égale à la somme d'une d.d.p. alternative v et de la d.d.p. continue $(V_2 - V_1)$. À la d.d.p. v correspond un champ alternatif $\vec{e}$ et tout se passe alors comme si le champ entre P_1 et P_2 résultait de la superposition de $\vec{E}$ et de $\vec{e}$. Pendant une alternance, ce champ $\vec{e}$ s'ajoute au champ $\vec{E}$ (fig. XXI-2) : il accélère lui aussi l'électron et perd, de ce fait, une certaine énergie. En revanche, pendant l'alternance suivante (fig. XXI-3), le champ $\vec{e}$ s'oppose au champ $\vec{E}$ et il ralentit l'électron accéléré par celui-ci. Par l'intermédiaire du champ $\vec{E}$, de l'énergie est continuellement fournie à l'électron ; au contraire, pendant une alternance le champ $\vec{e}$ permet de fournir de l'énergie et durant l'autre alternance, de récupérer une partie de l'énergie transmise par $\vec{E}$.

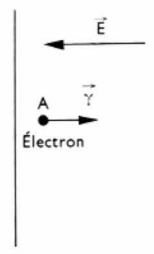


Fig. XXI-1

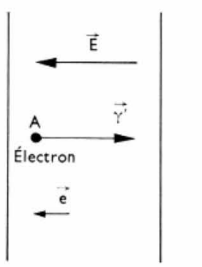


Fig. XXI-2

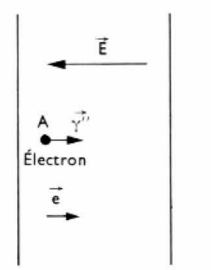


Fig. XXI-3

1.2. Phase nécessaire au bon fonctionnement d'un tube. — Considérons une triode oscillatrice ou amplificatrice (V. chap. 4) et un groupe d'électrons B se déplaçant entre grille et anode (fig. XXI-4). Un circuit oscillant inductance-condensateur est connecté à la plaque du tube. De ce fait, celle-ci est portée à un potentiel qui est la somme du potentiel continu V obtenu au moyen de l'alimentation du montage et du potentiel alternatif v dû au circuit oscillant. Nous retrouvons les conditions du paragraphe 1.1.

Pour que l'ensemble fonctionne, il faut qu'une partie de l'énergie fournie par l'alimentation continue serve à produire des oscillations. Entre la grille et la plaque, le groupe d'électrons doit être continuellement ralenti par le champ alternatif $\vec{e}$ créé par le potentiel alternatif v. Il faut pour cela que deux conditions soient remplies :

1° *la grille doit laisser passer le groupe d'électrons* au moment où le champ $\vec{e}$ est décélérateur, ce qui impose une relation de phase très stricte entre le potentiel de grille et le potentiel du circuit oscillant.

2° *le potentiel v du circuit oscillant ne doit pas changer de signe* pendant le temps nécessaire au groupe d'électrons pour aller de la grille à la plaque (temps de transit). Il faut donc que ce temps de transit τ soit très court vis-à-vis de la période propre du circuit oscillant.

1.3. Solutions utilisées. — Deux solutions peuvent être employées pour réaliser des tubes hyperfréquences :

1° *maintenir un temps de transit court* (tubes à interaction courte du courant et du champ) :

a) en rapprochant les électrodes entre elles (tubes conventionnels) ;

b) en accélérant les électrons (klystrons) ;

2° *obtenir une phase constante du champ* pendant tout le temps de transit en faisant en sorte que, durant tout ce temps, le champ soit décélérateur pour le groupe d'électrons. Il faut pour cela que la vitesse de propagation du champ alternatif soit égale à la vitesse de propagation des électrons : le champ accompagne les électrons en les ralentissant pendant tout le temps de transit qui peut alors être très long. La vitesse de propagation du champ étant en général très supérieure à la vitesse de propagation des électrons, il est nécessaire de ralentir le champ. Cela a conduit à la réalisation de magnétrons et de tubes à onde progressive, appelés **tubes à interaction répartie** du courant et du champ.

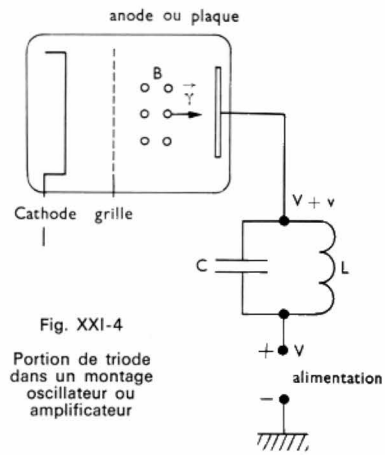


Fig. XXI-4

Portion de triode dans un montage oscillateur ou amplificateur

2. TUBES À INTERACTION COURTE DU COURANT ET DU CHAMP

2.1. Tubes conventionnels. — Nous avons vu que pour augmenter la fréquence de fonctionnement, il faut, par exemple, diminuer les distances interélectrodes. Il est possible de diminuer proportionnellement toutes les dimensions des tubes électroniques classiques (homothétie simple). Cela a pour effet de diminuer également les capacités interélectrodes et par suite d'accentuer la montée en fréquence de ces tubes.

2.1.1. Lois d'homothétie applicables. — On admet que deux tubes fonctionnent de la même manière :

1° Si le rapport de temps de transit à la période d'oscillation du circuit oscillant reste constant. Une étude mathématique sortant du cadre de cet ouvrage montre que cela conduit à garder le rapport $\frac{Df}{\sqrt{V}}$ constant ; D représente les dimensions du tube, f la fréquence d'utilisation, V est une des tensions du tube.

2° Si l'adaptation du tube à sa charge anodique est la même dans les deux cas. C'est alors le rapport $\frac{Vf}{JQD}$ qui doit rester constant; J représente la densité d'émission de la cathode et Q le coefficient de surtension du circuit anodique.

3° Si la charge anodique reste la même; dans ce cas, il faut que le rapport $\frac{Q}{Df}$ soit constant.

Examinons quelles conditions sont alors imposées si nous voulons garder Q constant:

1° Df doit rester constant (3e condition). Cela impose de diviser par 2 toutes les dimensions du tube si la fréquence doit être doublée.

2° V doit rester constant (1re condition). Les tensions à appliquer au tube ne doivent pas changer.

3° J doit être proportionnel à $\frac{f}{D}$ (2e condition), c'est-à-dire à $\frac{f^2}{Df}$ soit à f^2. Pour doubler la fréquence, il faut quadrupler la densité d'émission de la cathode. Cela constitue un grave inconvénient et impose une étude technologique très poussée des cathodes à utiliser en hyperfréquences.

4° J représentant la densité d'émission, l'intensité cathodique I est proportionnelle à JD^2 (D^2 symbolisant la surface d'émission). Pour doubler la fréquence, nous avons vu que J est multiplié par 4 et que D^2 est divisé par 4: l'intensité I est donc constante. La tension V étant constante, la puissance utile l'est aussi ainsi que la puissance dissipée. Mais la surface anodique étant divisée par 4, cette dernière puissance peut provoquer la destruction de l'anode.

Cette solution est donc inacceptable: les densités d'émission et les puissances à dissiper sont trop importantes. Des trois conditions précédemment écrites, la moins impérative est celle qui concerne la constance de charge anodique (3e condition); elle peut être remplacée par une condition concernant J ou concernant la puissance dissipée.

En conservant J constant, nous évitons toute difficulté d'obtention de la densité d'émission de la cathode mais, pour satisfaire les conditions 1 et 2, il faut diminuer *très rapidement* la puissance admissible du tube lorsque la fréquence augmente.

Pour éviter de détériorer des électrodes, nous pouvons nous imposer de garder constante la *densité* de puissance dissipée (puissance dissipée par unité de surface). Celle-ci est proportionnelle au rapport $\frac{P}{D^2}$ si P représente la puissance totale dissipée. Comme $P = VI$ et que I est proportionnel au produit JD^2, nous voyons que nous devons satisfaire la condition supplémentaire suivante:

$$\frac{P}{D^2} = \frac{VI}{D^2} = \text{constante ou : } \frac{VJD^2}{D^2} = VJ = \text{constante.}$$

Si nous conservons les produits $\frac{Df}{\sqrt{V}}$ et $\frac{Vf}{JD}$ constants, nous trouvons que:

— D doit varier comme $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{f}\right)^5}$

— V doit varier comme $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{f}\right)^4}$

— J doit varier comme $\sqrt[3]{f^4}$

— P, la puissance, doit varier comme $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{f}\right)^{10}}$

Multiplier la fréquence par 2 impose de multiplier l'émission électronique par 2,5 et de diviser toutes les dimensions par 3,18, les tensions appliquées par 2,5 et la puissance par 10. Dans ce domaine, comme dans beaucoup d'autres, les constructeurs de tubes conventionnels hyperfréquences doivent se contenter de compromis car la montée en fréquence s'accompagne forcément d'une perte de puissance. Trois problèmes cruciaux doivent être résolus lors de la construction d'un tube conventionnel pour hyperfréquences:

1° Le positionnement des électrodes: la diminution des dimensions du tube conduit à placer les électrodes à quelques dixièmes de millimètre les unes des autres et parfois même à moins d'un dixième de millimètre. Cela impose souvent d'utiliser des électrodes planes plus faciles à positionner avec précision;

2° L'augmentation de la densité d'émission de la cathode: il est possible d'atteindre 50 A/cm² mais cela nécessite des revêtements de cathode très étudiés;

3° L'augmentation de la dissipation anodique: pour refroidir le tube, il faut disposer parfois d'énormes ailettes en éventail autour de ce tube.

2.1.2. Modifications des caractéristiques des tubes et des montages. — Le temps de transit entraîne un déphasage entre le courant et le champ électrique lié au potentiel. Ce déphasage modifie non seulement le fonctionnement du tube mais aussi ses caractéristiques essentielles.

1° *La pente* (V. chap. 4). — Aux fréquences basses, courant anodique et tension grille sont en phase. Aux fréquences élevées, lorsque la période de fonctionnement T diminue et tend vers le temps de transit τ, la pente diminue de 25 % par rapport à sa valeur aux fréquences basses, et le courant anodique est déphasé de 180° par rapport à la tension grille.

2° *L'impédance d'entrée.* — Elle est numériquement égale au rapport de la variation de tension grille et de la variation du courant grille.

Aux basses fréquences, l'impédance d'entrée est grande. Lorsque la fréquence croît, cette impédance diminue: cela provoque un amortissement pour tous les circuits d'entrée, et une variation du déphasage entre tension et courant. Il en résulte un désaccord du circuit d'entrée (la fréquence propre change) et par ailleurs, cette diminution d'impédance impose de fournir une puissance d'entrée notable au tube.

3° *Déphasage entre tension anodique et tension grille.* — Le déphasage est de 180° aux fréquences basses. Il change progressivement lorsque la fréquence croît.

4° *Gain de tension.* — Il diminue lorsque la fréquence augmente et tend vers zéro.

5° *Bruit de fond.* — Il augmente mais reste assez faible aux fréquences élevées; cela constitue un avantage important des tubes conventionnels. Néanmoins, ce bruit, dû surtout aux fluctuations de courant, devient ici tributaire des fluctuations de vitesse du faisceau électronique.

2.1.3. Influence de la fréquence sur les circuits extérieurs liés au tube.

1° *Diminution de la charge anodique.* — Pour un circuit oscillant classique, cette charge est donnée par la formule $\frac{Q}{C\omega}$ si nous désignons par:

Q, le coefficient de surtension du circuit oscillant;

C, la capacité totale (capacité du circuit oscillant + capacité des connexions + capacités des électrodes du tube);

$\omega = \frac{2\pi}{T}$: la pulsation de fonctionnement.

À Q et C constants, $\frac{Q}{C\omega}$ décroît lorsque la fréquence augmente. Pour éviter cela, il faut augmenter le coefficient de surtension et diminuer les capacités. Aux fréquences envisagées (1 000 à 3 000 MHz, par exemple), augmenter Q revient à remplacer les circuits oscillants classiques par des cavités coaxiales.

2° *Connexions d'électrodes.* — Elles sont néfastes car elles présentent une certaine capacité entre elles et par rapport à la masse. De plus, aux fréquences élevées, elles provoquent des couplages par mutuelle induction (V. t. 1, Électricité, chap. 27) et gênent la montée en fréquence. Dans ces conditions, toutes les connexions sont réduites au minimum, et le tube est conçu pour s'adapter directement aux cavités résonnantes grille et plaque.

Le tube se présente donc souvent comme un ensemble de cylindres coaxiaux de diamètres de plus en plus réduits. Des disques métalliques sont placés au-dessus de ces

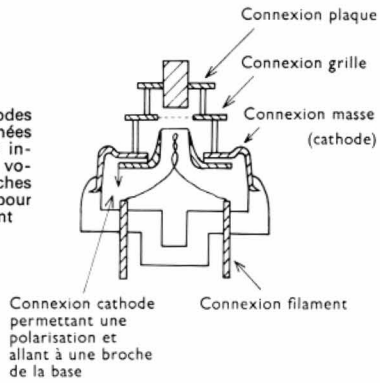
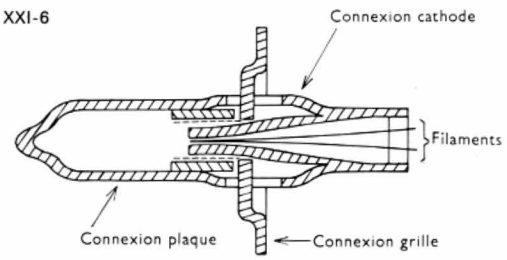


Fig. XXI-5 — Les électrodes planes et très rapprochées n'occupent qu'une place infime dans l'ensemble du volume du tube. Des broches classiques sont utilisées pour la cathode et le filament

cylindres et débordent. Ils sont réunis aux électrodes internes et permettent un contact électrique entre ces électrodes et les cylindres coaxiaux que l'on enfile sur le tube. La connexion cathode de la base permet une polarisation classique par résistance-capacité (V. chap. 4). Un diélectrique très mince placé entre cette connexion de cathode et la connexion de masse permet, sans court-circuiter cette polarisation, de considérer la cathode comme réunie à la masse pour les hyperfréquences (fig. XXI-5).

Fig. XXI-6



Certains tubes dits « tubes-crayons » sont réalisés avec des électrodes cylindriques (fig. XXI-6). C'est la grille qui correspond au disque métallique de plus grand diamètre ; les sorties cathode et plaque se trouvent de part et d'autre de cette sortie grille. Cette disposition permet des réalisations d'amplificateurs et d'oscillateurs avec grille à la masse, les cavités cathode et plaque se trouvent alors placées de part et d'autre de la grille.

2.1.4. Montage des circuits d'utilisation. — La figure XXI-7 représente le montage d'un oscillateur « réentrant » appelé ainsi parce que les cavités grille-cathode et grille-plaque, sont disposées l'une dans l'autre. La cavité grille-plaque débouche dans la cavité grille-cathode, réalisant ainsi le couplage nécessaire à l'oscillation. Une sonde en forme de boucle ou de disque permet de récupérer une partie de l'énergie hyperfréquence fournie par le tube.

Une sortie grille permet une polarisation classique par résistance, le découplage est réalisé tout naturellement par

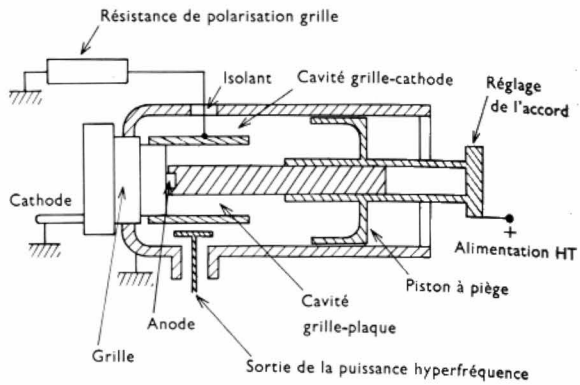


Fig. XXI-7

la capacité formée entre cette sortie et la paroi métallique externe de la cavité grille-cathode. Toutes ces connexions extérieures au tube et à ses circuits d'utilisation sont à la masse vis-à-vis des hyperfréquences ; elles sont dites *froides*. L'accord est obtenu en changeant la longueur de la cavité grille-cathode à l'aide d'un piston. Pour ne pas court-circuiter la haute tension d'alimentation de la plaque, ce piston se déplace sans toucher à la paroi métallique externe : sur ce piston il y a un « piège » pour que tout se passe, du point de vue hyperfréquences, comme s'il y avait contact. L'ensemble est équivalent au montage représenté sur la figure XXI-8.

Un montage analogue, obtenu en prolongeant le cylindre de grille, permet de séparer complètement les deux cavités (fig. XXI-9) ; chacune de ces cavités doit être accordée à l'aide d'un piston indépendant et attaquée par une boucle séparée. Une polarisation par résistance-condensateur est utilisée pour la cathode et la connexion de grille est à la masse. L'ensemble constitue un amplificateur. La tension à amplifier est appliquée à la cavité grille-cathode et la tension amplifiée est recueillie dans la cavité grille-anode.

En modifiant la polarisation et en accordant la cavité de sortie sur une fréquence double ou triple de la fréquence d'entrée, l'ensemble devient un *multiplicateur de fréquence*.

La figure XXI-9 représente un amplificateur réalisé avec un tube-phare ; cependant, ce montage est mieux adapté à la structure d'un tube-crayon qu'à celle d'un tube-phare.

En réunissant par une ligne de longueur convenable les coaxiaux d'entrée et de sortie, l'amplificateur est transformé en oscillateur mais ce montage est mécaniquement plus compliqué à réaliser que le montage précédent d'oscillateur réentrant.

Bien que la forme du tube-phare se prête mal à la configuration des guides d'ondes, des montages associant ces éléments peuvent être néanmoins réalisés.

2.1.5. Etude de quelques réalisations du commerce. — Quelques caractéristiques de triodes ou tétrodes pour ultra-hautes fréquences (U.H.F.), utilisables en ondes entretenues (CW) ou en ondes pulsées, sont réunies dans le tableau de la page suivante.

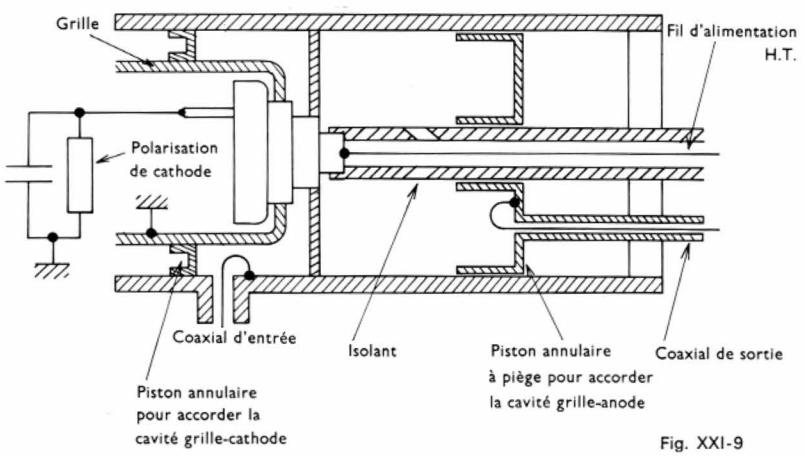


Fig. XXI-9

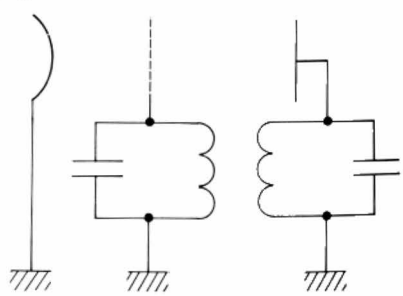


Fig. XXI-8

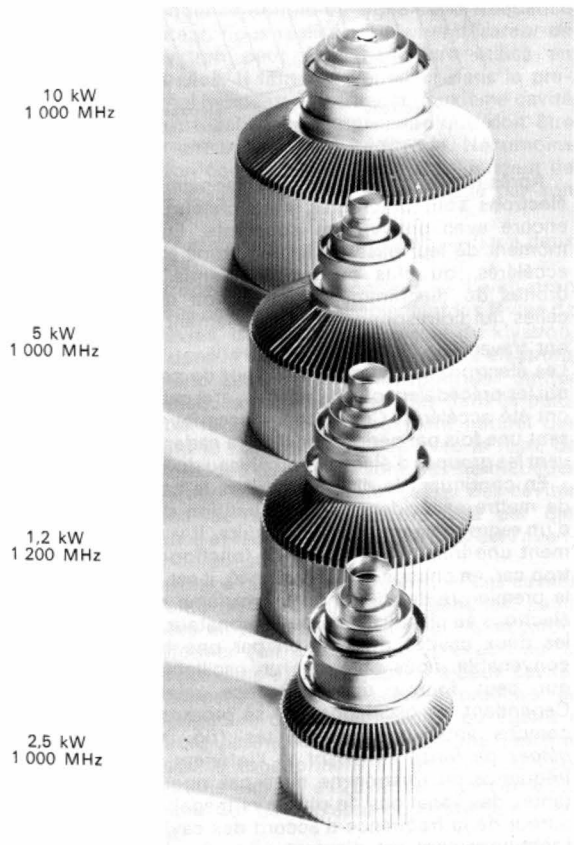
Caractéristiques de triodes et de tétrodes pour U.H.F.

CW fonctionnement en classe B

Tube type	Filament		Facteur d'amplification	Transconductance (milli-siemens)	Tension maximale de plaque (volts)	Intensité du courant maximale anodique (ampères)	Puissance maximale dissipée sur la plaque (watts)	Puissance maximale de sortie (watts)	Fréquence maximale pour un fonctionnement continu (mégahertz)
	Volts	Ampères							
6885	6,3	2,1	70	25	1 200	1	250	25	3 000
TH 294	6,3	5,5	90	45	2 500	3	700	500	1 000
TH 293	5	47	7	30	5 000	9	4 500	3 000	1 000
TH 313	5	65	5	50	5 000	15	7 000	6 000	1 000
TH 290	4,2	140	6	70	1 000	25	12 000	12 000	1 000

Fonctionnement en impulsions

Tube type	Filament		Facteur d'amplification	Transconductance (milli-siemens)	Tension maximale de plaque (volts)	Intensité du courant maximale anodique (ampères)	Puissance maximale dissipée sur la plaque (watts)	Puissance maximale de sortie (kilowatts)	Fréquence maximale pour un fonctionnement continu (mégahertz)
	Volts	Ampères							
6886	6,3	2,5	70	25	6 000	15	250	15	3 000
TH 318	6,3	5,5	80	45	6 000	40	700	40	1 500
TH 296	7,5	110	100	60	15 000	60	12 000	150	500



Tétrodes U.H.F. pour émetteurs de télévision. Les ailettes de refroidissement et la structure coaxiale des connexions de sortie sont nettement visibles (*Violet-Thomson-C.S.F.*)

2.2. Tubes à modulation de vitesse (klystrons). — Pour atteindre des fréquences supérieures à 3 000 MHz, il est nécessaire de diminuer encore le temps de transit ; comme les électrodes ne peuvent être rapprochées indéfiniment, il faut donc accélérer les électrons et leur communiquer une grande vitesse. Pour cela, il est possible de porter une grille à un potentiel positif et de moduler le faisceau électronique ainsi accéléré. Cette opération est réalisée au moyen d'une seconde grille placée derrière la première. Cette grille ne peut jouer le rôle d'une porte qui laisse passer les électrons ou les arrête (comme dans la triode en basse fréquence) car les électrons sont lancés à une trop grande vitesse, elle permet seulement d'augmenter et de diminuer périodiquement la vitesse des électrons, opération appelée *modulation de vitesse*.

2.2.1. Principe du klystron. — Supposons que les électrons émis par une cathode passent à travers un ensemble de deux grilles très rapprochées formant un résonateur (fig. XXI-10). Si celui-ci est excité par une source extérieure, il y aura un champ électrique hyperfréquence $\vec{e_1}$ entre ces grilles appelées *lèvres* du résonateur. L'ensemble du résonateur étant porté à un potentiel positif V_0 par rapport à la cathode, les électrons issus de cette cathode sont accélérés et ont un temps de transit très court entre les lèvres. Pendant ce temps, le champ $\vec{e_1}$ ne se modifie guère ; suivant le

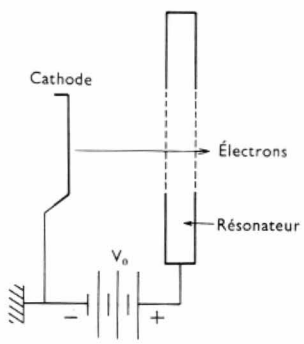


Fig. XXI-10

sens de $\vec{e_1}$, les électrons vont être un peu plus accélérés (pendant une alternance de $\vec{e_1}$) ou ralentis (pendant l'alternance suivante). Soit $v_1 = \hat{V}_1 \sin \omega t$ la d.d.p. hyperfréquence appliquée entre les lèvres : l'électron qui sort de la seconde lèvre a reçu une énergie potentielle $e\ (V_0 + \hat{V}_1 \sin \omega t)$ et celle-ci a été transformée en énergie cinétique $\frac{1}{2} mv^2$. Nous avons donc l'égalité suivante : $\frac{1}{2} m v^2 = e\ (V_0 + \hat{V}_1 \sin \omega t)$, si nous désignons par e la valeur absolue de la charge de l'électron, par m la masse de l'électron et par v sa vitesse. Nous déduisons alors la valeur de la vitesse v :

$$v = \sqrt{\frac{2e}{m}} \sqrt{V_0 + \hat{V}_1 \sin \omega t}$$

La vitesse varie de :

$$\left(\sqrt{\frac{2e}{m}} \sqrt{V_0 - \hat{V}_1}\right) \text{ à } \left(\sqrt{\frac{2e}{m}} \sqrt{V_0 + \hat{V}_1}\right)$$

lorsque $\sin \omega t$ passe de — 1 à + 1. Cependant, quelle que soit l'alternance envisagée, il y a toujours le même nombre d'électrons qui traversent le résonateur par suite de l'accélération due à V_0 : il n'y a pas de modulation de densité. Ajoutons à notre dispositif un second résonateur où nous retrouverons l'onde amplifiée. Si nous faisons traverser ce second résonateur par des électrons modulés uniquement en vitesse, nous n'obtenons rien : il faut une *modulation de densité*, c'est-à-dire que les électrons soient en *groupes ou paquets* pour qu'ils créent un champ $\vec{e_2}$ important en passant dans ce résonateur et induisent une tension. Il est donc nécessaire de transformer la modulation de vitesse en modulation de densité ; cela est réalisé tout naturellement dans un espace ménagé entre les deux résonateurs, appelé *espace de regroupement*. Dans celui-ci, les électrons qui ne sont soumis à aucun champ gardent leurs vitesses ; les plus rapides, accélérés durant une alternance, rattrapent les plus lents, c'est-à-dire ceux qui ont subi une décélération durant l'alternance précédente, et il se forme des paquets d'électrons. Si le second résonateur est placé à l'endroit du regroupement, il est excité et le signal appliqué au premier résonateur se trouve amplifié dans le second. Nous avons réalisé un klystron à deux cavités.

2.2.2. Klystron à deux cavités. — Un klystron à deux cavités comprend une cathode, deux résonateurs, un espace de regroupement et une plaque réceptrice (fig. XXI-11). Les cavités, le blindage de l'espace de regroupement et la plaque sont portés au potentiel V_0 positif par rapport à la cathode. Les lèvres des résonateurs (toroïdaux, par exemple) correspondent à la partie rétrécie de ces résonateurs, cela afin de diminuer le temps de transit et d'augmenter le champ électrique hyperfréquence $\vec{e_1}$.

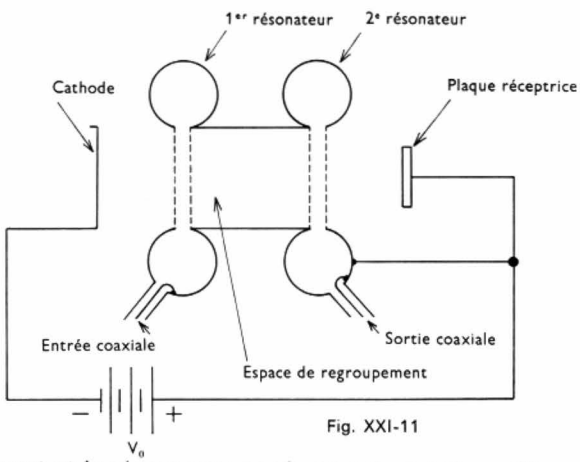


Fig. XXI-11

La plaque ne sert qu'à recueillir les électrons après leur utilisation. Il est intéressant de noter que le temps de transit, qui constituait un inconvénient, est utilisé dans le klystron pour obtenir le groupement des électrons nécessaire au fonctionnement de l'ensemble. Cependant entre la cathode et le premier résonateur, de même qu'entre le deuxième résonateur et la plaque, le temps de transit n'intervient pas. Comme le temps de transit ne doit être limité qu'entre les lèvres des résonateurs, les difficultés de réalisation se trouvent groupées en un petit nombre de points, ce qui facilite la construction des klystrons.

1° *Théorie du klystron à deux cavités.* — Le diagramme d'Appelgate (fig. XXI-12) représente l'espace parcouru par les électrons en fonction du temps. Le graphe du mouvement d'un électron se déplaçant à vitesse constante est une droite dont le coefficient directeur est égal à la vitesse de la particule. Tous les électrons arrivant au premier résonateur ayant été accélérés sous la même d.d.p. V_0 sont animés de la même vitesse, à chacun d'eux correspond donc une droite dans le diagramme d'Appelgate. Toutes ces droites de coefficients directeurs identiques (c'est-à-dire de même inclinaison) sont également réparties car il n'y a pas de modulation de densité.

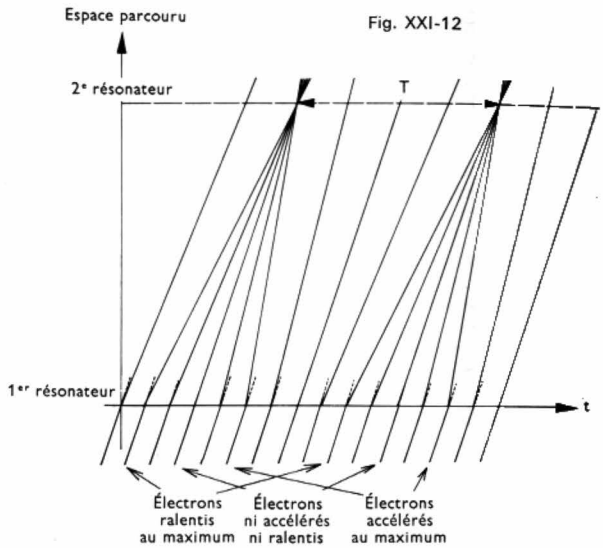


Fig. XXI-12

Après le passage du premier résonateur, les vitesses des électrons sont différentes, mais chacun d'eux se déplace encore avec une vitesse constante. En effet, suivant le moment de leur passage les électrons sont plus ou moins accélérés, ou plus ou moins ralentis. L'inclinaison des droites du diagramme augmente ou diminue sauf pour celles qui correspondent au mouvement des électrons qui ont traversé le résonateur lorsque $v_1 = \hat{V}_1 \sin \omega t$ est nul. Les électrons se regroupent autour de ces derniers si ceux qui les précédaient ont été ralentis, et si ceux qui les suivaient ont été accélérés. Ces circonstances favorables se produisent une fois par période, et c'est la cadence à laquelle arrivent les groupes d'électrons au niveau du second résonateur.

En continuant le diagramme vers le haut, il est possible de mettre en évidence une disparition des groupes suivie d'un regroupement et ainsi de suite. Il y a donc théoriquement une infinité de modes de fonctionnement d'un klystron car, en changeant la tension V_0, il est possible d'amener le premier, le deuxième ou le troisième regroupement des électrons au niveau du second résonateur. Si nous couplons les deux cavités du klystron par une ligne de longueur convenable, nous obtenons un oscillateur assez stable et qui peut fournir une puissance relativement grande. Cependant les oscillations ne se produisent que si V_0 est compris entre certaines limites (fig. XXI-13), appelées *plages de fonctionnement*. À l'intérieur de ces plages, la fréquence du klystron ne reste pas rigoureusement constante : des variations de plusieurs mégahertz se produisent autour de la fréquence d'accord des cavités. Une plage de fonctionnement est d'autant plus grande que les cavités sont plus étroitement couplées, ou qu'elles sont plus désaccordées en fréquence l'une par rapport à l'autre. Une théorie plus complète du klystron montre que le fonctionnement décrit ci-dessus (regroupement des électrons une

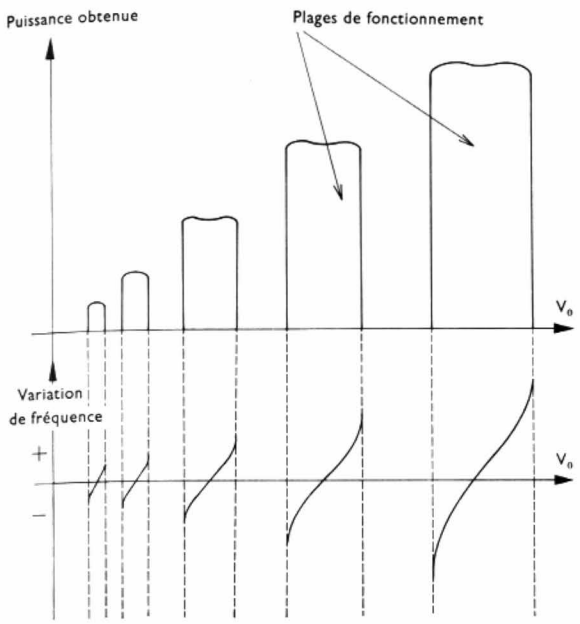


Fig. XXI-13

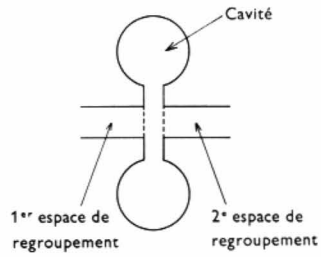
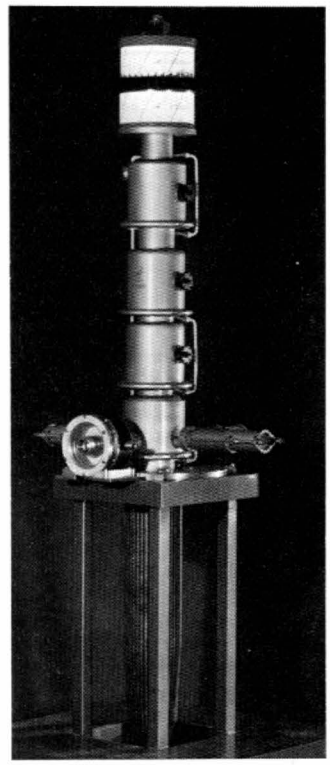


Fig. XXI-14



Klystron de grande puissance pour accélérateurs de particules (*Violet-Thomson-C.S.F.*)

fois par période) ne correspond pas au meilleur rendement, le rendement optimal (58 %) est théoriquement atteint lorsque le regroupement donne lieu à la création de deux paquets d'électrons par période se suivant à un court intervalle de temps lors de la traversée du deuxième résonateur. Ce résultat est obtenu par un choix judicieux des paramètres de fonctionnement. Le signal fourni par un klystron comporte de nombreux harmoniques (V. t. 1, Mathématiques, chap. 23) et en accordant le second résonateur sur une fréquence double ou triple de la fréquence du premier résonateur, nous réalisons un *multiplicateur de fréquence*. Le klystron peut également être utilisé en *changeur de fréquence*. Il faut alors envoyer dans la première cavité le signal incident, alimenter la deuxième cavité avec un oscillateur local et la charge anodique doit être constituée par un circuit moyenne fréquence. Néanmoins pour cette utilisation comme d'ailleurs en amplificateur de signaux faibles, le klystron est *très* désavantagé par son bruit de fond élevé.

2° *Résultats pratiques et construction.* — Il y a deux genres de klystrons :

a) *les klystrons à cavités rapportées.* — Le klystron ne comporte pas ses cavités, mais simplement les lèvres de ses cavités. Ces lèvres, de même que le reste du klystron, sont évidemment dans le vide pour permettre aux électrons de circuler librement. Les cavités sont rapportées autour du klystron ; des disques métalliques scellés dans la paroi latérale du klystron forment le prolongement naturel des lèvres et permettent le contact électrique avec le reste de la cavité. Ces parties des cavités ne sont pas hermétiques et l'air peut y pénétrer. Cela permet de réaliser des cavités à grande variation de fréquence accordables par des pistons non étanches et facilement réalisables. C'est l'avantage de ce mode de construction ;

b) *les klystrons à cavités incorporées.* — Les cavités font partie intégrante du klystron et sont étanches. Leurs parois sont réalisées en métal souple et pour les accorder il suffit de les déformer (en exerçant une pression sur la paroi extérieure, par exemple). Les klystrons à deux cavités fournissent couramment jusqu'à plusieurs centaines de watts pour des longueurs d'onde inférieures ou égales à 10 centimètres. Leur puissance de crête atteint une trentaine de kilowatts lorsqu'ils fonctionnent en impulsions. Leur rendement est compris entre 5 et 25 % ; leur gain en puissance peut atteindre 40. La faiblesse du rendement s'explique notamment :

— par l'effet de charge d'espace (car les électrons se repoussent), qui tend à défocaliser le faisceau électronique,
— par la capture des électrons sur les lèvres,
— par l'émission secondaire des lèvres,
— par les pertes dans les résonateurs.

Le fait de réaliser les cavités en métal (à plus forte raison s'il est souple) entraîne un manque de stabilité en fréquence des klystrons fonctionnant en oscillateurs. Des procédés de compensation en température sont utilisés et l'alimentation fournissant la d.d.p. V_0 est soigneusement régulée.

2.2.3. Klystron à nombre de cavités supérieur à deux. — Il est surtout employé pour obtenir de grandes puissances. Si une cavité est placée entre deux espaces de regroupement (fig. XXI-14), elle est le siège d'une oscillation, entretenue par le passage des groupes d'électrons à travers ses lèvres. Il en résulte un ralentissement des électrons qui cèdent de l'énergie tout en restant groupés. En revanche, si un électron précède un paquet ou le suit, il est soit plus ralenti, soit moins ralenti que lui (il peut même être accéléré) et, de ce fait, il tend à rejoindre un groupe d'électrons déjà formé. Une telle cavité améliore le regroupement des électrons, diminue la bande passante du klystron et améliore sa stabilité en fréquence. Les concentrations d'électrons ainsi obtenues sont importantes ; cela entraîne malheureusement une forte charge d'espace qui tend à défocaliser le faisceau et des pertes d'électrons se produisent sur les parois externes des tubes de regroupement. Pour éviter cela, des bobines de focalisation sont placées tout le long du klystron (fig. XXI-15). Ce genre de klystron à cavités incorporées présente une bonne dissipation de la chaleur et une excellente surtension des cavités. Il peut être réalisé aussi avec des cavités rapportées mais les surtensions sont moins grandes et la dissipa-

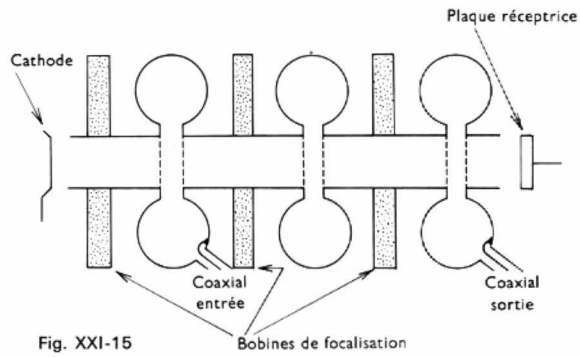


Fig. XXI-15

Exemples de caractéristiques de quelques klystrons utilisés en ondes pulsées

Type de klystron	Gamme de fréquence en gigahertz (1 GHz = 1 000 MHz)	Puissance crête de sortie (mégawatts)	Puissance moyenne de sortie (kilowatts)	Tension crête d'alimentation (kilovolts)	Courant crête d'alimentation (ampères)	Gain (décibels)	Durée maximale de l'impulsion (microsecondes)
F 2055	0,5	0,5	250	47	26	37	10 000
TV 2023	1,2 à 1,4	40	100	300	330	50	20
TV 2015	2,7 à 3,1	25	25	250	250	50	14
TV 2024	4,6 à 5,4	5	10	130	95	50	10

tion de la chaleur se fait plus difficilement. Sauf dans le domaine des faibles puissances, les klystrons à trois ou quatre cavités ont totalement supplanté les klystrons à deux cavités. Ils permettent d'obtenir des gains de 50 dB et le rendement peut atteindre 45 %.

Remarque : Le diagramme de la figure XXI-13 permet de concevoir que pour faire fonctionner un klystron en impulsions, il suffit de moduler sa tension d'alimentation V_0 par un signal impulsionnel. Le klystron peut aussi n'être alimenté que pendant le temps de fonctionnement désiré : lorsque le klystron est monté en oscillateur, il n'oscillera que si la tension V_0 lui est appliquée. L'oscillation du klystron sera stable en fréquence si la tension V_0 est stable.

2.2.4. Klystron reflex

1° *Description, fonctionnement.* — L'utilisation d'un klystron à plusieurs cavités se justifie surtout pour obtenir une forte stabilité, un grand gain et un bon rendement. Néanmoins, pour de nombreux oscillateurs, ce klystron présente deux inconvénients : son prix trop élevé et son réglage difficile.

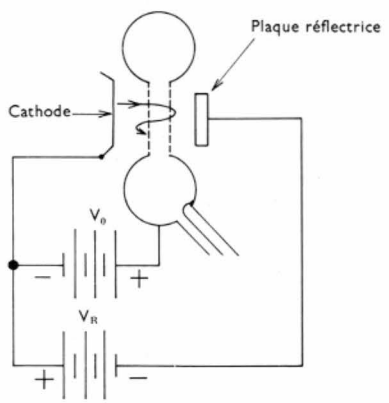
En remplaçant la cavité d'entrée et la cavité de sortie par une seule cavité traversée deux fois, le prix de revient est diminué et les réglages de fréquence sont réduits au seul réglage de l'unique cavité.

Le klystron *reflex* se compose d'une cathode, d'un résonateur et d'une plaque réflectrice portée à un potentiel négatif ($-V_R$) par rapport à la cathode (fig. XXI-16). Les électrons traversent une première fois le résonateur, et cela fournit une modulation de vitesse. Lorsqu'ils arrivent dans le champ dû à la plaque réflectrice négative, ils sont repoussés et ils traversent à nouveau le résonateur, qui joue alors le rôle de résonateur de sortie. Ensuite, ils sont captés par les parois extérieures de cette cavité. L'espace cavité-plaque réflectrice doit jouer le rôle d'espace de regroupement. Les électrons pénètrent dans cet espace avec des vitesses variables ; si leur vitesse est faible, ils rebroussent chemin rapidement et repassent très vite à travers les lèvres ; au contraire, si leur vitesse est grande, ils se rapprochent de la plaque réflectrice avant de rebrousser chemin et ils repassent beaucoup plus tard à travers les lèvres de la cavité.

À l'inverse de ce qui se passe dans le klystron à plusieurs cavités, le regroupement a lieu autour d'électrons qui n'ont été ni accélérés ni ralentis mais ont été *précédés* par des électrons *accélérés* et *suivis* par des électrons *ralentis*. Sur un diagramme espace-temps (fig. XXI-17), la trajectoire des électrons (ralentis par un champ constant) est représentée par une parabole (mouvement uniformément retardé, puis uniformément accéléré ; V. t. 1, Mécanique des solides, chap. 2). Sur cette figure (où nous avons volontairement exagéré la modulation de vitesse), nous pouvons nettement observer que le regroupement des électrons s'effectue lors de leur deuxième passage dans la cavité. Comme le paquet d'électrons traverse alors les lèvres en sens inverse du sens correspondant au fonctionnement d'un klystron à deux cavités, à ce moment précis il faut donc que le champ hyperfréquence soit de sens opposé à celui qui était nécessaire pour le bon fonctionnement d'un tel klystron. Ce regroupement particulier et cette inversion de phase sont les deux points principaux qui différencient le klystron reflex d'un klystron non reflex.

Pour le klystron reflex comme pour le klystron à deux cavités, nous avons plusieurs modes de fonctionnement. Si V_0 a une valeur déterminée, nous pouvons faire varier V_R et nous retrouvons un graphe analogue à celui de la figure XXI-13 mais V_0 a été remplacé par V_R (fig. XXI-18). Le klystron oscille seulement lorsque V_R est choisi dans certaines plages. Nous pouvons moduler le klystron en

Fig. XXI-16



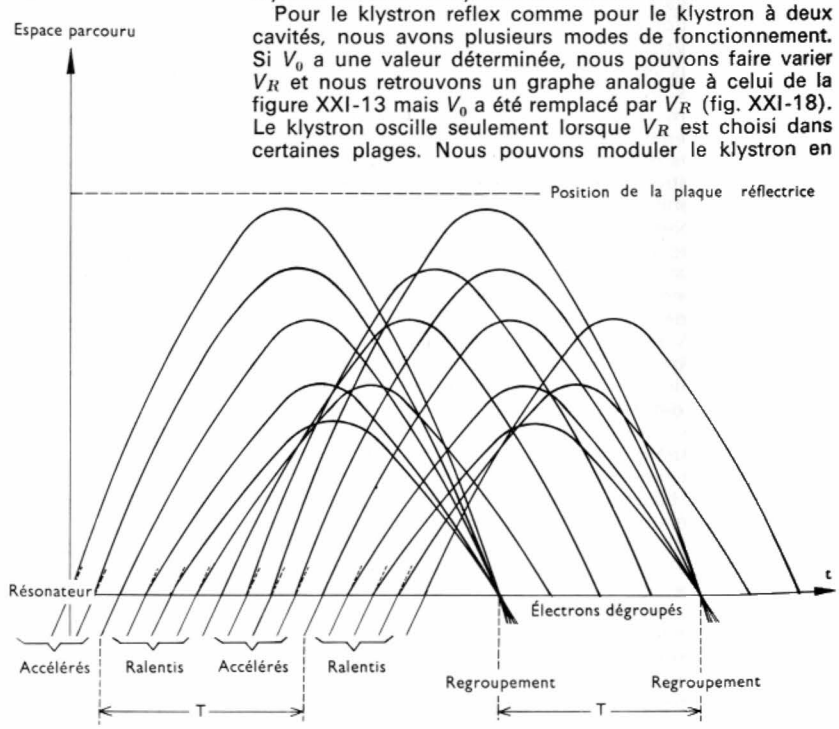
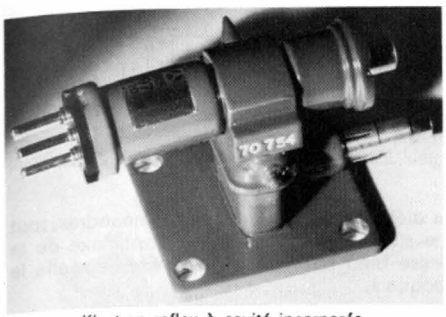
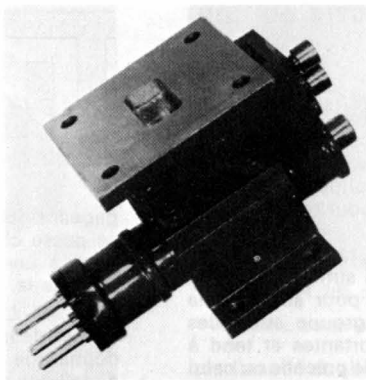


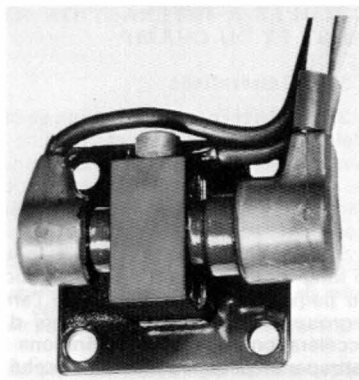
Fig. XXI-17



Klystron reflex à cavité incorporée (20 mW, 8,5-9,6 GHz) (*Thomson-C.S.F.*)

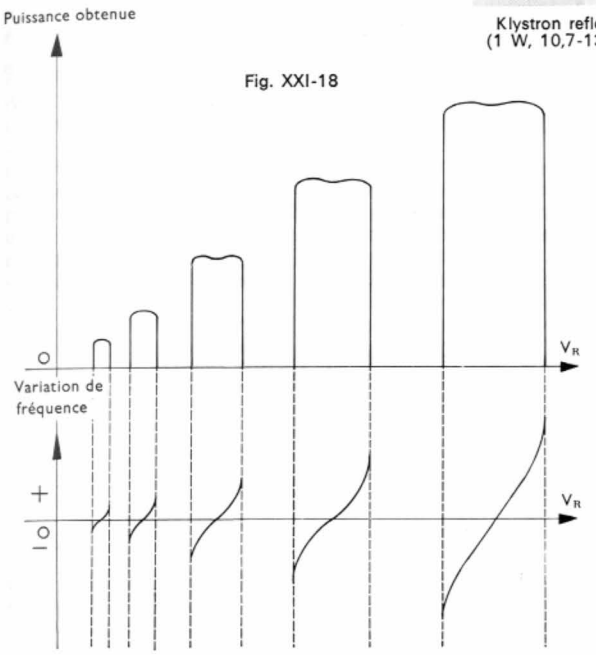


Klystron reflex pour faisceaux hertziens (1 W, 10,7-13,7 GHz) (*Thomson-C.S.F.*)



Klystron reflex pour « pompe » d'amplificateur paramétrique (*Thomson-C.S.F.*)

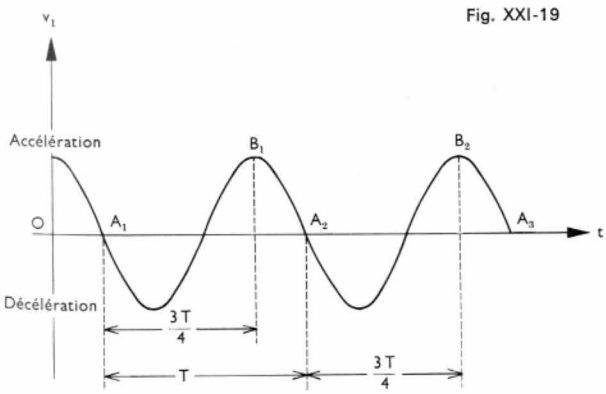
Fig. XXI-18



amplitude par tout ou rien ou le moduler en fréquence en faisant varier légèrement la tension V_R. Pour obtenir une oscillation très stable en fréquence, il est bon de prévoir une stabilisation soignée des tensions d'alimentation du klystron. Par ailleurs, la théorie et la pratique montrent qu'il faut un courant cathodique minimal, appelé *courant d'accrochage*, pour que le klystron oscille.

Remarque : Appelons v_1 la d.d.p. sinusoïdale entre les lèvres du résonateur (fig. XXI-19), et supposons que lorsque v_1 est positif, il y a accélération des électrons qui traversent le résonateur pour la première fois ; le regroupement s'effectue autour des électrons dont le premier passage a eu lieu aux instants $\frac{T}{4}, \frac{5T}{4}, \frac{9T}{4}$, etc. (points A_1, A_2, A_3, etc.) ; en effet, ils sont précédés par des électrons accélérés

Fig. XXI-19



$\left(0 < t < \frac{T}{4} \Rightarrow v_1 > 0\right)$ et suivis par des électrons ralentis $\left(\frac{T}{4} < t < \frac{T}{2} \Rightarrow v_1 < 0\right)$. Après regroupement, les paquets d'électrons devront traverser à nouveau les lèvres aux instants T, $2T$, etc. (points B_1, B_2, etc.), car alors, si l'accélération est maximale pour un premier passage, c'est la décélération qui est maximale pour un deuxième passage puisque les sens de circulation sont opposés.

Le temps de regroupement pour les électrons passant à l'instant $\frac{T}{4}$ (point A_1) peut donc être $3\frac{T}{4}, T + 3\frac{T}{4}, 2T + 3\frac{T}{4}$, etc. Plus la tension de la plaque réflectrice V_R est grande en valeur absolue, plus les électrons repassent rapidement dans le résonateur, et plus le temps de regroupement est court.

Les plus grandes puissances (V. fig. XXI-18) correspondent à un mode $3\frac{T}{4}$; les plus faibles correspondent successivement aux modes $\left(T + \frac{3T}{4}\right), \left(2T + \frac{3T}{4}\right), \left(3T + \frac{3T}{4}\right)$, etc.

2° *Renseignements complémentaires :*

a) Il existe des klystrons reflex à cavité rapportée et des klystrons reflex à cavité incorporée.

b) La fréquence d'un klystron reflex dépend de l'accord de sa cavité, de sa tension V_R et de l'impédance de charge à laquelle il fournit la puissance.

— Dans les utilisations où V_R est variable, les klystrons doivent être exempts d'« hystérésis », c'est-à-dire que pour la même valeur de V_R (lorsque cette tension croît ou décroît), il faut obtenir la même fréquence. L'hystérésis est surtout due aux électrons qui passent plus de deux fois dans la cavité. Ils sont éliminés en étudiant l'optique électronique du tube et en donnant à la cathode et à la plaque réflectrice une forme concave.

— Les klystrons reflex ont un rendement théorique de 20 à 30 %, mais en pratique il dépasse rarement 1 %. Pour cette raison, ils ne sont guère utilisés pour fournir de la puissance : ils servent dans des oscillateurs locaux ou des oscillateurs de mesure.

— La cavité d'un klystron est accordée en la déformant si c'est une cavité incorporée, ou en modifiant la position de son piston si c'est une cavité rapportée. Certains constructeurs ont cherché à obtenir un « accord électronique » complétant celui réalisé au moyen de V_R. Pour cela une triode est placée dans l'enceinte du klystron. En modifiant la polarisation de cette triode, le courant anodique et la puissance dissipée par la plaque varient ; comme cette plaque chauffe un bilame, il se déforme et appuie plus ou moins sur la cavité du klystron.

c) Depuis quelques années les klystrons reflex sont de moins en moins utilisés ; ils cèdent le pas aux transistors hyperfréquences et aux oscillateurs à diodes Gunn et avalanches, tant, du moins, qu'une fréquence et qu'une puissance relativement élevées ne sont pas absolument nécessaires (V. ci-après).

3. TUBES A INTERACTION RÉPARTIE DU COURANT ET DU CHAMP

3.1. Généralités

3.1.1. Interaction courant et champ. — Si un paquet d'électrons a sensiblement la même vitesse que l'onde qui l'accompagne, de l'énergie est transmise à cette onde et cela entraîne un ralentissement du groupe d'électrons. Tant que le ralentissement est le même pour tous les électrons, ceux-ci restent en paquet.

Si les électrons ne sont pas très groupés, mais sont répartis le long de la direction de propagation, il suffit que l'avant du paquet soit plus ralenti que l'arrière pour améliorer le regroupement. Un électron hors d'un groupe subit des accélérations ou des décélérations importantes et tend à rattraper un paquet d'électrons (celui qui le précède ou celui qui le suit). Un regroupement automatique s'opère donc par ce moyen.

La théorie montre que ce regroupement ne peut pas se réaliser si l'écart de vitesse initial entre l'onde et un électron est trop grand ; il n'y a pas *accrochage de l'électron sur l'onde*. Dans le cas contraire, il y a accrochage avec oscillation de l'électron autour d'un point lié à l'onde. L'onde ayant une vitesse réglée à l'avance, il faut donc ajuster les tensions d'accélération de l'électron pour lui donner une vitesse convenable sinon le tube ne peut pas fonctionner.

3.1.2. Lignes à retard. — La vitesse des électrons peut atteindre le dixième de la vitesse d'une onde libre en utilisant une tension accélératrice proche de 2 500 V. Il faut donc, au moyen d'un dispositif appelé *ligne à retard*, faire décroître la vitesse de l'onde jusqu'au dixième de sa valeur environ afin d'obtenir une onde et des électrons de même vitesse.

Une ligne à retard peut être constituée par n'importe quelle structure périodique.

1° *Emploi d'une hélice.* — C'est la forme la plus simple (fig. XXI-20). Elle présente l'intérêt d'avoir une grande bande passante. Nous pouvons considérer que l'onde se propage à la vitesse de la lumière le long du conducteur qui forme l'hélice. Si R est le rayon de l'hélice et si p représente son pas, l'onde de vitesse c parcourt une longueur $2\pi R$ en un temps $t_0 = \dfrac{2\pi R}{c}$. En fait, tout se passe comme si elle n'avait avancé que d'une longueur p avec une vitesse fictive, suivant l'axe de l'hélice, égale à $v = \dfrac{p}{t_0} = \dfrac{pc}{2\pi R}$. Il est donc possible de régler v au dixième

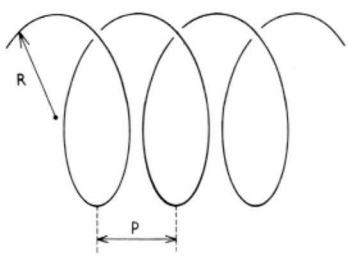


Fig. XXI-20

de la valeur de c en choisissant le rapport $\dfrac{p}{R}$ convenablement. La théorie montre qu'une hélice fournit un champ électrique dirigé le long de son axe, il suffit donc de faire passer un faisceau d'électrons dans l'axe de l'hélice pour obtenir une interaction répartie du courant et du champ.

2° *Diélectrique dans un guide d'ondes.* — À l'intérieur d'un guide d'ondes contenant un diélectrique de constante diélectrique élevée (100, par exemple) la vitesse de phase de l'onde est 10 $\left(= \sqrt{100}\right)$ fois plus petite que dans l'air. Cette solution est donc utilisable mais il faut aménager un passage pour le faisceau d'électrons à l'intérieur du diélectrique.

3° *Ligne interdigitale.* — Elle est formée de deux conducteurs, qui délimitent un espace diélectrique en forme de « grecque » (fig. XXI-21). Les champs se propageant dans le diélectrique, en suivant les méandres, tout se passe comme s'ils se propageaient suivant l'axe de la ligne à une vitesse bien inférieure à leur vitesse réelle le long de la « grecque ».

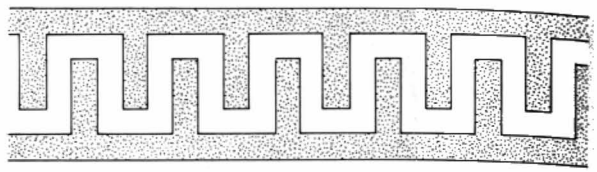


Fig. XXI-21

4° *Lignes formées de filtres.* — Si une ligne est formée de n filtres identiques et si chacun d'eux introduit un déphasage φ, le déphasage total entre la grandeur d'entrée de la ligne et celle de sortie est égal à $n\varphi$. Si l'onde met un temps τ à parcourir la ligne, ce déphasage est aussi égal à $\tau\omega$. En effet, si la tension à l'entrée est $v = \hat{V} \sin \omega t$, à la sortie elle est égale à : $v' = \hat{V}' \sin \omega\,(t - \tau) = \hat{V}' \sin (\omega t - n\varphi)$. Donc : $\tau\omega = n\varphi$ et $\tau = \dfrac{n\varphi}{\omega}$.

Si φ est proportionnel à ω, le temps de retard τ de la ligne est indépendant de ω donc de la fréquence (V. chap. XII). Des filtres passe-bas satisfont à cette condition mais ils ne sont pas les seuls. Considérons un ensemble de cavités identiques disposées régulièrement le long d'un tube T (fig. XX-22). Chacune de ces cavités est équivalente

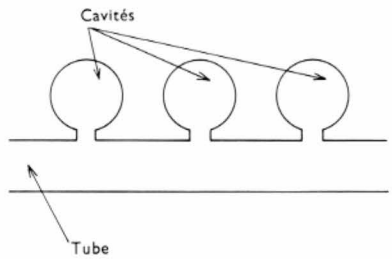


Fig. XXI-22

d'un circuit formé d'un condensateur C_1 est d'une inductance L_1 associés en parallèle. Par ailleurs, entre les cavités, les parois du tube forment un condensateur C_2 tandis que les éléments de tube compris entre les cavités sont équivalents, selon leur longueur, à des inductances ou à des condensateurs. Dans le cas considéré, nous admettrons que ce sont des inductances L_2. Le schéma équivalant à cet ensemble

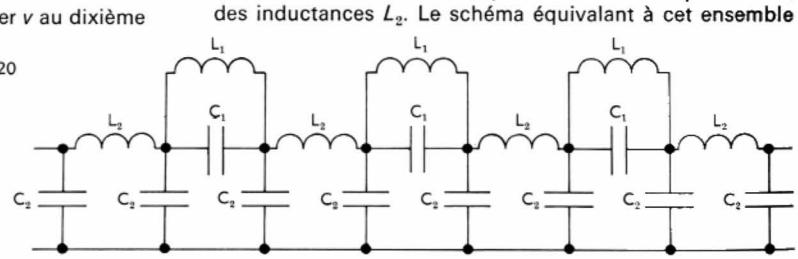
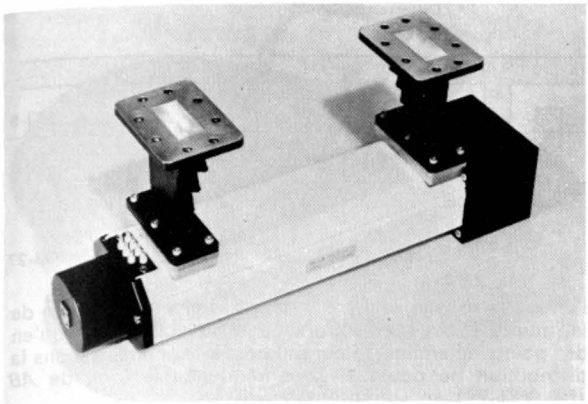


Fig. XXI-23

met en évidence la structure du filtre de ce dispositif (fig. XXI-23). Il présente deux bandes passantes : la première est déterminée par les cavités, la deuxième est fonction de l'ensemble cavité-éléments du tube (elle correspond à des fréquences beaucoup plus élevées que la première). Pour le fonctionnement d'un tube hyperfréquence c'est la première qui est utilisée.

3.1.3. Diverses ondes pouvant se propager sur ces lignes. — En l'absence de courant électronique, deux ondes peuvent se propager sur une ligne sans perte : leurs amplitudes sont constantes mais leurs sens de propagation sont opposés. Si un courant électronique (qui peut échanger de l'énergie avec l'onde) est ajouté, il n'en est plus de même et plusieurs ondes peuvent exister :

— Une onde 1 se propage dans le sens de déplacement des électrons mais à une vitesse inférieure à celle des particules. Elle ralentit donc les électrons en prenant une partie de leur énergie et elle est amplifiée au fur et à mesure de son avance.



— Une onde 2 se propage dans le sens de déplacement des électrons mais avec une vitesse à peine inférieure à celle des particules. Elle ralentit les électrons en prenant une partie très faible de leur énergie mais cela suffit pour que l'onde conserve une amplitude constante.

— Une onde 3 se propage dans le sens de déplacement des électrons mais avec une vitesse supérieure à celle des particules. Elle fournit de l'énergie aux électrons et leur vitesse augmente. L'onde s'affaiblit donc au fur et à mesure de son avance.

— Une onde 4 se propage dans le sens opposé à celui du déplacement des électrons. Pour cette onde, il y a peu d'interactions onde-électron ; c'est pratiquement la même onde que celle qui existerait en l'absence de courant.

3.1.4. Configuration géométrique donnée au courant électronique. — Deux configurations sont principalement utilisées :

1° *la configuration linéaire.* — Elle résulte de l'action d'un champ électrique longitudinal. Cette configuration est mise en œuvre :

— dans des tubes amplificateurs « à onde progressive » ou T.P.O. ;

— dans des oscillateurs : les *oscillateurs à onde progressive inverse* appelés parfois *carcinotrons O* ;

2° *la configuration circulaire.* — Elle résulte de l'action d'un champ électrique et d'un champ magnétique croisés. Cette configuration est utilisée :

— dans les amplificateurs : les T.P.O.M. et les *carpitrons ;*

— dans les oscillateurs : les *magnétrons* et les *carcinotrons M.*

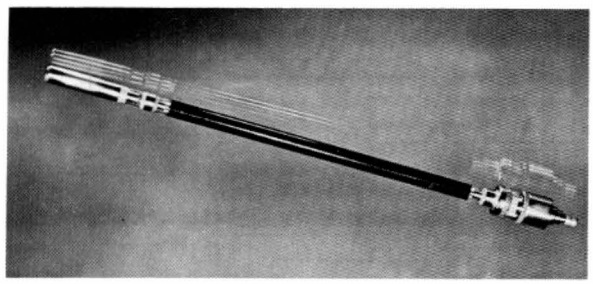
3.2. Tubes à configuration linéaire

3.2.1. Tubes amplificateurs : T.P.O.

1° *Description.* — Ces tubes comportent essentiellement (fig. XXI-24) :

— un ensemble formé d'un filament, d'une cathode et d'une anode destiné à fournir un faisceau d'électrons accélérés par le champ électrique créé entre la cathode et l'anode ;

— une ligne à retard hélicoïdale portée au même potentiel



Tube T.P.O. de 295 mm (enveloppe en verre métal et base en métal céramique)
À gauche, boîtier à aimant permanent contenant ce tube (*R.T.C.*)

que l'anode et alimentée près de l'anode par l'onde hyperfréquence à amplifier.

L'onde se propage le long de l'hélice en s'amplifiant et elle sort près de l'extrémité de celle-ci tandis que les électrons sont ralentis puis recueillis par un collecteur.

2° *Théorie.* — Si nous prenons les divers cas considérés au paragraphe 3.1.3, nous pouvons dire que :

— l'onde 1 est une *onde utile*, c'est celle qui doit être amplifiée ;

— les ondes 2 et 3 vont très rapidement avoir une amplitude très inférieure à celle de l'onde 1 et ne vont pas intervenir ;

— l'onde 4 va être créée par la réflexion de l'onde 1 ; elle est importante si l'hélice n'est pas bien adaptée à la ligne de sortie des signaux hyperfréquences. Cette onde 4 se propage sans atténuation : elle peut revenir à l'entrée de l'hélice et avoir une amplitude supérieure à celle de l'onde à amplifier. Des oscillations peuvent en résulter et pour les éviter il faut :

— adapter l'hélice à la ligne de sortie avec le plus grand soin ;

— provoquer une atténuation de quelques dizaines de décibels au moyen de l'hélice, l'amplification totale diminue mais la stabilité augmente puisque l'onde 4 est atténuée par ce moyen.

Remarque : L'onde étant polarisée circulairement, en certains points, des atténuateurs à ferrite ont été placés ; ils laissent passer presque sans atténuation l'onde 1 et affaiblissent l'onde 4 qui est polarisée circulairement mais en sens inverse de la précédente.

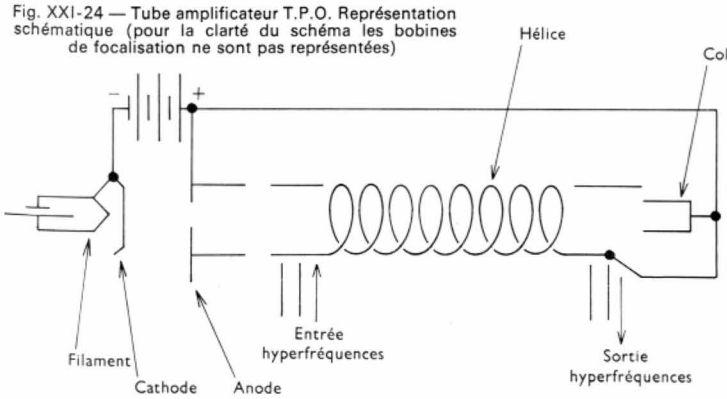
3° *Détails de construction et résultats pratiques.*

a) *Focalisation du faisceau électronique.* — Elle s'obtient en créant le long de l'hélice un champ magnétique de même direction que le faisceau électronique. Cette focalisation est réalisée soit par des bobines (fig. XXI-25), soit par un aimant permanent qui est parfois entièrement blindé.

b) *Facteur de bruit.* — Il peut être très faible : 10 et même 8 dB. C'est le meilleur tube pour l'amplification des signaux faibles.

c) *Tensions d'alimentation.* — Dans certaines réalisations, le tube T.P.O. possède une grille g_1 permettant de régler l'intensité du faisceau électronique. L'hélice et le

Fig. XXI-24 — Tube amplificateur T.P.O. Représentation schématique (pour la clarté du schéma les bobines de focalisation ne sont pas représentées)



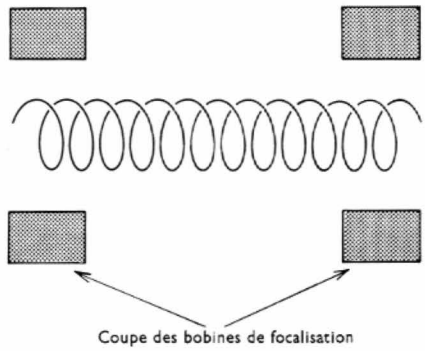


Fig. XXI-25 — Tube amplificateur : Bobines de focalisation

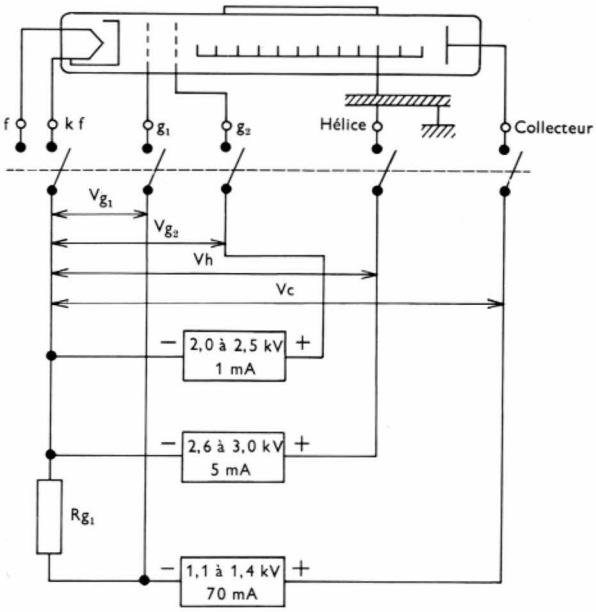


Fig. XXI-26

collecteur ne sont pas forcément au même potentiel que l'anode g_2 (fig. XXI-26).

d) *Exemple de réalisation.* — Tube T.P.O. dont la fréquence d'utilisation est comprise de 5 800 à 8 500 MHz. Caractéristiques de fonctionnement à 7,2 GHz :

		Max.	Moy.	Min.	Unité
Puissance de sortie	Ps	15	10	5	W
Tension de l'hélice (réglée pour le gain maximal)	Vh	approx. 2 800	2 750	2 750	V
Tension du collecteur	Vcoll	1 350	1 300	1 100	V
Tension de l'électrode de focalisation	Vgl	— 5	— 5	— 5	V
Courant du collecteur	Icoll	55	55	55	mA
Gain	G	39	41	42	dB
Tension de l'électrode d'accélération	Vg2	2 100	2 100	2 100	V
Courant de l'électrode d'accélération	Ig2	$< 0,1$	$< 0,1$	$< 0,1$	mA
Courant de l'hélice (prise de focalisation)	Ih	1	1	0,8	mA
Facteur de bruit thermique	FB	27	24,5	24	dB

3.2.2. Oscillateurs à onde progressive inverse (carcinotrons « O »)

1° *Généralités.* — L'onde 4 (V. § 3.1.3) peut être cause de la naissance d'oscillations dans un tube ; elle va être utilisée dans le carcinotron « O ». En considérant cette onde 4, nous avons précisé qu'il n'y a presque pas d'interaction onde-électron. En réalité, cela est seulement vrai s'il y a toujours présence du champ hyperfréquence le long du faisceau électronique, c'est-à-dire si les effets des interactions opposées (accélération, ralentissement) se compensent. Dans certaines configurations cette condition n'est pas toujours réalisée, comme nous allons le voir. Par exemple, si un faisceau électronique *AB* passe le long d'une ligne interdigitale, sensiblement au milieu de celle-ci, il n'y a pas interaction onde-électron tout le temps mais seulement en des points précis des espaces diélectriques compris entre deux « doigts » de la ligne (fig. XXI-27). En effet,

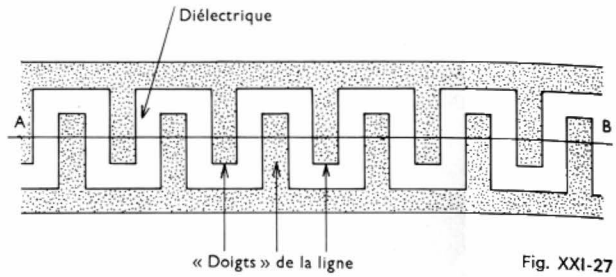


Fig. XXI-27

l'onde se propage seulement dans l'espace diélectrique de la ligne et le faisceau électronique ne traverse celui-ci qu'en des points déterminés. Pour étudier l'interaction, traçons la distribution de potentiel hyperfréquence le long de *AB* (fig. XXI-28) en supposant :

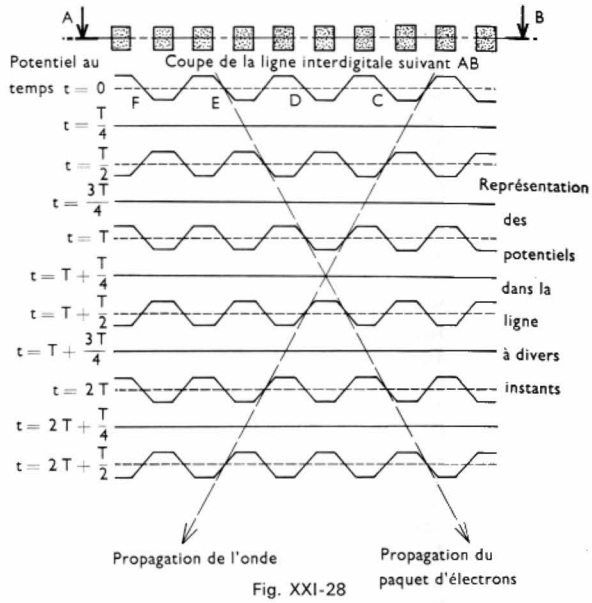


Fig. XXI-28

— que ce potentiel, lié à la propagation de l'onde dans la ligne, se propage lui aussi en sens inverse du faisceau électronique, c'est-à-dire de *B* vers *A* ;

— qu'il y a opposition de phase entre les potentiels dans deux espaces diélectriques consécutifs de la ligne (d'où le nom de *mode* π). Cette opposition de phase est réalisée si l'onde passe en un temps $\frac{T}{2}$ d'un espace diélectrique au suivant. Pour cela il faut que la longueur totale de diélectrique de la ligne entre ces deux espaces consécutifs représente une demi-longueur d'onde (fig. XXI-29) ;

— qu'il n'y a pas de variation de potentiel dans l'épaisseur d'un doigt de la ligne.

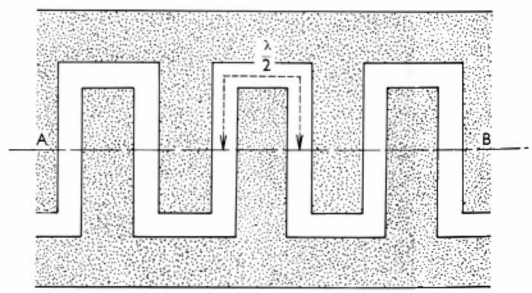


Fig. XXI-29

Dans ces conditions la propagation de l'onde et celle du paquet d'électrons peuvent être symbolisées par deux lignes (V. fig. XXI-28).

Suivant *AB* les vitesses de propagations sont égales mais

Carcinotron « O », tube à onde régressive (0,1-0,5 W, 270-290 GHz) (*Hermil-Thomson-C.S.F.*)

de sens opposé. Dans un espace diélectrique, un paquet d'électrons se déplace dans le sens des potentiels décroissants : il est donc ralenti et il fournit de l'énergie à l'onde à chaque interaction onde-électrons. En réalité, il n'y a pas propagation d'un seul paquet d'électrons mais d'un paquet par période et cela se traduit sur le diagramme (fig. XXI-30) par des lignes parallèles tracées à partir des points *C*, *D*, *E*, *F*, etc.

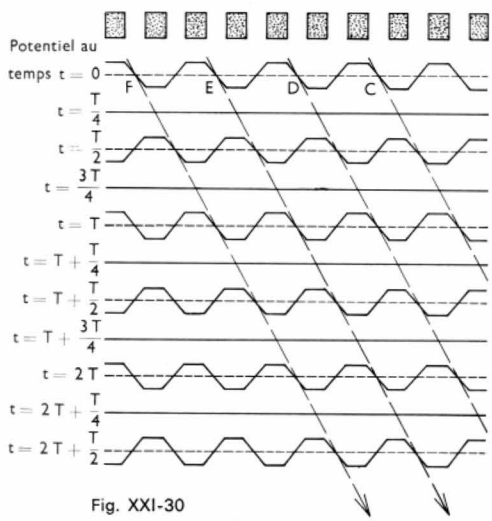


Fig. XXI-30

Remarque : La figure XXI-30 montre que si un paquet d'électrons se propage à la vitesse de l'onde et dans le même sens que l'onde, il se produit aussi une amplification de l'onde : dans le mode π, les fonctionnements direct ou inverse fournissent le même résultat. Cependant, dans le premier cas, il s'agit d'un tube à onde progressive à ligne interdigitale et non d'un carcinotron « O », car cette appellation est réservée au cas où l'onde inverse est utilisée.

2° *Description d'un tube oscillateur à onde progressive inverse.* — Ce tube présente une structure de tétrode avec des ouvertures rectangulaires dans les différentes électrodes. Ces ouvertures délimitent deux faisceaux électroniques qui viennent « lécher » les deux faces d'une ligne interdigitale (représentée en coupe sur la figure XXI-31). Un collecteur recueille les électrons ralentis. Un champ magnétique uniforme et longitudinal est employé pour la focalisation des faisceaux. L'anode, la ligne et le collecteur sont portés à un même potentiel, dont la valeur peut être réglée par rapport à celui de la cathode. Les signaux

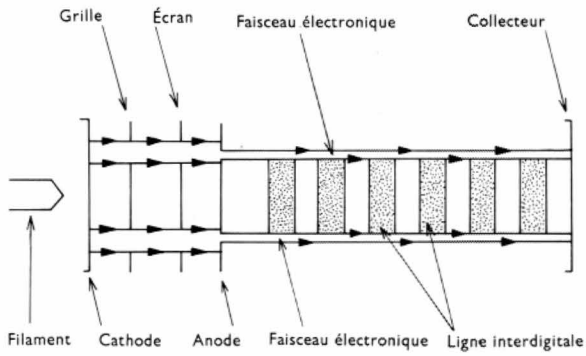


Fig. XXI-31

hyperfréquences sont recueillis près de l'anode puisque c'est l'onde inverse qui est utilisée. La ligne interdigitale est fermée du côté collecteur par une charge adaptée, devant présenter une dissipation thermique assez élevée (elle est bombardée par les électrons).

En modifiant la tension anode-cathode, la fréquence d'oscillation varie dans d'assez grandes limites, ce qui est d'un grand intérêt. Pour qu'il y ait oscillation, il faut un courant cathodique minimal, appelé *courant d'accrochage*.

3.3. Tubes à configuration circulaire

3.3.1. Les oscillateurs

1° *Les magnétrons.* — Ce sont les tubes les plus anciens et les plus importants de cette catégorie.

a) *Description, fonctionnement.* — Un magnétron se compose essentiellement d'une cathode, d'une anode et d'une ligne à retard. Dans l'espace annulaire la trajectoire d'un électron est une spirale (fig. XXI-32). Ce résultat est obtenu en combinant déviations magnétique et électrique (V. chap. 2). Le champ électrique est radial, dirigé de l'anode vers la cathode ; le champ magnétique est perpendiculaire au précédent (dirigé vers l'avant sur la fig. XXI-32). De plus, la d.d.p. anode-cathode doit avoir une valeur bien déterminée, fonction du champ magnétique appliqué. Si l'intensité du champ magnétique est trop grande, les électrons reviennent rapidement vers la cathode (le rayon de courbure de la spirale est petit). Si la d.d.p. anode-cathode est trop importante, l'électron effectue peu de révolutions autour de la cathode et il est rapidement capté par l'anode.

Fig. XXI-32

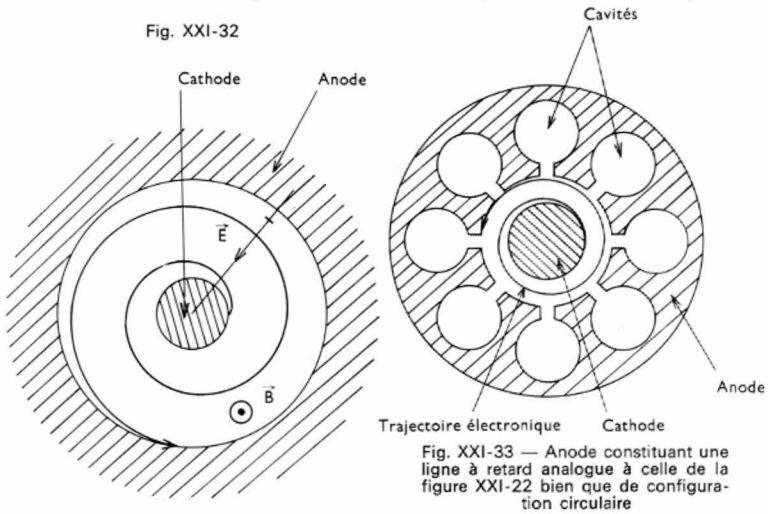


Fig. XXI-33 — Anode constituant une ligne à retard analogue à celle de la figure XXI-22 bien que de configuration circulaire

La ligne à retard est disposée entre la cathode et l'anode ; en réalité l'anode fait partie de cette ligne.

D'anciens magnétrons comportaient une anode en forme de ligne interdigitale (anode à « cage d'écureuil »). Les magnétrons modernes possèdent une anode creusée de cavités résonnantes (fig. XXI-33). Les électrons passant

en face des lèvres des cavités, celles-ci sont excitées les unes après les autres, et il en résulte une sorte de champ tournant qui se propage en même temps que les électrons et les suit en les ralentissant.

Le diagramme de la figure XXI-28 est encore utilisable : il représente le mode π dans les magnétrons. Sur la coupe placée en haut de cette figure, les parties hachurées représentent les portions d'anode entre les lèvres de deux cavités consécutives. On admet que le potentiel change brusquement entre les lèvres de ces cavités mais reste constant entre deux cavités.

Le fonctionnement est possible si l'onde se propage dans le sens du faisceau ou dans le sens inverse, si les vitesses de l'onde et du faisceau sont égales en valeur absolue. Cela est gênant car sans précautions spéciales, un magnétron peut fournir une onde directe aussi importante que l'onde inverse.

Le regroupement des électrons s'opère comme indiqué au paragraphe 2.2.2 ; il forme des paquets situés de deux cavités en deux cavités. Ces groupes d'électrons se suivent et tournent en spirale fournissant de l'énergie aux cavités dont ils provoquent l'excitation. La ligne étant bouclée sur elle-même, c'est une onde amplifiée qui revient au point de départ après avoir fait un tour ; des oscillations prennent naissance (il y a *accrochage*) et leur fréquence est égale à la fréquence d'accord des cavités.

b) *Divers modes d'oscillations.* — Divers modes d'oscillations peuvent être mis en évidence au moyen de la figure XXI-34. Le paquet d'électrons dont la trajectoire

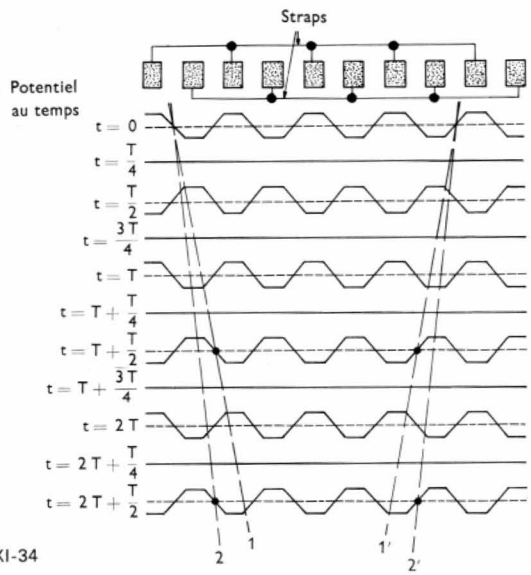


Fig. XXI-34

est schématisée par la droite 1 traverse toujours les lèvres des cavités au moment où il peut être retardé. Il en est de même pour celui dont la trajectoire est figurée par la droite. 2. Les paquets d'électrons qui mettent un temps $\left(T + \frac{T}{2}\right)$ $\left(2T + \frac{T}{2}\right)$ ou $\left(3T + \frac{T}{2}\right)$, etc., pour passer d'une cavité à la cavité suivante peuvent donc engendrer des oscillations.

Le même raisonnement s'applique à l'onde inverse (droites 1′ et 2′). Des oscillations peuvent être dues à des électrons animés de vitesses bien inférieures à celle de l'onde. Dans ces conditions cependant, les cavités ne sont plus excitées une fois par période mais beaucoup plus rarement, ce qui ne correspond pas aux meilleures conditions de fonctionnement. Dans un magnétron le mode π n'est pas non plus le seul mode possible et d'autres distributions de potentiel peuvent également être envisagées. Considérons un magnétron à huit cavités et la distribution de potentiel représentée sur la figure XXI-35. L'onde se propage de gauche à droite, et les droites 1, 2 et 3 figurent des trajectoires d'électrons qui se déplaçent dans le même sens que l'onde. Chaque fois que des électrons passent devant

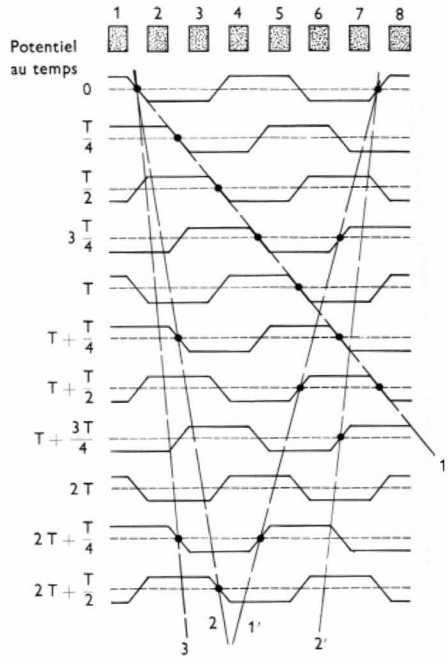


Fig. XXI-35

un résonateur, ils sont ralentis et ils cèdent une fraction de leur énergie. La droite 1 correspond à des électrons qui passent devant quatre résonateurs en une période.

Ces électrons se déplacent à la même vitesse que l'onde, et cette vitesse est deux fois plus grande que celle des électrons considérés dans le mode π. Les résonateurs sont excités une fois par période (il y a deux paquets d'électrons qui se suivent). Les droites 2 et 3 correspondent à des fonctionnements moins favorables, les résonateurs étant excités moins souvent.

Les trajectoires 1′ et 2′ correspondent à des électrons qui se déplacent en sens inverse de l'onde mais qui entretiennent cette onde. Dans ce cas, à l'inverse du mode π, les modes inverses 1′ et 2′ ne sont les symétriques d'aucun mode direct.

À ce grand nombre de modes de fonctionnement, il faut en ajouter un. Entre la cathode et l'anode le nuage électronique peut être de densité uniforme ; pendant une alternance le rayon de giration augmente tandis que les électrons se rapprochent des résonateurs et pendant l'alternance suivante, le phénomène inverse se produit. Une oscillation de même phase prend naissance dans tous les résonateurs. À chacun de ces modes de fonctionnement correspond une fréquence de fonctionnement différente (sauf pour les modes « symétriques » bien entendu) ; lorsqu'un mode déterminé est désiré (en général le mode π), il faut empêcher le magnétron de fonctionner simultanément suivant un autre mode.

c) *Détails de construction.*

— Les procédés utilisés pour purifier le mode d'oscillation sont au nombre de deux :

Le strapping. — En mode π (fig. XXI-34), les pièces métalliques qui séparent deux résonateurs sont équipotentielles deux à deux ; elles peuvent être réunies deux à deux par un conducteur appelé « strap » sans rien changer à leur fonctionnement. La figure XXI-35 montre que les « straps » gênent le fonctionnement schématisé puisque les parties précédemment au même potentiel sont maintenant à des potentiels différents. En mode π, les « straps » sont équipotentiels et par conséquent neutres ; dans un autre mode, ils ne sont plus équipotentiels et la capacité qu'ils forment avec la portion d'anode qu'ils surplombent est donc alimentée sous une tension hyperfréquence. L'influence de cette capacité se traduit par un changement de la fréquence de fonctionnement du magnétron ; cela augmente la différence de fréquence entre le mode π et les autres modes : il y a séparation des modes.

Le strapping peut être réalisé en échelons (fig. XXI-36)

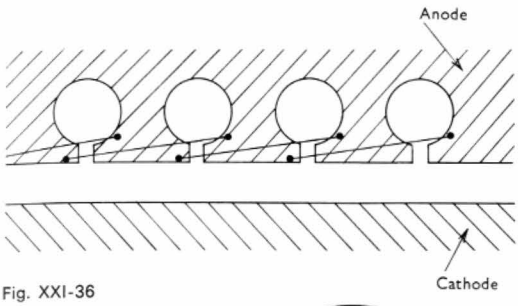


Fig. XXI-36

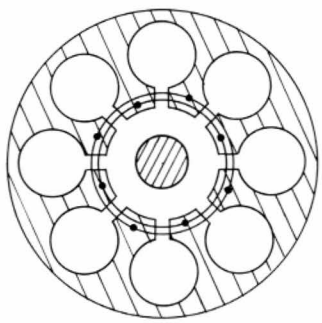


Fig. XXI-37

ou en double anneau (fig. XXI-37). Dans ce dernier cas, les parties métalliques de l'anode qui séparent les cavités sont connectées de deux en deux à deux anneaux concentriques à l'axe du magnétron.

Le magnétron « Soleil Levant ». — Ce magnétron comporte des cavités de formes et de dimensions différentes

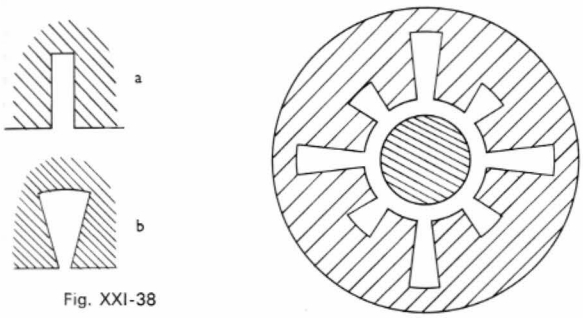


Fig. XXI-38

(fig. XXI-38). Les fréquences d'accord de ces deux sortes de cavités encadrent la fréquence d'oscillation en mode π, qui est le mode de fonctionnement du magnétron. Cette répartition de deux en deux équivaut au strapping de deux en deux.

Le magnétron « Soleil Levant » est particulièrement bien adapté aux ondes très courtes.

Trois procédés sont utilisés pour changer la fréquence de fonctionnement d'un magnétron :

— emploi de pistons plongeant dans toutes les cavités à la fois ;

— emploi d'anneaux analogues à ceux du strapping mais non connectés à l'anode. En les rapprochant ou en les éloignant de l'anode, l'effet capacitif qu'ils créent à l'entrée des cavités est modifié ;

— emploi de faisceaux électroniques traversant chacune des cavités et changeant ainsi leur volume utile. Ce dernier procédé est d'un emploi difficile.

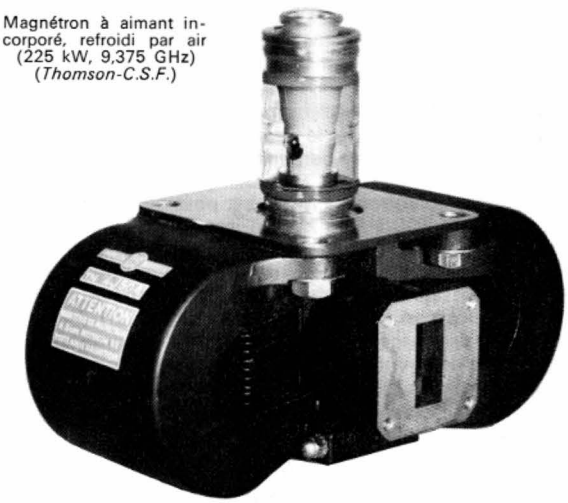
Les deux premiers procédés ne sont simples qu'en apparence car ces dispositifs sont commandés de l'extérieur (à l'air libre) alors que les anneaux ou les pistons se déplacent dans le vide : il y a donc un problème d'étanchéité très important. C'est la raison pour laquelle la plupart des magnétrons fonctionnent à une fréquence pratiquement fixe. Le seul procédé employé pour la faire varier consiste à modifier la charge qu'ils alimentent au détriment de la puissance de sortie et du rendement.

Construction. — Pour pouvoir appliquer un champ magnétique uniforme et dirigé selon l'axe du magnétron, il faut que les électrodes soient en métal non magnétique. L'anode est en cuivre massif, elle est percée d'un trou central communiquant par des lèvres avec toutes les cavités périphériques percées dans cette même anode. La cathode est souvent un tube creux recouvert d'une couche d'oxydes de strontium, de baryum ou de thorium. Bombardée par des électrons trop accélérés et qui n'ont pu être focalisés dans le faisceau, elle peut fournir, par émission secondaire, les électrons nécessaires au fonctionnement du magnétron. La densité d'émission électronique atteint 20 et même 30 A/cm^2. Aussi, lorsque le magnétron fonctionne, cette émission est-elle souvent suffisante et l'alimentation des filaments de chauffage peut être supprimée après un court instant.

Certains magnétrons sont à aimant indépendant, et d'autres à aimant incorporé. Pour alimenter un magnétron, l'anode est à la masse tandis que la cathode et les filaments sont portés à un potentiel très négatif (— 10 kV à — 50 kV). Un isolement très sérieux est nécessaire.

La puissance utile est prélevée dans une des cavités à l'aide d'une boucle de couplage ; la sortie est souvent réalisée sous forme coaxiale.

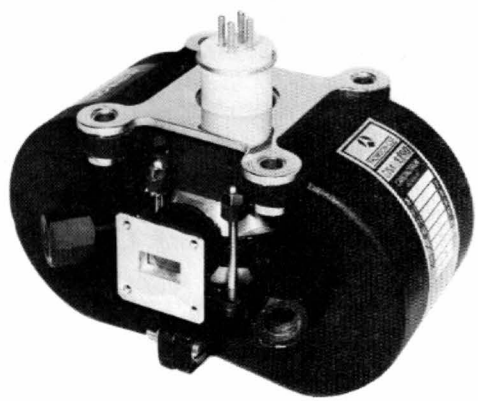
d) *Exemple de magnétron.* — Nous avons choisi un magnétron à fonctionnement continu, c'est-à-dire qui fournit une puissance constante étant alimenté en permanence. La plupart des magnétrons sont alimentés par un dispositif impulsionnel : ils ne fonctionnent que pendant de très courts intervalles de temps, lorsque l'alimentation a une valeur convenable. Ils fournissent alors des trains d'impulsions hyperfréquences.



Magnétron à aimant incorporé, refroidi par air (225 kW, 9,375 GHz) (*Thomson-C.S.F.*)

e) *Rendement.* — Les rendements atteignent couramment de 35 à 50 %. Le magnétron est équivalent d'un oscillateur en classe C (V. chap. 16) ; il ne débite que lorsqu'il oscille car le champ magnétique fourni étant important, les trajectoires des électrons n'atteignent généralement pas l'anode si le régime oscillatoire n'est pas établi.

2° *Les carcinotrons « M ».* — Ce sont des oscillateurs à champs magnétique et électrique croisés. Dans ce tube,



Carcinotron « M », tube à champs croisés (100 W, 15,4-17,6 GHz) (*Thomson-C.S.F.*)

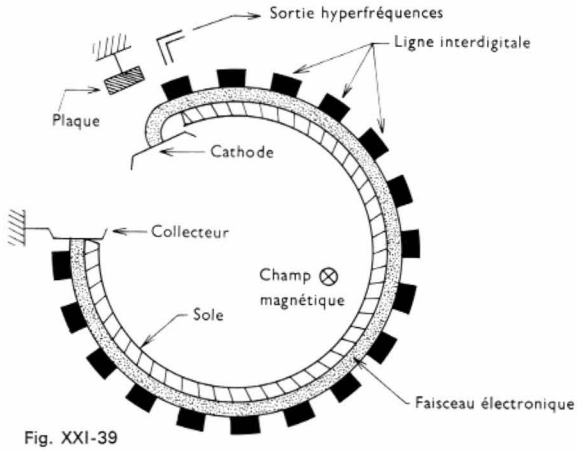


Fig. XXI-39

les trajectoires électroniques sont sensiblement circulaires et elles viennent « lécher » une ligne interdigitale avant d'être captées par un collecteur. Il y a interaction entre le faisceau et l'onde inverse ; cette dernière est donc recueillie près de la cathode (fig. XXI-39). Les différents champs électriques nécessaires pour imposer au faisceau électronique la trajectoire désirée sont obtenus de la façon suivante :

— la plaque et le collecteur sont à la masse ;
— la cathode est négative par rapport à la masse ;
— la sole est plus négative que la cathode ; elle repousse donc les électrons dont la trajectoire s'incurve sous l'effet du champ magnétique ;
— la ligne interdigitale est à la masse.

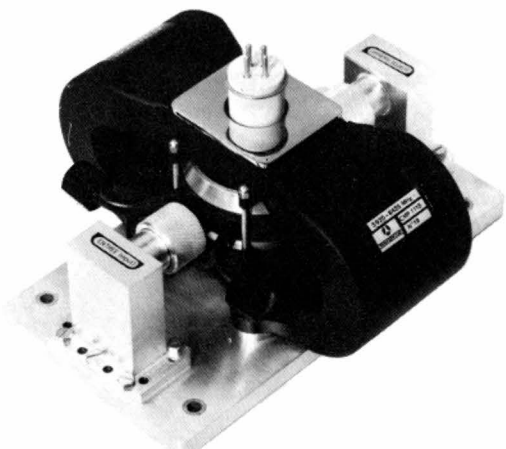
Entre la sole et la ligne, le champ électrique, dirigé de la ligne vers la sole, est bien perpendiculaire au champ magnétique.

Avec les carcinotrons « M » il est possible d'obtenir des puissances de 100 à 200 kW en impulsion pour des fréquences de la bande S (V. t. 2, Radioélectricité, chap. 6). Le rendement peut atteindre 45 %. Pour ce tube également les oscillations ne se produisent que si l'intensité du courant est supérieure à un « courant d'accrochage ».

C'est en faisant varier les tensions d'alimentation qu'il est possible de couvrir la bande de fréquence pour laquelle le tube est fabriqué (les variations de fréquences sont faibles en modifiant la tension de la sole, elles sont importantes lorsque c'est la tension de la ligne qui varie).

3.3.2. Les amplificateurs

1° *Le « T.P.O.M. »*. — La structure est la même que celle d'un carcinotron « M » mais les signaux hyperfréquence à amplifier sont injectés à la sortie hyperfréquence du carcinotron et les signaux amplifiés sont recueillis près du collecteur. C'est l'onde directe qui est utilisée dans ce cas. Un T.P.O.M. est donc un tube à onde progressive enroulé sur lui-même, ce qui permet un encombrement moindre. Il faut encore un champ magnétique perpendiculaire au champ électrique pour que l'appareil fonctionne. Avec ces tubes, le rendement peut atteindre 48 à 50 %.



Carpitron, tube à champs croisés (500 W, 5 925-6 425 MHz) (*Thomson-C.S.F.*)

2° *Le « carpitron »*. — Ce tube doit être considéré comme un oscillateur synchronisé dérivé du carcinotron « M » plutôt que comme un amplificateur. Il peut amplifier avec un très faible bruit une onde dont la fréquence est à moins de 1 % de la fréquence pour laquelle il est réglé et son gain atteint 15 à 20 dB.

4. DIODES UTILISÉES EN OSCILLATRICES HYPERFRÉQUENCES

Ce sont des diodes qui présentent une résistance dynamique négative aux fréquences d'utilisation (V. chap. 7).

4.1. Diodes à avalanche. — Dans une diode qui présente une zone d'avalanche très étroite suivie d'une zone désertée (V. chap. 7), les paires électrons-trous qui sont engendrées dans la zone d'avalanche se séparent en électrons allant vers la gauche et en trous qui traversent la zone désertée avec la vitesse constante $\vec{v}$ (fig. XXI-40). L'avalanche n'est pas un phénomène instantané. Il faut un

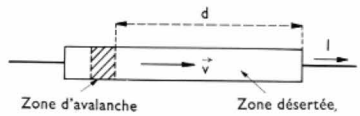


Fig. XXI-40

certain temps d'établissement : on dit qu'il y a émission retardée. Si la zone désertée a une longueur d, il faut un temps $\tau = \frac{d}{v}$ pour que les trous traversent cette zone. Ces trous équivalent à une charge positive Q et pendant tout leur transit ils induisent un courant dans le circuit extérieur (induction sur les électrodes terminales se traduisant par le passage d'un courant). On démontre que ce courant a une intensité égale à :

$$i = \frac{vQ}{d} = \frac{Q}{\tau}$$

Ce courant est constant si Q est constant ; il commence à passer lors de la formation des électrons-trous et dure pendant tout le temps de transit des trous.

Considérons maintenant une diode soumise, simultanément, à une tension continue V_0 et à une tension d'oscillation v. Tant que la tension appliquée est supérieure à V_0, nous admettrons qu'il y a création de paires électrons-trous. Pendant toute l'alternance positive de v, nous avons donc un courant d'avalanche croissant (émission retardée). Pendant toute l'alternance négative de v, le courant d'avalanche décroît.

Le courant induit dans le circuit extérieur correspond à la somme des courants induits par tous les trous en transit. Il est maximal en même temps que le courant d'avalanche ; il conserve cette valeur maximale pendant un temps τ (sur la figure XXI-41, nous avons représenté le cas où τ est inférieur à une demi-période de la tension d'oscillation).

Par suite des retards successifs, le courant i dans le circuit extérieur est en retard d'une demi-période par rapport à la tension qui lui a donné naissance. Il y a bien un effet de résistance dynamique négative et l'on démontre que la puissance d'oscillation qui peut être obtenue est maximale lorsque $\omega\tau = \frac{3\pi}{4}$ (c'est-à-dire lorsque le temps de transit représente les trois quarts de la demi-période).

Une diode à avalanche peut donc être incluse dans une cavité résonnante : pour obtenir l'avalanche, il faut « polariser » la diode avec une tension continue V_0.

Des oscillations spontanées peuvent prendre naissance dans la diode si la résistance positive due aux pertes de la cavité est inférieure en valeur absolue à la résistance négative de la diode. De plus, par sa fabrication, une diode à avalanche est mieux adaptée pour osciller à une fréquence déterminée : cette fréquence optimale est celle qui corres-

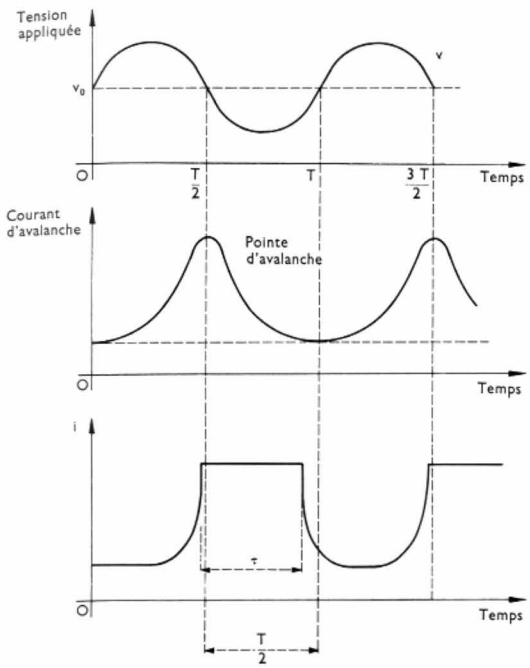


Fig. XXI-41 — T : période de la tension d'oscillation v

pond sensiblement à la valeur de τ donnée par l'égalité suivante : $\omega\tau = \frac{3\pi}{4}$.

La figure XXI-42 représente le montage d'une diode à avalanche dans une cavité cylindrique hybride. La cavité est formée de deux parties parfaitement isolées qui permettent d'appliquer facilement la tension de polarisation V_0 à la diode.

À une fréquence de 10 GHz la puissance de certains oscillateurs peut atteindre 5 W environ en régime d'oscillations continu et cela avec un rendement de 8 %. À 40 GHz, cette puissance peut être plus de dix fois plus faible. En régime d'impulsions, les résultats sont meilleurs : la puissance de crête peut atteindre 300 W à 1 GHz avec un rendement de 40 % (ce dernier résultat est cependant assez exceptionnel). Il est possible d'obtenir des oscillations de fréquence égale à 300 GHz, mais puissance et rendement sont alors très faibles (puissance de 1 mW, par exemple).

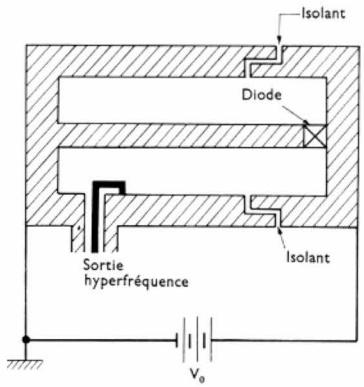


Fig. XXI-42

Un montage oscillateur comme celui de la figure XXI-42 peut être utilisé pour remplacer des klystrons reflex dans des oscillateurs locaux ou des oscillateurs de pompes pour amplificateurs paramétriques. Ils équipent, aussi, des petits émetteurs radars (comme ceux employés pour contrôler la circulation automobile).

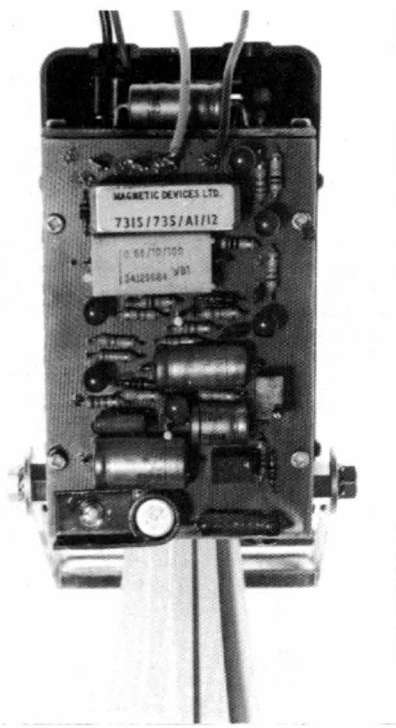
Pour obtenir de grandes puissances, il a semblé intéressant d'utiliser des diodes disposées en parallèle. En réalité, cette solution présente de nombreux inconvénients : d'une part, lorsque les diodes sont trop près les unes des autres, elles s'échauffent mutuellement ; d'autre part, lorsqu'elles sont trop éloignées les unes des autres, les connexions qui les réunissent interviennent par leurs longueurs.

4.2. Diodes à effet Gunn. — Leur principe de fonctionnement est totalement différent de celui des diodes à avalanche.

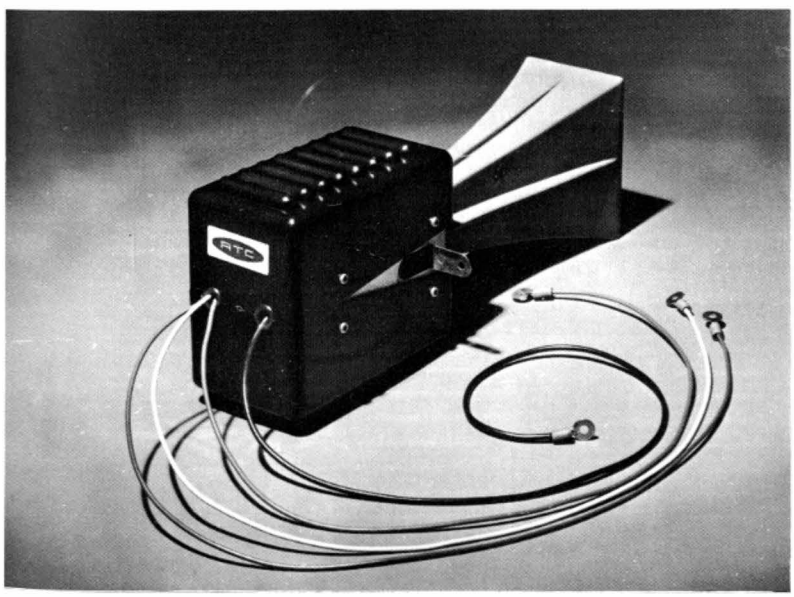
Fig. XXI-43

Si nous appliquons un champ électrique $\vec{E}$ à un semiconducteur de type N, nous obtenons un courant électrique I et nous augmentons l'énergie des électrons qui composent ce courant (fig. XXI-43). Ceux-ci réagissent sur le réseau cristallin du semiconducteur et de l'énergie est dissipée dans ce réseau. Il en résulte un ralentissement des électrons et celui-ci augmente avec l'énergie des particules, c'est-à-

Même modèle ouvert (*R.T.C.*)



Radar à diode Gunn (portée sur homme au pas : 25 m ; portée sur véhicule (150 km/h) : entre 25 m et 40 m ; fréquence d'émission : 10,6 GHz (*R.T.C.*)



dire avec le champ $\vec{E}$. Un accroissement de ce champ $\vec{E}$ est donc à l'origine de deux modifications opposées :

— une augmentation du nombre d'électrons formant le courant I (c'est-à-dire une augmentation de I),

— une diminution de la vitesse des électrons participant à ce courant (il en résulte une diminution de I).

Si la diminution l'emporte sur l'augmentation (c'est le cas avec l'arséniure de gallium soumis à un champ électrique suffisant), nous obtenons une diminution du courant lorsque nous augmentons la tension utilisée pour produire le champ $\vec{E}$. Le semiconducteur présente une résistance dynamique négative : il peut être employé pour obtenir des oscillations.

En ce qui concerne le bruit de modulation des diodes utilisées en oscillatrices, il a été constaté que, pour les fréquences inférieures à 9 GHz, les klystrons reflex et les diodes Gunn sont plus bruyants que les diodes à avalanche alors que, pour les fréquences supérieures à 9 GHz, c'est l'inverse.

Les applications des diodes à effet Gunn, ou diodes Gunn, sont identiques à celles des diodes à avalanche. Les résultats sont semblables. La figure XXI-44 est un montage sur guide d'ondes, utilisable aussi bien pour les diodes à avalanche que pour les diodes Gunn. Néanmoins, il faut remarquer :

— d'une part, que les diodes à avalanche peuvent être fabriquées plus facilement puisqu'elles sont en silicium alors que les diodes Gunn nécessitent de l'arséniure de gallium,

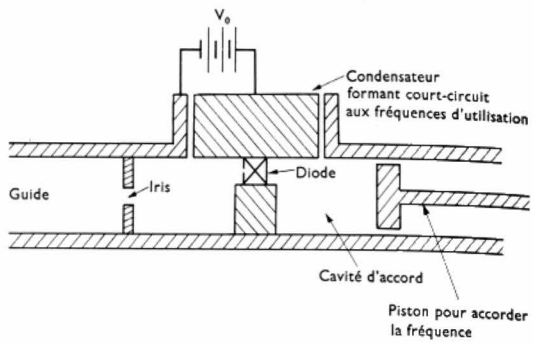


Fig. XXI-44

— d'autre part, que les diodes Gunn fonctionnent à des tensions plus faibles que les diodes à avalanche.

Les radars à diode Gunn sont mis en œuvre dans de nombreux dispositifs automatiques : commande de l'ouverture automatique de portes de certains lieux publics, commande de trottoirs ou d'escaliers roulants, commande de tapis de caisse, etc. Ils servent notamment pour le contrôle des feux de trafic, pour la mesure de vitesse de véhicules, pour le comptage de pièces éjectées d'une machine, pour l'animation de vitrine, etc. Certains équipent des déclencheurs d'obturateurs photographiques ou des circuits de surveillance et de protection de biens et de personnes.

CHAPITRE XXII

MICROÉLECTRONIQUE CIRCUITS INTÉGRÉS

1. PRÉSENTATION

Les éléments étudiés jusqu'à présent, bien que très petits comparés aux tubes électroniques qu'ils ont remplacés, ont très vite pu être miniaturisés. Cependant leur encombrement n'a pu être indéfiniment réduit car on se heurte à la nécessité de placer le composant dans un boîtier muni d'électrodes pour pouvoir le manipuler aisément et l'insérer dans un montage. Aussi est-il très vite apparu plus intéressant de fabriquer plusieurs composants sur un même support, avec des liaisons adéquates, pour former un montage complet. Cette technique s'est révélée riche de possibilités et elle a conduit aux circuits intégrés. Il faut noter que, pour obtenir le résultat désiré, l'on n'a pas mis au point de nouveaux composants : ceux qui étaient utilisés jusqu'ici (transistors, diodes, résistances) ont seulement été fabriqués sous des formes qui ont permis des groupements très compacts, avec les connexions nécessaires, sur un support unique de surface souvent très petite.

Un circuit intégré peut avoir des applications très variées, comme un amplificateur opérationnel (V. chap. 16), ou n'être utilisable que pour une application déterminée. Ce peut être, par exemple, un circuit amplificateur pour haute fréquence. Il remplace alors plusieurs étages amplificateurs de conception traditionnelle (comme ceux étudiés dans les chapitres qui précèdent). Pour l'utilisateur il se présente sous la forme d'un boîtier cylindrique ou parallélépipédique équipé de nombreuses broches de connexions (8, 14 ou davantage), qui permettent de le placer dans un montage électrique (fig. XXII-1). Dans le cas d'un circuit intégré amplificateur des broches sont prévues pour l'alimenter en courant continu, d'autres pour appliquer la tension à amplifier, d'autres encore pour recueillir la tension amplifiée.

On fabrique de nombreuses sortes de circuits intégrés, comme on le verra lors de l'étude des applications de ces dispositifs ; pour l'utilisateur chaque circuit se distingue par sa présentation et par sa référence. En ce qui concerne les présentations courantes, on en trouve essentiellement trois :

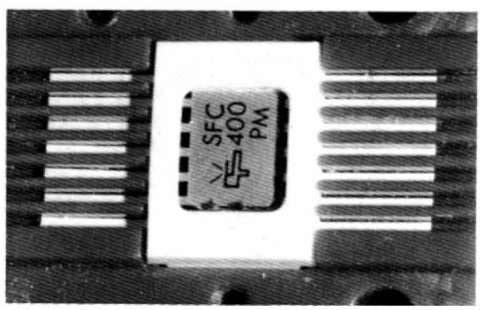
— les boîtiers cylindriques (dits *TO-5*),

— les boîtiers plats,

— les boîtiers à double rangée de connexions dits ***DIL*** (de l'expression anglaise *Dual In Line Package*).

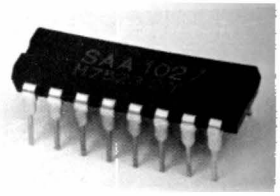
Fig. XXII-1

Boîtier TO-5 (*R.T.C.*)



Boîtier plat (flat pack) dans son emballage plastique (*Thomson-C.S.F.*)

Boîtier DIL (*R.T.C.*)

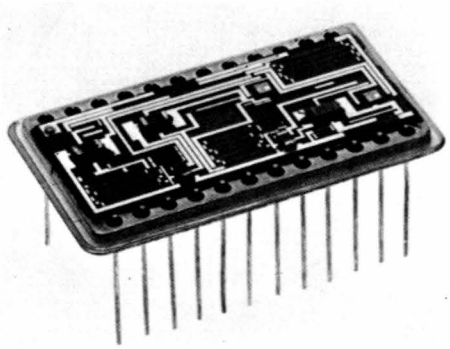


2. CLASSIFICATION

Selon la nature du support ou *substrat*, on distingue deux grandes catégories de circuits intégrés :

1° *Les circuits intégrés monolithiques ou circuits intégrés semiconducteurs :* le substrat est alors une plaquette de semiconducteur (en général du silicium). Les composants sont obtenus en diffusant des impuretés déterminées dans des zones bien délimitées de la couche superficielle de la plaquette. La structure des transistors et des diodes formées est tout à fait semblable à celle des composants qui ont été décrits dans les chapitres précédents. Dans la plaquette, ces composants sont parfaitement distincts les uns des autres mais il n'est pas possible de les séparer (du moins avec les moyens techniques actuels) ; en cela seulement ils se distinguent des transistors et des diodes que l'on place sous boîtier et qui font partie des composants dits *discrets*.

2° *Les circuits intégrés hybrides :* le substrat est une plaquette isolante sur laquelle on ne dépose directement que des éléments passifs (résistances surtout, mais aussi condensateurs) tandis que les éléments actifs (diodes et transistors) sont fabriqués séparément et rapportés ensuite sur le support.



Circuit intégré hybride (sans capot protecteur) (*R.T.C.*)

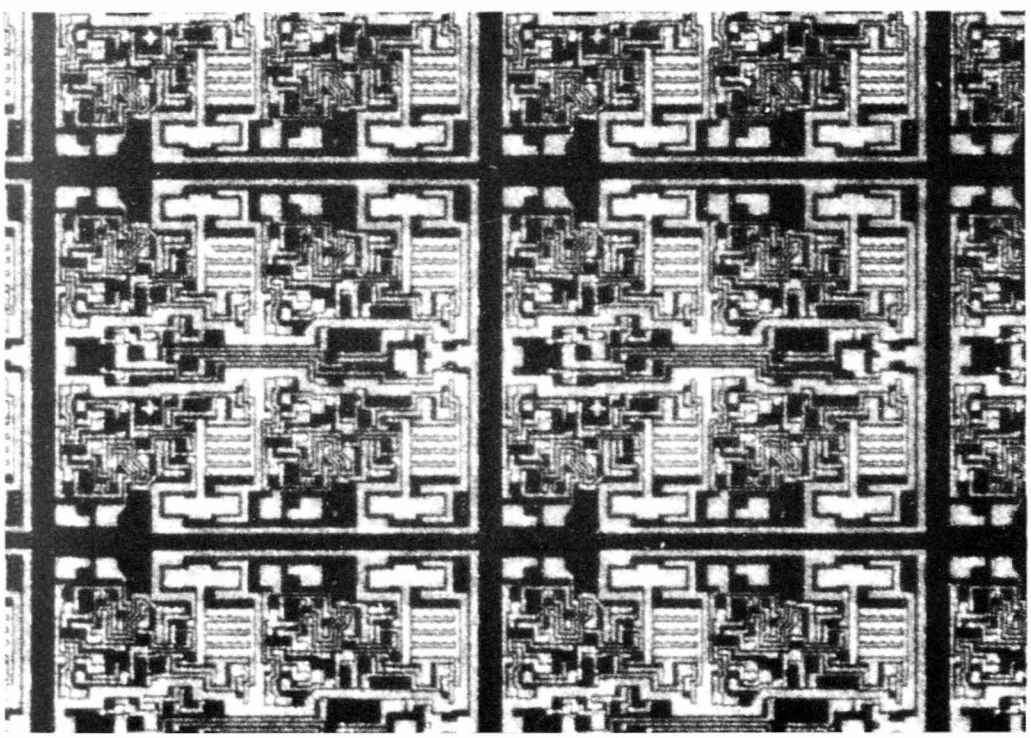
Ces deux techniques sont complémentaires, une plaquette de circuit hybride pouvant recevoir plusieurs circuits intégrés monolithiques. Cela conduit à ce qui est appelé l'intégration à grande échelle, souvent désignée par le sigle LSI (de l'anglais *Large Scale Integration*).

3. CIRCUITS INTÉGRÉS MONOLITHIQUES

3.1. Conception. — La conception des circuits intégrés monolithiques est étroitement dépendante d'un certain nombre d'impératifs de fabrication qui concernent aussi bien la disposition des éléments que leur nature. Ainsi, ces circuits comportent souvent un grand nombre de transistors NPN ou de transistors à effet de champ car ce sont des composants faciles à obtenir. En revanche, on évite d'intégrer des transistors PNP car ceux que l'on peut réaliser présentent souvent des caractéristiques les apparentant à des composants moyens sinon médiocres. Dans le même ordre d'idée, au lieu de chercher à obtenir des diodes, il est aussi simple de fabriquer un transistor NPN et de n'utiliser qu'une jonction de ce composant (la jonction base-émetteur, par exemple).

En ce qui concerne les composants passifs, sans entrer dans le détail, on peut dire qu'il est possible de réaliser des résistances d'une valeur inférieure à 30 kilohms et éventuellement des condensateurs de très faible capacité (40 picofarads au maximum). Aucun procédé de fabrication n'a été mis au point pour les condensateurs de grande capacité et pour les inductances. Lorsque de tels composants sont absolument nécessaires, le constructeur dispose alors de deux possibilités. Une première solution consiste à prévoir que le condensateur (ou l'inductance) nécessaire sera placé entre des points de connexions du circuit intégré, à l'extérieur du boîtier. Cette solution n'est pas très intéressante, ne serait-ce que par le fait qu'en général on perd ainsi les avantages apportés par la miniaturisation. De surcroît, comme le nombre de points de connexions d'un boîtier est limité, on ne peut recourir à ce procédé que rarement (sur les huit ou quatorze prévus, seuls certains d'entre eux sont disponibles pour l'usage considéré). Une seconde solution, bien qu'apparemment plus complexe, est souvent préférée. À la place du composant on dispose un montage électronique approprié (diffusé sur le substrat en même temps que le reste), qui présente des propriétés telles que, pour ce qui concerne le courant et la tension, il n'y a pas de différence entre le montage et le composant. C'est d'ailleurs là un de ces cas assez rares où le choix d'une solution technique compliquée se révèle beaucoup plus intéressant que celui d'une solution simple.

La conception des circuits intégrés est donc fonction de ces diverses possibilités en même temps que d'un impératif supplémentaire qui est l'encombrement sur la pastille



Quelques circuits intégrés monolithiques avant découpage de la plaquette de silicium (*Thomson-C.S.F.*)

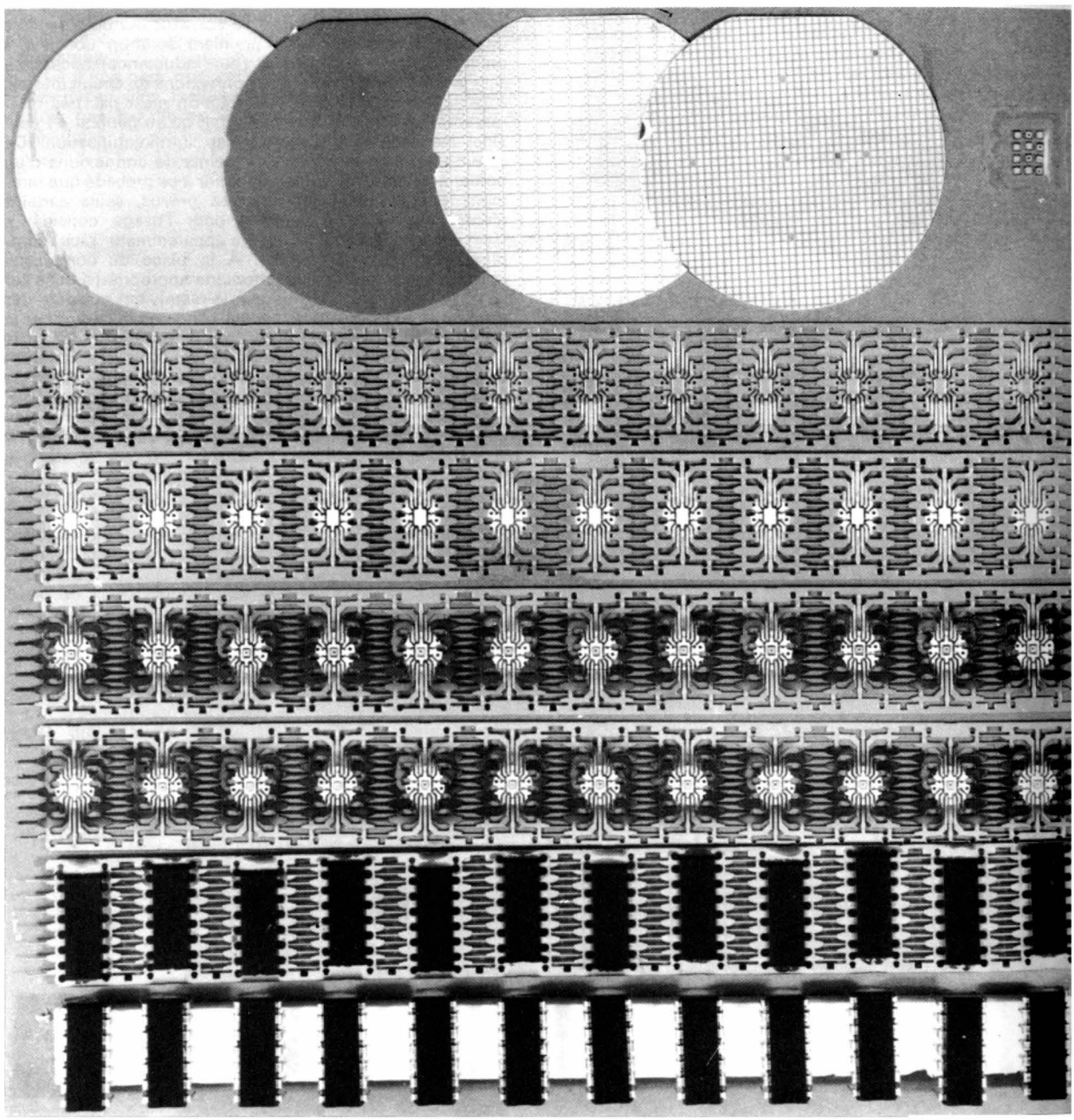
servant de substrat. Auparavant, pour des raisons économiques, on cherchait surtout à limiter le nombre d'éléments d'un circuit. Avec les techniques employées pour la fabrication des circuits intégrés, cela devient totalement inutile mais, en revanche, il faut maintenant tenir compte de la place occupée par chaque élément sur la pastille. Ainsi, une diode ou un transistor peuvent dans certains cas être plus intéressants qu'une résistance car ils occupent une place moindre. Pour cette raison, dans la mesure où les montages peuvent être modifiés, on remplace des résistances par des éléments actifs.

3.2. Réalisation. — Un circuit intégré monolithique est réalisé sur une pastille parallélépipédique de silicium (souvent appelée *puce*) dont la section est un carré de 0,5 à 2 mm de côté, et dont l'épaisseur ne dépasse pas 0,15 à 0,25 mm. On fabrique simultanément 100 à 400 circuits à partir d'une plaquette de silicium découpée dans un monocristal cylindrique de 5 à 7 cm de diamètre environ. Après avoir été obtenue par sciage, chaque plaquette subit un polissage mécanique puis chimique (qui réduit son épaisseur de 0,4 mm à moins de 0,25 mm) afin d'améliorer son état de surface pour les opérations ultérieures. Sur cette plaquette, les circuits sont disposés de façon à former des lignes ; on les sépare, par exemple par découpage, lorsque leur fabrication est terminée. Ensuite seulement on soude les connexions nécessaires et on place chaque circuit dans un boîtier.

Quant aux méthodes mises en œuvre, on retrouve celles utilisées pour les diodes et les transistors et qui ont été décrites au chapitre 7. En effet, on verra que ce sont des techniques de masquage par oxyde et des diffusions localisées d'impuretés dans le substrat qui sont essentiellement employées.

3.2.1. Caissons d'isolement. — L'un des problèmes posés par la réalisation des circuits intégrés a été l'obtention de plusieurs composants, isolés électriquement les uns des autres, dans l'épaisseur d'une unique pastille.

Différentes phases de fabrication d'un circuit intégré monolithique. En haut, la plaquette de silicium à quatre moments du traitement. Au-dessous, pose des connexions et montage de la pastille dans un boîtier DIL (*Thomson-C.S.F.*)



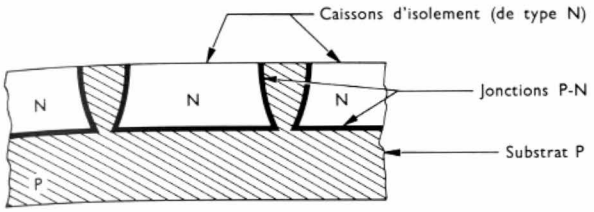
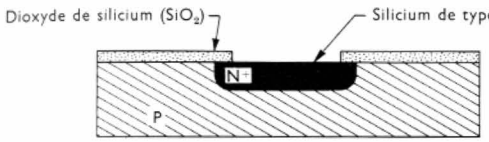


Fig. XXII-2 — Caissons d'isolement

Le substrat est généralement du silicium de type P, c'est-à-dire dont les porteurs majoritaires sont des trous. Dans les conditions d'utilisation, ce corps est conducteur. Si l'on diffuse des zones N dans ce substrat, en des points suffisamment éloignés pour que ces zones n'aient pas de parties communes, il se forme une jonction P-N autour de chacune de ces zones N (fig. XXII-2). Pour qu'aucun courant ne passe d'une zone N à une autre zone N, on l'empêche de passer d'une zone N vers le substrat P. Cela est facile à obtenir car il suffit de polariser le substrat P néga-

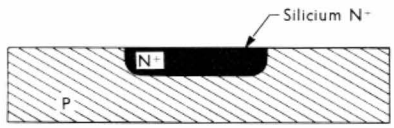
Fig. XXII-3 — Obtention d'un transistor NPN

1. Plaquette initiale substrat P

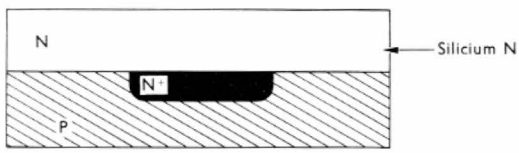


2. Oxydation puis formation d'une couche N^+ dite enterrée

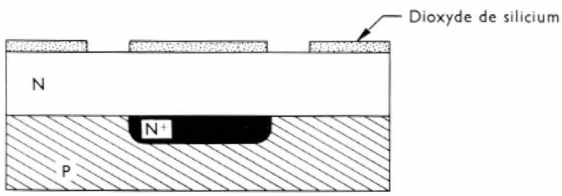
(emploi d'un premier masque pour délimiter une ouverture au niveau du ou des caissons devant renfermer un transistor NPN)



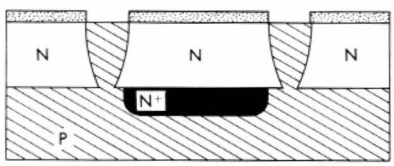
3. Désoxydation



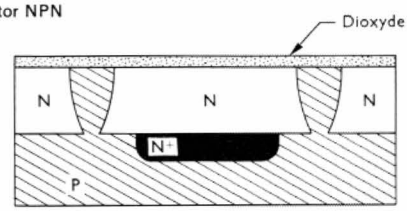
4. Formation d'une couche épitaxiale de silicium N



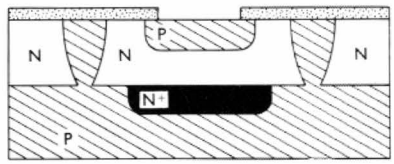
5. Oxydation puis délimitation des contours des caissons d'isolement (2e masque)



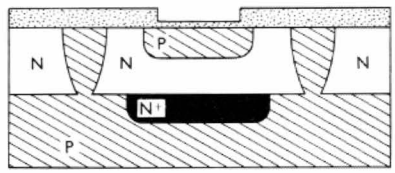
6. Diffusion d'impuretés P dans la couche épitaxiale (délimitation des caissons N dans un substrat P)



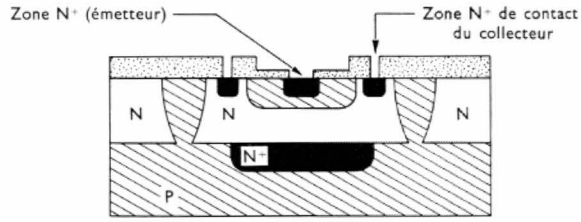
7. Désoxydation et réoxydation



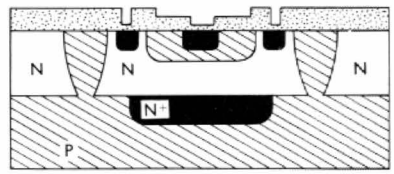
8. Diffusion d'une zone P dans le caisson N (3e masque)



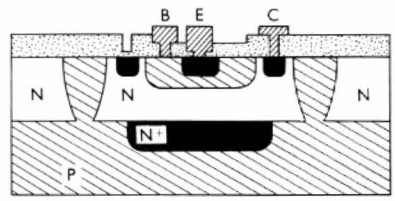
9. Oxydation



10. Diffusion de zones N^+ pour former l'émetteur et le contact de collecteur (4e masque)



11. Oxydation



12. Délimitation des contacts de base, d'émetteur et de collecteur (5e masque) et dépôt de ces contacts métalliques

tivement par rapport aux zones N pour que chaque jonction se trouve sous tension inverse, c'est-à-dire dans le sens non passant. Ce moyen électrique fournit donc des zones N pouvant être considérées comme isolées électriquement les unes des autres. Chacune d'elles est appelée *caisson d'isolement*.

En formant ensuite un composant à l'intérieur de chaque caisson d'isolement, on satisfait la double condition imposée : obtenir des composants qui soient électriquement indépendants bien qu'appartenant à un unique monocristal semiconducteur. On verra que le maintien d'une tension caisson-substrat adéquate pour l'isolement des caissons n'empêche pas de porter les électrodes des divers composants aux potentiels nécessaires au fonctionnement.

3.2.2. Transistor NPN. — La fabrication d'un transistor NPN d'un circuit intégré n'est pas beaucoup plus complexe que celle d'un composant discret analogue. Elle demande de nombreuses opérations mais toutes sont bien au point (fig. XXII-3). Partant d'un substrat P, les premières opérations ont pour but l'obtention d'une zone N^+ (c'est-à-dire beaucoup plus dopée qu'une zone N). L'impureté employée est par exemple de l'arsenic. On rappelle que pour faire diffuser des impuretés dans un substrat il est nécessaire d'effectuer les opérations suivantes : (V. fig. VII-13) :

1° Oxydation superficielle du substrat pour obtenir une couche de dioxyde de silicium qui est imperméable aux impuretés.

2° Par un procédé de photogravure, élimination de la couche isolante au-dessus de la seule zone à doper. Pour cela on recouvre la couche de dioxyde de silicium d'une couche de laque photosensible qui se polymérise lorsqu'on la soumet à un rayonnement ultraviolet. En plaçant un masque convenable au-dessus de cette laque on peut facilement délimiter des zones qui ne recevront pas de rayonnement ultraviolet et donc où la laque ne se polymérisera pas. On dissout ensuite la laque non polymérisée et les zones qui ne sont plus recouvertes subissent une attaque chimique (par l'acide fluorhydrique) pour mettre à nu le substrat P aux endroits désirés.

3° Diffusion de l'impureté choisie dans les parties du substrat P découvertes par l'attaque précédente.

Après l'obtention de la zone N^+, une désoxydation permet d'éliminer ce qui reste de la couche superficielle d'oxyde. Sur la surface ainsi mise à nu, on fait croître une couche épitaxiale de silicium N : le substrat, placé dans un appareil appelé *réacteur* et qui contient de la vapeur de silicium dopé, se recouvre d'une couche de silicium dont le réseau cristallin est d'une grande régularité (V. chap. 8 § 4). C'est dans la couche déposée lors de cette opération que l'on forme ensuite les composants du circuit intégré. La couche N^+ obtenue lors de la première diffusion se trouve alors à l'intérieur du substrat et, pour cette raison, elle est souvent appelée *couche enterrée*.

Une nouvelle oxydation et l'emploi d'un second masque permet de délimiter des caissons d'isolement dans la couche épitaxiale. En diffusant une impureté adéquate (du bore par exemple) on obtient des zones P qui séparent des caissons de type N.

Une désoxydation suivie d'une oxydation permet d'entreprendre une troisième opération de photogravure. Un caisson N jouant le rôle de collecteur de transistor NPN, on ouvre une fenêtre pour diffuser une zone P à l'intérieur du caisson N, afin de former la base du transistor.

L'émetteur d'un transistor est obtenu en répétant les opérations précédentes et en utilisant un quatrième masque. Celui-ci est également prévu pour permettre la diffusion de zone N^+ dans la partie N correspondant au collecteur du transistor ; c'est sur cette petite zone N^+ que sera déposé le contact de collecteur (le rôle de cette zone est d'éliminer l'effet redresseur du contact métal-silicium N). L'impureté utilisée est alors le phosphore.

La délimitation des zones où seront placés les contacts du transistor nécessite une dernière opération de photogravure et un cinquième masque. Les contacts, comme les liaisons entre éléments d'ailleurs, sont réalisés en déposant sous vide une couche d'aluminium de 1 à 2 μm. Une dernière opération de photogravure suivie d'une attaque à l'acide orthophosphorique permet d'éliminer le métal inutile. Un chauffage ultérieur, à une température voisine de 550 °C, améliore l'adhérence du métal sur le cristal.

La description des diverses phases de la fabrication n'a pas mis en évidence l'intérêt de la couche N^+ enterrée. Celui-ci n'est cependant pas négligeable dans le fonctionnement du transistor NPN. La tension de claquage de la jonction collecteur-base est augmentée et la tension correspondant au coude des caractéristiques $I_C(V_{CE})$ (tension de saturation) est diminuée. Le transistor supporte donc une tension plus grande et il est utilisable dans un domaine de tensions plus étendu.

3.2.3. Transistor PNP. — En général on cherche à obtenir les transistors PNP au cours des diffusions utilisées pour fabriquer les transistors NPN de façon à ne pas augmenter le nombre d'opérations de photogravure. Cela conduit à prendre la zone N d'un caisson comme base de transistor PNP. Les zones P d'émetteurs sont diffusées dans cette base N en même temps que les bases P des transistors NPN (au cours de la troisième opération de photogravure). Le collecteur P du transistor PNP peut alors être le substrat P du circuit ou une zone P diffusée en même temps que l'émetteur de ce transistor. Dans le premier cas, le transistor PNP est appelé *transistor substrat* (fig. XXII-4), dans le second cas il est dit *latéral* (fig. XXII-5).

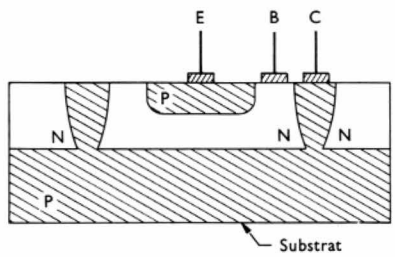


Fig. XXII-4

Transistor PNP substrat (principe)

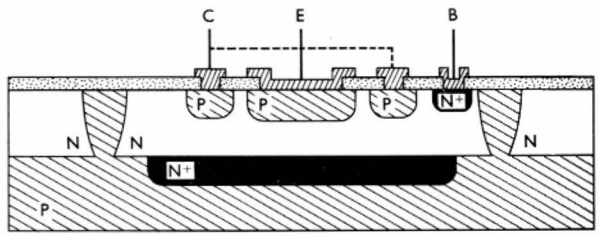


Fig. XXII-5 — Transistor PNP latéral

Les performances des transistors PNP substrat ont été améliorées en réalisant ces composants sous une forme légèrement différente de celle indiquée dans le principe ci-dessus. En effet, en ceinturant la zone d'émetteur par une zone N^+, sur laquelle se trouve la connexion de base (fig. XXII-6), on augmente notablement l'amplification en

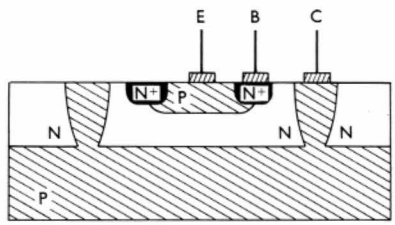


Fig. XXII-6

courant, dont la valeur peut alors être comprise entre 20 et 100. Celle-ci, tout en restant bien inférieure à celle d'un transistor NPN (elle peut alors atteindre 250), est assez grande et, de ce point de vue, un transistor PNP substrat est en général plus intéressant qu'un transistor PNP latéral. Cet avantage du transistor PNP substrat ne compense pas cependant un certain nombre d'inconvénients. Tout d'abord ce composant n'est pas utilisable pour des signaux de fréquence trop grande. Ensuite ses possibilités d'utilisation sont réduites par le fait que la tension de collecteur est obligatoirement la tension appliquée au substrat

(pour obtenir l'isolement des caissons). Cette dernière particularité explique l'emploi de ce transistor essentiellement dans des étages de sortie des circuits amplificateurs.

Les transistors PNP latéraux ont des possibilités de branchement moins limitées que les transistors substrat mais leurs performances sont nettement moins bonnes que celles de ces derniers. Tout d'abord leur amplification en courant ne dépasse pas 25 le plus souvent ; cette faible valeur résulte de ce que l'effet transistor ne se produit qu'en surface. Ensuite, la fréquence maximale des signaux qui peuvent être amplifiés à l'aide d'un transistor PNP latéral est bien plus faible que pour un transistor substrat. En outre, la configuration adoptée pour un transistor PNP latéral présente un léger inconvénient : un transistor PNP parasite lui est obligatoirement associé. Il est formé des trois zones suivantes : premièrement, l'émetteur et le collecteur du transistor PNP latéral, deuxièmement, la zone N du caisson, troisièmement, le substrat P. Normalement les tensions appliquées sont telles que ce composant est bloqué mais, par précaution, il a semblé nécessaire de limiter l'amplification en courant de ce transistor parasite en interposant une couche N^+ entre le caisson N et le substrat P.

Si les amplifications en courant des transistors PNP des circuits intégrés sont assez limitées, cela ne représente cependant pas un handicap trop important. L'association d'un transistor PNP latéral et d'un transistor NPN, comme l'indique la figure XXII-7, peut remplacer un transistor PNP

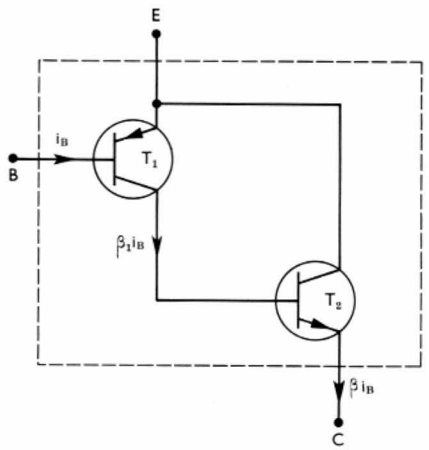


Fig. XXII-7

Montage équivalant à un transistor PNP de grande amplification en courant

à amplification en courant importante. En effet, si l'amplification en courant de T_1 est égale à $\beta_1 = 15$, le courant de base i_B de T_1 est amplifié par ce premier transistor et son courant de collecteur est sensiblement égal à $\beta_1 i_B$ soit à 15 fois i_B. Or ce courant constitue le courant de base du transistor T_2 ; si l'amplification en courant de T_2 est égale à $\beta_2 = 150$, le courant de collecteur de ce transistor est sensiblement égal à $\beta_2(\beta_1 i_B)$ soit à 150 fois $\beta_1 i_B$. Le courant qui sort par l'émetteur de T_2 est égal à la somme des courants de base et de collecteur de T_2 ; son intensité est donc égale à $(\beta_2 + 1)\ (\beta_1 i_B) = 2\,265\ i_B$. Cela représente une amplification en courant β pour l'ensemble égale à $\beta = \beta_1(\beta_2 + 1)$, soit à 2 265 dans le cas considéré. La diffusion d'un transistor NPN étant une opération presque banale, les constructeurs ont ainsi remédié à l'inconvénient résultant de la diffusion des transistors PNP au cours des opérations de diffusion des transistors NPN.

3.2.4. Transistors à effet de champ. — Les transistors à effet de champ que l'on utilise dans les circuits intégrés peuvent être à porte isolée ou non (V. chap. 10). Leur production demande beaucoup moins d'opérations que celle des transistors à jonctions, notamment moins de diffusions d'impuretés. Par exemple, l'obtention d'un transistor à effet de champ à enrichissement à canal N n'exige que la diffusion simultanée de deux zones N^+ dans un substrat P (V. fig. X-11). L'électrode constituant la porte est déposée en même temps que les divers contacts du circuit intégré. Il est à noter que dans ce cas aucun caisson d'isolement n'est nécessaire. En effet, en fonctionnement normal, le drain et la source de ce transistor à effet de champ sont portés à des potentiels positifs par rapport au substrat et les jonctions entre ces électrodes et le substrat sont automatiquement polarisées dans le sens non passant. Lorsque le transistor est conducteur, c'est-à-dire lorsque la porte est positive par rapport à la source, le courant ne peut passer du drain vers la source qu'en empruntant le canal induit où se sont accumulées des charges négatives mobiles (ce canal induit est alors l'équivalent d'un canal N dans un substrat P polarisé négativement).

Pour certains circuits intégrés (circuits dits *de logique*) les composants actifs sont uniquement des transistors à effet de champ. En effet, ils sont intéressants pour ces circuits, car leur fonctionnement n'imposant qu'une faible consommation de puissance, il est possible de les associer en grand nombre sur une même pastille (dont la dissipation thermique est limitée). De surcroît, ils permettent de commander une grande puissance sans qu'il soit nécessaire de leur fournir une puissance importante entre leurs bornes d'entrée (grande amplification en puissance). Par ailleurs, les techniques de fabrication permettent de multiples combinaisons. Il est possible de diffuser uniquement des transistors à canal N si le substrat est de type P (comme dans l'exemple précédent) ou seulement des transistors à canal P si le substrat est de type N. Dans ce dernier cas il faut diffuser deux zones P dans le substrat N (fig. XXII-8)

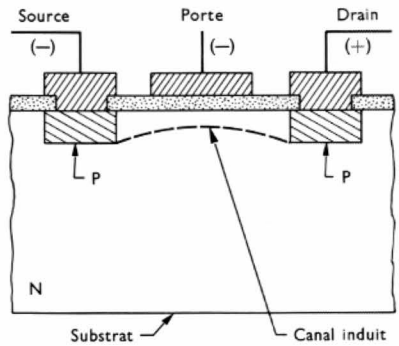


Fig. XXII-8

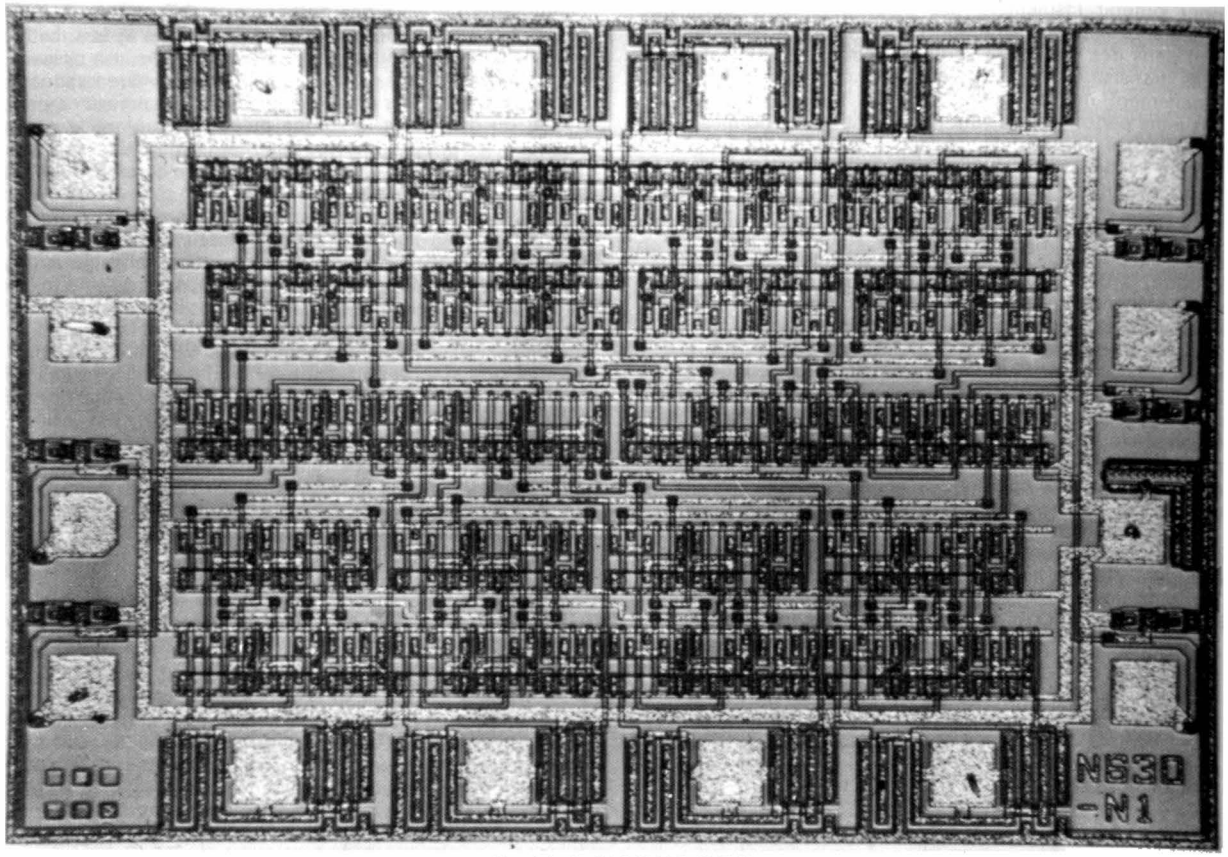
Transistor à effet de champ à canal P

au lieu de deux zones N^+ dans le substrat P. Pour les transistors à enrichissement à canal P, on ne prévoit pas non plus de caissons d'isolement, les diverses électrodes étant en général négatives par rapport au substrat, les jonctions entre électrodes et substrat sont encore polarisées dans le sens non passant (lorsque la source des transistors à effet de champ est portée au même potentiel que le substrat, ce qui vient d'être dit reste vrai : la différence de potentiel appliquée aux jonctions zones de sources-substrat est nulle au lieu d'être négative mais cela suffit pour qu'il n'y ait pas passage d'un courant de fuite). Très souvent, dans le même circuit intégré, on associe ces deux catégories de transistors à effet de champ, qui sont dites *complémentaires* (techniques dites *CMOS* et *LOCMOS*). À noter que ces transistors à effet de champ peuvent facilement être associés en série : une unique zone (N^+ ou P selon le cas) joue le rôle de drain pour un transistor et de source pour l'autre. Le gain de place apporté n'est pas négligeable et c'est un avantage important qui s'ajoute à la simplicité de la fabrication.

3.2.5. Diodes. — Lorsqu'une diode est nécessaire dans un circuit intégré, on fabrique un transistor NPN et une connexion métallique est placée entre la base et le collecteur de ce transistor. Ainsi, la jonction base-collecteur du transistor est mise hors circuit (elle n'intervient pas, car tout le courant passe par la liaison métallique) et seule la jonction base-émetteur est utilisable : c'est elle qui constitue la diode. De telles diodes peuvent supporter des tensions inverses voisines de 6 V. À noter d'ailleurs que ces diodes sont utilisables en diodes Zener (V. chap. 7).

3.2.6. Résistances

1° « *Résistance base* ». — Une résistance peut être obtenue en diffusant une zone P, de longueur et de section déterminées, dans un caisson N (fig. XXII-9). Cette opération est exécutée en même temps que la diffusion des



Circuit intégré LOCMOS (*R.T.C.*)

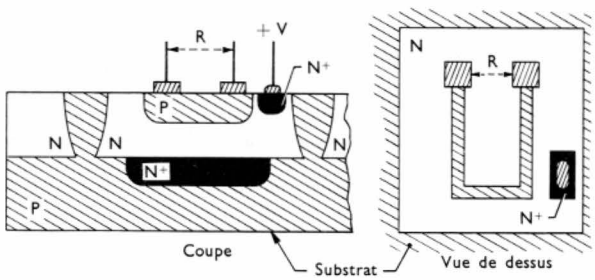


Fig. XXII-9

Résistance dite « base »

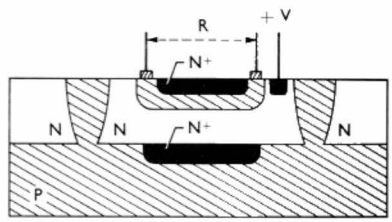


Fig. XXII-10

Résistance dite « base pincée »

bases des transistors NPN. Pour cette raison, de telles résistances sont souvent appelées « résistances base ». La valeur de la résistance désirée conditionne la longueur et la section ; la résistivité du matériau dépend des conditions de diffusion. Par ce procédé il est possible d'obtenir des résistances comprises entre 30 Ω et 30 kΩ.

Le caisson étant porté au potentiel le plus grand prévu dans le circuit, les divers points de la résistance sont à des potentiels inférieurs à celui du caisson. Ainsi, la jonction formée entre la résistance et le caisson est polarisée dans le sens non passant. Pour isoler la résistance du caisson on a donc utilisé le même procédé que pour isoler les caissons du substrat. Et de même qu'il est possible de placer plusieurs caissons dans un substrat, on peut diffuser plusieurs « résistances base » dans un même caisson.

Les « résistances base » ne sont pas obtenues avec une grande précision (± 20 %). En général cela n'est pas très grave, d'autant que cet inconvénient est fortement atténué par une particularité intéressante des circuits intégrés : pour un circuit déterminé les résistances peuvent être toutes trop grandes ou toutes trop petites, mais les rapports respectifs des valeurs sont conservés, car ces éléments sont diffusés simultanément.

2° « *Résistance base pincée* ». — Il est possible d'obtenir des résistances supérieures à 30 kΩ. Pour cela on réalise tout d'abord une « résistance base » comme indiqué précédemment puis on diffuse une zone N^+ dans la zone P constituant la résistance (fig. XXII-10). Par ce moyen on diminue la section de cette zone P et on augmente donc la valeur de la résistance.

3° *Autres résistances*. — D'autres procédés d'obtention de résistances ont été mis au point. Par exemple, pour les résistances de faibles valeurs, on peut diffuser une zone N^+ (en même temps que l'émetteur des transistors NPN) dans une zone P. La résistance est alors dite *de type émetteur*. Pour des résistances très grandes et devant supporter des tensions relativement importantes (supérieures à 6 V) on peut utiliser une partie de la zone N du caisson ; les contours de la résistance sont délimités en diffusant une zone P dans celui-ci. Ces résistances sont dites *de type collecteur* car le collecteur des transistors NPN est lui aussi formé d'un semiconducteur de type N. Des résistances de précision sont aussi parfois intégrées dans de tels circuits ; elles sont obtenues en déposant un mince film d'un alliage de nickel et de chrome sur le support isolant que constitue la couche de dioxyde de silicium. Ce procédé de fabrication fournit des résistances comprises entre 20 Ω et 50 kΩ mais, comme il nécessite plusieurs opérations supplémentaires, il n'est que rarement mis en œuvre.

3.2.7. Condensateurs. — Autant que possible on évite la présence de condensateurs dans les circuits intégrés. Toutefois, pour des capacités assez faibles (inférieures à quelques dizaines de picofarads), on dispose de

Année	Nombre d'éléments par circuit intégré	Composants ou applications caractéristiques	Observations
1960	4	Circuits intégrés de logique dits *à une porte* car correspondant à une fonction logique élémentaire.	Premier circuit intégré
1966	16	Circuits intégrés représentant un double multivibrateur bistable (V. chap. 17).	Intégration dite *à petite échelle.*
1969	256	Circuits de comptage (64 portes).	Intégration dite *à moyenne échelle.*
1971	600	Circuits intégrés de calculatrices (150 portes).	Intégration dite *à grande échelle.*
1972	1 600	Mémoires à transistors à effet de champ à porte isolée (400 portes).	
1973	4 000	Circuits intégrés pouvant jouer le rôle d'unité centrale de traitement de microordinateurs (V. t. 2, Informatique) et appelés microprocesseurs.	
1974	10 000		
1980	1 000 000		Intégration dite *à très grande échelle.*

divers moyens de fabrication. Une solution relativement simple est l'emploi d'une jonction P-N que l'on polarise dans le sens inverse. Lors de l'étude de cette jonction on a vu que celle-ci présente une capacité fonction de la tension inverse qui lui est appliquée. C'est cette propriété qui est utilisée dans ce cas. Il est également possible d'obtenir un condensateur en disposant du dioxyde de silicium (corps diélectrique) entre une couche de semiconducteur N^+ et un dépôt métallique ; la capacité de ce condensateur peut atteindre quelques centaines de picofarads. Cette capacité étant proportionnelle à la surface de l'armature la plus petite, on ne peut réaliser des condensateurs de grande capacité sans augmenter l'encombrement.

3.2.8. Montage des circuits. — Lorsque les opérations de dopage et de métallisation sont terminées, on pratique le découpage de la plaquette pour séparer les différents parallélépipèdes (les puces) qui portent chacun un circuit intégré identique. La technique employée est analogue à celle adoptée par le vitrier pour découper le verre : tracé de sillons avec un outil diamanté et application d'efforts tranchants pour provoquer la rupture. Les sillons sont parfois obtenus par attaque chimique.

Après montage de chaque circuit sur une embase, les divers fils de liaisons sont fixés, d'une part, sur des bornes de l'embase et, d'autre part, sur les points de connexions ménagés sur le circuit. Chaque emplacement préalablement métallisé reçoit un fil de liaison en or ou en aluminium d'un diamètre compris entre 5 et 120 μm (souvent 25 μm). Ces fils sont soudés par thermocompression, c'est-à-dire en opérant à chaud et en exerçant une légère pression. Le soudage est exécuté sous binoculaire à l'aide de micromanipulateurs. Une vérification est ensuite opérée pour repérer les erreurs ou les malfaçons, avant que l'ensemble soit enserré dans un boîtier plastique ou recouvert d'un capot métallique.

3.2.9. Remarques. — La production des circuits intégrés monolithiques impose la fabrication de masques pour les opérations de photogravure. Seuls des procédés optiques ont permis d'atteindre la finesse de trait nécessaire pour réaliser la véritable miniature que constitue le dessin formant un masque. Toutefois la largeur minimale d'un trait ne peut être inférieure à 4 ou 5 μm et cela limite évidemment la densité d'intégration des circuits fabriqués (nombre de composants par millimètre carré). Des techniques plus performantes ont été mises au point mais elles n'ont pas encore été dévoilées. On sait cependant que l'emploi d'un faisceau électronique permet de réduire la largeur minimale d'un trait à une valeur comprise entre 1 et 1,5 μm. La densité d'intégration est ainsi notablement augmentée : elle peut être multipliée par un facteur supérieur à 10.

Le tableau ci-dessus montre comment a évolué le nombre d'éléments par circuit intégré et ce que l'on suppose qu'il sera vers 1980.

Cette remarquable croissance du nombre d'éléments intégrés résulte de l'amélioration des moyens de fabrication et également de la mise au point d'ensembles très compacts où l'on combine les avantages des transistors à jonctions (ou transistors bipolaires) et ceux des divers transistors à effet de champ aux propriétés complémentaires. Ainsi, tout en conservant les mêmes procédés de diffusion, il a été possible de réaliser des groupements présentant de très nombreuses différences : transistors à plusieurs émetteurs, transistors à plusieurs collecteurs, associations très denses d'éléments de ce type (comme dans la technique dite *I^2L*, de *Integrated Injection Logic*). L'oxydation de sillons très profonds a également permis une plus grande densité d'intégration (procédé *LOCOS*). Ces sillons isolants délimitant des zones parfaitement alignées pour les diffusions ultérieures, il a été possible de réduire la surface normalement perdue pour tenir compte des défauts d'alignement des masques et des tolérances de fabrication. Évidemment le gain de place apporté par ce procédé a été mis à profit pour augmenter le nombre de composants intégrés par plaquette.

Soudure de connexions par thermocompression sur un circuit hybride (*C.I.T.-Alcatel*)

En ce qui concerne les opérations de photogravure, il faut bien noter qu'elles imposent de disposer judicieusement chaque masque pour que la diffusion ou le dépôt qui sera exécuté ensuite soit réalisé aux endroits convenables. Un certain nombre de circuits doivent être rejetés lorsque ces conditions ne sont pas parfaitement obtenues et notamment lorsque la plaquette se voile au cours des traitements à haute température (1 300 °C environ) qu'il faut lui faire subir. On limite le risque de voilage en utilisant des plaquettes d'autant plus épaisses que leur diamètre est plus grand (par exemple, l'épaisseur est voisine de 0,4 mm pour une plaquette de 7 cm de diamètre et de 0,5 mm pour une plaquette de 10 cm de diamètre).

4. CIRCUITS INTÉGRÉS MONOLITHIQUES À ISOLEMENT DIÉLECTRIQUE

Pour augmenter les tensions et les fréquences d'utilisation on a été conduit à rechercher des moyens d'isolement des caissons autres que celui décrit précédemment et qui consiste à polariser les jonctions caisson-substrat dans le sens inverse. Parmi les nombreux procédés mis au point on décrira celui qui permet d'obtenir des caissons isolés par une couche de dioxyde de silicium.

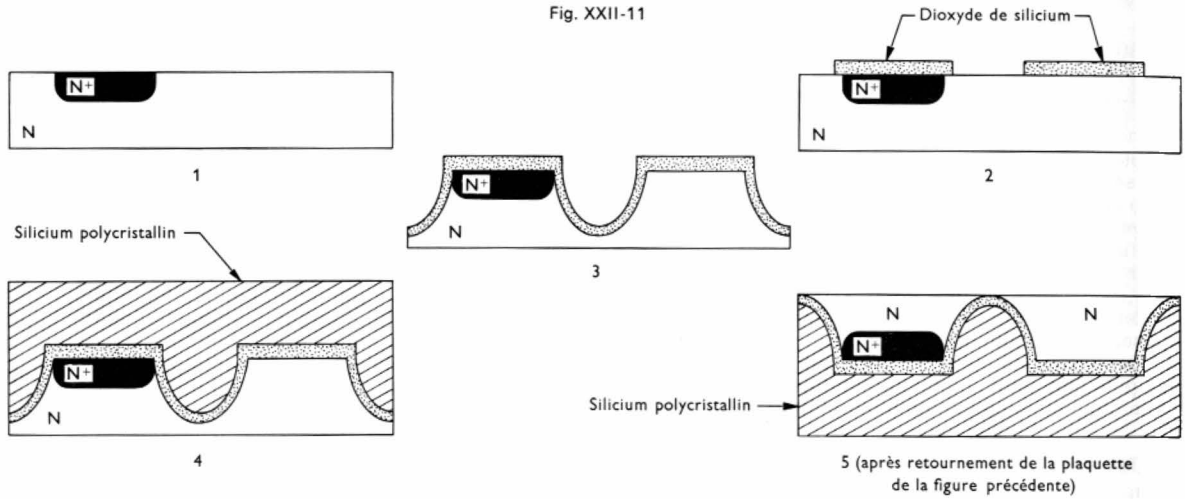
Dans ce cas la plaquette de départ est du silicium N. C'est à la surface de cette plaquette que sont diffusées les zones N^+, qui formeront ultérieurement les zones N^+ enterrées (fig. XXII-11.1). L'ensemble est ensuite oxydé et une opération de photogravure permet de délimiter les caissons (fig. XXII-11.2). Les bandes séparant les futurs caissons sont attaquées pour obtenir des sillons dont les parois seront oxydées (fig. XXII-11.3). La couche de dioxyde de silicium formée constituera l'isolement des caissons. Sur cet ensemble on fait alors se déposer une couche de silicium polycristallin, qui servira de substrat pour le circuit intégré (fig. XXII-11.4). Son rôle est essentiellement mécanique, ce qui explique que l'on ne se préoccupe pas d'obtenir une couche monocristalline comme habituellement avec les corps semiconducteurs. L'épaisseur de la zone N initiale est ensuite réduite de façon à faire apparaître la couche de dioxyde de silicium qui tapisse le fond des sillons. Sur la figure XXII-11.5, les caissons isolés apparaissent nettement. Des procédés de diffusion analogues à ceux décrits précédemment pour la fabrication des composants peuvent alors être mis en œuvre.

D'autres techniques ont été mises au point et notamment on a cherché à réaliser une séparation physique des caissons. Par exemple, dans la technique dite *silicium sur saphir* on forme des caissons de silicium sur un substrat en saphir. Les réseaux cristallins des deux corps étant semblables, il est facile de faire se déposer une couche épitaxiale de silicium sur le saphir. On fait donc se former des îlots de silicium isolés les uns des autres; ce procédé est particulièrement intéressant pour l'intégration des transistors à effet de champ (V. chap. 10). L'isolement diélectrique peut également être obtenu à l'aide d'une technique mésa, voisine de celle décrite pour la fabrication des diodes (V. fig. VII-12). Par exemple, lorsque le circuit est terminé, on le recouvre d'une couche de verre qui sert de support et l'on creuse des sillons de séparation entre caissons. Dans certains cas ces sillons peuvent être creusés sans qu'il soit nécessaire de prévoir un support en verre.

5. CIRCUITS HYBRIDES

Les circuits hybrides ont été utilisés bien avant la mise au point des circuits intégrés monolithiques et ils n'ont pas été abandonnés malgré l'extraordinaire développement de ces derniers. En effet, rapidement, ces techniques se sont révélées plus complémentaires que concurrentes et ont permis de réaliser des ensembles très complexes, regroupant de très nombreux circuits intégrés monolithiques dans un même circuit hybride.

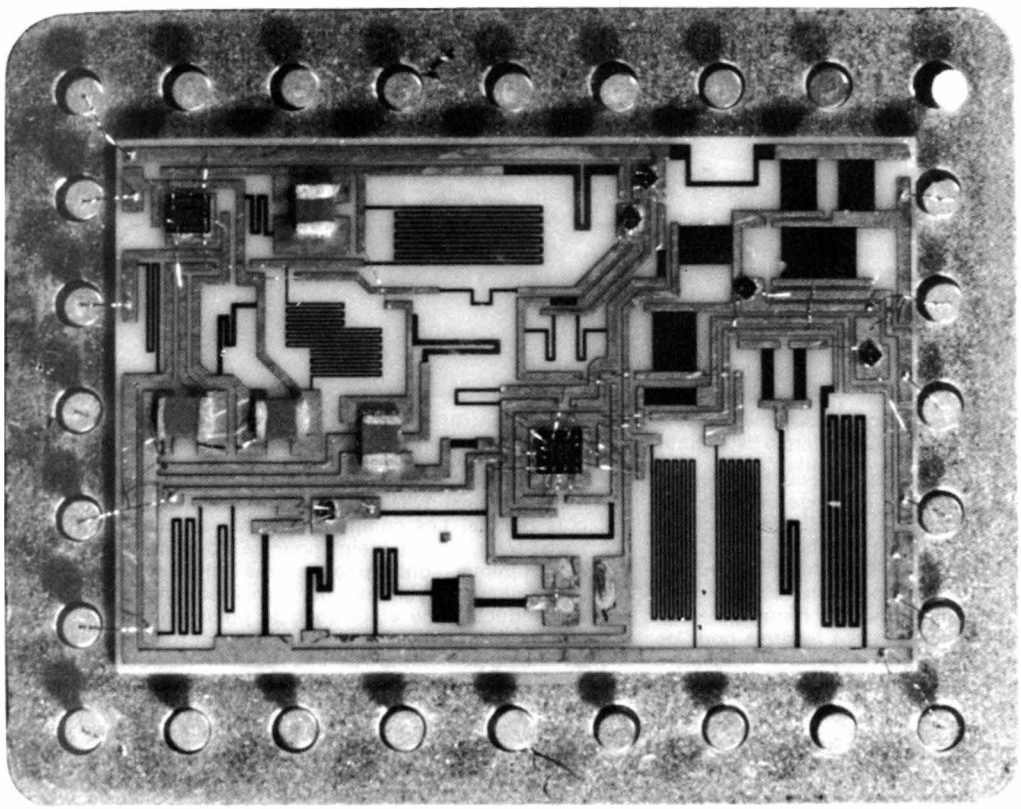
Fig. XXII-11



5.1. Constitution. — Un circuit intégré hybride est réalisé en associant des composants adéquats sur un substrat isolant. Celui-ci peut être en céramique à base d'alumine, en oxyde de béryllium ou en pyrex. Les substrats de céramique, très fréquemment utilisés, sont obtenus directement par cuisson ou sont découpés à l'aide d'un laser dans des plaques de dimensions plus importantes. Ce dernier procédé est particulièrement intéressant lorsque les tolérances de fabrication sont très réduites.

Les composants actifs sont rapportés et soudés sur des points de connexions préalablement formés. Ces composants peuvent être des diodes, des transistors à jonctions, des transistors à effet de champ ou des circuits intégrés obtenus par les procédés décrits précédemment. Ils sont placés sur le substrat sans être insérés dans un boîtier, c'est-à-dire sous la forme de « puces » dont l'encombrement est très faible; l'ensemble du circuit hybride étant protégé par un boîtier ou par enrobage, cette façon d'opérer est parfaitement justifiée et est très intéressante pour atteindre une grande intégration. Les composants passifs sont soit directement formés sur le substrat, soit fabriqués séparément et ensuite soudés sur la plaquette. Cela permet d'équiper ces circuits aussi bien en résistances de toutes valeurs qu'en condensateurs de capacités importantes ou en inductances.

5.2. Réalisation. — Sur le substrat on forme des résistances dont les valeurs peuvent être comprises entre quelques ohms et plusieurs mégohms et des condensateurs dont les capacités peuvent atteindre quelques dizaines de picofarads. Pour la fabrication de ces composants deux techniques semblent s'opposer: la technique des couches

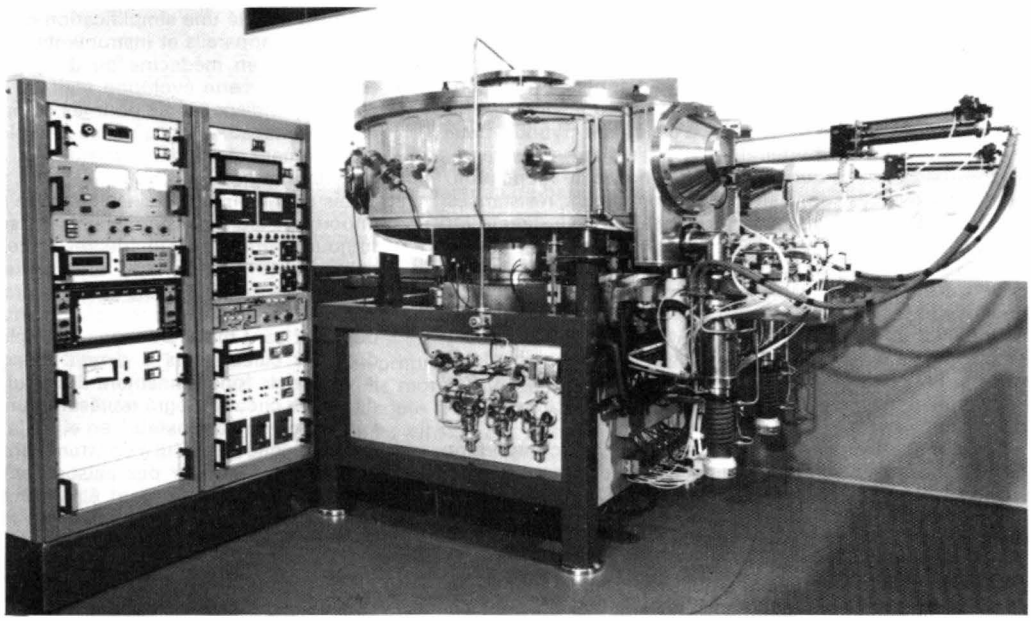


Circuit intégré hybride amplificateur en couches minces
(*C.I.T.-Alcatel*)

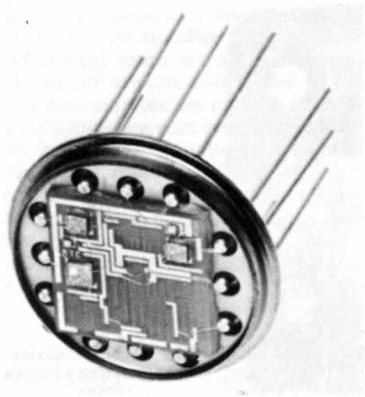
minces et celle des couches épaisses. Pour les circuits en couches minces, les résistances sont réalisées en alliage nickel-chrome ou en nitrure de tantale. Le corps est déposé sous vide sur le substrat sur lequel il forme une couche très mince. La valeur de la résistance (c'est-à-dire ses dimensions) est ajustée par une oxydation anodique ou par un découpage au moyen d'un laser. Pour les circuits en couches épaisses, le matériau conducteur constituant les résistances (appelé *encre* par les techniciens) contient de l'oxyde de ruthénium. On le dépose sous la forme d'un ruban épais entre deux points de connexion (préalablement métallisés). Un procédé sérigraphique permet d'obtenir un dépôt de forme et de dimensions bien déterminées, c'est-à-dire une résistance ayant une valeur proche de celle désirée. Il est possible d'ajuster cette valeur (lorsque cela est nécessaire) par sablage ou par coupe au laser. L'emploi du laser apporte une grande précision de réglage mais, du fait de l'épaisseur du dépôt, la durée de l'opération est plus longue que dans le cas de circuits hybrides en couches minces.

Les condensateurs sont obtenus en interposant une couche isolante entre deux couches métalliques, en aluminium par exemple. Le diélectrique employé peut être du monoxyde de silicium, du pentoxyde de tantale ou de l'oxyde de titane.

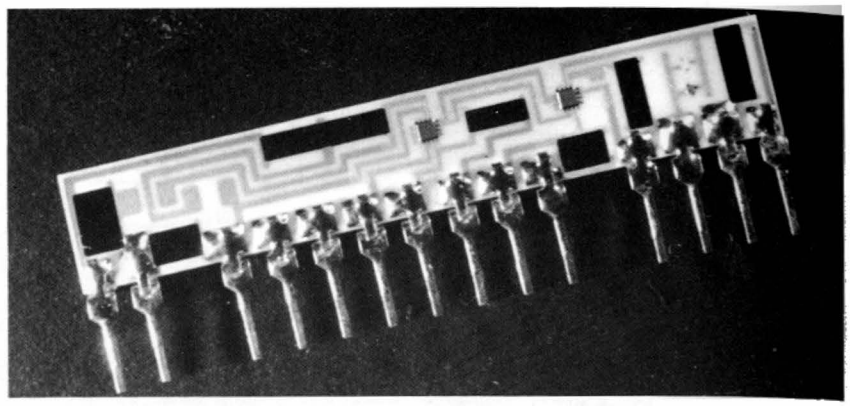
Pour les deux catégories de circuits hybrides, les conducteurs sont en aluminium ou en alliages contenant un métal précieux (chrome-or, chrome-argent, palladium-argent, platine-argent par exemple). Les contacts sont souvent en métaux précieux également. Ils peuvent être en or déposé



Machine de dépôt de couche mince par pulvérisation cathodique
(*C.I.T.-Alcatel*)



Circuit hybride en technologie « dorée » (*R.T.C.*)



Circuit intégré hybride pour hyperfréquences. Amplificateur émetteur-récepteur pour transmission de signaux de télécommunications en modulation d'impulsions codées (*C.I.T.-Alcatel*)

électrolytiquement pour des circuits en couches minces ou être formés par un procédé sérigraphique utilisant une « encre » à l'or pur pour des circuits en couches épaisses. En outre, dans un même boîtier, constituant un circuit hybride pour l'utilisateur, on peut facilement superposer plusieurs couches de conducteurs. Entre chacune on interpose une couche isolante (que l'on forme par sérigraphie par exemple) en ménageant des fenêtres pour les interconnexions. La complexité du circuit final peut alors être assez grande, plusieurs dizaines de circuits intégrés pouvant être disposés sur un substrat carré de 2,5 cm de côté.

Il y a davantage complémentarité que dualité entre ces deux techniques. Elles ont évidemment chacune leurs avantages et leurs inconvénients (par exemple, il est difficile de réaliser de grandes résistances dans les circuits en couches minces et certaines connexions sont délicates dans les circuits en couches épaisses), mais pratiquement elles semblent surtout avoir des domaines d'applications différents. En effet, la première technique paraît bien adaptée pour les grandes séries de circuits identiques tandis que la seconde est préférée pour de petites séries, car elle nécessite moins d'investissement en matériel et en personnel. Toutefois il faut signaler que la fabrication des circuits en couches minces a atteint un haut niveau d'automaticité (des chaînes de fabrication sont commandées par mini-ordinateurs) et qu'elle permet d'obtenir une plus grande intégration qu'avec des circuits en couches épaisses.

5.3. Circuits intégrés hybrides pour hyperfréquences. — Les circuits intégrés hybrides pour hyperfréquences méritent une mention particulière. En effet, dans ces circuits, la nature du substrat (corps isolant ou corps présentant des propriétés magnétiques) ainsi que la forme et les dimensions des conducteurs dépendent de la fonction de chaque circuit. De ce fait la miniaturisation ne peut être aussi poussée que dans les autres domaines de la microélectronique, et la surface d'un circuit hybride pour hyperfréquences peut atteindre plusieurs dizaines de centimètres carrés. En ce qui concerne les modes de fabrication, peu de différences sont à signaler : conducteurs, résistances et condensateurs sont obtenus par sérigraphie directe ou par photogravure à partir d'un circuit métallisé. Dans le premier cas le corps choisi est déposé sur le substrat au travers d'une trame à mailles très fines ; cette méthode ne permet pas cependant d'obtenir des lignes de largeur inférieure à 0,2 mm environ. Dans le second cas le substrat est recouvert d'une couche de métal et une attaque chimique sélective est opérée par un procédé de photogravure. Par ce moyen on peut réaliser un tracé bien défini géométriquement.

Les circuits hybrides pour hyperfréquences comportent des composants discrets : certains sont directement formés sur le substrat et d'autres sont rapportés. On peut déposer directement des résistances et des condensateurs de quelques dizaines de picofarads (on dispose une pâte diélectrique entre deux couches conductrices). Des pâtes diélectriques à base de verre sont utilisées pour permettre le croisement de liaisons conductrices ; l'emploi de pont en fils ou en rubans (qui doivent être fixés par thermocompression) est ainsi évité et la solidité de l'ensemble formé est plus grande. Les composants actifs spéciaux (diodes et transistors), mis au point pour ce domaine particulier de l'électronique, sont rapportés sans boîtier sur la plaquette.

Les circuits hybrides pour hyperfréquences ont permis une réduction de volume et de poids considérable : elle représente une division par plus de cent parfois par rapport au matériel traditionnel. Leur facilité de reproduction a entraîné une diminution des coûts qui a ouvert le champ des applications des matériels hyperfréquences. Ainsi, ils ont servi à équiper non seulement du matériel professionnel (radar aérien, système d'atterrissage, dispositif pour télécommunications) mais aussi du matériel dit *grand public* (petits radars pour le contrôle du trafic routier ou pour la détection d'intrus). Les avantages cités expliquent aussi la mise au point de systèmes modulaires comportant un grand nombre d'éléments identiques comme dans les antennes à balayage électronique. Le déplacement du faisceau ne dépend plus alors du mouvement de l'antenne (celle-ci est fixe) : il est commandé électroniquement et ce balayage sans inertie permet un pointage rapide.

6. INTÉRÊT DES CIRCUITS INTÉGRÉS

L'utilisation de plus en plus courante des circuits intégrés s'explique par leurs incontestables avantages. Le premier d'entre eux, le plus évident peut-être pour l'utilisateur, est leur *faible volume*. Regroupant dans un boîtier unique des circuits correspondant à des montages assez complexes, ils ont permis un gain de place très important. Il en est résulté une simplification et un allègement de très nombreux appareils et instruments de mesure employés au laboratoire, en médecine ou dans diverses techniques. Il est vrai que cette évolution était un axe de recherche car elle était indispensable pour les équipements des satellites et en aérospatiale en général. L'exploration de l'espace a certainement fortement stimulé le développement des circuits intégrés.

Les circuits intégrés présentent un second avantage très important : leurs performances sont souvent excellentes et toujours nettement supérieures à celles des montages à composants discrets qui leur correspondent. Ainsi, on obtient des amplificateurs pouvant pratiquement être qualifiés de parfaits et dont notamment l'amplification peut dépasser cent mille. De même, l'emploi de circuits intégrés dans les calculateurs a permis d'accroître la capacité et la vitesse de fonctionnement des équipements. De ce point de vue le circuit intégré représente une étape logique dans l'évolution de l'ordinateur : en effet, la nécessité d'augmenter la capacité de calcul a constamment conduit à rechercher à limiter la longueur des liaisons entre éléments car une opération élémentaire peut être exécutée en moins d'une nanoseconde alors que pendant un tel intervalle de temps le courant ne parcourt que 30 cm.

À ces deux avantages il faut en ajouter un troisième, qui est la *fiabilité*. Pour un équipement déterminé le nombre de connexions à établir s'est trouvé fortement réduit par l'em-

Principaux matériaux utilisés dans la fabrication des circuits intégrés

Utilisations	Matériaux	Observations
Conducteur	**Aluminium**	L'aluminium adhérant bien sur le silicium et sur le dioxyde de silicium est très utilisé pour les métallisations qui permettent de former les liaisons conductrices sur les pastilles de circuits intégrés monolithiques. Les fils de liaisons pastille-boîtier sont parfois en alliage d'aluminium et de silicium (1 %).
	Étain	Il est le plus utilisé avec l'or pour former des revêtements métalliques. Il est déposé électrolytiquement ou par trempage dans un alliage fondu correspondant à un eutectique (63 % étain + 37 % plomb ou 60 % étain + 40 % plomb).
	Or (à 99,99 % ou davantage éventuellement allié à du silicium ou à de l'étain)	L'or entre dans la constitution d'encres conductrices employées dans les circuits hybrides. Les fils de liaisons pastille-boîtier de certains circuits intégrés monolithiques sont en or pur. Ce métal est aussi utilisé pour certaines métallisations de céramiques (circuits hybrides en couches minces). Pour des raisons économiques on cherche à le remplacer dans les pâtes pour circuits hybrides par du nickel, du cuivre ou de l'aluminium.
Impureté	**Arsenic**	Impureté pour diffusion N, notamment lorsqu'il s'agit de former des zones N^+. Il diffuse plus lentement que le phosphore, limitant ainsi les risques d'extension des zones N^+ durant les traitements à haute température.
	Bore	Impureté pour diffusion P.
	Phosphore	Impureté pour diffusion N.
	Or	Il est diffusé dans certaines plaquettes de silicium lorsqu'il est nécessaire de limiter la durée de vie des porteurs.
Isolant électrique	**Céramiques**	Les céramiques utilisées comme substrat jouent également le rôle d'isolants électriques.
	Dioxyde de silicium	Il est employé pour l'isolement électrique et comme diélectrique de condensateur. Étant imperméable aux impuretés il protège le silicium lors des diffusions d'impuretés. Le corps est obtenu sous la forme d'une couche mince (0,2 à 3 μm), bien continue, en plaçant du silicium dans de l'oxygène ou par action de la vapeur d'eau à 1 000 °C. Il adhère bien au silicium. Il peut être éliminé par attaque chimique. L'épaisseur du dépôt peut être contrôlée facilement car, avec une lumière incidente verticale, il apparaît au microscope coloré en gris, vert, jaune, orange, rouge, violet ou bleu lorsque son épaisseur croît.
	Résine époxy	Lorsque le circuit intégré est terminé on le protège à l'aide de cette résine qui est durcie par polymérisation au four. Très utilisé, car de prix de revient faible, ce matériau ne semble cependant pas être parfaitement étanche à l'humidité.
	Verre	Le verre dit *soudable* (75 % de monoxyde de plomb, 13 % de monoxyde de zinc, 10 % d'oxhydride borique, 2 % de dioxyde de silicium) est utilisé pour recouvrir certaines céramiques (dites ensuite *vitrifiées*) et pour isoler les circuits.
Substrat	**Céramique**	La céramique à base d'alumine (95 % et même 99 %) et d'oxyde de béryllium entre dans la constitution des circuits hybrides.
	Pyrex	Principalement utilisé pour les circuits hybrides en couches minces.
	Silicium	C'est un matériau de base puisqu'il constitue le substrat des circuits intégrés monolithiques. Il est difficile à purifier car, d'une part, sa température de fusion est élevée (1 417 °C environ) et, d'autre part, c'est un solvant très énergique à l'état fondu. Cette purification est cependant absolument indispensable car le silicium utilisé ne doit pas contenir plus d'un atome d'impuretés pour un milliard d'atomes de silicium.
	Saphir	Ses propriétés isolantes le font utiliser comme substrat de circuits intégrés monolithiques à isolement diélectrique. En outre, il présente la propriété d'avoir un réseau cristallographique proche de celui du silicium ; ainsi il est possible de déposer une couche épitaxiale de silicium sur du saphir.
Boîtier	**Kovar**	C'est un alliage de fer (54 %), de nickel (27 %) et de cobalt (19 %). Son coefficient de dilatation linéaire ($6 . 10^{-6}$ °C^{-1}), voisin de celui du verre soudable ($9 . 10^{-6}$ °C^{-1}) et de celui de la céramique ($8 . 10^{-6}$ °C^{-1}), explique son utilisation pour les fabrications nécessitant des scellements verre-métal.

ploi des circuits intégrés et les risques de pannes ont notablement diminué.

D'un point de vue économique les circuits intégrés sont devenus très rapidement compétitifs avec le matériel traditionnel puis nettement moins chers. Cette évolution n'a fait que s'accentuer au fur et à mesure que leurs applications se multipliaient et que les séries produites devenaient de plus en plus importantes.

Dans le but de réduire encore le prix de revient unitaire des circuits intégrés on cherche constamment à augmenter le rendement de fabrication, c'est-à-dire le nombre de circuits utilisables produits par pastille de silicium. Un des derniers perfectionnements apportés a été la mise au point d'un procédé de fabrication sur pastilles d'un diamètre de 10 cm environ et même de presque 13 cm (au lieu de 7 cm jusqu'à présent). Il faut savoir qu'en passant d'un diamètre de 7 cm à 10 cm le nombre de circuits par plaquette double sans que les frais soient sensiblement augmentés.

Par ailleurs, la réalisation de modules comportant un ou plusieurs circuits intégrés a apporté une simplification certaine pour la fabrication et pour la maintenance de l'appareillage, modifications qui ont eu des conséquences économiques favorables.

7. APPLICATIONS DES CIRCUITS INTÉGRÉS

Les premiers circuits intégrés produits étaient des *circuits de logique* (fonction ET, OU et leurs compléments ; V. chap. 17) appelés aussi circuits *numériques* ou *digitaux* car utilisés notamment dans les calculateurs. Dans de tels circuits les potentiels des bornes d'entrée et ceux des bornes de sortie ne peuvent prendre que deux valeurs différentes représentant symboliquement 0 et 1. L'intégration a été très poussée dans ce domaine et elle fait encore l'objet de recherches permanentes.

Très rapidement on a ensuite mis au point des circuits intégrés fournissant une ou plusieurs tensions de sortie, lesquelles varient de manière continue en fonction de la tension d'entrée (ou des tensions d'entrée éventuellement). Ces circuits ont été qualifiés d'*analogiques* ou même de *linéaires* (à titre d'exemple on peut citer les circuits amplificateurs). Par la suite, de très nombreux montages ont fait l'objet de réalisations sous formes intégrées et le qualificatif de linéaires a été maintenu sans qu'il soit toujours justifié.

Parmi les nombreux circuits fabriqués on peut distinguer quatre groupes principaux :

1° Les circuits intégrés dont la tension de sortie v_s varie linéairement en fonction de la tension d'entrée v_e ($v_s = av_e + b$, où a et b sont des constantes, b pouvant être nulle). Ce sont les circuits amplificateurs pour courant continu ou pour signaux alternatifs (amplificateurs pour basses fréquences ou à large bande ou à bande très étroite). Seuls ces circuits intégrés méritent le qualificatif de linéaires.

2° Les circuits intégrés dont la tension de sortie v_s varie en fonction de la tension d'entrée mais selon une loi non linéaire déterminée (loi logarithmique ou exponentielle par exemple). Ce sont les amplificateurs logarithmiques, les amplificateurs exponentiels et également les mélangeurs qui fournissent un signal dont la fréquence est égale à la somme ou à la différence des fréquences des deux signaux appliqués à deux entrées de ces circuits.

3° Les circuits intégrés comparateurs qui, comme leur nom l'indique, permettent de comparer les valeurs de deux tensions.

4° Les circuits intégrés qui associent des circuits analogiques et des circuits de logique. À titre d'exemple, on peut citer ceux dont le signal d'entrée est une tension variant de façon continue dans le temps (signal dit *analogique* pour simplifier) et dont la tension de sortie est une suite d'impulsions qui permettent de symboliser les chiffres 0 et 1 (signal numérique). Entrent également dans cette catégorie tous les circuits qui permettent la transformation inverse.

L'amplificateur opérationnel, aux utilisations très nombreuses, est certainement l'un des circuits intégrés les plus connus. Ce dispositif présente deux entrées et une sortie et il constitue d'abord un amplificateur différentiel : il

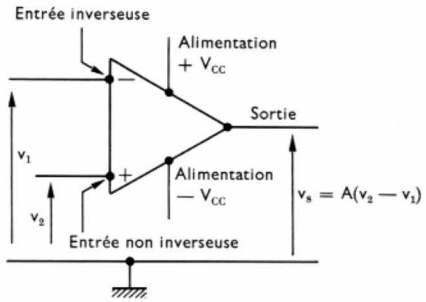


Fig. XXII-12

fournit une tension de sortie proportionnelle à la différence des deux tensions appliquées entre les deux entrées et la masse du montage (fig. XXII-12). Si l'une des entrées est portée à un potentiel nul (par exemple en la reliant à la masse, éventuellement par l'intermédiaire d'une résistance), le circuit joue alors le rôle d'un simple amplificateur pour la seule tension appliquée à l'autre entrée. Deux possibilités s'offrent d'ailleurs pour cette utilisation très courante de ce circuit intégré : selon que l'on applique la tension à amplifier à une entrée ou à l'autre, la tension de sortie est de même signe que la tension d'entrée ou de signe contraire. Pour cette raison l'une des entrées est dite *non inverseuse* tandis que l'autre est dite *inverseuse ;* sur les schémas, la première est repérée par le signe plus et la seconde par le signe moins. Incorporé dans des montages convenables, cet amplificateur différentiel permet d'obtenir directement une somme de tensions ou une tension proportionnelle à la dérivée ou à l'intégrale d'une autre tension : seulement dans ce cas il est véritablement utilisé en amplificateur opérationnel (V. chap. 16). À ce propos il est important de noter que c'est le montage associé au circuit intégré qui impose la fonction de l'ensemble : le circuit intégré ne joue que le rôle d'un amplificateur différentiel de performances excellentes. Il en est d'ailleurs de même dans des montages non linéaires obtenus en associant le circuit intégré qui, lui, peut être dit *linéaire,* et un élément dont la caractéristique courant-tension n'est pas linéaire (diode Zener, transistor). C'est d'ailleurs de cette façon que l'on réalise des amplificateurs logarithmiques ou exponentiels, qui sont employés dans des circuits multiplieurs (ils donnent un signal de sortie proportionnel au *produit* des deux tensions d'entrée du montage) ou des circuits correspondant à diverses fonctions mathématiques (fonction puissance, par exemple). Et ces quelques exemples ne constituent nullement une liste exhaustive des applications d'un amplificateur opérationnel. Bien au contraire : la diversité des fonctions réalisables est seulement une belle illustration des possibilités offertes par ce dispositif.

Les circuits intégrés sont utilisés dans tous les domaines :

— *en informatique*, pour le traitement des données (éléments d'unité centrale ou microprocesseurs, codeurs-décodeurs, détecteurs d'erreurs, mémoires, etc.) ;

— *en télécommunications*, pour le traitement de l'information en général et pour la réalisation de multiples fonctions élémentaires comme par exemple la production de signaux de tonalité en téléphonie ;

— *en instrumentation*, où depuis longtemps ils ont permis la mise au point d'appareils numériques très élaborés (multimètres, compteurs divers, etc.), et de centrales de mesures très performantes ;

— *en électroacoustique*, où ils entrent dans la constitution aussi bien du matériel professionnel que du matériel dit *grand public* (tuners, circuits divers de récepteurs de radiodiffusion et de télévision, etc.) ;

— *dans les automatismes* du domaine industriel et également de la vie courante (commande à distance de récepteurs, programmateurs divers, servomécanismes d'automobiles, etc.) ;

— *en médecine* ;

— *en horlogerie*, pour les circuits électroniques et les afficheurs numériques des montres-bracelets, des réveil-matin et horloges diverses.

ÉLECTROTECHNIQUE

GÉNÉRALITÉS SUR LES MACHINES ÉLECTRIQUES

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

Les textes qui réglementent l'électrotechnique proviennent :

— *du Comité électrotechnique français* qui est une émanation de la Commission électrotechnique internationale dont le rôle est de travailler à la normalisation du *langage* des électriciens et du *matériel* électrotechnique ;

— *de l'Union technique de l'électricité* (U.T.E.) qui établit des accords techniques entre les constructeurs et les utilisateurs. Elle définit les *règles de l'art*, compromis entre les impératifs de qualité et les exigences du coût de fabrication.

Tout utilisateur, tout constructeur a intérêt à se conformer aux normes de l'U.T.E. (20, rue Hamelin, PARIS-16e) et dans le présent volume, nous mentionnerons les normes U.T.E. chaque fois que cela sera utile.

1. CLASSIFICATION DES MACHINES ÉLECTRIQUES

Les machines électriques peuvent être classées en trois catégories :

1° les **générateurs**, qui transforment en énergie électrique une énergie d'une autre forme ;

2° les **récepteurs**, qui réalisent l'opération inverse. Cependant, on ne désigne pas sous le nom de récepteurs les appareils transformant l'énergie électrique en énergie thermique (lampes à incandescence, radiateurs électriques, etc.) ;

3° les **transformateurs et convertisseurs**, qui, tout en conservant à l'énergie la forme électrique, rendent plus commode son transport et son utilisation.

Cette partie de l'ouvrage est réservée à l'étude des générateurs et récepteurs *électromécaniques* et des *transformateurs statiques*.

2. CONSTITUTION D'UNE MACHINE ÉLECTRIQUE

1° Au point de vue *mécanique*, un générateur ou un récepteur est constitué par une partie fixe appelée **stator** et une partie mobile appelée **rotor** tournant à l'intérieur de la première. Entre ces deux parties et afin de permettre la rotation du rotor, est ménagé un intervalle d'air appelé *entrefer*.

2° Au point de vue *électromagnétique*, une machine électrique comporte toujours *un* circuit magnétique et, le plus souvent, *deux* circuits électriques et peut schématiquement être représentée par la figure 1. Le flux (dans le circuit

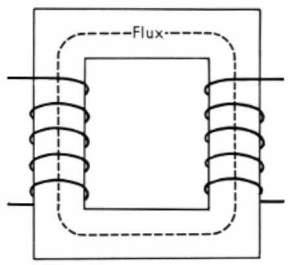


Fig. 1

magnétique) et les courants (dans les circuits électriques) sont des grandeurs étroitement dépendantes les unes des autres :

— *un courant électrique*, créateur de force magnétomotrice (en abrégé f.m.m.), engendre un flux magnétique (toutes machines) (V. t. 1, Magnétisme, chap. 1) ;

— un circuit parcouru par un *courant électrique* tend à embrasser le *maximum de flux* (principe des moteurs) (V. t. 1, Électricité, chap. 24) ;

— si un flux variable embrasse un circuit fermé, un *courant électrique* prend naissance dans celui-ci (principe des générateurs et des transformateurs) (V. t. 1, Électricité, chap. 25).

CHAPITRE PREMIER

LE FLUX D'INDUCTION DANS LES ÉLECTROAIMANTS ET LES MACHINES ÉLECTRIQUES

Le flux d'*induction*, facteur de force attractive dans les électroaimants, de f.é.m. dans les générateurs, de couple dans les moteurs, est l'élément vital (le *sang* pourrait-on dire) de la machine électrique.

1. THÉORIE DU CIRCUIT MAGNÉTIQUE

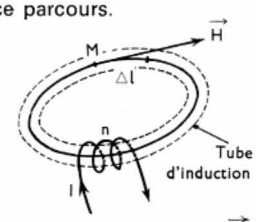
Un circuit électrique (constitué principalement d'éléments en cuivre) *canalise un courant électrique*. Un circuit magnétique (formé surtout d'éléments à base de fer) est l'ensemble des organes destinés à *canaliser un flux magnétique*.

1.1. Le circuit magnétique est soumis à la loi d'Hopkinson. — *Ampère* a montré que, le long d'une ligne d'induction (V. t. 1, Magnétisme, chap. 1), parcours fermé enlaçant n spires parcourues par un courant I (fig. I-1) on peut écrire :

$$nI = \Sigma\,(H.\Delta l)$$

(Σ est le symbole signifiant *somme*. V. t. 1, Préliminaires, chap. 1), H désigne le module du champ magnétique $\vec{H}$ en un point M du parcours fermé et Δl représente un petit déplacement à partir de M, sur ce parcours.

Fig. I-1



On sait qu'en chaque point le module de l'induction $\vec{B}$ est $B = \mu H$ (μ étant la perméabilité absolue du milieu). Par suite, si l'on considère un petit *tube* d'induction dont le parcours précédent constitue l'axe (tube de section S), la formule précédente s'écrit :

$$nI = \Sigma \frac{B}{\mu} \Delta l = \Sigma \frac{1}{\mu} \frac{\Phi}{S} \Delta l$$

puisque le flux Φ à travers la section S est égal à $\Phi = BS$

En remarquant que le flux Φ est le même dans toutes les sections du tube (le flux d'induction est conservatif), on peut écrire :

$$nI = \Phi \Sigma \frac{\Delta l}{\mu S}$$

Cette formule est analogue à l'expression de la *loi d'Ohm*, $E = RI$ pour un circuit électrique de résistance totale R, parcourue par un courant d'intensité I et comportant un générateur de f.é.m. E (V. t. 1, Électricité, chap. 6), et on appelle :

— *force magnétomotrice* F le produit nI qui s'exprime en *ampères* (symbole : A) puisque n est une grandeur sans dimensions ; l'ancienne unité était l'*ampère-tour* (symbole At) ;

— *réluctance* d'une portion Δl la grandeur :

$R = \dfrac{\Delta l}{\mu S}$ ($\mu = \mu_0\,\mu_r$, avec μ_0 : perméabilité du vide, et μ_r perméabilité relative du matériau).

L'unité de réluctance est l'*henry à la puissance moins un* (symbole H^{-1}) si l'on exprime Δl en mètres, μ en henrys par mètre et S en mètres carrés.

La loi d'Hopkinson s'exprime alors par la formule :

$$\boxed{F = nI = \Phi \Sigma R}$$

F est exprimée en ampères, Φ en webers et R en henrys à la puissance moins un.

1.2. Calcul de la force magnétomotrice nécessaire à la production d'un flux. — La détermination de la f.m.m. nécessaire pour obtenir un flux déterminé dans un circuit magnétique, dont les caractéristiques sont connues, se fait au moyen de la relation d'Hopkinson :

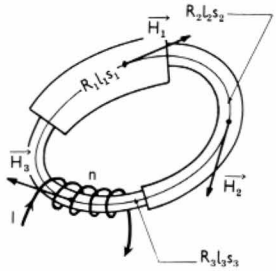
$$nI = (\Sigma H.\Delta l)$$

Si, par exemple, le circuit magnétique comporte *trois portions en série* (fig. I-2), chacune de section constante, on écrit :

$$nI = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_3 l_3$$

Cette équation peut être comparée à celle qui s'applique au circuit électrique de la fig. I-3 : $E = R_1 I + R_2 I + R_3 I$.

Fig. I-2



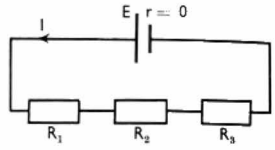


Fig. I-3

Les grandeurs HI jouent un rôle analogue à des chutes de potentiel électrique et on appelle le produit $HI = F$ *différence de potentiel magnétique*.

On dresse alors le tableau suivant :

Flux désiré	Surface d'une section (mètres carrés)	Induction $B = \frac{\Phi}{S}$ (teslas)	Champ magnétique (ampères par mètre)	Longueur l de la portion (en mètres)	HI
Φ	S_1	B_1	H_1	l_1	$H_1 l_1$
	S_2	B_2	H_2	l_2	$H_2 l_2$
	S_3	B_3	H_3	l_3	$H_3 l_3$

Dans les corps ferromagnétiques, les valeurs de H sont obtenues en fonction de B au moyen des courbes fournies par les fabricants de matériaux magnétiques (fig. I-4).

Dans l'air :

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{B}{4\pi . 10^{-7}} = 800\,000\,B$$

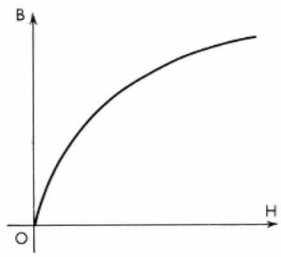


Fig. I-4

Courbe d'aimantation d'un corps ferromagnétique permettant d'obtenir H si l'on connaît B

Il n'y a plus qu'à faire la somme des produits HI pour obtenir la f.m.m. :

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_3 l_3 + \ldots = nI$$

Remarque : Si le circuit magnétique comporte des dérivations, l'étude peut être beaucoup plus compliquée. Si la saturation n'est pas atteinte, le flux dans le circuit principal est égal à la somme des flux dans les circuits dérivés.

1.3. Fuites magnétiques

1.3.1. Coefficient d'Hopkinson. — Le flux est utile dans un entrefer. Certaines lignes d'induction, dont l'ensemble constitue le *flux de fuite* Φ_f, vont directement d'une extrémité de la bobine à l'autre sans passer par l'entrefer. Si Φ_u est le flux utile et Φ_t le flux total dans la bobine

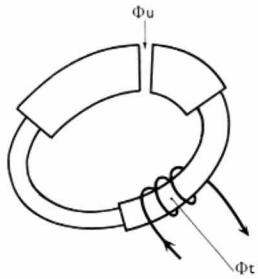


Fig. I-5

Le flux utile Φ_U ne représente qu'une partie du flux total Φ_t car il y a des fuites magnétiques

(fig. I-5), le *coefficient d'Hopkinson du circuit* est égal à :

$$\nu = \frac{\Phi_t}{\Phi_u} = \frac{\Phi_u + \Phi_f}{\Phi_u}$$

Il permet de connaître les fuites d'un circuit magnétique.

Par exemple, dans une machine tournante, tout flux qui pénètre dans l'armature est *utile* car il est coupé par les conducteurs de l'induit. Tout flux qui ne réalise pas cette condition est un *flux de fuite*. Les figures I-6 et I-7 montrent les flux de fuites respectivement dans les machines à pôles saillants et dans les machines à pôles lisses. Dans ces dernières, on voit que toutes les lignes d'induction qui s'enroulent autour des conducteurs et autour des portions frontales des bobines appartiennent au flux de fuite.

Fig. I-6

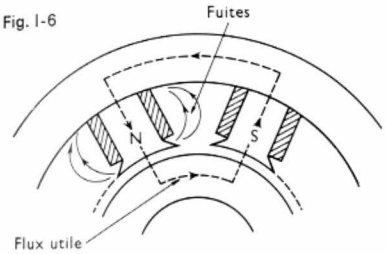
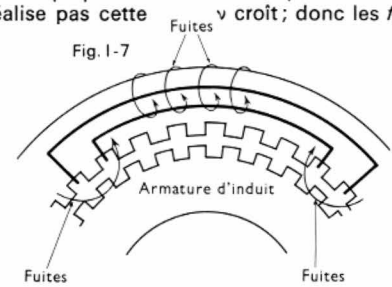


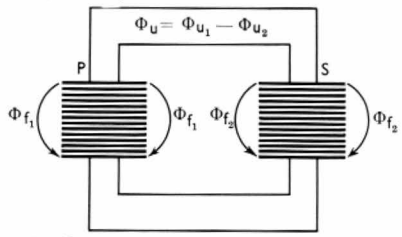
Fig. I-7



1.3.2. Coefficients de fuites ou de dispersion. — Plus généralement, dans les machines, il y a deux forces magnétomotrices agissantes. L'une est créée par un enroulement dit *primaire*, l'autre par un enroulement dit *secondaire*. C'est le cas des transformateurs statiques et des moteurs asynchrones où ces enroulements sont parcourus par des courants alternatifs. Dans ce cas, il faut distinguer :

a) le *flux utile* Φ_u *:* c'est celui qui est commun aux deux enroulements (fig. I-8) ;

Fig. I-8



b) le *flux de fuite* Φ_{f_1} *du primaire P par rapport au secondaire S :* c'est la portion de flux qui est engendrée par le primaire *P* et n'est pas embrassée par le secondaire *S* ;

c) le *flux de fuite* Φ_{f_2} *du secondaire S par rapport au primaire P :* c'est la portion de flux qui est engendrée par le secondaire *S* et n'est pas embrassée par le primaire *P*.

On définit alors *deux* coefficients de fuites :

$$\nu_1 \text{ (primaire)} = \frac{\Phi_u + \Phi_{f1}}{\Phi_u}$$

$$\nu_2 \text{ (secondaire)} = \frac{\Phi_u + \Phi_{f2}}{\Phi_u}$$

Concernant ces coefficients de fuites, il faut savoir :

— que *leur détermination par le calcul est très malaisée.* Le constructeur les détermine généralement par comparaison avec ceux des machines existantes. Leur valeur est comprise entre 1,1 et 1,3 dans les machines tournantes et est inférieure à 1,1 dans les transformateurs ;

— qu'ils sont *constants dans une machine non saturée.* En effet, si l'on désigne (fig. I-9) par R_f la réluctance du circuit magnétique dans lequel on trouve le flux de fuite Φ_f et par R_u la réluctance du fer du circuit magnétique où l'on trouve le flux Φ_u, la loi des flux dérivés (analogue à la loi des courants dérivés) permet d'écrire :

$$R_u \Phi_u = R_f \Phi_f$$

D'où :

$$\frac{R_u}{R_f} = \frac{\Phi_f}{\Phi_u} = \frac{\Phi_t - \Phi_u}{\Phi_u} = \frac{\Phi_t}{\Phi_u} - 1 = \nu - 1$$

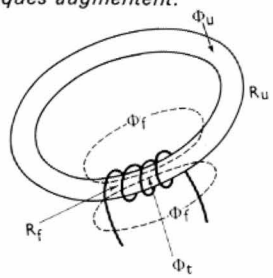
Lorsque le circuit magnétique n'est pas saturé, la réluctance du fer R_u est *constante* comme celle de la portion d'air dans laquelle passe le flux de fuite. Donc :

$\frac{R_u}{R_f}$ = *constante* et dès lors :

ν = *constante.*

Lorsque le circuit se *sature*, R_u croît, R_f reste constant et ν croît ; donc les *fuites magnétiques augmentent.*

Fig. I-9



2. LE FLUX D'INDUCTION DANS LES ÉLECTRO-AIMANTS

Un électroaimant comporte un circuit électrique ou *circuit inducteur* produisant le champ magnétique et un *circuit magnétique*. On peut classer les électroaimants en trois catégories :

1° *Les électroaimants des générateurs* et *moteurs* dont le but est de créer une forte induction dans un entrefer ;

2° Les électroaimants qui permettent le *déplacement* d'une pièce appelée *armature*. Il faut distinguer :

a) les appareils *attirants* déterminant un petit déplacement de l'armature. Pour éviter que l'aimantation rémanente maintienne cette armature lorsque le courant *continu* ne circule plus dans le circuit inducteur, on empêche le contact parfait entre pôles et armature au moyen de butoirs. Ils sont employés en télégraphie, téléphonie, signaux de chemins de fer, etc. (V. t. 2, Relais).

Lorsqu'ils doivent être commandés à l'aide de très faibles courants, il est possible d'accroître la sensibilité en employant des *relais polarisés*. On aimante légèrement le noyau par l'action d'un aimant permanent (fig. I-10) et on équilibre la force d'attraction correspondante par l'action d'un ressort. Comme l'induction *B* n'est jamais nulle, un faible courant

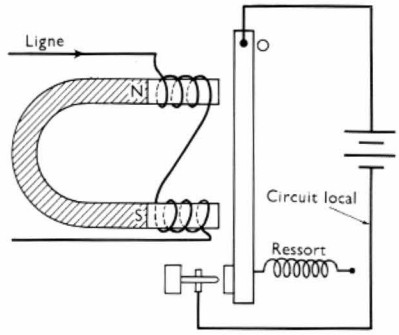


Fig. I-10

Principe d'un relais polarisé

peut déterminer une variation de force assez grande pour provoquer le déplacement de l'armature et fermer par un contact *K* un circuit local parcouru par un courant qui peut être beaucoup plus intense que le courant de commande ;

b) les électroaimants *avaleurs* qui s'utilisent lorsque l'armature doit effectuer un déplacement important (fig. I-11). Elle est aspirée, quel que soit le sens du courant, en vertu du *principe du flux maximal*. Cet électroaimant peut donc être employé aussi bien en courant alternatif qu'en courant continu. Pour réduire la réluctance du circuit magnétique on entoure la bobine d'une gaine extérieure en fer : on dit alors que l'électroaimant est *cuirassé*. On l'emploie dans les disjoncteurs, les aiguillages électriques, certains relais, etc. (V. t. 2, Relais).

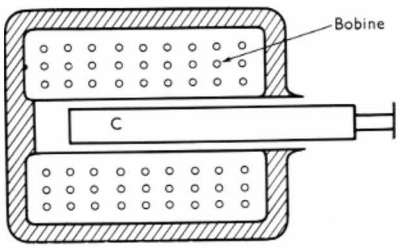


Fig. I-11

C : armature de l'électroaimant

3° Les appareils à *attraction durable* parmi lesquels on distingue :

a) les électroaimants *contacteurs* dont la constitution ne diffère pas des précédents mais dont l'armature a une position durable. Ils constituent les *relais* électromagnétiques ;

b) les électroaimants *adhérents* qui doivent maintenir une force d'adhérence suffisante entre noyaux et armature. Ce sont les électroaimants d'embrayage électromagnétique (fig. I-12), de triage magnétique (fig. I-13), de levage (fig. I-14).

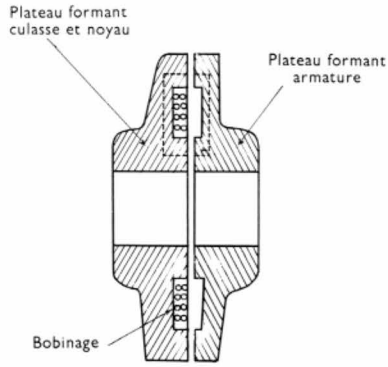


Fig. I-12

Embrayage électromagnétique

Fig. I-13

Triage magnétique
En A tombent les matériaux ferromagnétiques. En B on recueille tous les corps non ferromagnétiques

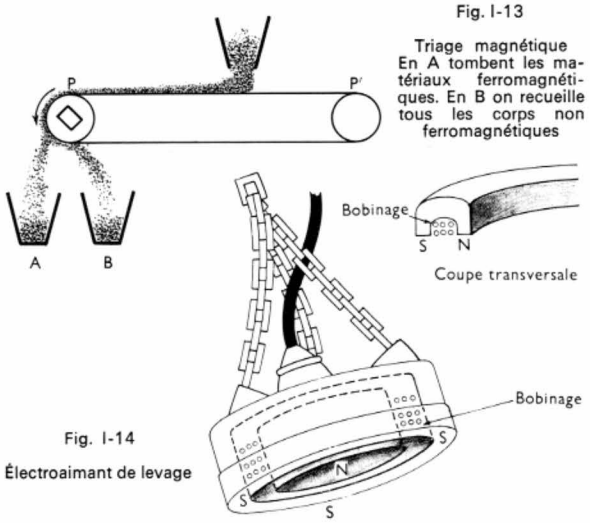


Fig. I-14

Électroaimant de levage

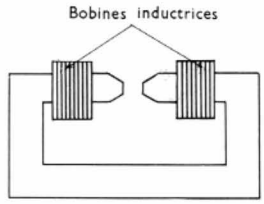


Fig. I-15

Électroaimant de laboratoire

Il faut aussi signaler que l'électroaimant est également appliqué à des recherches physiques nécessitant de grandes inductions. On lui donne alors la forme de la figure I-15.

On voit l'importance de l'électroaimant. Sa découverte a été comparable, dans l'histoire des sciences et des techniques, à celle de la machine à vapeur.

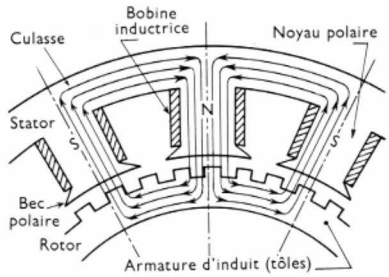


Fig. I-16

Stator à pôles saillants

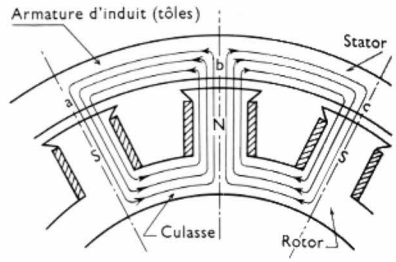


Fig. I-17

Rotor à pôles saillants

3. PRODUCTION D'UN FLUX CONSTANT DANS LES MACHINES ÉLECTRIQUES

3.1. Production de flux par des pôles saillants. — Le flux magnétique peut être produit au moyen de bobines inductrices parcourues par un courant *continu* et placées sur des noyaux magnétiques (fig. I-16). Chaque élément est appelé *pôle saillant ;* les pôles peuvent être *fixes,* c'est-à-dire portés par le stator (dynamo, certains moteurs universels) ou *mobiles* (fig. I-17), c'est-à-dire portés par le rotor (machines synchrones).

3.2. Production de flux par des pôles lisses. — Dans certaines machines, le flux magnétique peut être produit au moyen de bobines convenablement disposées dans des encoches : on dit que la machine est à *pôles lisses*. Ceux-ci peuvent être *fixes* (moteur à collecteur, fig. I-18) ou *mobiles* (turbo-alternateur, fig. I-19). La figure I-20 donne,

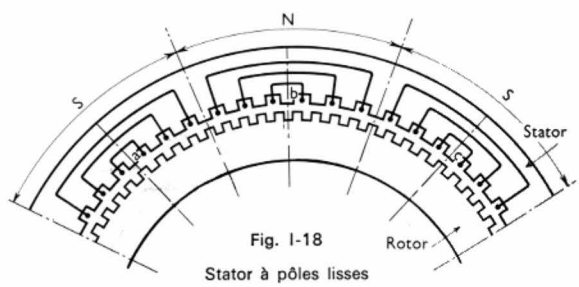


Fig. I-18

Stator à pôles lisses

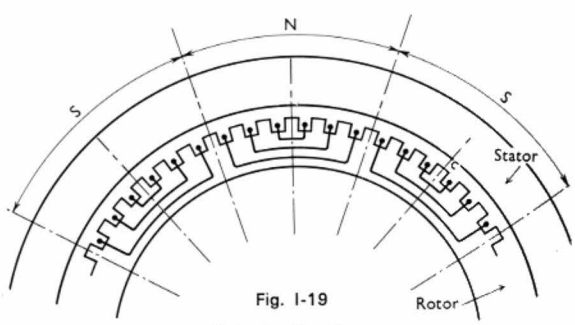


Fig. I-19

Rotor à pôles lisses

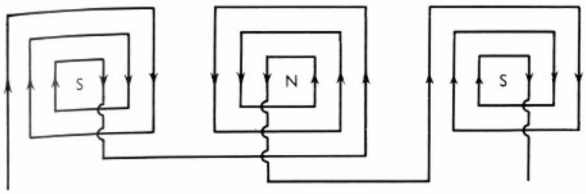


Fig. I-20

d'autre part, la représentation *panoramique* des bobines inductrices ; on suppose alors que leur support cylindrique est fendu et développé sur un plan. La règle du tire-bouchon appliquée aux différentes bobines permet de mettre en évidence des pôles alternés nord et sud.

3.3. Répartition du flux dans l'entrefer. — Le fer des machines électriques n'est généralement pas très saturé et sa perméabilité est très supérieure à celle de l'air (environ 2 000 fois). Il en résulte que les lignes d'induction dans l'air sont sensiblement perpendiculaires au fer et donc *radiales* dans la plupart des machines. Quant à la répartition du flux dans l'entrefer :

1° Si les pôles sont *saillants*, la densité du flux (autrement dit l'induction) varie peu sous chaque pôle et s'annule assez brusquement à l'extrémité des becs polaires. La courbe représentative de l'induction B dans l'entrefer (fig. I-21)

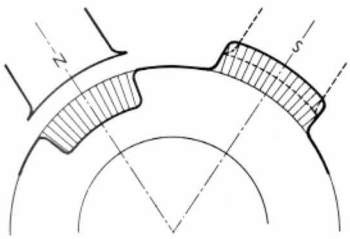


Fig. I-21

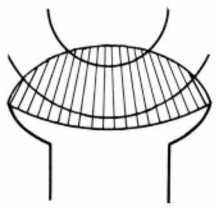
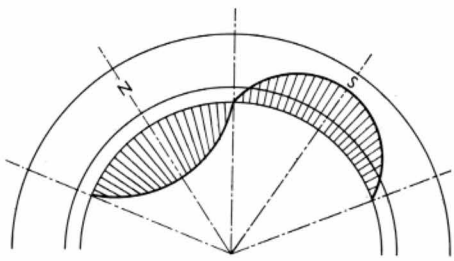


Fig. I-22

est obtenue en portant radialement les vecteurs $\vec{B}$ en chaque point ; elle a une forme plus arrondie (plus voisine de la sinusoïde) lorsque les pièces polaires ont un rayon de courbure plus faible que celui de l'armature d'induit (fig. I-22).

2° si les pôles sont *lisses*, il est possible de réaliser une répartition sensiblement sinusoïdale de l'induction dans l'entrefer (fig. I-23) en choisissant convenablement le nombre des spires des bobines coaxiales (depuis la plus étroite jusqu'à la plus large) dont l'ensemble constitue un pôle lisse.

Fig. I-23



4. PRODUCTION DE FLUX TOURNANTS ET GLISSANTS AU MOYEN DE COURANTS ALTERNATIFS

4.1. Différents types de flux utilisés dans les machines. — Dans les machines, les flux magnétiques peuvent être :

1° *figés* (direction fixe) et *constants* (dynamos) ;

2° *figés* et *alternatifs* (transformateurs statiques) ;

3° *tournants* et *constants* (alternateurs).

Dans ce dernier cas, le flux peut être obtenu au moyen de pôles *tournants* (saillants ou lisses) excités par un courant *continu*. Il peut également être produit grâce à des courants alternatifs. En effet, une découverte remarquable due à Ferraris a permis de réaliser un flux *tournant* à répartition sinusoïdale à l'aide de courants *alternatifs* passant dans des bobines *fixes*. C'est ce qui apparaîtra notamment dans l'étude des flux produits par des courants alternatifs dans les machines tournantes.

4.2. Flux tournants créés par une bobine parcourue par un courant sinusoïdal. — Une bobine sans noyau (fig. I-24), alimentée par un courant sinusoïdal i,

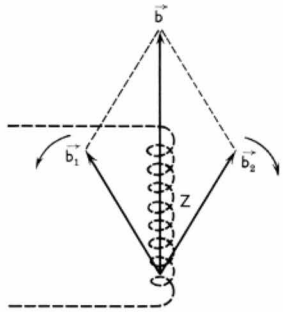


Fig. I-24

$$b_1 = b_2 = \frac{B_m}{2}$$

produit suivant son axe une induction $\vec{b}$ proportionnelle à i (V. t. 1, Électricité, chap. 23). En supposant $\vec{b}$ maximale à l'instant $t = 0$, le module de l'induction est égal à :

$$b = B_m \cos \omega t = \frac{1}{2} B_m \cos \omega t + \frac{1}{2} B_m \cos (-\omega t)$$

Cette expression montre qu'à tout instant $\vec{b}$ peut être considéré comme la somme géométrique de *deux* vecteurs $\vec{b_1}$ et $\vec{b_2}$, de module $\frac{B_m}{2}$ *constant, tournant en sens inverse l'un de l'autre* à la vitesse ω égale à la pulsation de $\vec{b}$.

On observe que, lorsque $\vec{b}$ est maximal, les deux vecteurs $\vec{b_1}$ et $\vec{b_2}$ sont confondus suivant l'axe de la bobine.

4.3. Flux tournant créé par 3 bobines à 120° parcourues par des courants triphasés équilibrés. — Les trois bobines M, N, P, dont les axes sont décalés de $\frac{2\pi}{3}$ rad sont parcourues par des courants triphasés équilibrés (c'est-à-dire égaux et déphasés de $\frac{2\pi}{3}$ rad) dans l'ordre M, N, P (fig. I-25). On désigne par Ox, Oy, Oz leurs axes et on suppose qu'à l'instant *zéro* le courant est *maximal* dans M. Les deux vecteurs composants $\vec{m_1}$ et $\vec{m_2}$ de l'induction produite au point O par la *bobine M* sont dirigés suivant l'axe Ox (fig. I-26).

Fig. I-25

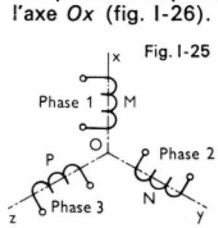
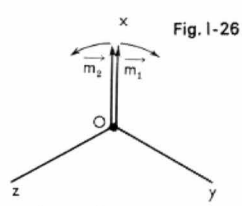


Fig. I-26



Au même instant les vecteurs $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ dont la somme géométrique est l'induction créée en O par la *bobine N* ont encore $\frac{2\pi}{3}$ rad à parcourir avant d'être confondus sur l'axe de Oy (fig. I-27).

Au même instant les vecteurs $\vec{p_1}$ et $\vec{p_2}$ dont la somme géométrique est l'induction créée en O par la *bobine P* ont encore $\frac{4\pi}{3}$ rad à parcourir avant d'être confondus sur l'axe Oz (fig. I-28).

Fig. I-27

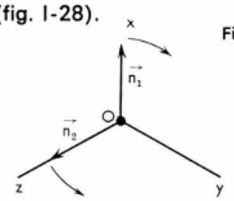


Fig. I-28

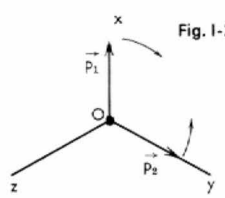
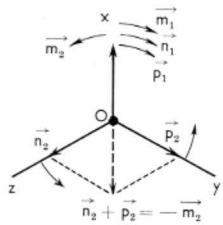


Fig. I-29



Si l'on superpose les trois figures précédentes (fig. I-29), on voit que les vecteurs $\vec{m_2}$, $\vec{n_2}$ et $\vec{p_2}$, égaux et décalés de 120° les uns par rapport aux autres *s'annulent à tout instant* puisqu'ils tournent à la même vitesse et dans le même sens. En revanche, la somme des vecteurs $\vec{m_1}$, $\vec{n_1}$, et $\vec{p_1}$ *constants* et tournant dans le sens horaire à la vitesse ω est un vecteur, de module égal à $\frac{3B_m}{2}$, tournant à cette vitesse ω dans le sens horaire.

Remarque : Si les courants n'étaient pas équilibrés (égaux et déphasés de 120° les uns par rapport aux autres) les 3 vecteurs $\vec{m_2}$, $\vec{n_2}$, $\vec{p_2}$ ne seraient pas égaux et décalés de 120°. Leur résultante ne serait pas nulle et il y aurait une induction tournante *inverse*, un flux *inverse* dont le sens de rotation est opposé à celui du flux *direct* dû à la résultante de $\vec{m_1}$, $\vec{n_1}$ et $\vec{p_1}$.

4.4. Production de flux glissants au moyen de courants polyphasés

4.4.1. Nombre de pôles d'un enroulement à courants alternatifs. — On va représenter (fig. I-30), après l'avoir développée suivant une droite, une portion d'une armature cylindrique portant des bobines régulièrement décalées les unes par rapport aux autres. Elles seront

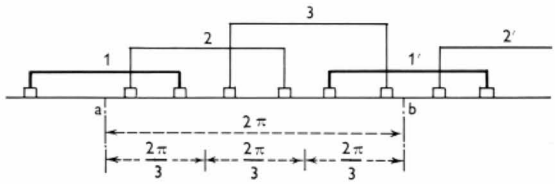


Fig. I-30 — Vue schématique des bobines de trois enroulements d'une machine triphasée

numérotées 1, 2, 3, 1′, 2′, 3′, etc., et on va supposer ces bobines reliées à un réseau triphasé de façon telle que :

— toutes les bobines 1 soient parcourues dans le même sens par le courant de la phase 1 (enroulement 1) ;

— toutes les bobines 2 soient parcourues dans le même sens par le courant de la phase 2 (enroulement 2) ;

— toutes les bobines 3 soient parcourues dans le même sens par le courant de la phase 3 (enroulement 3).

On appelle *double intervalle polaire* l'angle formé par les axes de deux bobines (telles que 1 et 1′) appartenant à la *même* phase (c'est-à-dire à l'enroulement qui sera alimenté par une phase déterminée). Si ce double intervalle polaire est contenu p fois dans la circonférence, autrement dit si la figure formée par les bobines 1, 2, 3, se reproduit p fois sur la circonférence de l'armature, on dit que l'enroulement triphasé présente *p paires de pôles*. Dans ce cas, un double intervalle polaire est donc un angle θ égal à $\frac{2\pi}{p}$ radians ; par définition, on dit qu'il correspond à l'*angle électrique* $\theta_e = 2\pi$ rad. Plus généralement à tout angle θ' formé par deux directions radiales quelconques d'une machine est associé l'angle électrique θ'_e égal à $p\theta$.

4.4.2. Théorème de Ferraris. — Dans le bobinage décrit, un système de courants polyphasés (donc décalés *dans le temps*) parcourt un ensemble de bobines décalées *dans l'espace*. Ce double polyphasage « équiphases » a une conséquence remarquable : le long de la circonférence de l'entrefer glisse un ensemble de flux identique à celui que produirait une roue polaire tournante.

En effet, à l'instant où le courant est *maximal* dans la phase 1, on trouve des pôles nord suivant les axes des bobines 1, 1′, ... Un tiers de période *après* le courant est maximal dans la phase 2 et les pôles nord précédents sont alors disposés suivant les bobines 2, 2′, ... Un tiers de période après, le courant est maximal dans la phase 3 et les pôles nord précédents se trouvent suivant les bobines 3, 3′, ... Ainsi, au bout d'une période les pôles nord se retrouvent au niveau des bobines 1, 1′, ...

Si l'on appelle *pôles fictifs*, les pôles dus aux courants triphasés, l'étude précédente montre :

a) qu'il y a autant de pôles fictifs nord, et de pôles fictifs sud insérés entre les pôles nord, que de bobines telles que 1, 1′, ... Il y a donc *autant de pôles fictifs* que chaque *enroulement du bobinage a de pôles;*

b) qu'à chaque période, un pôle fictif glisse de l'angle $\theta = \frac{2\pi}{p}$; sa vitesse angulaire est donc égale à :

$$\Omega = \frac{2\pi/p}{T} = \frac{2\pi}{T}\frac{1}{p} = \frac{\omega}{p}$$

Théorème de Ferraris. — *Parcouru par des courants triphasés équilibrés de pulsation ω, un bobinage triphasé ayant p paires de pôles produit un ensemble de p paires de pôles fictifs glissant le long de l'entrefer à la vitesse angulaire* $\frac{\omega}{p}$.

Ce théorème est fondamental. Il se généralise facilement. Par exemple, il s'applique aussi bien à un système diphasé pourvu que le bobinage soit également diphasé.

Comme dans le cas du flux tournant (§ 4.3) on montre que les *pôles fictifs glissants* produisent un *flux égal* à $\frac{3}{2}\Phi_m$, Φ_m étant le flux maximal dû à une bobine.

4.4.3. Inversion du sens de rotation des flux glissants. — Si l'on croise les connexions des fils 2 et 3 du réseau triphasé avec les entrées des enroulements 2, 2′, ... d'une part, 3, 3′, ... d'autre part (fig. I-31), c'est maintenant dans la phase 3 que le courant est maximal un tiers de période après la phase 1. Les valeurs maximales des courants se succèdent, dans les bobines, dans l'ordre 1′, 3, 2 et le sens de rotation du flux glissant qui était le sens *horaire* devient le sens *anti-horaire*. Donc *on inverse le sens de rotation d'un moteur triphasé à flux glissant en croisant deux connexions quelconques des fils du réseau avec les bornes de ce moteur.*

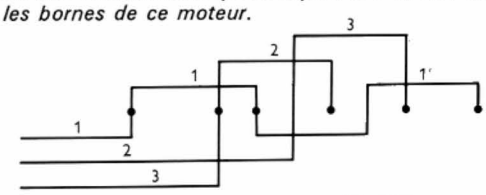


Fig. I-31

4.4.4. Flux inverse. Pôles fictifs inverses. — Tout ce qui précède suppose que les courants triphasés dans les bobines 1, 1′, ..., 2, 2′, ..., 3, 3′, ... sont *équilibrés*. S'ils ne le sont pas, on montre comme dans le cas des flux tournants (§ 4.3) qu'il existe un flux inverse (et des *pôles fictifs inverses*) tournant dans le sens opposé du flux direct.

Dans les moteurs à courant alternatif, c'est le flux direct qui produit le flux utile. Le flux inverse produit un couple opposé, donc affaiblit le couple moteur. On voit apparaître ici *l'avantage* des systèmes *équilibrés* pour les machines à courant alternatif : ils permettent d'obtenir un meilleur couple.

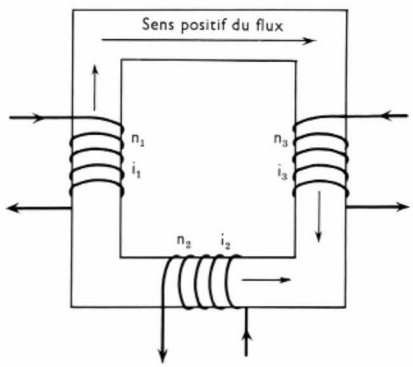
4.4.5. Flux glissants produits par un enroulement monophasé. Théorème de Maurice Leblanc. — Dans le bobinage triphasé de la figure I-30, on va supprimer les bobines 2, 2′, ..., 3, 3′, ... et alimenter les bobines 1, 1′, ..., avec un courant alternatif. On obtient un enroulement *monophasé ayant p paires de pôles*. On a donc comme dans la bobine de la figure I-24, un flux direct et un flux inverse ; ils sont identiques et tournent à la même vitesse.

Théorème de Maurice Leblanc. — *Un enroulement monophasé ayant p paires de pôles, parcouru par un courant sinusoïdal de pulsation ω, crée p paires de pôles fictifs identiques, glissant le long de l'entrefer dans des sens opposés, à la vitesse* $\frac{\omega}{p}$.

5. CAS DE PLUSIEURS FORCES MAGNÉTOMOTRICES AGISSANT DANS LA MÊME DIRECTION

5.1. Forces magnétomotrices continues. — Il est nécessaire de considérer les forces magnétomotrices comme des grandeurs algébriques. On donne au flux un sens positif et une force magnétomotrice est *positive* quand elle agit dans le sens du *flux positif* et négative dans le cas contraire. On fait la somme *algébrique* des forces magnétomotrices agissantes pour trouver la *force magnétomotrice résultante* F_r; d'elle dépend le flux. Par exemple, dans le cas de la figure I-32, on écrit: $F_r = F_1 - F_2 + F_3$.

Fig. I-32



5.2. Forces magnétomotrices alternatives. — En valeur instantanée, les forces magnétomotrices s'ajoutent également algébriquement. Si elles sont sinusoïdales, la force magnétomotrice résultante F_r peut donc être représentée (fig. I-33) par un vecteur $\vec{F_r}$, somme géométrique des vecteurs représentant les forces magnétomotrices composantes $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, ... (V. t. 1, Électricité, chap. 30).

Dans les circuits alternatifs, la force magnétomotrice résultante est appelée force magnétomotrice magnétisante. Elle caractérise la grandeur et la phase du flux (qui est une grandeur sinusoïdale en un point donné).

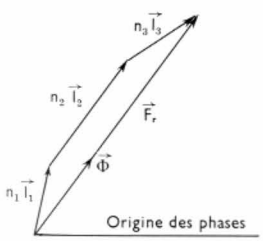


Fig. I-33

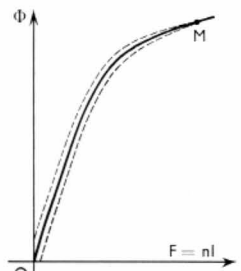


Fig. I-34

6. CARACTÉRISTIQUE MAGNÉTIQUE TOTALE D'UNE MACHINE

6.1. Définition. — C'est la courbe représentative du flux *en un point déterminé* en fonction de la force magnétomotrice obtenue sur l'ensemble de ce circuit. Cette courbe se rapporte généralement:

— au flux utile Φ_u pour les machines à courant continu;
— au flux commun à deux ou plusieurs enroulements dans les machines à courants alternatifs.

Elle donne lieu à d'importantes observations (fig. I-34):

1° Sa forme ne dépend que du circuit magnétique (nature des matériaux, dimensions relatives des différentes portions) et son coude est d'autant moins brusque que l'entrefer est relativement plus important.

2° Si ce circuit comporte plusieurs portions associées à la suite les unes des autres ou (et) en dérivation, chaque saturation d'une de ces portions détermine un coude dans la caractéristique totale. Comme ces portions arrivent successivement à la saturation, ce coude est moins marqué que si le circuit magnétique était d'une seule pièce.

3° Dans chaque portion du circuit, le flux est proportionnel à l'induction B; la force magnétomotrice étant proportionnelle au champ, l'hystérésis qui affecte les courbes B (H) de chaque portion (sauf l'entrefer) affecte également la caractéristique magnétique totale.

4° Dans la zone de saturation, un faible accroissement de flux utile n'est obtenu qu'au prix d'une augmentation importante de la force magnétomotrice. C'est pour cette raison que les machines électriques sont toujours faiblement saturées: en marche normale le point de fonctionnement est généralement en M à la fin du coude (V. fig. I-34). Dans les machines l'induction a les valeurs suivantes:

— Transformateurs: 1,4 à 1,8 T.
— Noyaux polaires: 1,4 à 1,6 T.
— Culasses (acier moulé): 1 à 1,2 T.
— Armatures d'induit: 1 à 1,4 T.
— Dentures d'induit: 1,6 à 2,2 T.

6.2. Cas du circuit magnétique non saturé. — On va considérer un circuit magnétique soumis à l'action de forces magnétomotrices F_1, F_2, F_3 (fig. I-35); on admet que

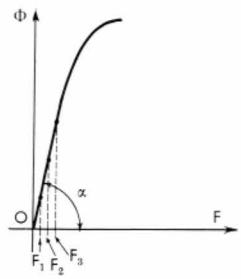


Fig. I-35

sous l'action de ces forces magnétomotrices agissant séparément ou simultanément le point figuratif se trouve sur la partie rectiligne de la caractéristique totale.

Soit Φ_1, Φ_2, Φ_3, et Φ, les flux produits séparément puis simultanément par ces forces magnétomotrices. Si $a = \text{tg}\alpha$ est le coefficient angulaire de la branche rectiligne de la caractéristique magnétique totale, on peut écrire: $\Phi_1 = aF_1$; $\Phi_2 = aF_2$; $\Phi_3 = aF_3$; $\Phi = aF_r$, F_r désignant la force magnétomotrice résultante ($F_r = F_1 + F_2 + F_3$). On a donc:

$$\Phi = aF_r = a\,(F_1 + F_2 + F_3) = aF_1 + aF_2 + aF_3$$

soit:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$$

Ce résultat est très important: lorsqu'un circuit magnétique soumis à l'action de plusieurs forces magnétomotrices n'est pas saturé, on peut obtenir le flux résultant de leur action commune en ajoutant les flux que produiraient successivement dans ce même circuit les forces magnétomotrices considérées.

Les circuits magnétiques des machines étant peu saturés, on obtiendra une grande simplification dans la théorie de ces machines en supposant réalisée l'hypothèse précédente. On introduit parfois les effets de la saturation en deuxième approximation. Il faut bien noter que les flux Φ_1, Φ_2, Φ_3 sont fictifs et que seul existe physiquement le flux Φ.

6.3. Calcul des bobines inductrices. — Soit:

N le nombre de spires de chaque bobine;
i le courant dans celle-ci;
s la section du fil conducteur;
J la densité de courant dans le fil;
R la résistance totale de la bobine;
l' la longueur de la spire moyenne;
r la résistance de la spire moyenne;
U la tension appliquée à la bobine;
ρ la résistivité du cuivre.

On connaît la force magnétomotrice F ($F = Ni$), ρ et U. On évalue l' et on se fixe une densité de courant J. On a les équations :

(1) $i = Js$

(2) $F = \dfrac{NU}{R} = \dfrac{U}{R/N} = \dfrac{U}{r}$

(3) $r = \rho \dfrac{l'}{s}$ d'où : $s = \rho \dfrac{l'}{r}$

L'équation (2) donne r ; l'équation (3) donne s ; l'équation (1) donne i. D'où le nombre de spires : $N = \dfrac{F}{i}$. La bobine est calculée.

7. LE FLUX DANS LA MARCHE INDUSTRIELLE

7.1. Définition. — On dit qu'une machine électrique est en marche industrielle quand sa *tension* d'alimentation (valeur efficace en alternatif) et sa *fréquence* f (dans le cas des machines à courants alternatifs évidemment) sont *constantes*.

7.2. Machines à courants alternatifs

1° On considère un flux sinusoïdal dont l'expression instantanée est : $\varphi = \widehat{\Phi} \cos \omega t$ ($\widehat{\Phi}$ désigne la valeur maximale du flux).

La f.é.m. induite dans N spires par ce flux est égale à :

$$e = -N \frac{d\varphi}{dt} = N\omega \, \widehat{\Phi} \sin \omega t.$$

Comme l'on a sensiblement $u = e$ et qu'en marche industrielle, la fréquence (et par conséquent la pulsation $\omega = 2\pi f$) est constante, on peut tirer la proposition suivante :

Première proposition. *Dans toute machine électrique à courants alternatifs, si la tension u entre bornes est sinusoïdale, le flux l'est aussi.*

2° La valeur efficace de la f.é.m. est égale à :

$$E_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} N\omega \, \widehat{\Phi} = \frac{1}{\sqrt{2}} N \times 2\pi f \widehat{\Phi}$$

soit :

$$\boxed{E_{\text{eff}} = 4{,}44 \, N f \, \widehat{\Phi}} \qquad \text{(formule de Kapp)}$$

(On exprime E_{eff} en volts, f en hertz et $\widehat{\Phi}$ en webers).

Comme en marche industrielle, on peut poser :

f = constante et $U_{\text{eff}} \approx E_{\text{eff}}$ = constante

on déduit la proposition suivante :

Deuxième proposition. *Dans toute machine à courants alternatifs en marche industrielle, la valeur efficace du flux reste sensiblement constante dans tous les régimes de charge.*

Comme le flux utile de la machine est lié à la force magnétomotrice résultante (comme le montre la caractéristique magnétique totale), cette proposition a un corollaire important :

En marche industrielle, la valeur efficace de la force magnétomotrice magnétisante (résultante) est, pour une machine à courant alternatif déterminée, toujours la même.

Remarque :

$$e = N\omega \, \widehat{\Phi} \sin \omega t = N\omega \, \widehat{\Phi} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

La f.é.m. e est déphasée de $\dfrac{\pi}{2}$ rad en arrière sur le flux.

Graphiquement ces grandeurs sinusoïdales e et φ peuvent être représentées par des vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{\Phi}$ dont les caractéristiques sont données dans le tableau suivant :

Grandeurs sinusoïdales	Vecteur	Module du vecteur	Argument (phase de la grandeur à l'instant $t = 0$)
e	$\vec{E}$	E_{eff}	$-90°$
φ	$\vec{\Phi}$	Φ_{eff}	$0°$

Ces deux vecteurs sont perpendiculaires (fig. I-36).

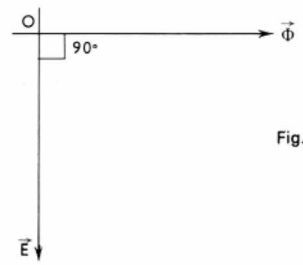


Fig. I-36

7.3. Machines à courant continu. — La f.é.m. induite est proportionnelle à la vitesse de variation du flux embrassé par l'ensemble des spires induites, donc proportionnelle à la vitesse de rotation et au flux utile par pôle.

$$\boxed{E = a \, n \, \Phi}$$

n = nombre de tours par minute.
Φ = flux utile par pôle.
a = constante dépendant de la machine.

Dès lors, en marche industrielle ($U \approx E$ = Cte) le produit $n\,\Phi$ est constant.

Proposition. *Dans une machine à courant continu en marche industrielle, si la vitesse est sensiblement constante, le flux l'est aussi.*

CHAPITRE II

PERTES — ÉCHAUFFEMENT — RENDEMENT

1. PERTES DE PUISSANCE ACTIVE

Dans toute machine électrique, une fraction de la puissance reçue devient de la chaleur. Cette fraction constitue l'ensemble des *pertes de puissance active*. Elles se produisent dans les divers matériaux utilisés pour réaliser la machine : dans le *fer* (canalisant le flux), dans le *cuivre* (canalisant les courants) et dans les *isolants* (interposés entre les précédents). Cependant, aux fréquences industrielles, les pertes de puissance *active* dans les *isolants* sont *insignifiantes* et elles peuvent être négligées.

Par ailleurs l'entretien des flux dans les machines électriques nécessite une puissance magnétisante ou réactive. Cette puissance ne se transforme pas en chaleur ; on dit qu'il y a *consommation de puissance réactive*.

1.1. Pertes dans le fer. — Elles sont dues à l'hystérésis (V. t. 1, Magnétisme, chap. 2) et aux courants de Foucault (V. t. 1, Électricité, chap. 25). Ces pertes sont proportionnelles au volume (et, aussi bien à la masse) du fer ; pour cette raison on les exprime en *watts par kilogramme*.

1° On démontre que les pertes par courants de Foucault sont données en *watts par kilogramme* par la formule suivante :

$$P_F = K_F \, e^2 \widehat{B}^2 f^2.$$

On exprime P_F en watts par kilogramme, l'induction maximale $\widehat{B}$ en teslas, la fréquence f en hertz, l'épaisseur e des tôles en millimètres.

K_F désigne un coefficient d'autant plus faible que la résistivité des tôles est plus grande; il varie de 3,5 à 17 lorsque la proportion de silicium dans le fer *décroît* de 4,5 % à zéro.

Pour réduire les pertes par courants de Foucault, les organes traversés par un flux variable sont toujours feuilletés (e faible) dans le sens du flux.

L'influence de l'épaisseur (le nombre e est élevé au carré) conduit les constructeurs à utiliser des tôles aussi minces que possible (cependant on ne descend pas au-dessous de $e = 0{,}35$ mm).

2° La perte d'énergie par hystérésis est proportionnelle à l'aire du cycle d'hystérésis. Avec les tôles utilisées actuellement, on exprime les pertes par hystérésis au moyen de la formule suivante:

$$P_H = 10^{-2}\, k_H\, f\, \widehat{B}^2$$

On exprime P_H en watts par kilogramme, f en hertz et $\widehat{B}$ en teslas.

k_H désigne un coefficient qui dépend de la qualité des tôles et qui varie de 1,6 à 5 lorsque la proportion de silicium *décroît* de 4,5 % à zéro.

Commercialement, eu égard aux pertes, les tôles sont caractérisées par leurs *pertes globales* (par hystérésis et courants de Foucault) exprimées en watts par kilogramme à la fréquence de 50 Hz et pour une induction maximale $\widehat{B}$ de 1 tesla.

Exemples: tôles pour machines tournantes: 3,6; 2,5; 1,2 W/kg; tôles pour transformateurs: 1,6; 1,5; 0,9 W/kg.

Depuis 1950, l'emploi de tôles à *grains orientés* (laminées à froid) s'est généralisé car lorsque le flux est dans le sens de leur laminage:

a) leurs pertes dans le fer (fig. II-1) sont sensiblement diminuées (jusqu'à 0,6 W/kg);

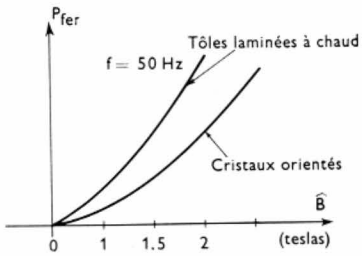


Fig. II-1

b) leur perméabilité est augmentée: avec la même force magnétomotrice on peut obtenir une induction $\widehat{B}$ plus grande, donc un flux plus important.

C'est pourquoi les tôles à grains orientés sont systématiquement employées dans les transformateurs où le flux a une direction fixe.

1.2. Pertes dans le cuivre. — Ce sont les pertes par effet Joule dans les enroulements.

1° Pour une machine à courant continu ou monophasée, elles sont données par la loi de Joule.

Si R désigne la résistance d'un enroulement, la puissance perdue par effet Joule est égale à:

— $P_J = R\, I^2$ s'il est traversé par un courant continu d'intensité I.

— $P_J = R\, I^2_{\text{eff}}$ s'il est traversé par un courant alternatif d'intensité efficace I_{eff}.

2° Pour une machine polyphasée, elles sont données par la formule suivante:

$$P_J = n\, R_s\, J^2_{\text{eff}}$$

(R_s: résistance d'un enroulement; J: intensité efficace du courant dans cet enroulement; n = nombre de phases).

Pour les machines triphasées, on mesure souvent, non pas la résistance R_s et le courant J_{eff} mais la résistance R_a entre deux bornes et le courant I_{eff} dans chaque conducteur extérieur à la machine. Pour cette raison, on transforme utilement la formule précédente en faisant intervenir R_a et I_{eff} (V. t. 1, Électricité, chap. 34).

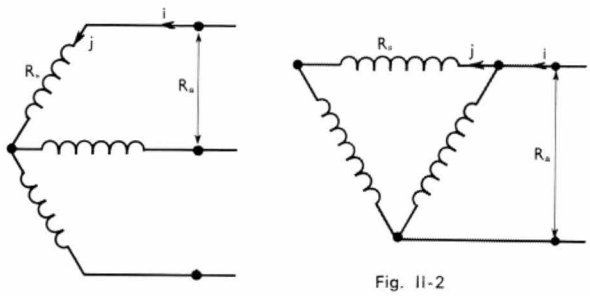


Fig. II-2

En étoile (fig. II-2): $R_s = \dfrac{R_a}{2}$; et: $I_{\text{eff}} = J_{\text{eff}}$;

d'où: $$P_J = 3\, R_s\, J^2_{\text{eff}} = \frac{3}{2}\, R_a\, I^2_{\text{eff}}$$

En triangle: $R_s = \dfrac{3}{2} R_a$; et: $J_{\text{eff}} = \dfrac{I_{\text{eff}}}{\sqrt{3}}$

d'où: $$P_J = 3\, R_s\, J^2_{\text{eff}} = \frac{3}{2}\, R_a\, I^2_{\text{eff}}$$

On voit que la même formule s'applique dans les deux cas:

$$\boxed{P_J = \frac{3}{2}\, R_a\, I^2_{\text{eff}}}$$

Remarque: On peut mettre l'expression des pertes par effet Joule sous la forme:

$$P_J = \rho \frac{l}{S} I^2_{\text{eff}} = \rho \frac{lS}{S^2} I^2_{\text{eff}} = \rho\, lS \left(\frac{I_{\text{eff}}}{S}\right)^2 = \rho\, v j^2 = \rho \frac{m}{d} j^2$$

dans laquelle ρ désigne la résistivité, l la longueur, S la section, v le volume du conducteur, m sa masse, d sa masse volumique, I_{eff} l'intensité du courant qui le parcourt, j la densité du courant. On voit que:

a) pour une valeur déterminée de j (fixée par des considérations d'échauffement) les pertes par effet Joule sont proportionnelles au volume de cuivre;

b) pour une valeur déterminée des pertes par effet Joule consenties, le volume donc la masse du métal conducteur varie en raison inverse du carré de la densité du courant j.

Il apparaît que la densité de courant j joue pour le cuivre le même rôle que l'induction $\widehat{B}$ dans le fer (c'est pourquoi on la désigne parfois, dans le langage courant, sous le nom de « charge du cuivre »). Les valeurs admises sont de 4 à 5 $\times$ 10^6 A/m² pour les petites machines (7 à 8 si elles sont bien ventilées) et 3 à 4 $\times$ 10^6 A/m² pour les grosses machines tournantes.

Remarque: En courant alternatif, lorsque la section des conducteurs est assez importante, les pertes par effet Joule sont plus grandes que celles qui sont données par le calcul. Pour le comprendre on divise en trois portions A, B, C (fig. II-3) un conducteur placé dans une encoche et on

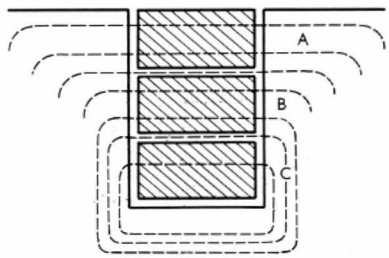


Fig. II-3

représente les lignes d'induction dues à A, B et C et passant autour de l'encoche (flux d'auto-induction ou flux de fuite). On voit que le conducteur C au fond de l'encoche est entouré par un flux d'auto-induction plus grand que le conducteur A placé vers l'extérieur. Donc l'inductance croît de A vers C; il en est de même de l'impédance. Dès lors:

a) si l'ensemble ABC ne forme qu'un seul conducteur, le courant se concentre dans la région voisine de l'entrefer. Cela équivaut à une réduction de la section utile de passage du courant, donc à un accroissement de la résistance du conducteur entraînant une augmentation des pertes par effet Joule;

b) en outre le flux de fuite ou flux d'auto-induction engendre, dans des plans parallèles à l'axe du conducteur, des courants de Foucault provoquant des pertes à ajouter aux pertes par effet Joule dues au courant dans le conducteur. Ce sont des pertes dites *supplémentaires*.

1.3. Pertes mécaniques. — Elles comprennent les pertes par frottement (des tourillons dans les paliers, des balais sur les bagues ou le collecteur, etc.) et les pertes par ventilation. Leur calcul est difficile. Ce qu'il faut savoir en exploitation, c'est qu'elles sont uniquement fonction de la *vitesse*.

1.4. Classification des pertes. — En marche industrielle, la vitesse varie peu, la tension et la fréquence (cette dernière est à considérer en alternatif seulement) sont constantes. Donc l'induction maximale est constante (V. chap. 1, § 7.2) et il en résulte que les pertes mécaniques et les pertes dans le fer sont *indépendantes de la charge P* (fig. II-4). En revanche, les pertes par effet Joule dans les

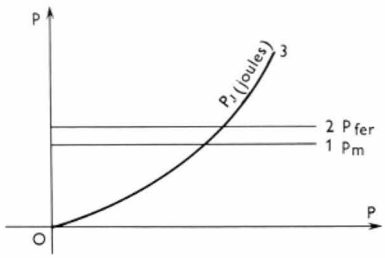


Fig. II-4

1. Pertes mécaniques
2. Pertes dans le fer
3. Pertes par effet Joule

enroulements parcourus par le courant de charge I_{eff} sont proportionnelles à I^2_{eff}, donc à $U^2_{eff}\, I^2_{eff}$ (puisque U_{eff} est constante) et elles varient en fonction de la puissance suivant une loi parabolique (on rappelle qu'en courant continu il faut remplacer U_{eff} et I_{eff} par U et I).

2. CONSOMMATION DE PUISSANCE RÉACTIVE. INFLUENCE DE LA TENSION

La puissance réactive consommée pour l'entretien d'un flux dans un volume v de matériau magnétique de perméabilité absolue μ, à la fréquence f et avec une induction maximale $\widehat{B}$, est donnée par la formule suivante :

$$Q = \pi \widehat{B}^2 \frac{v f}{\mu}$$

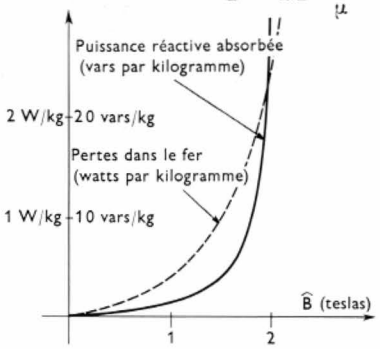


Fig. II-5

Cette expression montre qu'à fréquence et induction maximale constantes (donc μ constant), *c'est-à-dire en marche industrielle, la consommation de puissance réactive est constante*. Elle montre aussi que cette consommation augmente très vite (comme la puissance active consommée dans le fer) lorsque, par une élévation de la tension alternative U_{eff}, on fait croître l'induction maximale $\widehat{B}$ (fig. II-5).

3. ÉCHAUFFEMENT

3.1. Température limite. — La puissance active perdue est transformée en chaleur et il en résulte une élévation de la température des différents organes de la machine. Mais l'on sait que dès qu'un matériau est porté à une température supérieure à la température ambiante, il dissipe de la chaleur dans l'atmosphère. La vitesse de dissipation de cette chaleur est *proportionnelle* à *l'écart de température* entre le matériau et l'ambiance. À une certaine température dite *limite* le matériau perd autant de chaleur qu'il en reçoit : le corps ne s'échauffe plus. La figure II-6 montre la montée en température ; la différence θ entre la température du corps et la température ambiante tend vers une limite θ_l.

3.2. Importance de la température limite. — Cette température limite est importante eu égard aux isolants : au-delà d'une certaine température dite *critique*, tout isolant perd une partie de ses propriétés isolantes : il est disqualifié. L'isolant idéal doit avoir une température critique élevée, être souple, assez mince, avoir une résistance mécanique suffisante.

Les isolants employés dans les machines peuvent être classés en quatre catégories :

1° les isolants *minéraux :* porcelaine, verre, silice, amiante, mica, micalex ;

2° les isolants *organiques* qui sont résineux (résine, bakélite, isolémail) ou fibreux (bois, coton, toiles, papiers et cartons divers) ;

3° les isolants *chimiques :* certains oxydes de cuivre ou d'aluminium ;

4° les isolants *organo-siliciques :* silicones.

Dans les machines, ce sont les isolants organiques et organo-siliciques qui sont les plus employés (bien que ces derniers soient coûteux). Un grand progrès a été récemment accompli par l'emploi de la *fibre de verre* (filée et tissée) qui a une température critique élevée et d'excellentes propriétés mécaniques.

La disqualification d'un isolant ne dépend pas seulement de la température à laquelle il a été porté, mais encore du temps pendant lequel cette température a été maintenue. C'est ce que montre la courbe (fig. II-7) qui se rapporte au coton : plus la température θ est élevée, plus la durée de fonctionnement t doit être faible. Elle montre aussi qu'on peut surcharger sans risque (pour les isolants) une machine à condition que cette surcharge soit de courte durée.

Eu égard aux températures critiques, les normes françaises définissent sept classes d'isolation correspondant à des températures de fonctionnement comprises entre 90 °C à 180 °C et au-dessus (V. t. 2, Transport et distribution de l'énergie électrique, chap. 2).

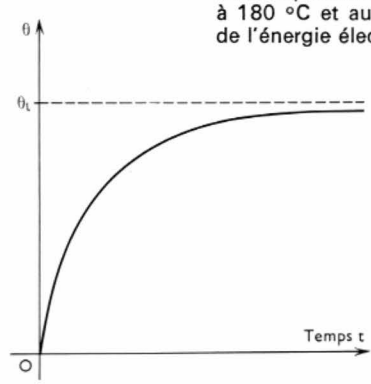


Fig. II-6

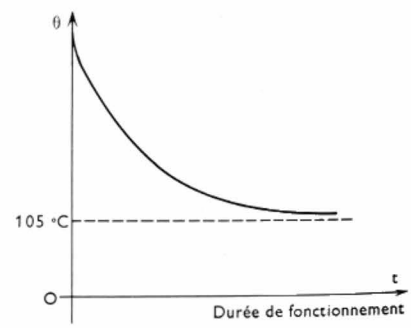


Fig. II-7

Enfin l'importance de la température limite des organes d'une machine tient au fait que, généralement, la puissance maximale que l'on peut demander à la machine est celle au-delà de laquelle, en marche continue, les isolants risqueraient d'être disqualifiés.

3.3. Détermination expérimentale de la température limite. — Pour chacun des organes, cette température est difficile à calculer et c'est pourquoi on la détermine expérimentalement par des *essais d'échauffement*.

Après plusieurs heures de marche à pleine charge, on déduit l'élévation de température des enroulements par variation de leur résistance électrique ; l'élévation de température du fer (ou des bagues, ou du collecteur) est mesu-

rée en appliquant sur ces organes un capteur thermométrique dont le réservoir plat est isolé par un tampon de coton.

3.4. Intérêt de la ventilation ou de l'immersion dans l'huile. — À la température limite, l'énergie calorifique p apportée par seconde est égale à la chaleur dissipée :

$$p = K S \theta$$

si l'on représente par S la surface de refroidissement, par θ l'élévation de température au-dessus de la température ambiante, par K un coefficient.

Il faut exprimer p en watts, K en watts par mètre carré — degré Celsius, S en mètres carrés et θ en degrés Celsius.

En ventilant ou en immergeant un organe dans l'huile, on augmente K. Donc sans accroître θ il est possible d'augmenter l'ensemble des pertes, autrement dit d'obtenir, une puissance plus grande avec la même machine.

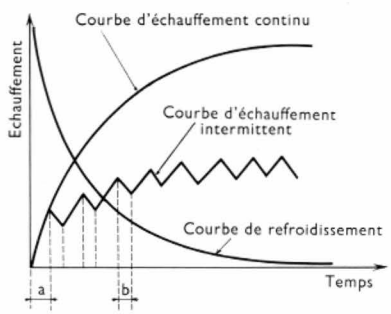
3.5. Régime normal, service d'une machine. — On appelle *régime* d'une machine, à un instant donné, l'ensemble des valeurs des grandeurs d'exploitation (tension, courant, moment du couple, vitesse de rotation) qui à cet instant, caractérisent le fonctionnement de la machine.

Le *service* de la machine est la succession des régimes auxquels elle est soumise dans le temps.

Le *régime normal* est indiqué sur sa plaque signalétique. On y lit la tension normale, la puissance normale et la fréquence ou la vitesse. La puissance *normale* ou *nominale* constitue pour le constructeur la définition essentielle de la marchandise qu'il fournit au client. Elle caractérise la machine dans les cahiers des charges et les catalogues. Généralement cette puissance résulte de considérations d'échauffement comme on vient de le voir.

Un service est dit intermittent quand, à chaque période de travail a, succède une période de repos b, durant laquelle la machine se refroidit. La courbe de la figure II-8 montre

Fig. II-8



que la même charge, en service intermittent, conduit à une température limite plus petite qu'en marche continue. C'est dire qu'on peut demander à une machine une puissance plus grande lorsque son service est intermittent.

3.6. Puissance thermiquement équivalente. — On considère une machine dont la puissance $U_{\text{eff}}\, I_{\text{eff}} = S$ varie suivant un cycle de période T (fig. II-9) comme l'indique la courbe $S\ (t)$. Les pertes de puissance dépendant de la charge sont proportionnelles à I^2_{eff} (I^2 en continu) et comme la tension U_{eff} est constante, elles varient comme S^2. La chaleur apportée pendant un temps dt est proportionnelle à $(S^2 . dt)$ et dans le temps T elle peut être représentée par l'aire A.

La valeur moyenne de S^2 est donc $\frac{A}{T}$; on la représente par le symbole S^2_{th}. C'est le carré de la puissance constante qui, pendant le temps T, aurait apporté dans l'enroulement d'induit la même quantité de chaleur que la puissance S variable. Par définition la grandeur

$$S_{th} = \sqrt{\frac{\text{Aire } A}{T}}$$

désigne la *puissance thermiquement équivalente* à celle de la machine au cours du cycle.

3.7. Puissance nominale en courant continu et en courant alternatif

3.7.1. Machine à courant continu. — En régime normal la puissance commerciale d'une machine à courant continu représente :

— soit le *produit* $U_n . I_n$ de la tension normale et du courant normal s'il s'agit d'une génératrice ;

— soit la *puissance mécanique* qu'on peut obtenir en régime normal s'il s'agit d'un *moteur*.

3.7.2. Machine à courant alternatif. — Deux cas sont à distinguer :

1° *Le facteur de puissance est réglable* (V. t. 1., Électricité, chap. 33) ; c'est le cas du transformateur (réglage par le récepteur alimenté), de la machine synchrone ou du moteur triphasé à collecteur. Le constructeur définit alors la machine par sa puissance *apparente* en régime normal (elle est exprimée en voltampères ou plus souvent en kilovoltampères). En fait, il garantit une tension (isolement suffisant, inductions convenables) et un courant (densités de courant convenables). C'est l'usager qui, suivant le facteur de puissance qu'il donne à la machine, obtient une puissance active plus ou moins grande avec cette machine.

2° *Le facteur de puissance n'est pas réglable :* c'est le cas des moteurs asynchrones et des moteurs monophasés à collecteur. La machine est alors définie par sa puissance mécanique utile en régime normal (elle est exprimée en kilowatts).

4. RENDEMENT

4.1. Rendement vrai - Rendement approché. — Si l'on désigne par P_a la puissance *absorbée* par une machine, par P_u sa puissance *utile* (communément sa *charge*) et par p l'ensemble de ses pertes de puissance, le *rendement vrai* est égal à :

$$\eta \text{ vrai} = \frac{P_u}{P_a} = \frac{P_a - p}{P_a} = 1 - \frac{p}{P_a} = 1 - \frac{p}{P_u + p}$$

C'est cette dernière expression que l'on doit utiliser dans un calcul à la règle, parce qu'elle permet d'obtenir le résultat avec la meilleure précision.

On peut l'écrire aussi bien sous les formes suivantes :

$$\eta \text{ vrai} = \frac{P_u}{P_u + p} = \frac{1}{1 + p/P_u} = \frac{1 - p/P_u}{1 - (p/P_u)^2} \approx 1 - \left(\frac{p}{P_u}\right)$$

(car les machines électriques ayant un bon rendement, le rapport $\frac{p}{P_u}$ est faible et son carré est négligeable). Par exemple, si le total des pertes représente 9 % de la puissance utile, le rendement vrai est égal à $(1 - 0{,}09) = 0{,}91$ (soit 91 %).

Mais, dans la plupart des machines électriques, certaines pertes dites *supplémentaires* échappent à toute mesure commode. Si p' désigne l'ensemble des pertes *mesurables* ($p' < p$), on définit le *rendement approché* au moyen de la relation suivante :

$$\textit{Rendement approché} = \frac{P_a - p'}{P_a} = 1 - \frac{p'}{P_u + p'}$$

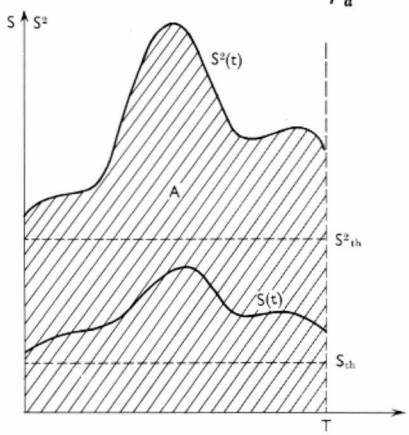


Fig. II-9

4.2. Courbe de rendement. — C'est la courbe qui donne en *marche industrielle* (U = Cte en continu ; U_{eff} = Cte et f = Cte en alternatif) le rendement (vrai ou approché) en fonction :

— de la puissance apparente (machines à facteur de puissance réglable)

— de la puissance utile (machines à facteur de puissance non réglable).

Cette courbe donne lieu à des observations importantes.

1° *Dans les machines à facteur de puissance réglable, il y a autant de courbes de rendement que de valeurs pour* cos φ. — En posant $S = U_{eff}I_{eff}$ (monophasé), ou $S = \sqrt{3}\, U_{eff}I_{eff}$ (triphasé) on a, en effet :

$$\eta = \frac{S\cos\varphi}{S\cos\varphi + bS^2 + c} = \frac{S}{S + \dfrac{(bS^2 + c)}{\cos\varphi}}$$

(bS^2 : pertes dépendant de la charge ; c : pertes indépendantes de la charge).

On voit que, *pour une même puissance apparente* le rendement est d'autant plus faible que le facteur de puissance cos φ est plus petit (fig. II-10).

2° *La courbe du rendement présente un maximum.* — Mathématiquement la courbe η (S) présente un maximum : en effet $\eta = 0$ pour $S = 0$ et lorsque S tend vers l'infini (V. fig. II-10).

3° *Son maximum a lieu lorsque les pertes dépendant de la charge deviennent égales aux pertes indépendantes de la charge.* — En effet, on peut écrire (en divisant par S) :

$$\eta = \frac{1}{1 + \dfrac{bS^2 + c}{S\cos\varphi}} = \frac{1}{1 + \dfrac{bS}{\cos\varphi} + \dfrac{c}{S\cos\varphi}}$$

Le rendement est maximal quand le dénominateur est minimal. Le produit

$$\frac{bS}{\cos\varphi} \times \frac{c}{S\cos\varphi} = \frac{bc}{\cos^2\varphi}$$

étant constant, la somme de ces deux termes est minimale (et le rendement maximal) quand ils sont égaux, c'est-à-dire lorsque l'on a :

$$\frac{bS}{\cos\varphi} = \frac{c}{S\cos\varphi}, \text{ soit } bS^2 = c$$

La proposition est démontrée.

4.3. Rendement moyen ou pratique. — Le rendement (rapport de puissances) varie constamment suivant le régime de la machine : c'est une grandeur *instantanée*. Or, l'usager qui achète de l'énergie électrique et la transforme, est intéressé par le rapport :

$$\eta \text{ (moyen ou pratique)} = \frac{\text{énergie utilisée}}{\text{énergie électrique payée}}$$

pendant un temps déterminé t, ce temps t étant une journée (si le service de la machine est le même tous les jours) ou un mois, ou même un an.

L'énergie électrique payée est indiquée par le compteur branché sur l'alimentation de la machine. L'énergie utilisée (mécanique dans le cas d'un moteur) est souvent difficile à déterminer ; elle est mesurable par un compteur quand il s'agit de l'énergie fournie par le secondaire d'un transformateur. Dans tous les cas, le rendement moyen ou pratique est maximal lorsqu'on a l'égalité suivante :

Énergie perdue du fait des pertes dépendant de la charge = énergie perdue à cause des pertes constantes.

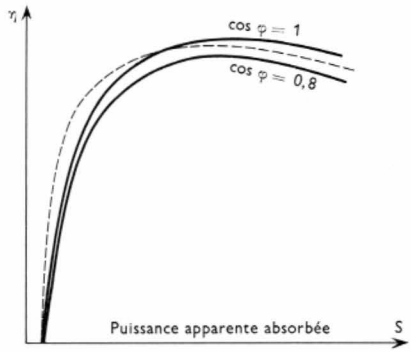


Fig. II-10

4.4. Rendement maximal et dimensions d'une machine. — Quand les dimensions d'une machine croissent dans la proportion de 1 à n, les pertes (proportionnelles au volume) croissent dans le rapport de 1 à n^3, si l'on conserve les mêmes valeurs pour la densité de courant j et pour l'induction maximale $\widehat{B}$. La section de chaque pôle est multipliée par n^2 ainsi que le flux $\widehat{\Phi}$ ($\widehat{B}$ est constante mais S est multipliée par n^2). La f.é.m., proportionnelle à $\widehat{\Phi}$, est multipliée par n^2 et il en est de même pour la tension U_{eff} (peu différente de E_{eff}) et pour l'intensité du courant (j est constant). Par suite la puissance $U_{eff}I_{eff}$ est multipliée par n^4. Comme la profondeur des encoches ne peut pas être proportionnelle à n, le courant I_{eff} ne peut pas être proportionnel à n^2 et la puissance est proportionnelle à une puissance de n comprise entre 3 et 4 suivant les conditions de refroidissement. En tout cas, elle croît plus vite que les pertes ; donc, le rendement est meilleur pour les grosses machines que pour les petites.

4.5. Conséquences pratiques pour l'exploitant

1° Il faut *éviter* le plus possible les *marches à faible charge* — surtout à vide — car le rendement pratique se trouve diminué.

2° Si la charge d'utilisation est très variable, il faut être attentif à *l'allure de la courbe de rendement* plutôt qu'à son maximum : la courbe en pointillés de la figure II-10 (rendement encore bon aux faibles charges) peut être préférable à la courbe correspondant à cos $\varphi = 1$.

3° Il est nécessaire de *rejeter toute machine dont la puissance nominale est trop grande* eu égard à son utilisation : son rendement moyen ou pratique serait faible et l'énergie payée plus grande pour une même énergie utilisée.

4° L'exploitant doit être d'autant plus *attentif* aux pertes *indépendantes de la charge* que la machine doit fonctionner souvent à faible charge.

CHAPITRE III

MOTEURS ET GÉNÉRATEURS ÉLECTRIQUES

1. MOTEURS ÉLECTRIQUES

Lorsqu'un moteur fournit une puissance à une machine-outil, par exemple, la marche de l'ensemble dépend évidemment des caractéristiques propres au moteur et des caractéristiques propres à la machine entraînée. Lorsque celle-ci est débrayée on dit que le moteur marche à *vide*.

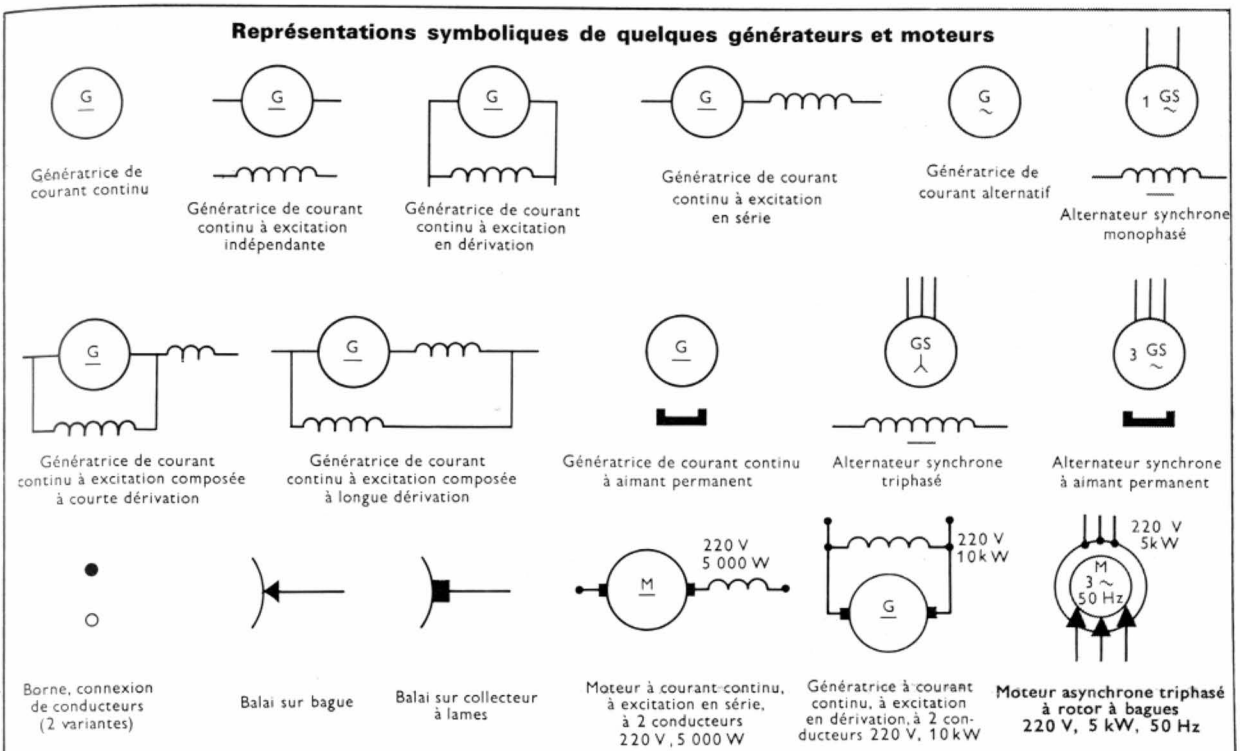
1.1. Caractéristiques mécaniques du moteur. — On sait que la puissance P d'un moteur est donnée en fonction du moment du couple moteur T_m et de la vitesse angulaire $\omega = \dfrac{2\pi n}{60}$ (n = nombre de tours effectués en 1 mn) par la relation suivante :

$$\boxed{P = T_m\omega = T_m\frac{\pi n}{30}}$$

On exprime P en watts, T_m en mètres-newton s et n en tours par minute.

On appelle *caractéristique mécanique* d'un moteur pour un ensemble de valeurs de ses variables d'exploitation

Représentations symboliques de quelques générateurs et moteurs



(tension, fréquence s'il y a lieu, résistances en série avec les enroulements) la courbe $T_m(n)$ correspondant à une valeur déterminée de chacune de ces variables.

On désigne sous le nom de *caractéristique mécanique naturelle* celle qui correspond à la *marche industrielle* (tension normale maintenue constante) et qui passe par le point de fonctionnement *normal* du moteur, point défini par :

— la fréquence de rotation normale n_n,

— le moment du couple normal $T_n = P_n \dfrac{30}{\pi n_n}$ si P_n désigne la puissance normale.

Les caractéristiques mécaniques des moteurs électriques se divisent en trois catégories :

1° La caractéristique dérivation ou shunt à *vitesse sensiblement constante;* c'est celle qui convient à la plupart des machines-outils ;

2° La caractéristique série à *puissance* sensiblement constante ($Tn \approx$ Cte) qui convient aux moteurs employés en traction ;

3° La caractéristique composée ou compound intermédiaire aux précédentes et convenant aux moteurs de machines-outils caractérisées par un fort couple de démarrage.

La figure III-1 donne l'allure de ces trois caractéristiques passant par un même point P de fonctionnement normal (caractéristiques naturelles).

1.2. Caractéristiques mécaniques de l'appareil entraîné. — C'est la courbe du couple résistant T_r en fonction de la fréquence de rotation n. On distingue trois catégories (fig. III-2) :

1° La caractéristique « pompage » à *couple constant* (ou croissant légèrement avec la vitesse) : c'est celle des appareils de levage, des compresseurs à piston démarrant à vide, des turbocompresseurs, etc.

2° La caractéristique « ventilation » à *couple croissant rapidement avec la vitesse :* c'est celle des ventilateurs, des pompes centrifuges démarrant à vanne ouverte, etc.

3° La caractéristique « essorage » dont le *couple décroît à vitesse croissante :* c'est celle des essoreuses, des concasseurs, des laminoirs à caoutchouc, etc.

Il est essentiel de remarquer que pour un même appareil,

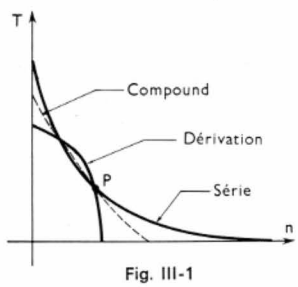


Fig. III-1

Caractéristiques mécaniques des divers moteurs

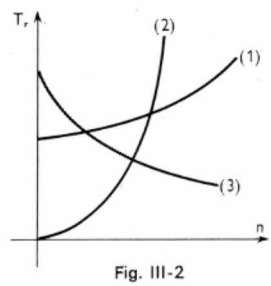


Fig. III-2

1) Caractéristique pompage
2) Caractéristique ventilation
3) Caractéristique essorage

il y a autant de caractéristiques que de *variables d'utilisation* de cet appareil, par exemple autant que de poids pouvant être suspendus au crochet d'un monte-charge, autant qu'il y a d'épaisseurs de tôles engagées entre les cylindres d'un laminoir, etc.

1.3. Phases successives de la marche d'un moteur

Dans la marche d'un moteur on distingue trois phases :

1° *Le décollage.* Le moteur présente un couple tout en étant encore à l'arrêt (coup de collier) ; le moment de ce couple est représenté par l'ordonnée à l'origine T_d de la caractéristique mécanique (fig. III-3). Pour que le moteur démarre il faut que le moment du couple moteur au décollage T_d soit supérieur au moment du couple résistant au décollage T_{rd} : $T_d > T_{rd}$ (le couple T_{rd} est la somme du couple utile T_u et du couple de frottement T_f).

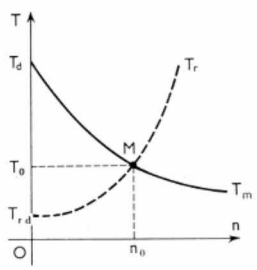


Fig. III-3

Détermination graphique du point de fonctionnement d'un moteur

2° *Le démarrage.* C'est la phase de mise en vitesse régie par l'équation : $T_m - T_r = J \frac{d\omega}{dt}$

si l'on appelle T_m et T_r les moments des couples moteur et résistant, J le moment d'inertie de la partie tournante et $\frac{d\omega}{dt}$ l'accélération angulaire. On exprime T_m et T_r en mètres-newtons, J en kilogrammes-mètres carrés et l'accélération angulaire en radians par seconde.

Cette équation permet de déterminer la durée du démarrage. Si l'on désigne par :

$\overline{T}_m$ le moment du couple moteur *moyen* pendant le démarrage, par $\overline{T}_r$ le moment du couple résistant *moyen* pendant le démarrage, par n_0 la vitesse de régime (fin du démarrage), la durée t (en secondes) du démarrage est égale à :

$$t = \frac{1}{38{,}2} \cdot \frac{(MD^2)\ n_0}{\overline{T}_m - \overline{T}_r}$$

Le produit (MD^2) remplace le moment d'inertie J car les formulaires, au lieu de donner J, indiquent la valeur de MD^2 tel que $J = MD^2$ (D étant le diamètre d'inertie de la partie tournante).

3° *La marche de régime* atteinte lorsqu'on a $T_m = T_r$ (vitesse constante et accélération angulaire nulle).

Si la machine entraînée est couplée au moteur en marche de régime on a à la fois égalité des vitesses et égalité des couples. C'est dire que le point figuratif de la marche de l'ensemble (moteur + machine-outil) est à la rencontre (V. fig. III-3) des caractéristiques $T_m(n)$ et $T_r(n)$. Les coordonnées T_0 et n_0 du point M fixent le moment du couple et la vitesse en marche de régime.

Ce résultat est important. Il montre que toute *variation de la marche de régime* d'un moteur (en particulier de *sa vitesse*) résulte d'une action :

— soit sur la caractéristique $T_m(n)$ par modification de l'une des variables d'exploitation (tension, excitation, etc.) ;

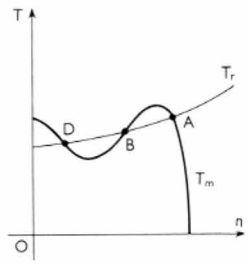
— soit sur la caractéristique $T_r(n)$ par modification de l'une des variables d'utilisation de la machine entraînée.

1.4. Régime stable et régime instable. — La stabilité de tout équilibre est définie par la *tendance au retour à l'équilibre initial.* Ici la grandeur qui caractérise l'équilibre dynamique entre le moteur et la machine-outil est la *vitesse.* Dès lors, vis-à-vis de la machine entraînée, le moteur est en équilibre stable lorsqu'un *ralentissement* est accompagné d'un accroissement de T_m par rapport à T_r (ce qui entraîne alors une accélération) et lorsqu'une *accélération* est accompagnée d'un accroissement de T_r par rapport à T_m (ce qui produit un ralentissement). Dans les deux cas, il y a tendance au retour à la vitesse primitive.

Dans le cas contraire, l'équilibre est *instable.* À ce moment le moindre ralentissement engendre une chute de vitesse et *l'arrêt*, tandis que la moindre accélération provoque *l'emballement* du moteur (sauf si un nouvel équilibre stable est possible à une vitesse supérieure).

La figure III-4 montre en D et A deux points du fonctionnement correspondant à des équilibres stables et en B un point caractérisant un équilibre instable.

Fig. III-4



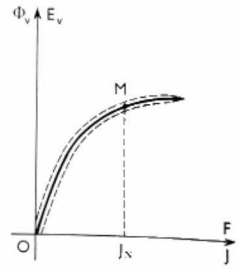
2. GÉNÉRATEURS ÉLECTRIQUES

Cette partie concerne seulement les générateurs transformant l'énergie mécanique en énergie électrique.

2.1. Caractéristique à vide. — Un générateur (dynamo, alternateur) doit être excité, c'est-à-dire que son enroulement inducteur doit être alimenté pour engendrer un flux Φ_v. Mis en rotation, on relève, même à vide, une f.é.m. E_v aux bornes de l'enroulement induit, c'est-à-dire formé par les conducteurs coupant (ou balayé par) le flux inducteur.

Fig. III-5

Caractéristique à vide d'un générateur électromécanique



La caractéristique à vide représente les variations de cette f.é.m. E_v en fonction du courant d'excitation J à vitesse n constante (fig. III-5). Cette f.é.m. est égale à (V. chap. 1, § 7.3) :

$$E_v = an\Phi_v$$

Cette caractéristique que l'on relève en effectuant le montage de la figure III-6 est une véritable caractéristique magnétique totale de la machine (V. chap. 1, § 6) puisque E_v est proportionnel à Φ_v (a et n étant constants) et que J est proportionnel à la force magnétomotrice NJ (N = nombre de spires inductrices). C'est dire qu'elle est frappée d'hystérésis : pour des valeurs décroissantes de J, la courbe

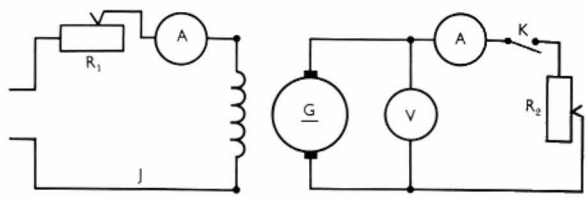


Fig. III-6 — Caractéristique à vide : K ouvert, on modifie la valeur de R_1. Caractéristique en charge : K fermé, on agit sur R_2

est au-dessus de celle relevée pour des valeurs croissantes de J. Le relevé de la caractéristique à vide s'effectue en prenant des valeurs *toujours décroissantes* pour J.

Elle a une faible ordonnée à l'origine due au flux rémanent (les pôles restent un peu aimantés quand $J = 0$). Cette ordonnée est si faible que l'on assimile la première portion de la caractéristique à vide à une droite passant par l'origine. Il faut noter :

1° que la caractéristique à vide *normale* est celle qui a été relevée à la vitesse normale n_n,

2° que l'on obtient toute autre caractéristique à une vitesse n en multipliant toutes les ordonnées de la précédente par le rapport $\frac{n}{n_n}$ (à flux égal, la f.é.m. à vide est proportionnelle à la vitesse),

3° que le point figuratif normal M (correspondant à l'excitation normale sur la caractéristique à vide normale) se place généralement à *la fin du coude* (V. fig. III-5). Au-dessous la f.é.m. serait trop sensible aux variations d'excitation ; au-dessus, un faible accroissement de f.é.m. ne serait obtenu qu'au prix d'une augmentation de la force magnétomotrice, donc de la masse de cuivre inducteur.

2.2. Caractéristique en charge. — C'est la courbe représentative (fig. III-7) de la tension U (U_{eff} en alter-

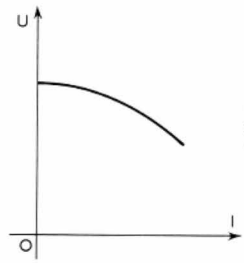


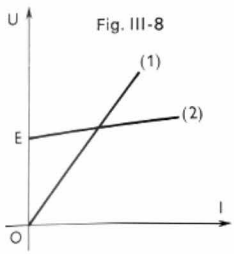
Fig. III-7 — Caractéristique en charge d'une génératrice électromécanique à excitation et vitesse de rotation constantes

natif) entre les bornes en fonction du courant débité I (I_{eff} en alternatif) *à vitesse n et excitation constantes* (et à cos φ constant s'il s'agit d'un alternateur). Elle est relevée à l'aide du montage de la figure III-6.

La caractéristique en charge est *normale* quand elle passe par le point de fonctionnement normal de la machine.

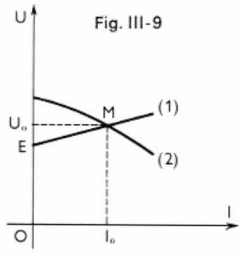
2.3. Point de fonctionnement d'un générateur en charge. — Le réseau alimenté par le générateur a lui aussi sa caractéristique en charge. Par exemple, s'il est constitué uniquement par des résistances, la caractéristique-réseau est une droite passant par l'origine (fig. III-8) ; s'il est constitué par une batterie d'accumulateurs que charge un générateur de courant continu ($U = E + rI$ avec E = f.é.m. de la batterie), la caractéristique-réseau a une ordonnée à l'origine égale à E.

Fig. III-8



Caractéristiques-réseaux :
(1) Résistances
(2) Batterie d'accumulateurs

Fig. III-9



(1) Caractéristique-réseau
(2) Caractéristique en charge du générateur

À l'équilibre, la tension et le courant sont les mêmes, pour le générateur et le réseau : les conditions de marche du générateur (tension et courant) sont les coordonnées du point M de rencontre de la caractéristique en charge du générateur et de la caractéristique-réseau (fig. III-9). On voit que dans la marche d'un générateur, la tension et le courant jouent le même rôle que la vitesse et le couple dans le fonctionnement d'un moteur. Cela revient à établir les correspondances suivantes : $U \Longleftrightarrow n$, $I \Longleftrightarrow T$.

Quant à la *stabilité* de régime, cette assimilation conduit aux mêmes conclusions que pour les moteurs.

2.4. Une même machine électrique peut fonctionner en générateur et en moteur. — On sait que pour un accumulateur qui débite (générateur) la relation entre la tension U et le courant I débité est : $U = E - rI$ et que pour l'accumulateur en charge (récepteur) cette relation s'écrit $U = E + rI$ (V. t. 1, Électricité, chap. 5 et 6).

Donc si l'on trace la caractéristique U (I) de l'accumulateur, on obtient une droite tombante dans la marche en générateur, montante dans la marche en récepteur, avec la même ordonnée E à l'origine ($I = 0$). C'est ce qui est représenté sur la figure III-10 : les valeurs *positives de I* (I sortant par le pôle positif de l'accumulateur) correspondent à la marche en générateur et les valeurs *négatives* (I sortant par le pôle négatif de l'accumulateur) à la marche en récepteur.

Il en est de même de toute machine électrique connectée à un réseau de tension constante U. Au moyen de l'excitation on peut obtenir l'égalité $E_v = U$, alors l'intensité du courant est nulle : $I = 0$. Si l'on *surexcite* la machine pour accroître E_v, elle fonctionne en *génératrice* ($E_v > U$) ; au contraire, si on la *sousexcite*, on fait décroître E_v et la machine fonctionne en *moteur* ($E_v < U$).

2.5. Couplage des générateurs. — On sait que des générateurs peuvent être associés en *série* ou en *parallèle*.

2.5.1. Couplage en série. — *En série*, à courant identique, les tensions *s'ajoutent*. Dans les conditions de fonctionnement choisies (vitesse, excitation), si l'on connaît les caractéristiques en charge de deux générateurs G_1 et G_2 en série (fig. III-11), on peut déduire celle du générateur unique G susceptible de les remplacer. Un point M de la

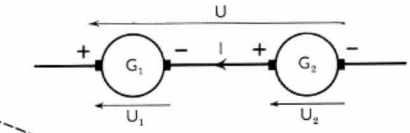


Fig. III-11

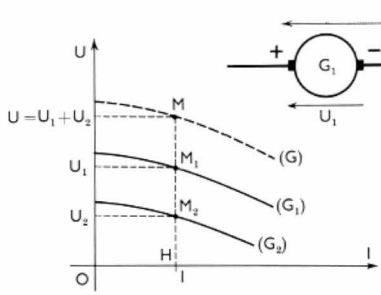


Fig. III-12

caractéristique en charge de G (fig. III-12) est obtenu en ajoutant, pour une abscisse déterminée (c'est-à-dire pour une intensité I déterminée), les ordonnées des points M_1 et M_2 des caractéristiques de G_1 et G_2 :

$$HM = HM_1 + HM_2$$

2.5.2. Couplage en parallèle. — En parallèle (fig. III-13), pour la même tension U, les courants s'ajoutent et la caractéristique en charge de l'ensemble G peut encore être obtenue graphiquement (fig. III-14). Pour une ordonnée déterminée U, on obtient un point M de la caractéristique de G en ajoutant les abscisses I_1 et I_2 des points M_1 et M_2 des caractéristiques en charge des deux générateurs G_1 et G_2. Dès lors, vis-à-vis du réseau alimenté, on peut traiter l'ensemble G_1 et G_2 comme un générateur unique G dont la caractéristique en charge est celle de l'ensemble.

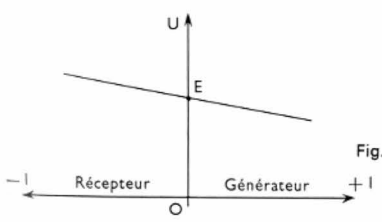


Fig. III-10

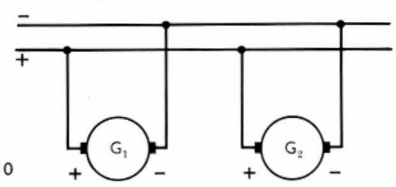


Fig. III-13

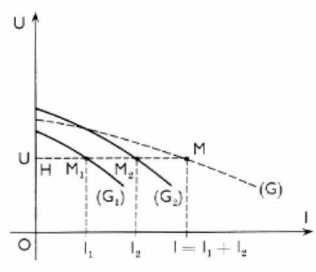


Fig. III-14

CHAPITRE IV

BOBINE À NOYAU DE FER

Une bobine à noyau de fer sert, soit à absorber de la puissance réactive, soit à créer une chute de tension dans un circuit alimentant un récepteur à courant alternatif.

1. CONSTITUTION. INTÉRÊT D'UN ENTREFER

Une bobine à noyau de fer est formée d'un enroulement placé sur un circuit magnétique. Celui-ci comporte généralement un entrefer car dans le cas contraire :

1° *l'inductance L* de l'enroulement (liée à l'état de saturation du fer) serait *très mal définie* ;

2° la bobine comporterait *trop de fer* et consommerait *trop de puissance active*.

Pour le montrer on va comparer deux bobines 1 et 2 (fig. IV-1), la première ne possédant pas d'entrefer. Elles sont utilisées dans les mêmes conditions : tension : U_{eff}, intensité du courant ; I_{eff}, induction maximale : $\hat{B}$, densité

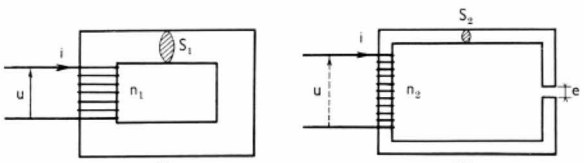


Fig. IV-1

de courant : J. On appelle l la longueur du fer, supposée identique pour les deux bobines. De plus, on admet que dans la bobine 2, la réluctance de l'entrefer est égale à quatre fois la réluctance du fer. Si S_1 et S_2 désignent les sections de fer dans les deux bobines, comme l'induction maximale $\widehat{B}$ est la même pour les deux (donc le champ maximal $\widehat{H}$ aussi) la loi d'Hopkinson s'écrit :

— pour la première : $n_1\widehat{I} = \widehat{H}l$

— pour la seconde : $n_2\widehat{I} = \widehat{H}l + 4\,\widehat{H}l = 5\,\widehat{H}l$

$$\text{D'où : } \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{5} \text{ et : } n_1 = \frac{n_2}{5}.$$

Mais les deux bobines étant sous la même tension U_{eff}, la formule de Kapp permet d'écrire :

— pour la première : $U_{\text{eff}} = 4{,}44\ n_1 f \widehat{B} S_1$

— pour la seconde : $U_{\text{eff}} = 4{,}44\ n_2 f \widehat{B} S_2$

$$\text{d'où : } \quad n_1 S_1 = n_2 S_2 \text{ et : } \frac{S_2}{S_1} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{5}$$

$$S_1 = 5\,S_2$$

La bobine 1 sans entrefer comporte donc *peu de cuivre* et *beaucoup de fer*. Ce n'est pas avantageux quant à la consommation de puissance active. En effet, les deux bobines. fonctionnant à la même induction maximale $\widehat{B}$ et à la même fréquence f, leurs pertes dans le fer *par unité de volume* sont les mêmes. Si ces pertes s'élèvent à 34 W pour la bobine 2, elles sont égales à : $(5 \times 34) = 170$ W pour la bobine 1.

D'autre part, la densité de courant J étant la même, pour les enroulements des deux bobines, les pertes dans le cuivre ($\rho\ v\ J^2$) sont proportionnelles au volume v du cuivre. En admettant que la longueur d'une spire est la même pour les deux bobines, si pour la seconde les pertes par effet Joule sont égales à 45 W, elles ne sont plus que $\frac{45}{5} = 9$ W pour la première. En réalité, pour la bobine 1 la longueur de la spire doit être supérieure à celle de la bobine 2 et les pertes dans le cuivre sont supérieures à 9 W. Cependant avec les hypothèses précédentes, les pertes totales sont égales :

— pour la bobine 1 à : $(170 + 9) = 179$ W

— pour la bobine 2 à : $(45 + 34) = 79$ W

Cela montre bien l'intérêt de l'entrefer.

2. DIAGRAMME DE LA BOBINE A NOYAU DE FER

Pour le tracer, on exécute le montage de la figure IV-2. La bobine est alimentée à la fréquence f, sous la tension u

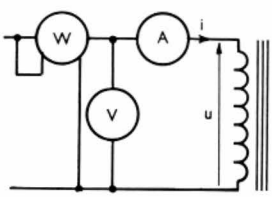


Fig. IV-2

dont la valeur efficace U_{eff} est donnée par le voltmètre V. On mesure aussi l'intensité efficace I_{eff} du courant i et la puissance absorbée P. On a déterminé préalablement la résistance R de la bobine par un essai en courant continu.

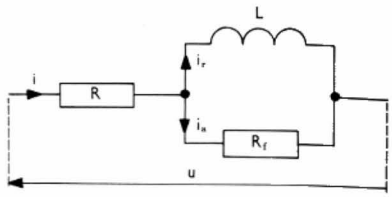
Connaissant P ($P = U_{\text{eff}}\, I_{\text{eff}} \cos\varphi$), il est facile de déduire le facteur de puissance $\cos\varphi$ ($\cos\varphi = \frac{P}{U_{\text{eff}}\, I_{\text{eff}}}$), l'angle de déphasage φ de i par rapport u et la puissance réactive $U_{\text{eff}}\ I_{\text{eff}} \sin\varphi$ (V. t. 1, Électricité, chap. 33). Il est souvent commode d'assimiler une bobine à noyau de fer à une inductance sans fer ; pour tenir compte des pertes de puissance active dues au circuit magnétique on considère que ces pertes se produisent dans une résistance R_f qui serait traversée par la seule composante active i_a du courant i :

$$R_f = \frac{P - RI^2{}_{\text{eff}}}{I_a{}^2{}_{\text{eff}}}$$

Sur un schéma équivalent à la bobine, cette résistance R_f serait placée en parallèle avec une inductance L, supposée sans fer (inductance présentée par la bobine) et traversée par la composante réactive i_r du courant i (fig. IV-3). L'ensemble est en série avec une résistance R qui figure la résistance réelle de la bobine.

Fig. IV-3

Schéma équivalent d'une bobine à noyau de fer



Les mesures précédentes permettent de déterminer facilement l'intensité efficace du courant actif $I_{a\,\text{eff}}$ et celle du courant réactif $I_{r\,\text{eff}}$. Il est aussi très commode de les déduire au moyen d'un diagramme de Fresnel (fig. IV-4). Sur celui-ci, le courant i est représenté par un vecteur $\overrightarrow{OM}$ ($OM \sim I_{\text{eff}}$) décalé d'un angle α (dit *angle hystérétique*) par rapport à $\overrightarrow{OH}$ (origine des angles) puisque i est égal à la somme des composantes active i_a et réactive i_r. On place alors un vecteur $\overrightarrow{OA}$ de module proportionnel à $L\,\omega\,I_{r\,\text{eff}}$, décalé de $\frac{\pi}{2}$ rad en avant de $\overrightarrow{OH}$, puis AB ($\overrightarrow{AB} \sim R\,I_{\text{eff}}$) parallèle à $\overrightarrow{OM}$; ils représentent respectivement la chute de tension dans L et dans R. On en déduit $\overrightarrow{OB}$, vecteur représentant la tension u décalée d'un angle φ en avant de $\overrightarrow{OM}$. Évidemment, lorsque l'inductance L n'est pas connue, on place successivement les vecteurs $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{HM}$. En mesurant $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{HM}$ on obtient directement les intensités $I_{r\,\text{eff}}$ et $I_{a\,\text{eff}}$. De la mesure de $\overrightarrow{OA}$ on déduit l'inductance L.

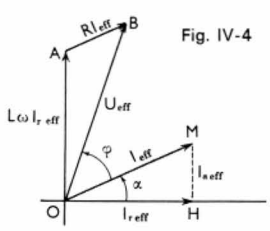


Fig. IV-4

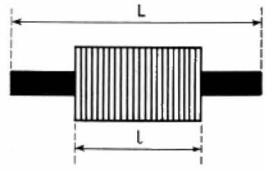


Fig. IV-5

3. CALCUL D'UNE BOBINE À NOYAU DROIT

On a vu comment on détermine le nombre de spires d'une bobine de faible entrefer (V. chap. 1, § 1.2). Quand elle est *à noyau droit* (fig. IV-5) l'entrefer équivalent à toute la portion aérienne du circuit magnétique est donné par la formule suivante :

$$e = 0{,}25\sqrt{\frac{Sl}{L}}$$

en désignant par :

e : la longueur de l'entrefer ;
S : la section utile du noyau ;
l : la longueur de la bobine ;
L : la longueur du noyau.

On exprime e en mètres, S en mètres carrés, l et L en mètres. Aux fréquences industrielles, e peut varier entre 1,2 l et 2 l et l'on adopte des inductions $\widehat{B}$ comprises entre 0,8 à 1,2 tesla (tôles au silicium à grains non orientés).

MACHINES À COURANT ALTERNATIF

CHAPITRE V

TRANSFORMATEUR STATIQUE

1. THÉORIE DU TRANSFORMATEUR

1.1. Objet du transformateur statique de puissance. — Une puissance $P = U_{\text{eff}}\, I_{\text{eff}} \cos \varphi$ peut être transportée par un courant I_{eff} sous une tension U_{eff} ou par un courant $\frac{I_{\text{eff}}}{n}$ sous une tension nU_{eff}. Mais l'identité :

$$R\, I^2_{\text{eff}} = n^2 R \cdot \left(\frac{I_{\text{eff}}}{n}\right)^2$$

montre que dans le deuxième cas, avec les *mêmes pertes par effet Joule*, la même puissance peut être transportée avec une ligne de résistance n^2R (au lieu de R), c'est-à-dire avec une section du cuivre (et une masse du cuivre pour la ligne) n^2 fois plus petite. Cela montre l'intérêt du *transport* d'énergie en *haute tension*. Mais pour l'utilisation de cette énergie, pour des raisons de sécurité et de prix des moteurs, il faut cependant *distribuer* l'énergie électrique en *basse tension*.

L'objet du transformateur dit *statique* (parce qu'il ne comporte aucun organe tournant) est de transformer avec un bon rendement une basse tension (B.T.) en haute tension (H.T.) ou inversement.

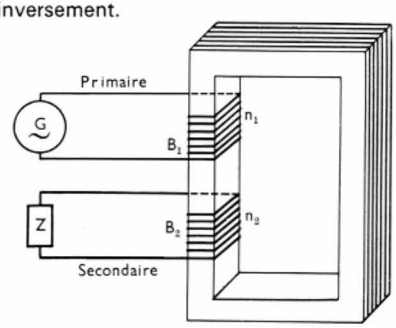


Fig. V-1

1.2. Principe du transformateur statique. — Un même circuit magnétique formé de tôles empilées (fig. V-1) porte deux enroulements. L'un, B_1, appelé *primaire*, alimenté par une source de courant alternatif et fonctionnant comme un récepteur, engendre un flux d'induction alternatif dans le circuit magnétique. L'autre, B_2, appelé *secondaire*, embrasse ce flux et est le siège d'une f.é.m. alternative. Il peut fournir une puissance électrique alternative (comme un générateur) à un récepteur Z placé entre ses bornes. En définitive, *par l'intermédiaire d'un flux, une puissance électrique alternative passe d'un circuit dit primaire à un second circuit dit secondaire.*

1.3. Équations du transformateur monophasé sans fuites magnétiques

1° *Équation des forces magnétomotrices.* — Le flux résulte de l'action des forces magnétomotrices primaire et secondaire (fig. V-2). En appelant respectivement i_1 et i_2 les valeurs instantanées des courants primaire et secondaire, la loi d'Hopkinson s'écrit :

$$n_1 i_1 + n_2 i_2 = R\Phi$$

R : réluctance du circuit,
Φ : valeur instantanée du flux magnétique,
n_1 et n_2 : nombres de spires respectifs des bobinages B_1 et B_2.

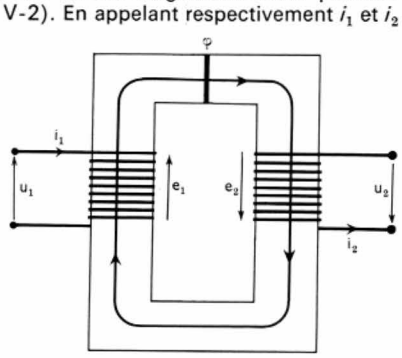


Fig. V-2

2° *Équations de Kapp.* — Si le même flux (de valeur maximale $\widehat{\Phi}$) est embrassé par les deux enroulements, il engendre les f.é.m. e_1 (dans le primaire) et e_2 (dans le secondaire). Leurs valeurs efficaces sont données par la formule de Kapp (V. chap. 1, § 7.2).

$$\begin{cases} E_{1\,\text{eff}} = 4{,}44\; n_1 f \widehat{\Phi} \\ E_{2\,\text{eff}} = 4{,}44\; n_2 f \widehat{\Phi} \end{cases}$$

3° *Équations des tensions primaire et secondaire.* — Pour le primaire qui se comporte comme un récepteur, e_1 joue le rôle d'une f.c.é.m. On a donc :

$$u_1 = -e_1 + R_1 i_1 \text{ avec } e_1 = -n_1 \frac{d\Phi}{dt}$$

u_1 : valeur instantanée de la tension primaire,
R_1 : résistance de l'enroulement primaire,
Au secondaire, la f.é.m. e_2 est celle d'un générateur.
Donc :

$$u_2 = e_2 - R_2 - R_2 i_2 \text{ avec } e_2 = -n_2 \frac{d\Phi}{dt}$$

u_2 : valeur instantanée de la tension secondaire.
R_2 : résistance de l'enroulement secondaire.

1.4. Transformateur parfait. Théorie élémentaire. — En première approximation, on peut négliger les grandeurs qui ont une importance relativement faible dans le transformateur, c'est-à-dire :

— Les résistances R_1 et R_2 des enroulements.
— La réluctance R du circuit magnétique (ce qui revient à négliger le courant absorbé à vide).
— Les pertes dans le fer,
— Les fuites magnétiques.

Le transformateur est dit *parfait*. Dans ce cas les équations précédentes sont simplifiées et elles deviennent :

$$\begin{aligned} & n\, i_1 + n_2 i_2 = 0 \Rightarrow n_1 i_1 = -n_2 i_2 \\ & u_1 = -e_1 \\ & u_2 = e_2 \end{aligned}$$

Elles entraînent les relations suivantes entre les valeurs efficaces :

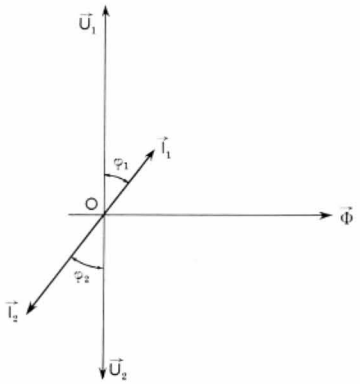
$$\begin{cases} n_1 I_{1\,\text{eff}} = n_2 I_{\text{eff}} \\ U_{1\,\text{eff}} = 4{,}44\; n_1 \widehat{\Phi} f \\ U_{2\,\text{eff}} = 4{,}44\; n_2 \widehat{\Phi} f \end{cases}$$

ce qui peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{U_{1\,\text{eff}}}{U_{2\,\text{eff}}} = \frac{I_{2\,\text{eff}}}{I_{1\,\text{eff}}} = \frac{n_1}{n_2}$$

Les rapports des valeurs efficaces des courants sont en raison inverse du rapport des valeurs efficaces des tensions.
Les relations entre les valeurs instantanées peuvent être traduites par un **diagramme de Fresnel.** On appelle $\vec{\Phi}$, $\vec{I_1}$, $\vec{I_2}$, $\vec{U_1}$ et $\vec{U_2}$ les vecteurs de Fresnel associés aux grandeurs sinusoïdales Φ, i_1, i_2, u_1 et u_2. (V. t. 1, Électricité, chap. 30). On place $\vec{\Phi}$, puis $\vec{U_1}$ qui est décalé de 90° par rapport au vecteur $\vec{\Phi}$ (V. chap. 1, § 7.2) u_1 et u_2 sont 2 tensions en opposition de phase représentées par 2 vecteurs de sens opposés. Le courant i_2 est déphasé d'un angle φ_2 par rapport à u_2 ; cet angle dépend *uniquement du récepteur branché entre les bornes du secondaire.* Si ce récepteur introduit un déphasage arrière, le vecteur $\vec{I_2}$

Fig. V-3



occupe la position représentée sur la figure V-3. Il reste à placer le vecteur $\vec{I}_1$: il a un sens opposé à $\vec{I}_2$ puisque i_1 et i_2 sont en opposition de phase $\left(i_1 = -\frac{n_2}{n_1} i_2\right)$.

Ces résultats sont applicables dans de très nombreuses utilisations car un transformateur réel diffère peu d'un transformateur parfait. Cependant, il est parfois utile de tenir compte de tous les éléments intervenant dans le fonctionnement du transformateur et cela conduit à la théorie plus complète qui suit.

1.5. Influence des grandeurs sus-négligées

1.5.1. Résistances. — Elles causent d'une part des chutes de tension dont les valeurs efficaces sont $R_1 I_{1\,\text{eff}}$ et $R_2 I_{2\,\text{eff}}$ et d'autre part des pertes de puissance $R_1 {I_1}^2{}_{\text{eff}}$ et $R_2 {I_2}^2{}_{\text{eff}}$.

1.5.2. Réluctance du circuit magnétique. — La relation entre forces magnétomotrices $n_1 i_1 + n_2 i_2 = R\Phi$ se traduit par la relation vectorielle suivante :

$$n_1\vec{I}_1 + n_2\vec{I}_2 = R\vec{\Phi}$$

À vide, le primaire est traversé par un courant dont l'intensité instantanée est appelée i_0 ($i_1 = i_0$ et $i_2 = 0$) ; on peut alors écrire :

$$n_1 i_0 = R\Phi$$

Cela se traduit par une relation vectorielle si l'on associe le vecteur $\vec{I}_0$ à i_0 :

$$n_1\vec{I}_0 = R\vec{\Phi}$$

Ce résultat exprime que le flux (indépendant de la charge en marche industrielle) est toujours produit par la *même force magnétomotrice* (V. chap. 1, § 7.2). On est ainsi conduit à écrire :

$$n_1\vec{I}_1 + n_2\vec{I}_2 = n_1\vec{I}_0$$

ou :

$$\vec{I}_1 = \vec{I}_0 - \frac{n_2}{n_1}\vec{I}_2$$

Le courant à vide n'est plus négligé et le diagramme vectoriel de la figure V-3 est alors modifié comme l'indique la figure V-4.

Fig. V-4

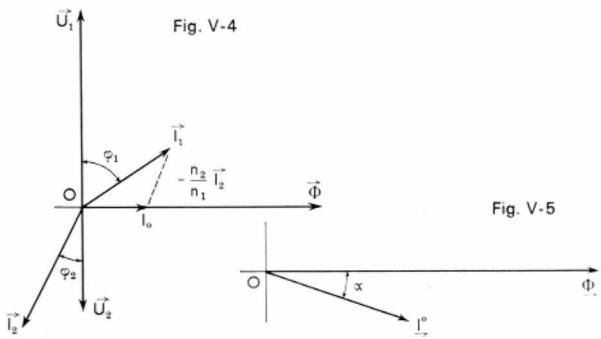


Fig. V-5

1.5.3. Pertes dans le fer. — En marche industrielle elles sont indépendantes de la charge. Elles peuvent être déterminées facilement à vide : le transformateur est alors équivalent à une bobine à noyau de fer et le courant à vide (fig. V-5) est déphasé d'un angle α en avance sur le flux (α est l'angle hystérétique). (V. chap. 4).

1.5.4. Fuites magnétiques. — Il faut distinguer (fig. V-6)

— Le flux Φ_1 créé par le primaire seul et entièrement embrassé par le secondaire ;

— Le flux Φ_2 créé par le secondaire seul et entièrement embrassé par le primaire ;

— Le flux Φ_{f1} créé par le primaire et non embrassé par le secondaire ;

— Le flux Φ_{f2} créé par le secondaire et non embrassé par le primaire.

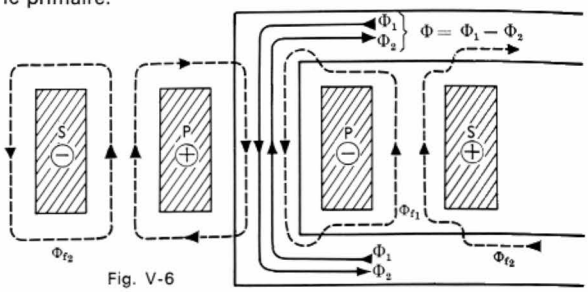


Fig. V-6

La relation $n_1 i_1 \approx -n_2 i_2$ rappelle que les forces magnétomotrices primaire et secondaire (et par suite les flux créés par le primaire seul et par le secondaire seul) sont *antagonistes*. Le flux utile Φ, flux commun aux enroulements primaire et secondaire est donc la différence des flux antagonistes Φ_1 et Φ_2. Pour la suite on tient compte des flux Φ, Φ_{f1} et Φ_{f2} :

a) soit par les f.é.m. qu'ils engendrent. Elles leur sont proportionnelles et toujours déphasées de $\frac{\pi}{2}$ rad en retard par rapport à ces flux ;

b) soit par les puissances réactives (données par des expressions de la forme $L\omega I^2_{\text{eff}}$) nécessaires à leur entretien.

Le flux total embrassé par le primaire est égal à :

$$\Phi_{t1} = \Phi + \Phi_{f1}$$

Le flux total embrassé par le secondaire est égal à :

$$\Phi_{t2} = \Phi + \Phi_{f2}$$

1.6. Diagramme général du transformateur.

— Quelques rappels préalables s'imposent :

1° la tension u entre les bornes d'une inductance pure (sa valeur efficace est $U_{\text{eff}} = L\omega I_{\text{eff}}$) est déphasée de $\frac{\pi}{2}$ rad en avance sur le courant i qui la traverse ; d'autre part, la f.é.m. e d'auto-induction due au flux Φ (en phase avec i) est elle-même déphasée de $\frac{\pi}{2}$ rad en retard sur Φ (V. chap. 1, § 7.2).

Dans le diagramme de Fresnel les vecteurs $\vec{\Phi}$, $\vec{I}$, $\vec{U}$ et $\vec{E}$ correspondant à Φ, i, u et e sont disposés de la façon suivante (fig. V-7) :

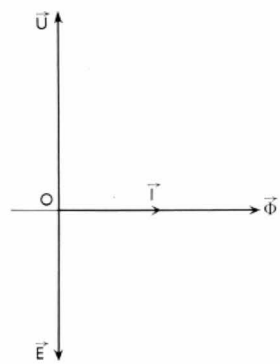
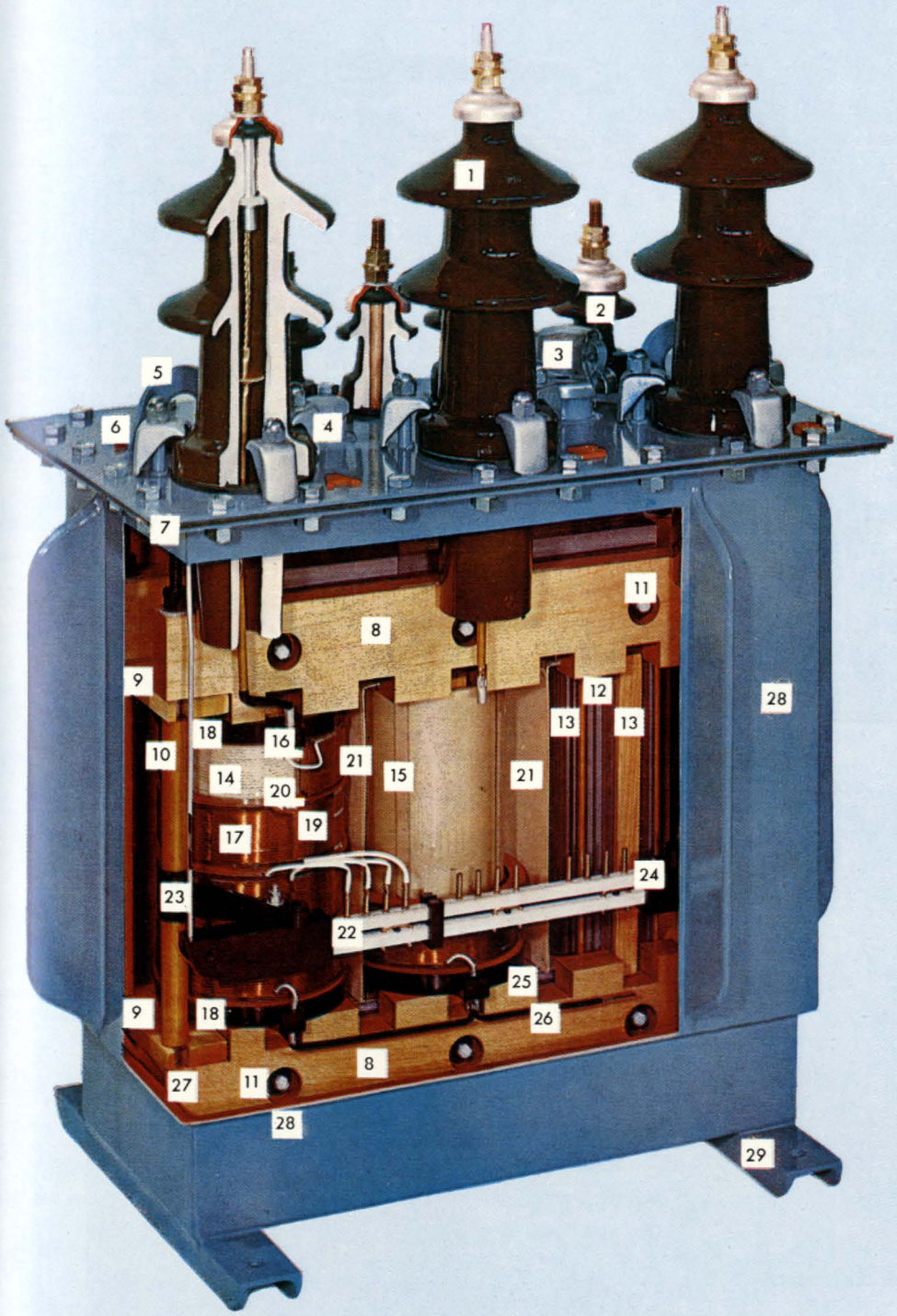


Fig. V-7

Transformateur de distribution H.T./B.T.



COUVERCLE

CIRCUIT MAGNÉTIQUE

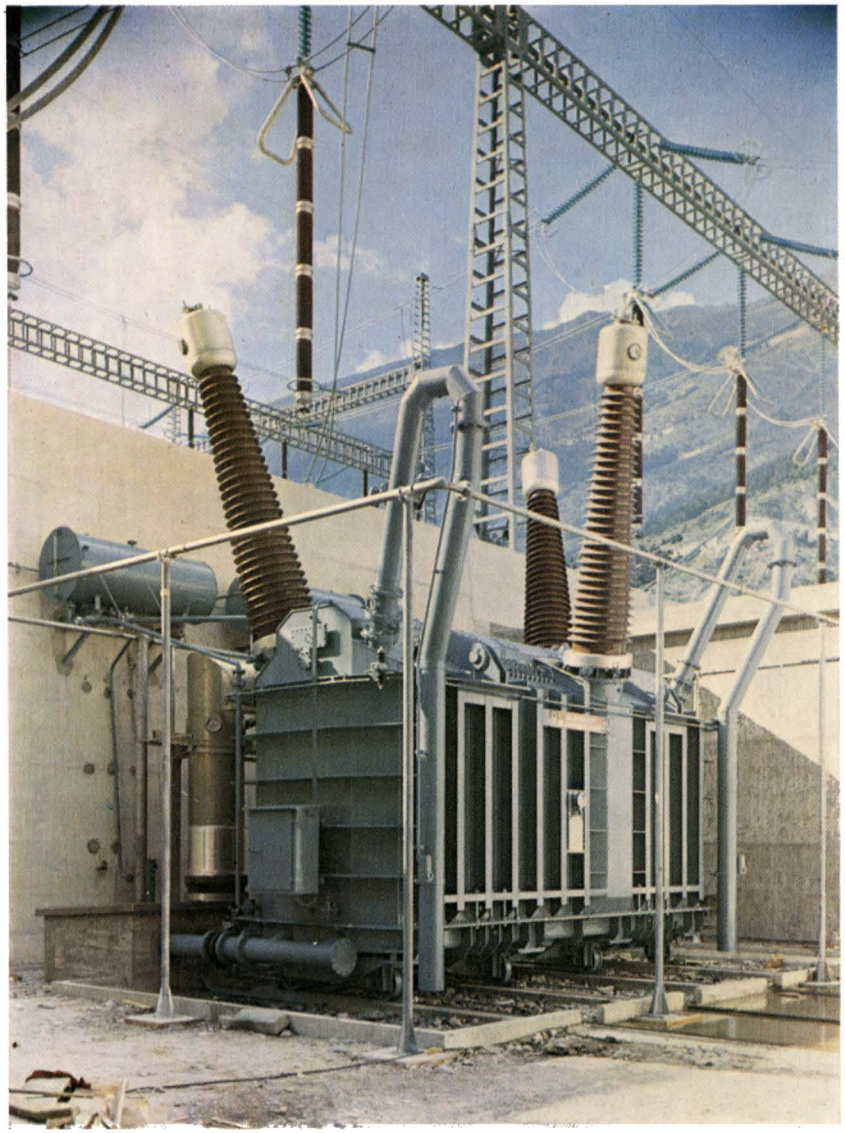
ENROULEMENTS

CUVE

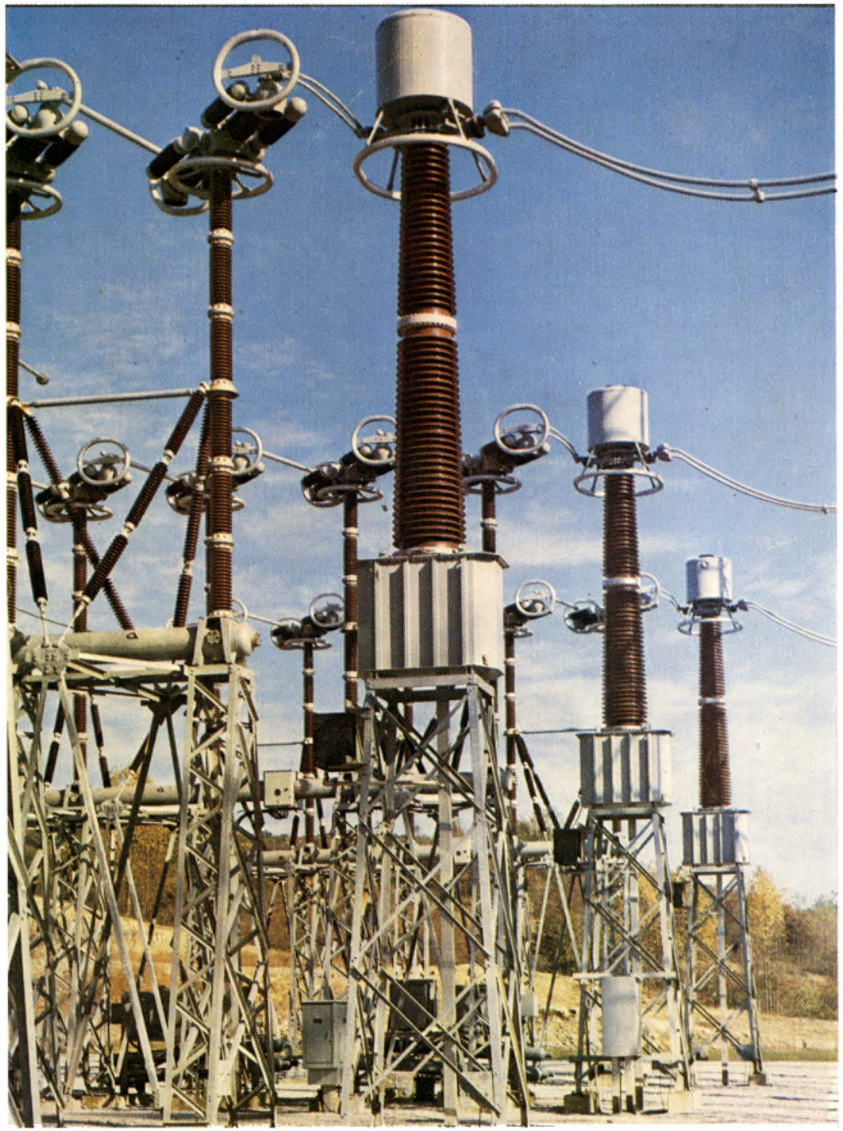
1. Traversées haute tension. **2.** Traversées basse tension. **3.** Tête de commande du commutateur de prises manœuvrable hors tension. **4.** Bouchon de remplissage. **5.** Anneaux de levage et de décuvage. **6.** Trous dans les anneaux pour mise à la terre. **7.** Joint de cuve. **8.** Joues de serrage des culasses magnétiques. **9.** Cales d'appui. **10.** Tiges d'assemblage. **11.** Tiges de serrage des culasses magnétiques. **12.** Noyaux magnétiques. **13.** Cales de guidage et de centrage de la B.T. **14.** Enroulements B.T. en cuivre. **15.** Cales radiales entre cylindres B.T. et enroulements H.T. ménageant des canaux verticaux (**16**) de circulation du liquide diélectrique. **17.** Enroulements H.T. en cuivre comportant plusieurs bobines avec (**18**) anneaux isolants aux extrémités. **19.** Bobines H.T. **20.** Colliers isolants entre bobines. **21.** Écrans de protection entre colonnes. **22.** Commutateur à translation placé au droit des prises de l'enroulement H.T. **23.** Gaine et câble de commande du commutateur. **24.** Supports du commutateur. **25.** Isolants entre les enroulements et la culasse inférieure. **26.** Connexions du neutre H.T. **27.** Bois de calage assurant la position de la partie active au fond de la cuve. **28.** Cuve à plis. **29.** Emplacement des galets orientables.

Document : Le Transformateur

Documents : Alsthom-Savoisienne



Transformateur triphasé de 195 000 kVA
ÉLECTRICITÉ DE FRANCE
Chute du Mont-Cenis. Centrale de Villarodin



Transformateur de courant pour des équipements à H.T. (765 kV)
AMERICAN ELECTRIC POWER, E.U.
Sous-station Baker, Kentucky

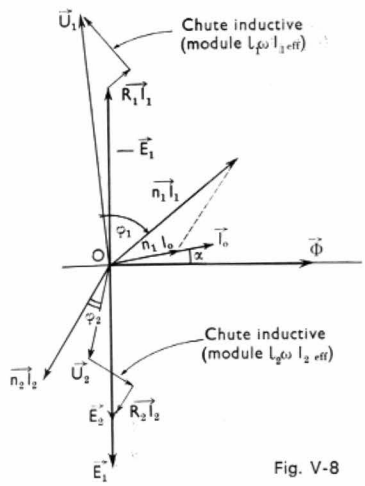


Fig. V-8

— $\vec{\Phi}$ et $\vec{I}$ ont même direction et même sens (celle de l'axe définissant l'origine des phases)

— $\vec{U}$ est décalé de + 90° par rapport à $\vec{I}$ (ou $\vec{\Phi}$)

— $\vec{E}$ est décalé de — 90° par rapport à $\vec{\Phi}$ (ou $\vec{I}$)

Il en résulte ce fait important et général : *à toute f.é.m. d'auto-induction e correspond une chute inductive* de même module $\left(U_{\text{eff}} = E_{\text{eff}} = L\omega I_{\text{eff}} \text{ avec } L = n\dfrac{\Phi_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}}\right)$ et de phase opposée : $u = -e$

2° à toute grandeur sinusoïdale

$$g = G_{\text{eff}}\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$$

on associe un nombre complexe de module G_{eff} et d'argument φ (la phase de g à l'instant $t = 0$). Ainsi aux grandeurs sinusoïdales u, e et i on fait correspondre les nombres complexes $\underline{U}$, $\underline{E}$ et $\underline{I}$ (dont les modules sont respectivement égaux à U_{eff}, E_{eff} et I_{eff}) et les résultats précédents sont alors traduits par les relations :

$$\underline{U} = -\underline{E} = jL\omega\underline{I}$$

La relation entre les flux primaires pouvant être traduite en une relation entre des f.é.m., on écrit :

$$e_{t1} \text{ (due à } \Phi_{t1}) = e_1 \text{ (due à } \Phi) + e_{f1} \text{ (due à } \Phi_{f1})$$

ou en considérant les grandeurs complexes associées :

$$\underline{E}_{t1} = \underline{E}_1 + \underline{E}_{f1}$$

Le flux Φ_{f1} est à la fois *engendré et embrassé* par le primaire ; c'est un flux *d'auto-induction* auquel correspond une *inductance partielle* due aux fuites primaires

$$l_1 = \frac{n_1\Phi_{f1\,\text{eff}}}{I_{1\,\text{eff}}}$$

En vertu du rappel ci-dessus on peut écrire la relation suivante :

$$\underline{E}_{t1} = \underline{E}_1 - j\,l_1\omega\,\underline{I}_1$$

Comme $\underline{E}_{t1}$ est la véritable f.c.é.m. primaire et que l'équation des tensions primaires s'écrit :

$$\underline{U}_1 = -\underline{E}_{t1} + R_1\underline{I}_1$$

il vient :

$$\underline{U}_1 = -\underline{E}_1 + j\,l_1\omega\,\underline{I}_1 + R_1\underline{I}_1 \qquad (1)$$

Le même raisonnement appliqué au secondaire fournit une autre équation :

$$\underline{U}_2 = \underline{E}_{t2} - R_2\underline{I}_2 = \underline{E}_2 - jl_2\omega\underline{I}_2 - R_2\underline{I}_2 \qquad (2)$$

$$\left(\text{avec } l_2 = \frac{n_2\Phi_{f2\,\text{eff}}}{I_{2\,\text{eff}}}\right).$$

Il suffit de traduire vectoriellement les équations (1) et (2) et l'équation des forces magnétomotrices $n_1\underline{I}_1 + n_2\underline{I}_2 = n_1\underline{I}_0$. On obtient le *diagramme général* du transformateur (fig. V-8). Il tient compte de tous les phénomènes dont cet appareil est le siège. Le flux Φ, seule grandeur *commune au primaire et au secondaire*, est placé selon l'axe qui définit l'origine des phases.

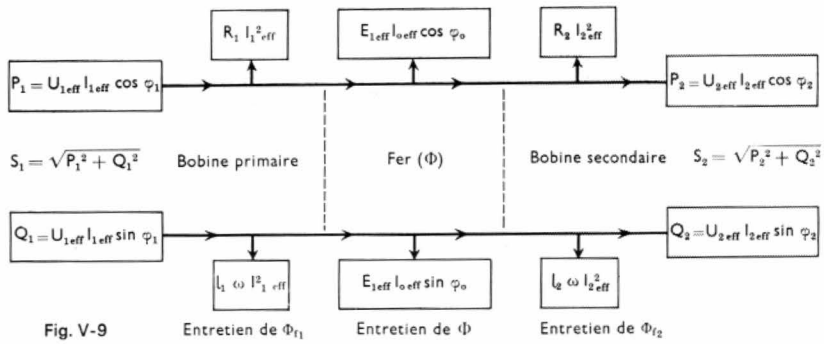


Fig. V-9

En réalité, pour tracer ce diagramme, il faut partir des grandeurs secondaires connues ; tension (u_2), courant (i_2), déphasage du courant par rapport à la tension (φ_2). On admet aussi que le rapport $\dfrac{n_2}{n_1}$ est connu. Dans ce cas, on place $\vec{U}_2$ et $\vec{I}_2$. On déduit $\vec{E}_2$ en ajoutant à $\vec{U}_2$ les vecteurs représentant la chute ohmique secondaire ($R_2\vec{I}_2$) et la chute inductive due à l_2. On place alors $\vec{E}_1 = \dfrac{n_1}{n_2}\vec{E}_2$ et $n_1\vec{I}_1 = n_1\vec{I}_0 - n_2\vec{I}_2$. Il reste à déduire $\vec{U}_1$ à partir de $\vec{E}_1$ en ajoutant à ce dernier les vecteurs figurant la chute ohmique primaire ($R_1\vec{I}_1$) et la chute due à l'inductance de fuite l_1.

2. APPLICATION DE LA MÉTHODE DE BOUCHEROT AU TRANSFORMATEUR

Elle consiste à exprimer le bilan *séparé* des puissances active et réactive qui se conservent indépendamment l'une de l'autre, Boucherot l'a montré (V. t. 1, Électricité, chap. 33). La figure V-9 donne ce bilan.

3. CONSTITUTION DES TRANSFORMATEURS

(V. hors-texte)

3.1. Noyaux des bobines. — Suivant la forme adoptée pour les bobines, les noyaux sont à section carrée, rectangulaire, en croix, ou se rapprochent de la section circulaire. La section en croix conduit à avoir deux largeurs de tôles (fig. V-10) ; pour les grandes sections, cas des transformateurs de puissance importante, on a recours à trois largeurs de tôles (fig. V-11). Les tôles des noyaux sont placées en paquets de 5 à 10 mm d'épaisseur, parallèlement à l'axe des bobines, de telle façon que leurs faces se trouvent suivant la direction du flux (fig. V-12).

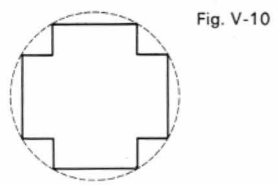


Fig. V-10

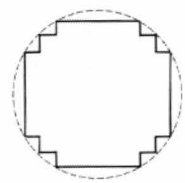


Fig. V-11

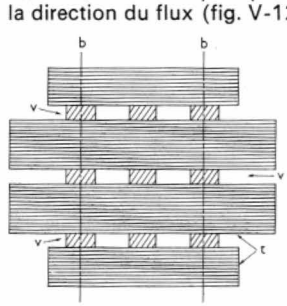


Fig. V-12

Section d'un noyau. Entre les tôles (t), vues en coupe, sont ménagés des canaux de ventilation (v).

En général, dans la construction moderne, on donne aux bobines une forme circulaire. La section des noyaux est carrée ou circulaire pour les transformateurs de très petite puissance ; elle est de l'une ou de l'autre des deux formes précitées suivant qu'il s'agit de moyennes ou de grandes puissances. On réserve des espaces suffisants entre les noyaux et les enroulements pour assurer la ventilation.

Dans les gros transformateurs, le refroidissement est facilité en ménageant des canaux de ventilation entre les paquets de tôles formant les noyaux (V. fig. V-12) ; ceux-ci sont réunis par des boulons de serrage, et leur écartement est maintenu par des cales en laiton.

3.2. Culasses. — Elles sont en général rapportées sur les noyaux afin d'éviter le montage des bobinages sur place. Leur section est rectangulaire ou carrée, et il y a intérêt à ce qu'elle soit plus grande que celle des noyaux. Des dispositions très diverses ont été adoptées pour l'assemblage des culasses sur les noyaux. Cet assemblage peut se faire par enchevêtrement des tôles qui les constituent, lorsque la culasse n'a pas à être démontée. Dans le cas contraire, les paquets de tôles des culasses sont enfilés dans les échancrures laissées libres par les paquets de tôles des noyaux ; ces tôles doivent avoir des longueurs différentes d'un paquet à l'autre (fig. V-13). Puis les culasses sont serrées

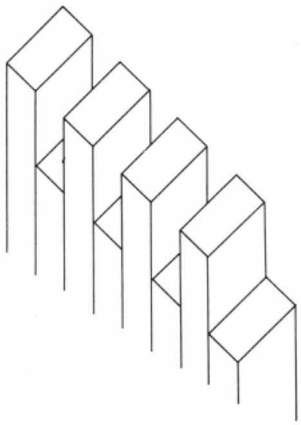


Fig. V-13

Extrémité d'une culasse de transformateur. Celle-ci est formée de paquets de tôles de deux longueurs différentes

rigidement contre les noyaux par des boulons. On peut aussi serrer fortement l'une contre l'autre, à l'aide de tiges, les tôles des noyaux et des culasses.

La culasse inférieure et la culasse supérieure peuvent également être réunies à l'aide de boulons passant dans des bossages.

Dans tous les cas, on cherche à constituer un ensemble très rigide avec les noyaux et les culasses, afin de réduire au minimum les petits entrefers créés par les joints ; cela évite d'augmenter inutilement le courant magnétisant et atténue le ronflement du transformateur.

3.3. Enroulements. — En principe on distingue les trois dispositions suivantes d'enroulements : concentriques simples, à galettes alternées, biconcentriques.

1° *Enroulements concentriques simples.* — L'enroulement à haute tension est placé concentriquement à l'enroulement à basse tension et en général extérieurement à celui-ci.

Il y a souvent intérêt à subdiviser l'enroulement à haute tension en galettes séparées (fig. V-14). Une galette comprend quelques spires et est soumise à une d.d.p. réduite, (en proportion du nombre des galettes), ce qui est un gros avantage sur le dispositif de bobinage par couches successives, disposées sur toute la hauteur du noyau (entre les couches les d.d.p. sont très grandes). La tension entre spires d'une même galette est comprise entre 100 et 200 V et celle entre galettes entre 500 et 1 000 V.

2° *Enroulements à galettes alternées* (fig. V-15). —

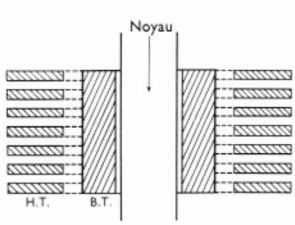


Fig. V-14

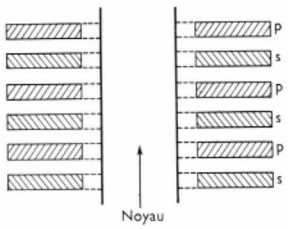


Fig. V-15

Les circuits primaire *p* et secondaire *s* sont subdivisés en galettes juxtaposées et alternées. Cette disposition ne s'emploie pas pour les tensions élevées en raison des difficultés qui se présentent pour assurer une isolation convenable.

3° *Enroulements biconcentriques.* — L'un des enroulements (primaire ou secondaire) est subdivisé en deux bobines cylindriques entre lesquelles se trouve placée la bobine cylindrique constituant l'autre enroulement (fig. V-16). C'est en général cette dernière qui est soumise à la tension la plus grande.

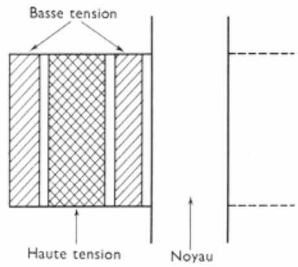


Fig. V-16

3.4. Isolation. — On cherche à diminuer les fuites magnétiques en rapprochant les enroulements primaire et secondaire, mais, bien entendu, il faut les isoler soigneusement l'un de l'autre et assurer leur maintien en place d'une façon rigide.

La figure V-17 donne un exemple des dispositions répondant à ce but. On voit que des canaux verticaux sont réservés pour la circulation de l'huile, dans le cas de transformateurs dans l'huile.

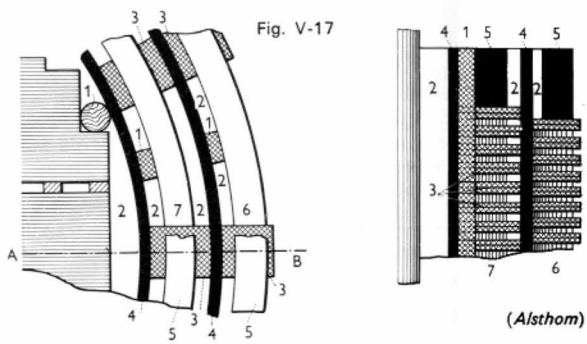


Fig. V-17

(Alsthom)

1. Cales d'espacement verticales empêchant tout mouvement radial par rapport au noyau
2. Jeux d'huile verticaux
3. Cales d'espacement radiales
4. Cylindres isolants
5. Cerclages empêchant tout mouvement axial des colonnes de bobinage et les isolant de la masse
6. Bobine haute tension
7. Bobine basse tension

3.5. Huile. — Les conditions auxquelles doivent satisfaire les huiles pour transformateurs font l'objet de cahiers des charges spéciaux.

On ne doit utiliser que des huiles minérales absolument pures, obtenues par la distillation fractionnée du pétrole, non mélangées avec d'autres substances et ne contenant pas en suspension des corps étrangers tels que poussières, sables, fibres, filaments, etc.

Les caractéristiques à connaître pour savoir si une huile est apte au refroidissement d'un transformateur sont les suivantes :

- Tendance à former des dépôts.
- Points d'inflammabilité des vapeurs et de l'huile.
- Viscosité à différentes températures.
- Perte de poids par évaporation.
- Masse volumique.
- Température de décongélation.
- Teneur en acides, en bases, en soufre.
- Teneur en eau.
- Pouvoir isolant.

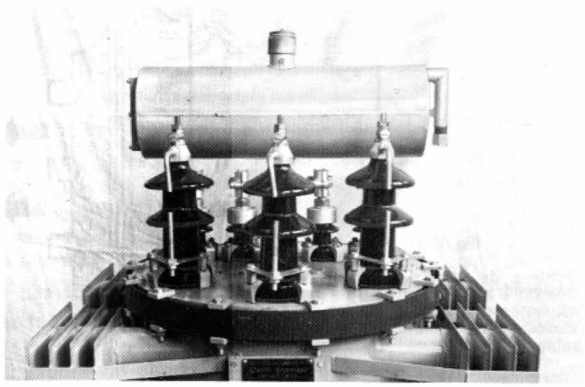
Pour ce qui est du pouvoir isolant, il est spécifié dans les cahiers de charges que la rigidité diélectrique doit être telle

que l'étincelle n'éclate pas pour une tension alternative de 40 000 V entre des sphères de 12,5 mm de diamètre, écartées de 5 mm, l'huile étant absolument sèche.

Il faut ajouter que l'huile minérale utilisée est raffinée afin d'éviter son altération à l'air et en particulier dans le but de réduire l'absorption de l'oxygène, qui a le grave inconvénient de faire baisser la rigidité diélectrique du produit.

Réservoir d'expansion ou conservateur d'huile. — Du fait de l'élévation de la température (pendant le fonctionnement du transformateur) l'huile se dilate et chasse hors de la cuve le volume d'air correspondant. Lorsque la charge disparaît, le phénomène inverse se produit. Il en résulte que de l'humidité, apportée par l'air extérieur, rentre peu à peu dans la cuve et est absorbée par l'huile. En outre, celle-ci s'oxyde rapidement dans sa couche supérieure qui est chaude et en contact avec une grande surface d'air.

On supprime ces inconvénients d'altération de l'huile en remplissant complètement d'huile le transformateur et en lui adjoignant un réservoir extérieur d'expansion d'huile (fig. V-18).



(*Cie Électro-Mécanique*)

Fig. V-18 — Transformateur à réservoir d'expansion ou conservateur d'huile

C'est dans ce réservoir que se font les rentrées d'air : l'eau d'humidité se dépose dans le fond, sans pouvoir pénétrer dans la cuve, car le tuyau qui relie la cuve au réservoir débouche au-dessus du fond de ce dernier. D'autre part, l'huile du réservoir est à une température plus basse que celle de l'huile de la cuve, et sa surface en contact avec l'air est bien moins grande ; il s'ensuit que l'oxydation de l'huile est pratiquement supprimée.

3.6. Liquides diélectriques autres que l'huile. — On a utilisé des liquides synthétiques appropriés dénommés *pyranols*.

Les propriétés recherchées et obtenues avec ces produits sont en particulier l'*incombustibilité*, la viscosité, un point de congélation convenable et la *stabilité de la rigidité diélectrique*. Ces liquides synthétiques doivent demeurer sensiblement neutres aux effets de l'oxydation et par ailleurs, ils doivent permettre d'éviter tout danger d'explosion consécutif aux gaz que produirait la formation accidentelle d'un arc électrique. Pour cette raison, on est parti de composés chlorés d'hydrocarbures (benzène, naphtalène). Parmi les produits qui ont été fabriqués en France, citons les *diélectrols*, l'*afcoline*, le *pyralène*.

Tous ces liquides synthétiques ne peuvent pas être substitués à l'huile dans les transformateurs construits antérieurement, non prévus pour cela, car ils attaquent les peintures et les vernis, c'est-à-dire la majorité des isolants dont on a fait emploi dans la fabrication courante de ces appareils.

Comme pour les transformateurs dans l'huile, il y a intérêt à munir de réservoirs d'expansion les appareils remplis de liquide diélectrique isolant du type ci-dessus, pour que la surface d'évaporation en contact avec l'air soit réduite et à une température peu élevée et, en outre, pour que les vapeurs émanant de ce liquide ne se dégagent pas sur les différentes parties intérieures du transformateur (qui seraient attaquées peu à peu).

3.7. Isolant solide. — Le grave inconvénient de l'huile étant d'être combustible, on l'a remplacée dans bien des cas par un isolant solide donnant toute sécurité contre l'incendie, par exemple un composé *quartzeux* appelé *compound*. On construit notamment des transformateurs antidéflagrants pour les exploitations minières et des appareils blindés pour les locaux humides ou à atmosphère dangereuse, dont la matière isolante est un composé quartzeux rendu incombustible par du chlorure de diphényle (quelques grammes par kilogramme de composé). La température de liquéfaction de ce compound quartzeux est de 150 °C à 200 °C. Si elle était atteinte il serait impossible de démonter le transformateur en cas de besoin ; aussi la puissance des appareils à compound quartzeux a-t-elle été limitée à 15 à 20 kVA. Ces transformateurs ont été établis pour les tensions de distribution courantes (5 000 V/220 V).

Une particularité de la construction de ces appareils consiste en un dispositif d'écrans métalliques permettant la transmission convenable de la chaleur, depuis les parties actives (enroulements) jusqu'aux parois de la cuve.

Avec des cristaux de quartz de grosseur appropriée, tassés énergiquement et sans liant, il a été possible de réaliser des transformateurs étanches et incombustibles dont la puissance apparente atteint 125 kVA.

3.8. Refroidissement des transformateurs dans l'huile

3.8.1. Refroidissement naturel. — Les cuves à huile des appareils de petites puissances sont en *tôle lisse* mince (tôle de chaudière) et la partie active du transformateur est fixée à leur couvercle.

Pour les appareils dont la puissance atteint quelques dizaines de kilowatts, on se sert de *tôle ondulée* : la surface de la cuve se trouve augmentée notablement sans accroissement sensible du volume d'huile (fig. V-19).

Pour les appareils de très grande puissance il faut augmenter la surface de refroidissement et accroître la circulation de l'huile à l'intérieur. Ce double résultat est obtenu en munissant le transformateur de surfaces supplémentaires de radiation qui viennent s'ajouter à celle de la cuve (ondulée ou non), et à profiter de leur présence pour donner à l'huile une circulation naturelle plus rationnelle et plus régulière :

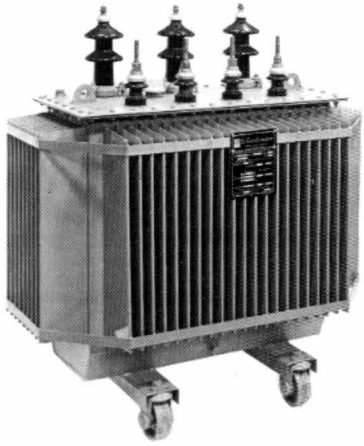


Fig. V-19

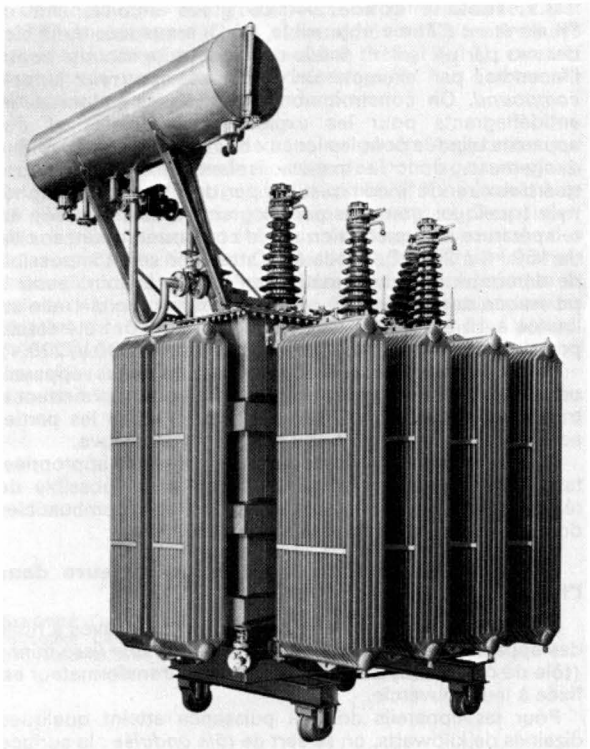
Transformateur triphasé 50 Hz, 250 kVA

(Le Transformateur)

1° Plusieurs séries de tubes sont disposées verticalement autour de la cuve lisse et communiquent avec elle en haut et en bas.

La circulation de l'huile s'établit naturellement de bas en haut dans le transformateur, et de haut en bas dans les tubes extérieurs où cette huile se refroidit. Le tirage correspond à la différence de densité des deux colonnes d'huile ascendante et descendante, et il est d'autant plus actif que la hauteur de l'appareil est plus grande et que l'importance de la charge détermine un échauffement plus grand de l'huile.

2° Des cuves en tôle ondulée supplémentaires, plates et plus petites que la cuve elle-même, sont disposées soit latéralement, soit perpendiculairement à elle, et lui sont raccordées en haut et en bas : le développement de ces



surfaces de refroidissement est grand par rapport au faible volume de l'huile qui circule à l'intérieur.

Ce sont de véritables *radiateurs* extérieurs auxquels on donne toute la surface de radiation nécessaire (fig. V-20).

Fig. V-20

Transformateur triphasé à refroidissement naturel 50 Hz, 5000 kVA (*Alsthom*)

3.8.2 Refroidissement par circulation d'eau. — Il s'opère soit au moyen d'un *serpentin immergé dans la cuve* et dans lequel circule de bas en haut de l'eau sous pression débitée par une motopompe, soit par *aéroréfrigération*. L'aéroréfrigérant est constitué (fig. V-21) par des faisceaux de tubes sur lesquels soufflent des ventilateurs. L'huile chaude prise à la partie supérieure de la cuve par une pompe est refoulée dans le réfrigérant où elle est refroidie par de l'air soufflé par ces ventilateurs. L'huile refroidie revient à la partie inférieure du transformateur.

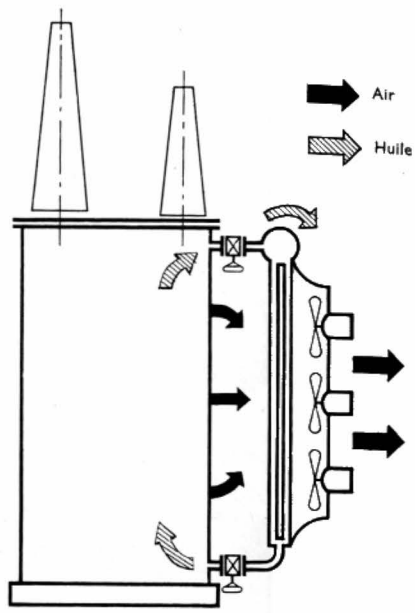


Fig. V-21

Schéma de circulation huile et air dans un système de refroidissement avec aéroréfrigérant (*Alsthom*)

CHAPITRE VI

TRANSFORMATEUR CARACTÉRISTIQUES INDUSTRIELLES

1. CARACTÉRISTIQUES COMMERCIALES D'UN TRANSFORMATEUR

Un transformateur porte sur une plaque signalétique les indications suivantes :

— La valeur de sa puissance apparente nominale S_n (exprimée en kilovoltampères souvent).

— Les valeurs efficaces de la tension secondaire nominale $U_{2n\,\text{eff}}$ et de la tension primaire correspondante $U_{1n\,\text{eff}}$ à vide.

Le rapport $m = \dfrac{U_{2n\,\text{eff}}}{U_{1n\,\text{eff}}}$ constitue le *rapport de transformation nominale*.

— La valeur de la fréquence d'utilisation f.

Ces données permettent de connaître l'intensité du *courant secondaire nominal* et celle du courant primaire correspondant :

$$I_{2n\,\text{eff}} = \frac{1000\ S_n}{U_{2n\,\text{eff}}} \quad \text{et :} \quad I_{1n\,\text{eff}} = mI_{2n\,\text{eff}}$$

(S_n étant exprimée en kilovoltampères).

Les normes C 52 101 (1963) fixent les valeurs de ces grandeurs en ce qui concerne les transformateurs triphasés immergés dans l'huile :

S_n = 5 — 10 — 16 — 25 — 40 — 63 — 80 — 100 — 125 — 160 — 200 — 250 — 315 — 400 — 500 — 630 — 800 — 1 000 kVA en notant qu'une puissance apparente de 5 kVA s'entend pour des tensions inférieures à 5,5 kV et qu'une puissance de 10 kVA s'entend pour des tensions inférieures à 15 kV.

Pour les transformateurs triphasés pour réseaux de distribution publique, les normes C 52 102 (1962) stipulent que la puissance apparente doit être égale à :

S_n = 25 — 40 — 63 — 100 — 160 — 250 — 400 — 630 kVA pour des valeurs suivantes des tensions nominales :

$$U_{1n\,\text{eff}} = 5{,}5 — 10 — 15 — 20 — 30\ \text{kV}$$
$$U_{2n\,\text{eff}} = 230\ \text{et}\ 398\ \text{V}$$

Le cahier des charges du transformateur indique en outre :

1° *la chute de tension* à la puissance nominale S_n et pour un facteur de puissance cos φ = 0,8,

2° *le rapport* $\dfrac{I_{0\,\text{eff}}}{I_{1n\,\text{eff}}}$ du courant à vide $I_{0\,\text{eff}}$ au courant primaire nominal,

3° *les pertes à vide* et le *rendement* à la puissance nominale et pour un facteur de puissance cos φ = 0,8.

2. CHUTE DE TENSION

2.1. Définition. — Sous sa tension nominale primaire $U_{1n\,\text{eff}}$, un transformateur présente, en charge, une tension secondaire $U_{2\,\text{eff}}$ plus petite que la tension secondaire à vide $U_{2v\,\text{eff}}$.

Commercialement la *chute de tension* (sous-entendu : normale et relative) est le rapport :

$$\varepsilon\ \% = 100\ \frac{U_{2v\,\text{eff}} — U_{2n\,\text{eff}}}{U_{2v\,\text{eff}}}$$

$U_{2n\,\text{eff}}$ étant la tension secondaire nominale, c'est-à-dire

celle qui est obtenue lorsque le transformateur débite son courant nominal avec un facteur de puissance cos φ précisé (généralement 0,8).

Le plus souvent cette grandeur ε, importante pour l'utilisateur, ne peut pas être mesurée directement sur la plateforme d'essais. En effet, dès que le transformateur est d'assez grande puissance il n'est pas possible de trouver un récepteur susceptible d'absorber la puissance que peut fournir le transformateur. Pour cette raison cette chute de tension est déterminée graphiquement au moyen du diagramme de Kapp.

2.2. Diagramme de Kapp. — Kapp a montré qu'on peut simplifier considérablement le diagramme général, sans commettre d'erreur sensible sur la chute de tension, en supposant que le courant à vide *est nul*.

Cela revient à supposer que la réluctance du circuit magnétique est nulle (composante réactive de valeur efficace $I_{0\,\text{eff}} \sin \alpha$ nulle) et que les pertes dans le fer sont également nulles (composante active de valeur efficace $I_{0\,\text{eff}} \cos \alpha$ nulle).

Les équations de fonctionnement du transformateur sont alors les suivantes :

$$\underline{U}_1 = -\underline{E}_1 + j\, l_1 \omega \underline{I}_1 + R_1 \underline{I}_1 \qquad (1)$$

$$\underline{U}_2 = \underline{E}_2 - j\, l_2 \omega \underline{I}_2 - R_2 \underline{I}_2 \qquad (2)$$

$$\underline{0} = n_1 \underline{I}_1 + n_2 \underline{I}_2 \qquad (3)$$

Si l'on se reporte au diagramme général (V. fig. V-8), on voit que si le vecteur $n_1 \vec{I}_0$ est nul, les vecteurs $\vec{I}_1$ et $\vec{I}_2$ ont des sens opposés. C'est bien ce que traduit l'équation (3) ci-dessus que l'on peut écrire aussi :

$$\underline{I}_1 = -\frac{n_2}{n_1}\underline{I}_2 = -m\underline{I}_2 \quad \left(\text{avec } m = \frac{n_2}{n_1}\right)$$

Les équations (1) et (2) permettent alors d'exprimer $\underline{U}_1$ en fonction de $\underline{U}_2$ et de $\underline{I}_2$. En effet si l'on multiplie l'équation (1) par m et que l'on additionne membre à membre ces équations on obtient la relation suivante :

$$m\underline{U}_1 + \underline{U}_2 = -m\underline{E}_1 + \underline{E}_2 + jml_1\omega \underline{I}_1 - jl_2\omega\underline{I}_2 + mR_1\underline{I}_1 - R_2\underline{I}_2$$

En tenant compte du fait que $\underline{E}_2 = m\,\underline{E}_1$ et que $\underline{I}_1 = -m\,\underline{I}_2$, il vient :

$$m\underline{U}_1 + \underline{U}_2 = -jm^2 l_1 \omega \underline{I}_2 - j\omega l_2 \underline{I}_2 - m^2 R_1 \underline{I}_2 - R_2 \underline{I}_2$$

soit :

$$-m\underline{U}_1 = \underline{U}_2 + j\omega\,(m^2 l_1 + l_2)\,\underline{I}_2 + (m^2 R_1 + R_2)\,\underline{I}_2 \qquad (4)$$

À cette équation correspond un diagramme de Fresnel qui peut être obtenu à partir de la figure V-8 en multipliant les vecteurs correspondant aux grandeurs primaires ($\vec{U}_1$, $\vec{I}_1$, $\vec{E}_1$) par m et en les faisant pivoter de 180° autour de O (fig. VI-1). Une présentation plus simple (fig. VI-2) peut être déduite de la figure VI-1 ou plus directement de l'équation (4). On prend le courant secondaire i_2 pour définir l'origine des phases et l'on place les vecteurs suivants :

$\overrightarrow{OA}$ de module égal à $(m^2R_1 + R_2)\, I_{2\,\text{eff}}$, colinéaire avec $\vec{I}_2$: $\quad \overrightarrow{OA} = (m^2R_1 + R_2)\,\vec{I}_2$

$\overrightarrow{AB}$ de module égal à $(m^2 l_1 + l_2)\,\omega\, I_{2\,\text{eff}}$ et d'angle polaire $+ 90°$ (pour tenir compte du facteur j).

$\overrightarrow{BC} = \vec{U}_2$ (module : $U_{2\,\text{eff}}$, angle polaire : φ_2).

Le vecteur $\overrightarrow{OC}$ figure la tension associée au nombre complexe $(-m\,\underline{U}_1)$: c'est une tension égale à m fois la tension primaire et de phase opposée à cette dernière.

Ce diagramme, appelé *diagramme de Kapp*, permet donc de déduire les grandeurs primaires ($U_{1\,\text{eff}}$, $I_{1\,\text{eff}}$, φ_1), lorsqu'on connaît les conditions de fonctionnement au secondaire ($U_{2\,\text{eff}}$, $I_{2\,\text{eff}}$, φ_2) et le rapport de transformation m.

Le triangle OAB constitue le triangle de Kapp. On pose souvent :

$R_s = R_2 + m^2 R_1 =$ résistance ramenée au secondaire.

$l_s = l_2 + m^2 l_1 =$ inductance de fuites ramenée au secondaire.

Remarque : Si le secondaire est en court-circuit ($U_{2\,\text{eff}} = 0$) le point C est en B et le vecteur $\overrightarrow{OB}$ représente la tension mU_{1cc} à appliquer au primaire pour avoir le même courant secondaire $I_{2\,\text{eff}}$ que dans le cas considéré ci-dessus.

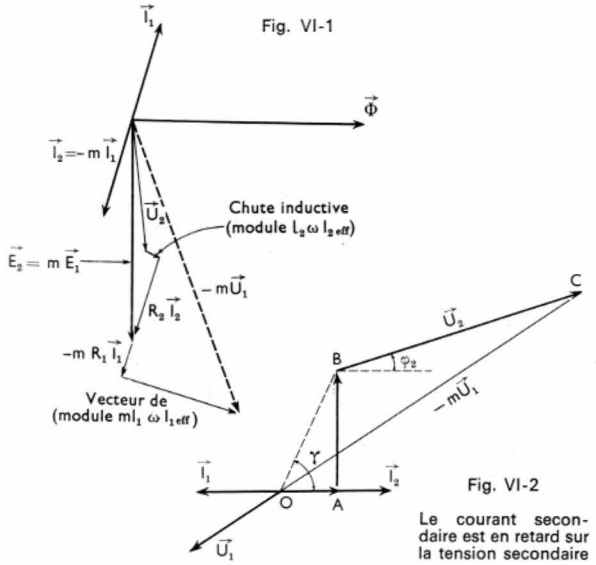


Fig. VI-2

Le courant secondaire est en retard sur la tension secondaire

2.3. Essais permettant le tracé du diagramme de Kapp

2.3.1. Essai à vide. — Cet essai permet de déterminer le rapport m et également de connaître l'importance des pertes dans le fer.

Le transformateur à vide est alimenté sous sa tension nominale $U_{1n\,\text{eff}}$ (fig. VI-3). On mesure la tension primaire

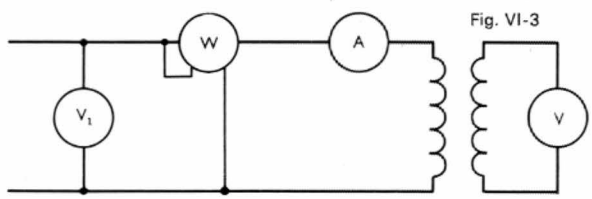


Fig. VI-3

$U_{1n\,\text{eff}}$, l'intensité du courant à vide $I_{0\,\text{eff}}$, la puissance absorbée P_0 et la tension secondaire $U_{2v\,\text{eff}}$. On déduit $m = \dfrac{U_{2v\,\text{eff}}}{U_{1n\,\text{eff}}}$ et les pertes à vide P_0, sensiblement égales aux pertes dans le fer puisque les pertes dans le cuivre sont négligeables le plus souvent.

2.3.2. Essai en court-circuit. — Il fournit l'ensemble des pertes par effet Joule. Le secondaire étant en court-circuit (fig. VI-4), on fait croître *lentement* la tension primaire (en partant de zéro) ; lorsque l'ampèremètre A_1 indique que le courant primaire a atteint sa valeur nominale

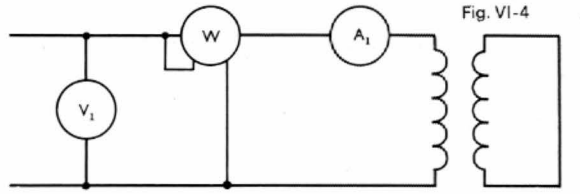


Fig. VI-4

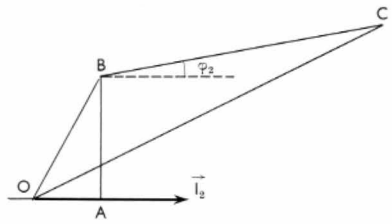
($I_{1n\,\text{eff}} = m\, I_{2n\,\text{eff}}$) on note l'indication $U_{1cc\,\text{eff}}$ du voltmètre V_1 et celle P_{cc} du wattmètre W ; P_{cc} représente les pertes par effet Joule et les pertes dans le fer (aucune puissance utile n'est fournie). Comme en court-circuit la tension U_{1cc} est faible, il en est de même de l'induction maximale $\widehat{B}$ (V. formule de Kapp, chap. 1, § 7) et les pertes dans le fer sont négligeables : la puissance P_{cc} représente donc l'ensemble des pertes par effet Joule soit :

$$P_{cc} = R_1 I^2_{1\,\text{eff}} + R_2 I^2_{2\,\text{eff}} = R_1\,(mI_{2\,\text{eff}})^2 + R_2 I^2_{2\,\text{eff}}$$

$$= (R_2 + R_1 m^2)\; I^2_{2\,\text{eff}} = R_s I^2_{2\,\text{eff}}$$

(car, avec $\widehat{B}$ faible, on a $I_{0\,\text{eff}} \approx 0$ et $I_{1\,\text{eff}} = m\, I_{2\,\text{eff}}$).

Fig. VI-5



2.4. Construction du diagramme de Kapp. — On effectue ce tracé pour $I_{2\,\text{eff}} = I_{2n\,\text{eff}}$ et cos $\varphi_2 = 0{,}8$ (fig. VI-5). On porte sur l'axe horizontal (axe portant le vecteur $\vec{I}_2$ puisque i_2 définit l'origine des phases) la longueur

$$OA = \frac{P_{cc}}{I_{2n\,\text{eff}}} = (R_2 + R_1 m^2)\, I_{2n\,\text{eff}} = R_s I_{2n\,\text{eff}}$$

(pour simplifier l'écriture on suppose que l'échelle choisie pour les tensions est égale à 1 ; par exemple, 1 cm représente 1 volt).

La rencontre de la verticale passant par A et de la circonférence de centre O et de rayon $OB = mU_{1cc\,\text{eff}}$ donne le point B.

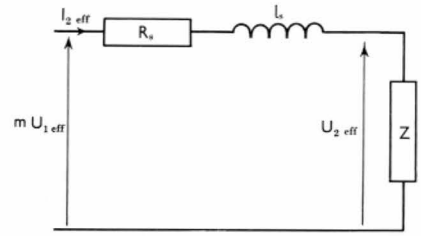
Par ce point, on trace la demi-droite BC de longueur égale à $U_{2n\,\text{eff}}$ et faisant avec la direction de $\vec{I}_2$ l'angle φ_2 tel que cos $\varphi_2 = 0{,}8$. On a alors $OC = mU_{1n\,\text{eff}} = U_{2v\,\text{eff}}$ et la chute relative de tension est égale au rapport

$$100\left(\frac{OC - BC}{OC}\right) = 100\left(\frac{mU_{1n\,\text{eff}} - U_{2n\,\text{eff}}}{mU_{1n\,\text{eff}}}\right).$$

3. ÉTUDE DE LA CHUTE DE TENSION

3.1. Facteur de construction qui influe surtout sur la chute de tension. — Le diagramme de Kapp montre que le transformateur se comporte comme une bobine (fig. VI-6) de résistance R_s et d'inductance l_s.

Fig. VI-6



Alimentée sous la tension $mU_{1\,\text{eff}}$, cette bobine provoque une chute de tension telle que la tension aux bornes d'un récepteur Z (réseau alimenté) n'est plus que $U_{2\,\text{eff}}$. Comme la chute due à l_s ($l_s\,\omega\,I_{2\,\text{eff}}$) est généralement plus grande que la chute due à R_s ($R_s I_{2\,\text{eff}}$), le constructeur modifie la chute de tension en agissant sur l_s, c'est-à-dire sur les fuites magnétiques.

Au point de vue construction, la chute de tension est donc liée aux fuites magnétiques.

3.2. Facteurs d'exploitation qui influent sur la chute de tension

3.2.1. Influence de cos φ_2. — On va supposer que l'intensité efficace $I_{2\,\text{eff}}$ du courant secondaire est constante. Le triangle de Kapp OAB est le même quel que soit le déphasage φ_2 de i_2 par rapport à u_2 (fig. VI-7). On trace deux circonférences l'une de centre O, l'autre de centre B, de même rayon, celui-ci correspondant (à l'échelle adoptée) à la tension $mU_{1\,\text{eff}}$. Pour un déphasage φ_2 déterminé, la tension u_2 est représentée par le vecteur $\overrightarrow{BC}$. Si l'on prolonge BC jusqu'en D, BD figurant une tension de valeur efficace $mU_{1\,\text{eff}}$, on voit que $CD = BD - BC$ correspond à la valeur absolue ($mU_{1\,\text{eff}} - U_{2\,\text{eff}}$) de la chute de tension. Le diagramme met alors clairement en évidence que :

1° si φ_2 croît (déphasage inductif) CD augmente. *En régime inductif la chute de tension croît quand le facteur de puissance cos φ diminue ;*

2° si φ_2 change de signe (récepteur capacitif), CD change de signe ($BC' > BD'$) et la chute de tension est négative : *la tension secondaire peut être supérieure à la tension primaire quand le transformateur débite sur un réseau doué de capacité* (exemple : longue ligne de transport à vide).

Fig. VI-7

$\overrightarrow{OC} = -m\vec{U}_1$

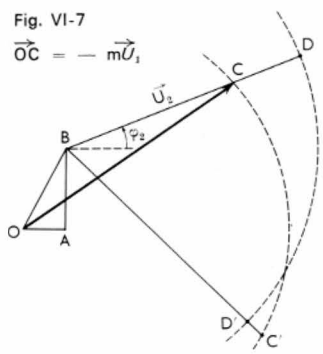
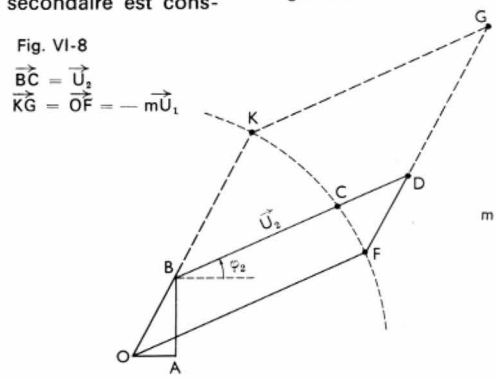


Fig. VI-8

$\overrightarrow{BC} = \vec{U}_2$
$\overrightarrow{KG} = \overrightarrow{OF} = -m\vec{U}_1$



3.2.2. Influence du courant secondaire $I_{2\,\text{eff}}$. — Si le courant $I_{2\,\text{eff}}$ diminue (à cos φ_2 constant) le point B (fig. VI-8) se rapproche de O tandis que la droite BC reste parallèle à elle-même. À vide B est en O et

$$BD = OF = mU_{1\,\text{eff}}$$

Si l'on mène par F la parallèle à OB, le quadrilatère $OFDB$ est un parallélogramme et $BD = OF = mU_{1\,\text{eff}}$: la chute absolue de tension est représentée par le vecteur $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC} = -m\vec{U}_1 - \vec{U}_2$ dont le module est :

$$(mU_{1\,\text{eff}} - U_{2\,\text{eff}})$$

On voit qu'en régime inductif *la chute de tension croît en même temps que* $I_{2\,\text{eff}}$, c'est-à-dire à mesure que B s'approche de K. Au point K ($OK = OF$) on a $U_{2\,\text{eff}} = 0$: c'est le point de fonctionnement *en court-circuit*.

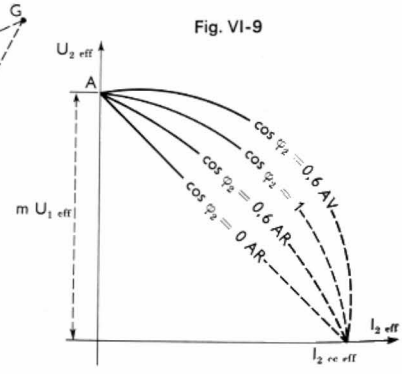
Tous ces résultats sont résumés par la famille de courbes $U_{2\,\text{eff}}$ ($I_{2\,\text{eff}}$) pour différents facteurs de puissance cos φ_2 (paramètre). Toutes ces courbes (fig. VI-9) partent du même point A d'ordonnée $U_{2v\,\text{eff}}$ (tension secondaire à vide) et aboutissent au même point $I_{2cc\,\text{eff}}$ ($U_{2\,\text{eff}} = 0$: marche en court-circuit).

Remarque : Sous la tension nominale le courant de court-circuit est *beaucoup plus intense que* $I_{2n\,\text{eff}}$. En effet, si sur la figure VI-8 le point B correspond au régime nominal (courant $I_{2n\,\text{eff}}$ au secondaire), on peut écrire :

$$\frac{OK}{OB} = \frac{I_{2cc\,\text{eff}}}{I_{2n\,\text{eff}}} = \frac{OF}{OB} = \frac{mU_{1\,\text{eff}}}{mU_{1cc\,\text{eff}}} = \frac{U_{1\,\text{eff}}}{U_{1cc\,\text{eff}}}$$

Comme $U_{1\,\text{eff}}$ est beaucoup plus grand que la tension $U_{1cc\,\text{eff}}$, $I_{2cc\,\text{eff}}$ est très supérieur à $I_{2n\,\text{eff}}$: *le courant de court-circuit d'un transformateur sous tension normale est très intense et très dangereux.*

Fig. VI-9



4. FORMULES PRATIQUES DONNANT LA CHUTE DE TENSION

4.1. Première formule. — Comme le vecteur $\overrightarrow{OB}$ du diagramme de Kapp est très petit par rapport aux vecteurs $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{BC}$ (V. fig. VI-5), le graphique risque d'être imprécis et il vaut mieux utiliser une *formule déduite de ce diagramme.*

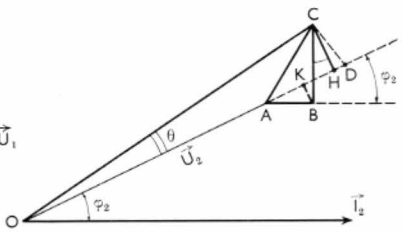


Fig. VI-10

$\overrightarrow{OC} = -m\vec{U}_1$

Le courant secondaire i_2 étant pris pour définir l'origine des phases, on place successivement (fig. VI-10) les vecteurs $\overrightarrow{OA} = \vec{U}_2$, $\overrightarrow{AB} = R_s\vec{I}_2$, $\overrightarrow{BC}$ de module égal à $l_s\omega I_{2\,\text{eff}}$ et d'angle polaire $+ 90°$, et $\overrightarrow{OC} = -m\vec{U}_1$. On projette tous ces vecteurs sur $\overrightarrow{OA}$ et l'on porte un point D tel que $OD = OC$. On peut alors écrire :

$$\Delta U = mU_{1\,\text{eff}} - U_{\text{eff}} = OC - OA$$
$$= OD - OA = AD \approx AH = AK + KH$$
$$\Delta U = mU_{1\,\text{eff}} - U_{2\,\text{eff}} = AB \cos \varphi_2 + BC \sin \varphi_2$$
$$= R_s I_{2\,\text{eff}} \cos \varphi_2 + l_s\omega I_{2\,\text{eff}} \sin \varphi_2$$

soit : $\Delta U = R_s I_{2\,\text{eff}} \cos \varphi_2 + l_s\omega I_{2\,\text{eff}} \sin \varphi_2$

La formule est approximative puisqu'il a fallu confondre les points D et H, mais l'erreur ainsi commise est généralement négligeable.

4.2. Seconde formule. — Il est souvent avantageux d'exprimer toutes les grandeurs en valeurs relatives, c'est-à-dire en les rapportant à *des constantes du transformateur.*

La formule précédente permet de déduire la chute de tension relative :

$$\varepsilon = 100\,\frac{\Delta U}{mU_{1n\,\text{eff}}} = 100\left[\frac{R_s I_{2\,\text{eff}} \cos \varphi_2}{mU_{1n\,\text{eff}}} + \frac{l_s\omega I_{2\,\text{eff}} \sin \varphi_2}{mU_{1n\,\text{eff}}}\right]$$

On pose alors :

$$u_r = 100\,\frac{R_s I_{2\,\text{eff}}}{mU_{1n\,\text{eff}}}$$

$$u_s = 100\,\frac{l_s\omega I_{2\,\text{eff}}}{mU_{1n\,\text{eff}}}$$

$$u_{cc} = 100\,\frac{mU_{1cc\,\text{eff}}}{mU_{1n\,\text{eff}}}$$

En définitive, la formule pratique de la chute de tension pour un courant $I_{2\,\text{eff}}$ et un facteur de puissance cos φ_2 est la suivante :

$$\varepsilon\,\% = u_r \cos \varphi_2 + u_s \sin \varphi_2$$

Le triangle de Kapp devient celui de la figure VI-11 et l'on a :

$$u_s = \sqrt{u_{cc}^2 - u_r^2}$$

avec :

$$u_r = 100\,\frac{R_s I_{2\,\text{eff}}}{mU_{1n\,\text{eff}}} = \frac{100}{mU_{1n\,\text{eff}}} \cdot \frac{P_{cc}}{I_{2\,\text{eff}}}$$

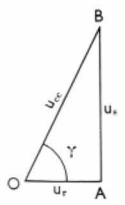


Fig. VI-11

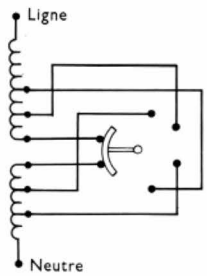


Fig. VI-12

5. RÉGLAGE DE LA TENSION SECONDAIRE

Le réglage de la tension secondaire s'impose si l'on désire compenser la chute de tension. En dehors de petits transformateurs particuliers où un curseur permet d'utiliser un nombre variable de spires de l'enroulement secondaire, le réglage de la tension secondaire se fait par sauts brusques en utilisant :

— soit un *ajusteur de rapport* (fig. VI-12), commutateur spécial qui permet de modifier brusquement le rapport de transformation nominal grâce à des prises placées sur l'enroulement haute tension (en général). Il est logé dans la cuve et manœuvré de l'extérieur par un petit volant. Il doit être utilisé *hors tension*, c'est-à-dire qu'il est seulement manœuvré après rupture des connexions du transformateur avec son réseau d'alimentation ;

— soit un *appareil de réglage en charge* qui est manœuvré *sans interrompre le courant*. Il est plus important, plus compliqué que le précédent car, d'un plot à l'autre il faut éviter que les spires soient en court-circuit (insertion momentanée, entre deux plots, d'une inductance ou, plus généralement, d'une résistance) (fig. VI-13).

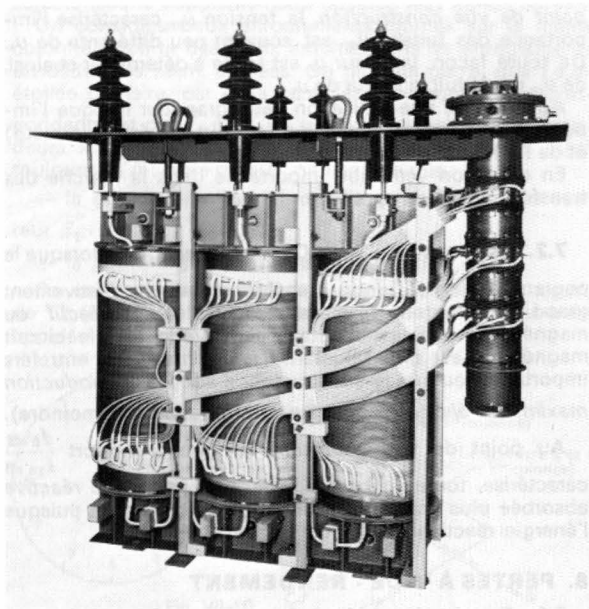


Fig. VI-13 — Transformateur triphasé 2 500 kVA, 50 Hz avec régleur en charge Jansen à droite (*Alsthom*)

6. LA CHUTE DE TENSION DANS LA RÉALITÉ INDUSTRIELLE

Les ordres de grandeur des chutes de tension des transformateurs de puissance sont donnés par le tableau ci-après.

Puissances (en kilovoltampères) . . .	5	80	550	1 000
Chute de tension pour cos $\varphi_2 = 1$	3 %	2,1 %	1,5 %	1,45 %
Chute de tension pour cos $\varphi_2 = 0{,}8$	5,3 %	4,2 %	4 %	4,1 %

Ce tableau montre :

— que la chute de tension est plus grande si cos $\varphi = 0{,}8$ que lorsque cos $\varphi = 1$,

— que la chute inductive due aux fuites comparée à la chute par résistance est plus grande dans les transformateurs puissants que dans les petits transformateurs,

— que la chute de tension décroît quand la puissance augmente.

Cette dernière conclusion ne s'applique pas aux transformateurs de très grande puissance car *on y accroît intentionnellement les fuites* et la chute inductive qu'elles déterminent.

En effet, plus la chute de tension est grande, plus le courant de court-circuit est faible (relativement). On limite ainsi les risques de destruction du transformateur en cas de

court-circuit car celui-ci est redoutable, non pas surtout à cause de l'effet Joule qu'il provoque mais à cause des forces électrodynamiques qui s'exercent entre les enroulements primaire et secondaire. Ces forces (répulsives parce que les courants primaire et secondaire sont pratiquement en opposition de phase, donc de sens contraires) sont proportionnelles au produit $I_{1\,\text{eff}} \cdot I_{2\,\text{eff}}$ donc (puisque $I_{2\,\text{eff}}$ est lui-même proportionnel à $I_{1\,\text{eff}}$) au *carré du courant de court-circuit*. Elles peuvent disloquer les enroulements.

7. TENSION DE COURT-CIRCUIT. RAPPORT $\frac{I_{0\,\text{eff}}}{I_{n1\,\text{eff}}}$

7.1. Tension de court-circuit. — Il suffit de se reporter au diagramme de Kapp (V. fig. VI-11) pour voir qu'au *point de vue construction*, la tension u_{cc} caractérise l'importance des fuites : u_{cc} est souvent peu différente de u_s. De toute façon, la valeur u_r est facile à déterminer et ainsi, de u_{cc} on déduit la valeur de u_s.

Au point de vue utilisation cette grandeur indique l'importance de la chute de tension (surtout sur réseau inductif) et de l'intensité du *courant de court-circuit* $I_{cc\,\text{eff}}$.

En outre, on verra son importance dans la marche des transformateurs en parallèle.

7.2. Rapport $\frac{I_{0\,\text{eff}}}{I_{n1\,\text{eff}}}$. — Ce rapport est grand lorsque le courant à vide $I_{0\,\text{eff}}$ du transformateur est relativement grand. Ce courant $I_{0\,\text{eff}}$ est essentiellement *réactif* ou magnétisant et il est d'autant plus grand que le circuit magnétique est plus réluctant (*joints mal faits*, entrefers importants) ou que le constructeur a adopté une *induction maximale $\widehat{B}$ élevée* (section de fer plus faible, prix moindre).

Au point de vue *utilisation*, un grand rapport $\frac{I_{0\,\text{eff}}}{I_{1n\,\text{eff}}}$ caractérise, toutes choses égales, une puissance *réactive* absorbée plus grande, ce qui est un inconvénient puisque l'énergie réactive est tarifée.

8. PERTES À VIDE - RENDEMENT

8.1. Essais destinés à la mesure des pertes. — Dans un transformateur, se produisent :

— *des pertes dans le fer :* elles sont données par le wattmètre branché dans le circuit primaire lors d'essai à vide (V. fig. VI-3). En effet, dans cet essai, les pertes par effet Joule dans le secondaire sont nulles et les pertes par effet Joule dans le primaire sont négligeables ($I_{0\,\text{eff}}$ faible).

Ces pertes dans le fer sont *les mêmes dans tous les régimes de marche industrielle;* elles sont très importantes pour l'exploitant, car l'énergie correspondante est payée par l'usager même lorsque le transformateur est à vide ;

— *des pertes par effet Joule dans le cuivre :* elles sont données par le wattmètre branché dans le circuit primaire lors de l'essai en court-circuit (V. fig. VI-4). En effet sous tension réduite, l'induction maximale $\widehat{B}$ est réduite (formule de Kapp), et les pertes dans le fer (proportionnelles à $\widehat{B}_2$) sont négligeables.

8.2. Expression du rendement. — On a montré (V. chap. 2) que le rendement correspondant à un régime de fonctionnement pour lequel les grandeurs secondaires sont $U_{2\,\text{eff}}$, $I_{2\,\text{eff}}$, φ_2, peut s'exprimer par la relation suivante :

$$\eta = 1 - \frac{P_{fer} + P_{cuivre}}{U_{2\,\text{eff}}\, I_{2\,\text{eff}} \cos \varphi_2 + P_{fer} + P_{cuivre}}$$

Si l'on appelle P_0 la puissance absorbée à vide sous la tension $U_{1n\,\text{eff}}$ et P_{cc} la puissance absorbée lors de l'essai en court-circuit lorsque $I_{2cc\,\text{eff}} = I_{2\,\text{eff}}$, alors on peut écrire :

$$\eta = 1 - \frac{P_0 + P_{cc}}{U_{2\,\text{eff}}\, I_{2\,\text{eff}} \cos \varphi_2 + P_0 + P_{cc}}$$

Pour la courbe de rendement et pour le rendement moyen ou pratique, le lecteur se reportera au chapitre 2.

9. TABLEAU DES GRANDEURS CARACTÉRISTIQUES D'UN TRANSFORMATEUR DE PUISSANCE

Les valeurs ci-après se rapportent à des transformateurs normaux (à huile et refroidissement naturel)

S_n (kilovolt-ampères)	20	40	100	420	1 000
$\eta_{\max}$ à cos $\varphi = 1$	96,1	97,1	97,8	98,3	98,5
P_{fer} (watts)	360	550	1 000	3 100	5 950
$\frac{I_{0\,\text{eff}}}{I_{1n\,\text{eff}}}$ en %	11,5	11	8,5	5,5	4,4
u_r en %	2,7	2,2	1,6	1,1	0,9
u_s en %	3,3	3,5	4	5	5,5
u_{cc} en %	4,25	4,1	4,3	5,1	5,6
cos $\gamma = \frac{u_r}{u_{cc}}$ (fig. VI-11)	0,635	0,63	0,372	0,22	0,161

Ce tableau montre que :

— le rendement maximal est excellent et croît avec la puissance nominale,

— le rapport $\frac{I_{0\,\text{eff}}}{I_{1n\,\text{eff}}}$ décroît à puissance nominale croissante (les joints ont moins d'importance par rapport au fer) ;

— l'angle γ est plus petit dans les petits transformateurs que dans les gros.

CHAPITRE VII

TRANSFORMATEURS TRIPHASÉS COUPLAGE DES TRANSFORMATEURS

On peut transformer un système triphasé de tensions en un autre système triphasé au moyen de trois transformateurs monophasés (fig. VII-1).

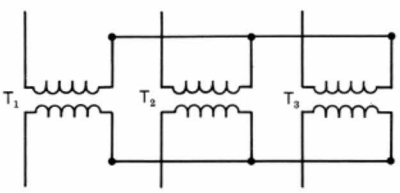


Fig. VII-1

Mais il est plus économique d'utiliser un transformateur triphasé : — soit du type à colonnes (fig. VII-2)
— soit du type cuirassé (fig. VII-3).

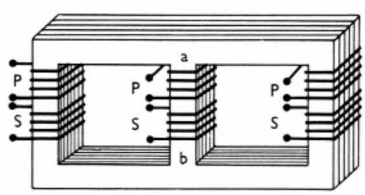


Fig. VII-2

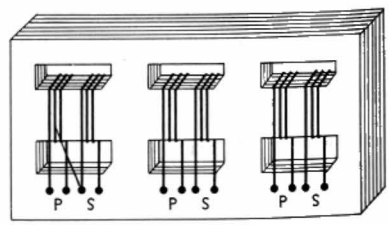


Fig. VII-3

La première sorte de transformateur se rencontre le plus fréquemment. La seconde sorte convient aux appareils de très petite puissance (enroulements mieux protégés) et à ceux de très grande puissance (réduction de la hauteur).

1. MODES DE CONNEXION

Les trois enroulements peuvent être connectés en *étoile* (fig. VII-4), en *triangle* (fig. VII-5) ou en *zigzag* (fig. VII-6). Dans ce dernier mode de connexion, chacun des enroulements est divisé en deux parties bobinées sur deux colonnes différentes avec inversion des entrées et des sorties en passant d'une colonne à l'autre.

L'association dans un même transformateur d'une part au primaire, d'autre part au secondaire, de deux modes de connexion constitue un *couplage*.

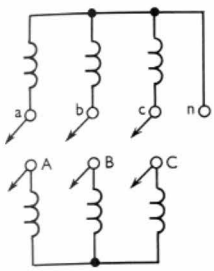


Fig. VII-4

Couplage étoile-étoile

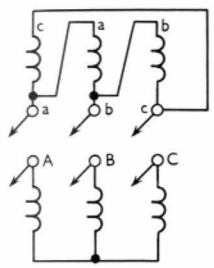


Fig. VII-5

Couplage étoile-triangle

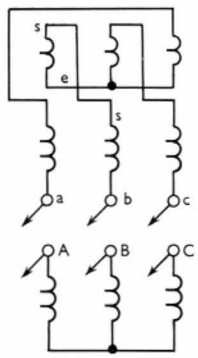


Fig. VII-6

Couplage étoile-zigzag
ABC : bornes H.T.
abc : bornes B.T.

2. SCHÉMAS ET DÉSIGNATIONS CONVENTIONNELS

2.1. Schéma conventionnel. — Sur les schémas il a été convenu de représenter les bornes telles qu'elles apparaissent sur le couvercle des transformateurs et les enroulements tels qu'ils seraient aperçus, après rabattement sur le plan du couvercle, de part et d'autre des bornes (fig. VII-4 à VII-6).

Les bornes *A* et *a*, *B* et *b*, *C* et *c*, sont dites *bornes homologues*. Les grandes lettres sont toujours affectées aux bornes primaires (qui sont pour l'exploitant les bornes H.T.) et les petites lettres aux bornes secondaires (B.T.).

2.2. Désignation conventionnelle. — On est convenu de désigner par des lettres les différents couplages :

Étoile : Y au primaire ; *y* au secondaire,
Triangle : D au primaire ; *d* au secondaire,
Zigzag : Z au primaire ; *z* au secondaire.

Par exemple, le couplage de la figure VII-7 est désigné par le symbole *Yd*.

Quand un enroulement (étoile ou zigzag) comporte une borne *neutre*, on ajoute l'indice *n* à la désignation de l'enroulement qui comporte cette borne. Par exemple, le couplage de la figure VII-8 est désigné par le symbole *Yyn*.

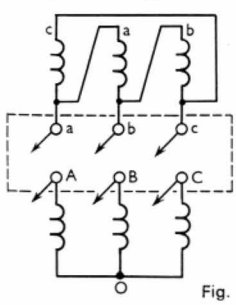


Fig. VII-7

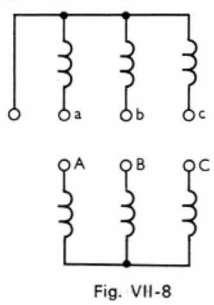


Fig. VII-8

2.3. Désignation des tensions et des f.é.m. — On appelle tension *simple* la tension *d'enroulement* (aux bornes d'une bobine) et tension *étoilée* la tension entre une borne extérieure et le point neutre *réel* ou *fictif*. On appelle tension *composée* la tension entre les bornes extérieures reliées aux conducteurs de phases.

En *étoile* la tension étoilée est égale à la tension simple.

En *triangle* la tension étoilée n'est pas directement mesurable puisque le point neutre n'est pas accessible.

3. INDICE HORAIRE

Lorsque des transformateurs sont destinés à être couplés en parallèle (V. ci-après) il est nécessaire de connaître une caractéristique supplémentaire appelée leur *indice horaire*.

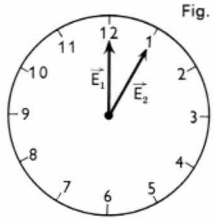
On considère deux enroulements montés sur la même colonne. À partir des f.é.m. induites dans les enroulements on déduit les f.é.m. étoilées. On désigne par e_1 une f.é.m. étoilée primaire, par e_2 la f.é.m. étoilée secondaire correspondante, et par $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ les vecteurs associés à ces grandeurs sinusoïdales. L'angle formé par ces vecteurs étant toujours un multiple de 30°, on imagine que :

— la grande aiguille d'une horloge représente le vecteur $\vec{E}_1$,

— la petite aiguille représente le vecteur $\vec{E}_2$.

On est convenu de placer la grande aiguille en regard de 12 (fig. VII-9) et l'heure indiquée par les aiguilles a été appelée *indice horaire du transformateur*.

Fig. VII-9



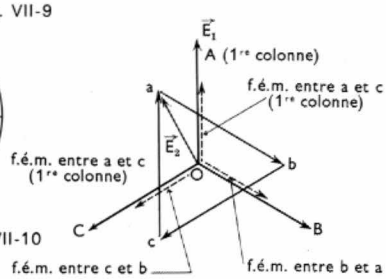


Fig. VII-10

Cet indice dépend du sens relatif des enroulements, et des modes de connexion au primaire et au secondaire. *Le sens relatif étant généralement le même*, on détermine facilement l'indice horaire en tenant compte du couplage si l'on remarque que, sur une *même colonne*, les f.é.m. *d'enroulement* au primaire et au secondaire ont le même sens (puisque produites par un même flux).

Par exemple, pour le transformateur représenté sur la figure VII-5, il s'agit d'un couplage *Yd*11 comme la figure VII-10 le montre.

4. CHOIX DU COUPLAGE

Diverses considérations déterminent le choix du couplage. Les principales sont : *la nécessité d'avoir un fil neutre* pour alimenter un réseau à quatre conducteurs (le choix se porte alors sur les couplages étoile ou zigzag) et les *risques de déséquilibre des tensions* quand les courants absorbés par des récepteurs monophasés (surtout s'ils sont placés entre phase et neutre) sont différents. À cet égard les couplages triangle et zigzag sont préférables au couplage étoile.

On constate qu'un couplage zigzag entraîne un *déficit de puissance de 15* % par rapport à un couplage étoile. Il tient au fait que chaque enroulement secondaire est formé en associant en série deux demi-bobines dans lesquelles les f.é.m. sont déphasées de $\frac{\pi}{3}$ rad. Ce dernier est cependant très employé dans la distribution.

5. MARCHE EN V

Le couplage *triangle-triangle*, peu employé, présente cependant un avantage important : lorsqu'il est réalisé avec trois transformateurs monophasés il permet de maintenir

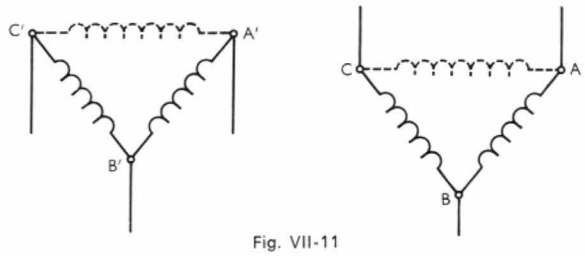


Fig. VII-11

provisoirement l'exploitation du réseau lorsqu'une phase est mise hors service. C'est la *marche en V* (fig. VII-11).

Si l'on supprime provisoirement le transformateur dont les enroulements sont schématisés par AC et $A'C'$ (fig. VII-11), les tensions entre les fils de ligne ne sont pas modifiées ni au primaire, ni au secondaire. Cependant les chutes de tension sont différentes pour les trois phases et de plus l'intensité efficace du *courant admissible* dans les conducteurs n'est plus $\sqrt{3}\,J_{\text{eff}}$ (J_{eff} courant dans les enroulements en service) mais *seulement* J_{eff}. La puissance est donc divisée par $\sqrt{3}$ et c'est pourquoi la marche en V ne doit être que provisoire.

6. COUPLAGE DES TRANSFORMATEURS EN PARALLÈLE

6.1. Objet et définition. — Quand la puissance demandée à un transformateur atteint sa puissance nominale, une extension de l'installation alimentée pose le problème de la mise en service d'un second transformateur.

On dit que deux transformateurs fonctionnent *en parallèle* lorsqu'ils sont reliés électriquement borne à borne, du *côté primaire et du côté secondaire;* les deux appareils sont alimentés par un même réseau et desservent une même installation (fig. VII-12 et VII-13).

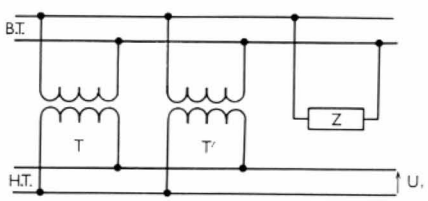


Fig. VII-12

Transformateurs monophasés en parallèle

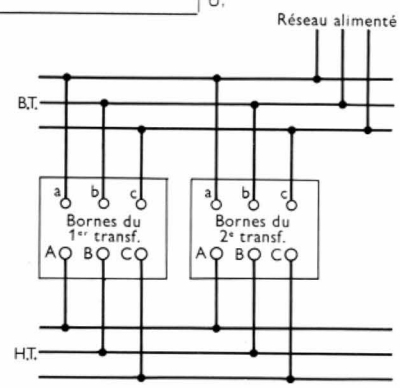


Fig. VII-13

Transformateurs triphasés en parallèle

La marche en parallèle de deux transformateurs implique deux sortes de conditions :

— des conditions qui concernent les caractéristiques des transformateurs (conditions impératives),

— des conditions de régulation de marche.

6.2. Conditions concernant les caractéristiques. — Les *primaires* des transformateurs T et T' étant mis en parallèle, ils sont alimentés sous la même tension u_1. Les diagrammes de Fresnel des deux transformateurs comportent le même vecteur $\vec{U}_1$ et le même vecteur $\vec{E}_1$ (égal à $-\vec{U}_1$ lorsque le transformateur est à vide) (V. fig. V-8).

Lorsqu'on branche les secondaires de T et T' en parallèle, si les f.é.m. secondaires e_2 (pour T) et e'_2 (pour T') ne sont pas identiques (c'est-à-dire si les vecteurs $\vec{E}_2$ et $\vec{E}'_2$ ne sont pas égaux et superposés) un *courant de circulation interne*, sans effet utile, prend naissance dans les enroulements secondaires ; il peut même être excessif.

Dans un diagramme de Fresnel, pour que les vecteurs $\vec{E}_2$ et $\vec{E}'_2$ soient superposables, il faut :

1° *Qu'ils aient même module :* les valeurs efficaces $E_{2\,\text{eff}}$ et $E'_{2\,\text{eff}}$ doivent être égales ; comme les f.é.m. $E_{1\,\text{eff}}$ et $E'_{1\,\text{eff}}$ sont égales, il faut donc que T et T' aient le *même rapport de transformation nominal.*

2° *Qu'ils aient même angle polaire,* c'est-à-dire que e_2 et e'_2 soient en phase. Cela implique :

a) pour des transformateurs monophasés, que les sens relatifs des enroulements primaire et secondaire entre les bornes de même nom soient *les mêmes* pour les deux transformateurs T et T'. On peut vérifier si les conditions précédentes sont réalisées en disposant un voltmètre aux bornes de l'interrupteur de couplage (fig. VII-14). Si son indication est nulle les conditions impératives de couplage sont réalisées ;

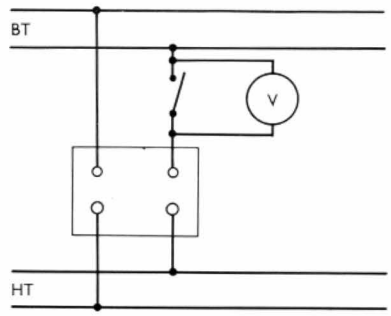
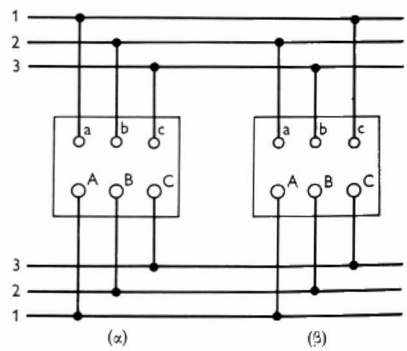


Fig. VII-14

b) pour les transformateurs *triphasés,* qu'ils aient le *même indice horaire,* puisque celui-ci caractérise le déphasage entre e_1 et e_2 (V. ci-dessus).

Si les indices horaires des deux transformateurs diffèrent *d'un multiple de 4,* il est possible de les rendre égaux par le jeu des connexions des bornes de *même nom* des deux appareils et des barres de couplage. Par exemple, dans la figure VII-15 où les tensions entre barres et neutre se succèdent dans l'ordre 1, 2, 3, substituer le montage β (permutation circulaire) au montage α permet de conserver les mêmes connexions intérieures (passage du montage δ au montage γ). Le lecteur vérifiera ainsi qu'une permutation circulaire à partir du montage ajoute ou retranche à l'indice horaire un multiple de 4.

Fig. VII-15 a



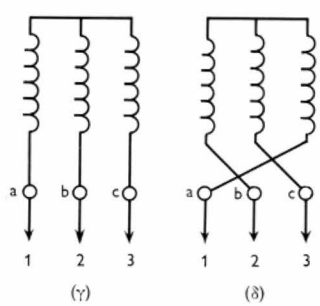


Fig VII-15 b

Cela explique le fait que l'on ait rangé les transformateurs triphasés en 4 groupes de couplage :

— groupe I : indices 0, 4, 8,
— groupe II : indices 6, 10, 2,
— groupe III : indices 1, 5,
— groupe IV : indices 7, 11.

Deux appareils appartenant à un même groupe de couplage peuvent être couplés en parallèle grâce à des connexions convenables.

La deuxième condition impérative de couplage des transformateurs *triphasés* en parallèle s'énonce donc ainsi : il faut que les deux appareils *appartiennent à un même groupe de couplage*.

On peut vérifier si cette condition est réalisée en connectant (fig. VII-16) deux voltmètres entre deux bornes de l'interrupteur de couplage : leurs indications doivent être nulles.

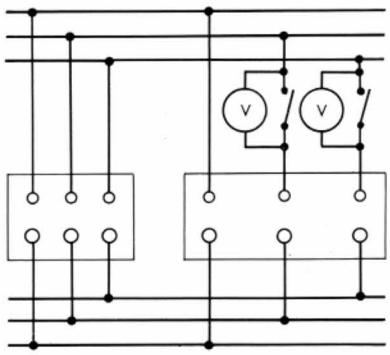


Fig. VII-16

6.3. Conditions de régulation de marche. — Deux transformateurs T et T', de puissances nominales respectives S_n et S'_n sont couplés en parallèle dans le but de faire fournir à l'ensemble la puissance $S_t = S_n + S'_n$ (S_t désignant la puissance apparente du réseau).

Cela revient à dire que l'idéal recherché est que, quel que soit le facteur de puissance du réseau alimenté (étant donné que les tensions $U_{2\,\text{eff}}$ sont nécessairement égales pour les 2 appareils), les courbes $U_{2\,\text{eff}}\,(S)$ des deux transformateurs soient celles de la figure VII-17, la somme des abscisses des points figuratifs représentant la puissance apparente du réseau.

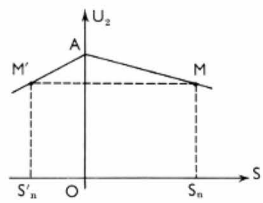


Fig. VII-17

Pour deux transformateurs en parallèle les diagrammes de Kapp comportant les mêmes vecteurs $\vec{U_1}$ et $\vec{U_2}$, les hypoténuses des triangles de Kapp sont superposées (fig. VII-18). L'une doit correspondre à S_n, l'autre à S'_n. Pour une bonne régulation de marche il faut donc que les deux transformateurs aient :

1° *Le même rapport de transformation nominal* pour que les graphes $U_{2\,\text{eff}}(S)$ (fig. VII-17) partent du même point A.

2° *La même tension de court-circuit* car, dans ce cas, les hypoténuses de Kapp correspondent respectivement aux puissances S_n et S'_n (les points B et B' sont superposés ; fig. VII-18).

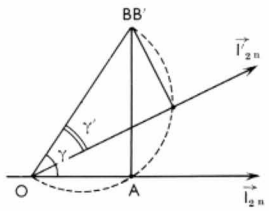


Fig. VII-18

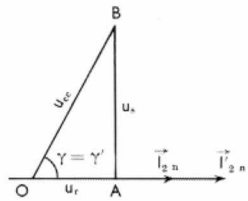


Fig. VII-19

3° *Le même argument* ($\gamma = \gamma'$) : s'il en est ainsi les courants secondaires de T et T' sont en phase ; ils s'ajoutent *arithmétiquement* et on peut toujours écrire que S_t est la somme des puissances apparentes de T et de T' (fig. VII-19).

La première condition était déjà impérative ; elle est d'ailleurs facile à réaliser par le jeu de prises sur les enroulements primaire et secondaire.

Il n'en est pas de même des deux autres. Lorsqu'on compare les tensions de court-circuit et les arguments de deux transformateurs de puissances différentes, on constate que leurs tensions de court-circuit et leurs arguments sont nettement différents. Les règlements de l'U.T.E. fixant le déficit de S_t sur la somme $(S_n + S'_n)$ à un maximum de 5 % de cette somme, l'expérience montre que cette règle n'est pas satisfaite dès que le rapport $\dfrac{S_n}{S'_n}$ est supérieur à 2. Dès lors *aucune garantie* n'est donnée quant à la régulation de marche de deux transformateurs en parallèle dès que le *rapport de leurs puissances nominales est égal à 2*. Au-delà de ce rapport il n'est pas avantageux de brancher un transformateur en parallèle avec un autre. Des artifices (action sur m, addition d'une inductance en série avec l'un des transformateurs) permettent cependant de réaliser la condition de l'U.T.E. quand les transformateurs ont des puissances trop inégales.

CHAPITRE VIII

TRANSFORMATEURS SPÉCIAUX

Ce sont les transformateurs qui n'entrent pas dans les catégories que nous avons décrites (transformateurs de puissance monophasés et triphasés).

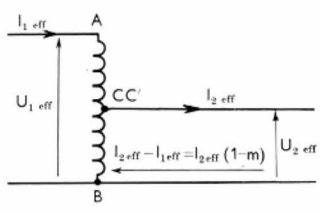
1. AUTOTRANSFORMATEUR

1.1. Principe. — On va considérer un transformateur monophasé (fig. VIII-1) dont le primaire comporte n_1 spires alimentées sous la tension u_1 tandis que le secondaire est formé de n_2 spires placées sous la tension u_2.

$$\frac{U_{1\,\text{eff}}}{U_{2\,\text{eff}}} = \frac{n_1}{n_2} \rightarrow \frac{U_{1\,\text{eff}}}{n_1} = \frac{U_{2\,\text{eff}}}{n_2}$$

On dit que le nombre de volts par spire est le même au primaire et au secondaire. Par suite, si l'on a n_2 spires entre B et C', la tension efficace entre ces points est aussi égale à $U_{2\,\text{eff}}$. On peut connecter les points B et D d'une part, les points C et C' d'autre part. On obtient la même tension secondaire avec un transformateur (fig. VIII-2) ne comportant qu'un seul enroulement AB sur lequel une prise a été effectuée en C : c'est un *autotransformateur*.

Fig. VIII-1



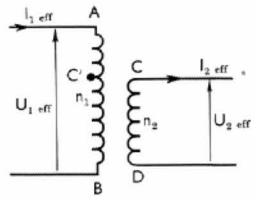
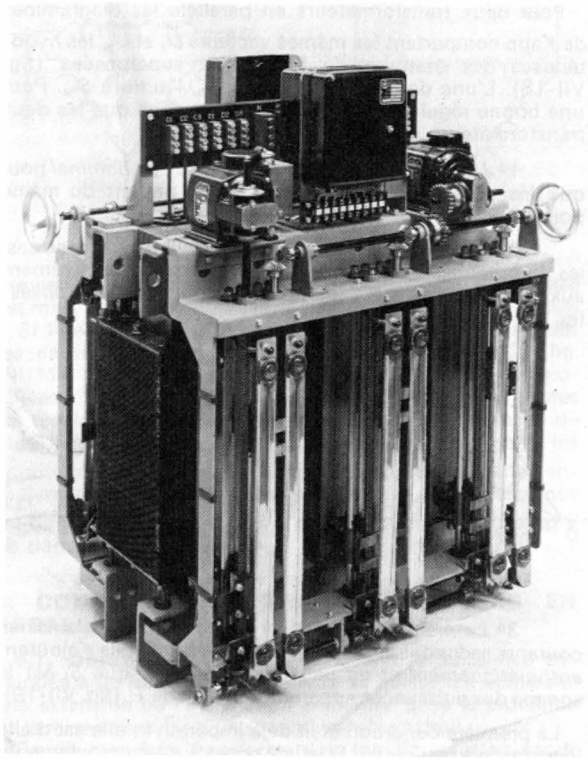
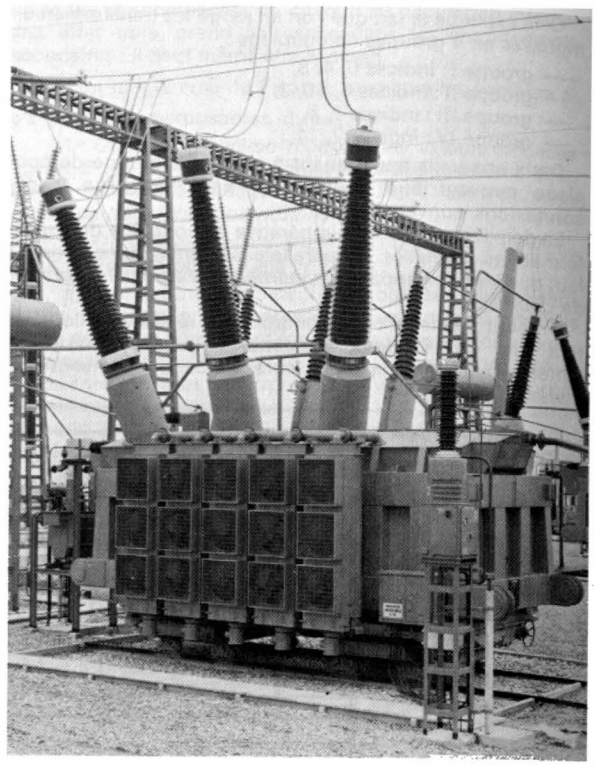


Fig. VIII-2



Autotransformateur réglable (*Clémançon*)



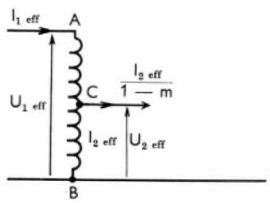
Autotransformateur triphasé (*Alsthom*)

Dans les deux montages le nombre de *volts par spire* est le même et donc l'induction maximale $\widehat{B}$ dans le fer est la même (formule de Kapp). Cependant dans l'autotransformateur, dans la portion *CB* viennent s'ajouter les courants primaire et secondaire. Comme ils sont pratiquement en *opposition de phase* l'intensité efficace du courant résultant est sensiblement égale à la différence des valeurs efficaces des courants i_1 et i_2 ; elle est égale à :

$$I_{2\,\text{eff}} - I_{1\,\text{eff}} = I_{2\,\text{eff}} \left(1 - \frac{I_{1\,\text{eff}}}{I_{2\,\text{eff}}}\right) = I_{2\,\text{eff}}\ (1 - m)$$

1.2. Avantage économique de l'autotransformateur. — Dans la portion *CB* on peut avoir la même densité de courant J_{eff} tout en fournissant au récepteur un courant d'intensité égale à $\dfrac{I_{2\,\text{eff}}}{1 - m}$ (fig. VIII-3), courant supérieur à $I_{2\,\text{eff}}$ puisque $(1 - m)$ est inférieur à 1.

Fig. VIII-3



Donc, alors que le fer et le cuivre sont dans les mêmes conditions (induction maximale : $\widehat{B}$, densité de courant : J_{eff}) l'appareil monté en autotransformateur a une puissance apparente égale à :

$S_t = \dfrac{U_{2\,\text{eff}}\ I_{2\,\text{eff}}}{1 - m}$ (elle est appelée *puissance traversante*)

alors qu'en transformateur ordinaire cette puissance est seulement :

$S_d = U_{2\,\text{eff}}\ I_{2\,\text{eff}}$ (puissance de dimensionnement)

pour le même rapport de transformation, les mêmes courant et tension primaires.

On voit donc que l'autotransformateur, à dimensionnement (et prix) égal, est *plus puissant* que le transformateur à deux enroulements et il *l'est d'autant plus que le rapport de transformation est plus voisin de 1*.

D'autre part, les inductances de fuites et les résistances des enroulements sont les mêmes que dans le transformateur ordinaire ; la chute de tension et les pertes sont les mêmes mais en *valeur relative* (par rapport au courant secondaire et à la puissance), elles sont plus faibles. Dès lors, avec un autotransformateur, *la chute relative est plus faible* et le *rendement est plus grand* qu'avec un appareil ordinaire.

1.3. Inconvénients de l'autotransformateur. — Les inconvénients de l'autotransformateur sont de deux sortes :

1° Ceux qui résultent d'une *borne commune* au primaire et au secondaire, à savoir l'obligation d'isoler la partie B.T. autant que la partie H.T. par rapport à la masse. En effet si le conducteur *A'A* (fig. VIII-4) entre accidentellement en contact avec la masse, le conducteur *CC'* est

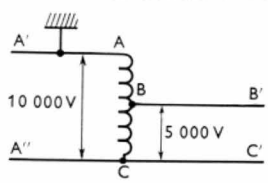


Fig. VIII-4

porté au potentiel de la haute tension par rapport au sol. C'est la raison pour laquelle il est interdit d'utiliser un autotransformateur pour alimenter de petits appareils (jouets) qui fonctionnent sous des tensions faibles (24 V ou moins). Si l'accident signalé ci-dessus se produit entre le jouet et le sol, la d.d.p. peut être égale à celle du secteur (127 ou 220 V selon le cas).

2° Ceux qui résultent de la valeur élevée du courant de court-circuit (conséquence de la faible chute de tension). On remédie à cet inconvénient par l'accroissement systématique des fuites lorsque l'appareil est de grande puissance et que le court-circuit est à craindre.

1.4. Autotransformateur triphasé. — On le monte généralement en étoile mais, dans la construction (pour

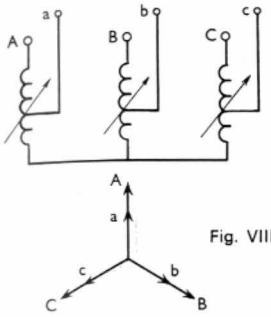


Fig. VIII-5

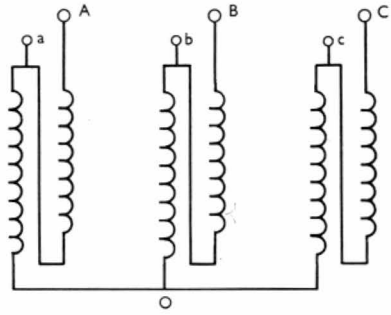


Fig. VIII-6

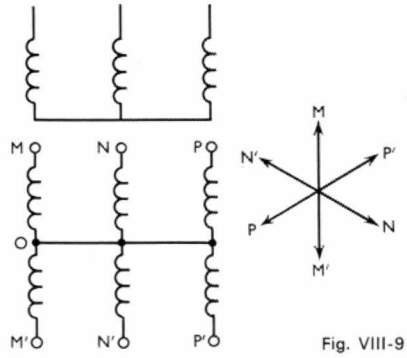


Fig. VIII-9

réduire les fuites), l'enroulement unique entre phase et neutre est formé de deux portions qui occupent chacune *toute la hauteur* d'une même colonne (fig. VIII-5 et 6).

1.5. Utilisation de l'autotransformateur. — Le rapport de transformation de l'autotransformateur peut être supérieur à 1. Cependant, dès qu'il est supérieur à 2 environ, l'avantage économique de l'autotransformateur est insignifiant et c'est pourquoi cet appareil est utilisé essentiellement :

1° *Au laboratoire* pour régler, entre certaines limites, la tension alternative d'alimentation de différents appareils (fig. VIII-7) ; il est alors très souvent appelé un *alternostat*.

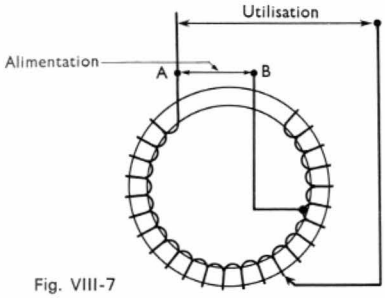


Fig. VIII-7

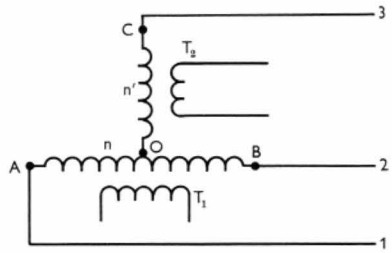


Fig. VIII-10
Montage Scott

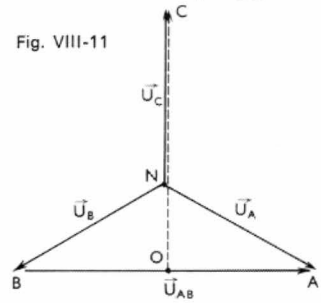


Fig. VIII-11

2° Dans le *réseau d'interconnexion* pour relier deux réseaux soumis à des tensions voisines.

3° Dans les *applications électromécaniques*, pour le démarrage des gros moteurs sous une tension momentanément réduite (fig. VIII-8).

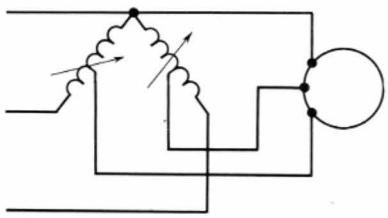


Fig. VIII-8

2. TRANSFORMATEURS DE PHASES

Ce sont ceux qui transforment un système polyphasé en un autre système polyphasé comportant un nombre de phases différent.

2.1. Transformateur triphasé-hexaphasé. — C'est le transformateur le plus simple. La figure VIII-9 en donne le schéma ainsi que les vecteurs associés aux six tensions secondaires régulièrement déphasées de $\frac{\pi}{6}$ rad. En effet, chaque enroulement fournit deux tensions en opposition de phase puisqu'elles sont définies par rapport au point *O*, milieu de l'enroulement.

2.2. Transformateurs triphasé-diphasé et réciproquement

1° *Transformateurs monophasés montés en Scott.* — Deux transformateurs monophasés T_1 et T_2 sont montés comme l'indique la figure VIII-10 (le primaire de T_1 comporte une prise *O* en son milieu). Les points *A*, *B* et *C* sont reliés aux conducteurs d'un réseau triphasé.

Un diagramme de Fresnel comportant les vecteurs associés aux trois tensions simples du système triphasé permet de voir que les tensions u_{AB} et u_{CO} sont déphasées de 90° (fig. VIII-11). En effet, la tension u_{AB} est égale à la différence entre les tensions simples u_A et u_B ; elle est représentée par un vecteur joignant les points *B* et *A* ($\vec{U}_{AB} = \vec{U}_A - \vec{U}_B$). La tension u_{CO} correspond au vecteur joignant les points *O* et *C* ($\vec{U}_{CO} = \vec{U}_C - \vec{U}_O$) ; sur le graphique le point *O* se trouve au milieu du vecteur $\vec{U}_{AB}$ car la d.d.p. u_{AO} est la moitié de la d.d.p. u_{AB}. Les vecteurs $\vec{U}_{AB}$ et $\vec{U}_{CO}$ étant perpendiculaires, cela implique que les tensions u_{CO} et u_{AB} sont déphasées de $\frac{\pi}{2}$ rad. Il en est de même des tensions secondaires des transformateurs T_1 et T_2.

Si ces secondaires ont le même nombre de spires il faut que les tensions entre leurs bornes soient les mêmes. Si les primaires comportent *n* spires entre *A* et *B* et *n'* spires entre *O* et *C*, il faut que les relations suivantes soient satisfaites (si l'on tient compte du fait que $U_{CO\,\text{eff}} = \frac{\sqrt{3}}{2} U_{AB\,\text{eff}}$) :

$$\frac{U_{CO\,\text{eff}}}{n'} = \frac{U_{AB\,\text{eff}}}{n} \quad \Rightarrow \quad \frac{n'}{n} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2° *Transformateur Leblanc.* — Grâce à une subdivision convenable des enroulements portés par les trois colonnes d'un transformateur triphasé et grâce à des connexions convenables entre ces portions, il est possible d'obtenir un système de tensions diphasé à partir d'un système triphasé et réciproquement. La figure VIII-12

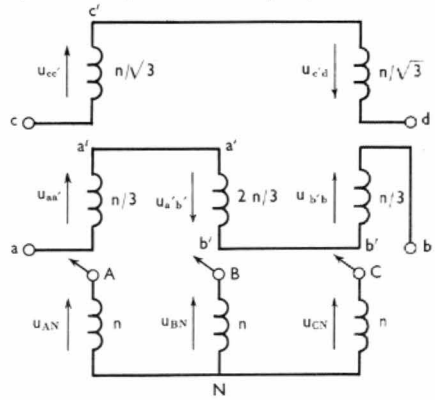
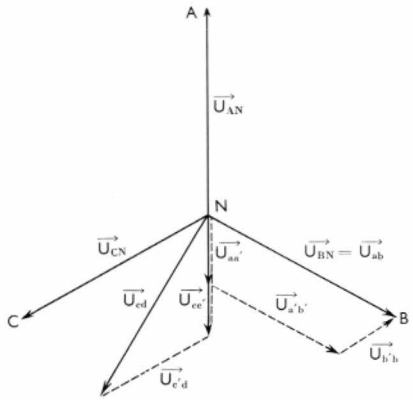


Fig. VIII-12

Fig. VIII-13



indique cette répartition sur les colonnes 1, 2, 3. Le diagramme vectoriel de la figure VIII-13 montre clairement que, dans ces conditions, si les tensions représentées par les vecteurs $\overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{NB}$, $\overrightarrow{NC}$ forment un système triphasé, les tensions u_{ab} et u_{cd} ont même amplitude et sont déphasées de 90° l'une par rapport à l'autre. Pour construire ce diagramme il faut encore appliquer le principe déjà énoncé : sur une *même colonne*, les f.é.m. induites dans *toutes les bobines* sont *en phase* tandis que les d.d.p. aux bornes des primaires et secondaires sont en opposition de phase (du fait des conventions de signe choisies).

La tension u_{ab} est la somme des tensions $u_{aa'}$ $\left(U_{aa'\,\mathrm{eff}} = \dfrac{U_{AN\,\mathrm{eff}}}{3}\right)$, $u_{a'b'}$ $\left(U_{a'b'\,\mathrm{eff}} = \dfrac{2}{3}\,U_{BN\,\mathrm{eff}}\right)$ et $u_{b'b}$ $\left(U_{b'b\,\mathrm{eff}} = \dfrac{U_{CN\,\mathrm{eff}}}{3}\right)$. La tension u_{cd} est la somme des tensions $u_{cc'}$ $\left(U_{cc'\,\mathrm{eff}} = \dfrac{U_{AN\,\mathrm{eff}}}{\sqrt{3}}\right)$ et $u_{c'd}$ $\left(U_{c'd\,\mathrm{eff}} = \dfrac{U_{CN}}{\sqrt{3}}\right)$. Sur le diagramme de Fresnel ces tensions u_{ab} et u_{cd} sont bien figurées par deux vecteurs perpendiculaires

$$\overrightarrow{U_{ab}} = \overrightarrow{U_{aa'}} + \overrightarrow{U_{a'b'}} + \overrightarrow{U_{b'b}}$$
$$\overrightarrow{U_{cd}} = \overrightarrow{U_{cc'}} + \overrightarrow{U_{c'd}}$$

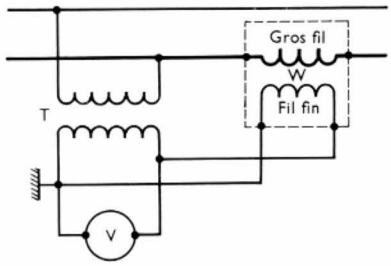
3. TRANSFORMATEURS DE MESURES

Ce sont les transformateurs qui alimentent des appareils de mesures (voltmètres, ampèremètres, wattmètres, compteurs. V. t. 2, Mesures et appareils de mesure, chap. 18) ainsi que des relais, afin de ne pas amener sur les tableaux de distribution des conducteurs à haute tension.

Ils permettent, en outre, l'emploi d'appareils de mesure courants (voltmètres de calibre 100 ou 150 V, ampèremètres de calibre 5 ou 10 ampères).

3.1. Transformateur de tension. — La figure VIII-14 donne le montage d'un transformateur de tension monophasé utilisé pour alimenter un voltmètre et le circuit-

Fig. VIII-14



tension d'un wattmètre (on suppose momentanément le circuit-courant directement inséré dans le réseau primaire à haute tension). Il faut remarquer que le secondaire est *toujours réuni à une prise de terre* pour éviter le risque d'électrocution par contact entre primaire et secondaire.

3.2. Grandeurs caractéristiques intéressant l'usager. — Un transformateur de tension (ou de potentiel) est *construit* de façon que la tension secondaire (lue sur le voltmètre) soit *proportionnelle* à la tension du réseau. Il faut que la *chute de tension* dans le transformateur soit réduite et pour cela il est nécessaire que le *courant secondaire soit relativement faible* (le transformateur est beaucoup plus gros qu'il ne faut pour la puissance qu'il fournit) et *que les fuites soient les plus faibles possible*.

Cette double condition doit être particulièrement réalisée si le transformateur de tension doit alimenter le circuit-tension d'un wattmètre (fig. VIII-14). Dans ce cas, pour que la puissance mesurée soit égale à la puissance consommée, il faut en outre que les déphasages φ entre la tension (H.T.) et le courant primaires et φ' entre la tension (B.T.) secondaire et le courant primaire soient tels que :

$$\cos\,\varphi' = \pm\cos\,\varphi$$

Les grandeurs qui intéressent *l'usager* sont donc :

1° *La puissance de précision :* c'est la puissance apparente maximale qui peut être obtenue avec le transformateur sous la tension nominale secondaire, sans que les erreurs de mesures résultant de l'utilisation du transformateur dépassent les valeurs garanties.

2° *L'erreur de rapport :* avec les notations habituelles elle est définie par le rapport suivant :

$$\varepsilon_t = \frac{U_{2\,\mathrm{eff}} - m\,U_{1\,\mathrm{eff}}}{m\,U_{1\,\mathrm{eff}}} \times 100$$

3° *L'erreur de déphasage* ψ_t : ψ_t désigne le déphasage entre les tensions $-mu_1$ et u_2, c'est-à-dire l'angle compris entre les vecteurs $-m\overrightarrow{U_1}$ et $\overrightarrow{U_2}$ qui leur correspondent (fig. VIII-15). Cette erreur est *négative* dans le cas

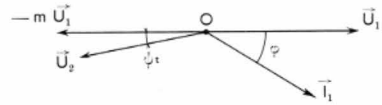


Fig. VIII-15

de la figure : le wattmètre donne une indication proportionnelle au cosinus de l'angle compris entre $\overrightarrow{U_2}$ et $\overrightarrow{I_1}$ [cos $(\pi - \varphi - \psi_t) = \cos\,(\varphi + \psi_t)$] plus faible que le cosinus de l'angle compris entre $\overrightarrow{U_1}$ et $\overrightarrow{I_1}$ (cos φ).

En outre, l'usager doit savoir qu'il faut *éviter le court-circuit* d'un transformateur de potentiel puisqu'il est toujours sous la tension primaire normale et qu'il a une faible chute de tension.

3.3. Transformateur de courant (ou d'intensité). La figure VIII-16 en donne un montage où un transformateur de courant (T.I.) est employé pour alimenter le circuit-courant d'un wattmètre. On voit qu'il est totalement différent du montage de la figure VIII-15.

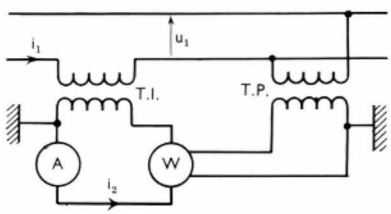


Fig. VIII-16

Grandeurs intéressant l'usager. — Un transformateur de courant est construit de façon que le courant secondaire (lu sur l'ampèremètre) soit proportionnel au courant primaire (dans le réseau H.T.). Il faut donc réaliser l'égalité suivante : $n_1\,i_1 = -\,n_2\,i_2$, c'est-à-dire que $n_1 i_0$ (notations habituelles. V. chap. 6) soit nul. Nous avons montré que $I_{0\,\mathrm{eff}}$ est négligeable lorsque le circuit magnétique est excellent (joints bien faits) et l'induction maximale $\widehat{B}$ faible. Dans les transformateurs de courant elle est seulement voisine de 0,15 tesla.

Cette double condition doit être particulièrement bien réalisée lorsque le transformateur de courant doit en même temps alimenter le circuit-courant d'un wattmètre ou d'un compteur. En effet, il faut alors que les déphasages φ_1 (déphasage entre u_1 et i_1) et φ_2 (déphasage entre u_2 et i_2) soient égaux à 180° près. Autrement dit, les vecteurs $\overrightarrow{I_1}$ et $\overrightarrow{I_2}$ correspondant à i_1 et i_2 doivent être opposées (fig. VIII-17).

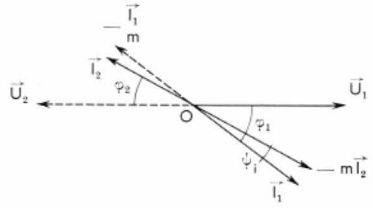


Fig. VIII-17

Les grandeurs qui intéressent l'usager sont donc :

1° *La puissance de précision* (même définition que pour le transformateur de tension).

2° *L'erreur de rapport :* elle est donnée par les rapports suivants :

$$\varepsilon_i = \frac{I_{2\,\text{eff}} - \dfrac{I_{1\,\text{eff}}}{m}}{\dfrac{I_{1\,\text{eff}}}{m}} \times 100 = 100 \left(\frac{m\, I_{2\,\text{eff}}}{I_{1\,\text{eff}}} - 1 \right) \%$$

3° *L'erreur de déphasage* ψ_i. (ψ_i est l'angle de déphasage entre les courants i_1 et $-mi_2$, c'est-à-dire l'angle compris entre les vecteurs $\vec{I}_1$ et $-m\vec{I}_2$). Cette erreur est *toujours positive* car le courant $-mi_2$ est toujours en avance sur i_1.

Remarque : Un transformateur de courant ne doit *jamais fonctionner avec le circuit secondaire ouvert.* S'il ne débite pas ($I_{2\,\text{eff}} = 0$), l'équation des forces magnétomotrices se réduit à $n_1 i_1 = n_1 i_0$ et la force magnétomotrice résultante $n_1 i_0$ (normalement très faible) peut être très grande. Avec un courant $I_{1\,\text{eff}}$ nominal, l'induction maximale $\widehat{B}$ atteint une valeur élevée : la tension entre bornes secondaires peut être la cause d'électrocution et le fer du transformateur s'échauffe dangereusement. Il faut *court-circuiter les bornes du secondaire avant de débrancher l'ampèremètre* qui est alimenté par cet enroulement.

3.4. Montage triphasé. — Les transformateurs de potentiel ou ceux de courant sont montés conformément

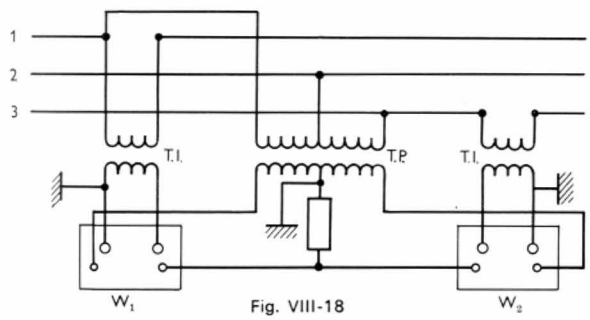


Fig. VIII-18

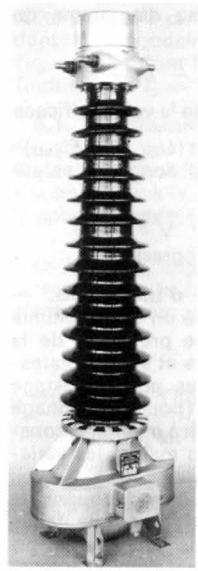
au schéma de la figure VIII-18. Ce montage correspond à la mesure de puissance en triphasé par la méthode des deux wattmètres. (V. t. 2. Mesures et appareils de mesure, chap. 20).

4. RÉGULATEUR D'INDUCTION

C'est un transformateur dont le rapport de transformation est réglable.

4.1. Principe. — C'est une machine triphasée dont le stator et le rotor portent un enroulement triphasé (même nombre de pôles : $2p$) ; la figure VIII-19 donne la vue frontale dans la position initiale. On connecte les enroulements *statoriques en série* sur un réseau et les enroulements *rotoriques en dérivation* (chacun est alimenté sous la tension simple $U_{S\,\text{eff}}$; fig. VIII-20). On peut regarder l'appareil comme un transformateur statique dont l'enroulement rotorique est le primaire et l'enroulement statorique, le secondaire. Les enroulements du rotor produisent un flux glissant et des f.é.m. sont induites dans les enroulements du stator.

Les équations du transformateur parfait peuvent être appliquées à cet appareil. Lorsque les enroulements sont



Transformateur de courant à cuve de 2 000 A (*Brown Boveri-C.E.M.*)

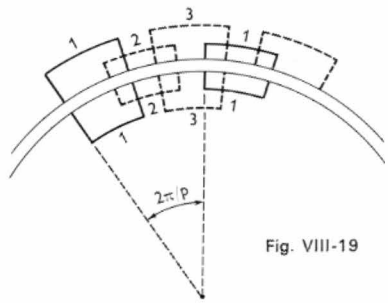


Fig. VIII-19

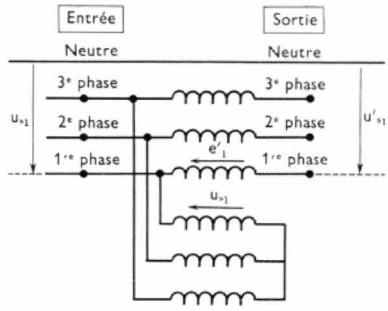


Fig. VIII-20

dans la position représentée sur la figure VIII-19, si l'on considère la première phase (et avec les notations de la figure) :

— au primaire la tension u_{S_1} est égale à tout instant à l'opposé de la f.é.m. induite e_1 :

$$u_{S_1} = -e_1$$

— au secondaire une f.é.m. e'_1 est induite ;

— la tension de sortie u'_{S_1} est égale à la somme algébrique de la tension u_{S_1} et de cette f.é.m. e'_1. En tenant compte des déphasages respectifs de ces grandeurs on obtient le diagramme de la figure VIII-21 :

$$u'_{S_1} = u_{S_1} + e'_1$$

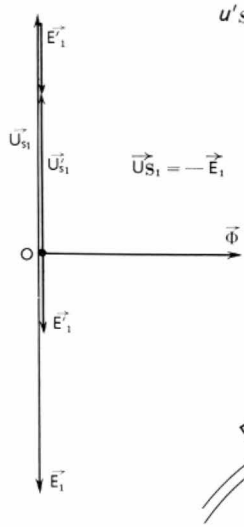


Fig. VIII-21

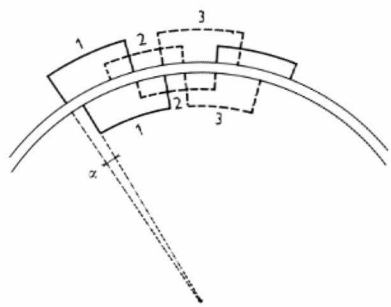


Fig. VIII-22

Si l'on décale le rotor dans le sens de rotation du flux glissant d'un angle α (fig. VIII-22) ce flux atteint une bobine statorique avant la bobine rotorique correspondante ; e'_1 n'est plus en phase avec e_1 mais déphasé de l'angle $\varphi = p\alpha$ en avant. Les relations mathématiques pré-

cédentes se traduisent par un nouveau diagramme de Fresnel (fig. VIII-23) :

$$\vec{U'}_{S_1} = \vec{U}_{S_1} + \vec{E'}_1 \quad \text{ou :} \quad \vec{U'}_{S_1} = -\vec{E}_1 + \vec{E'}_1$$

En décalant le rotor entre 0 et $\frac{\pi}{p}$ on règle la valeur efficace de la tension u'_{S_1} entre $(U_{S_1\,\text{eff}} - E'_{1\,\text{eff}})$ et $(U_{S_1\,\text{eff}} + E'_{1\,\text{eff}})$; la tension de sortie entre conducteurs a donc une valeur efficace comprise entre :

$$(U_{C\,\text{eff}} - \sqrt{3}\,E'_{1\,\text{eff}}) \quad \text{et} \quad (U_{C\,\text{eff}} + \sqrt{3}\,E'_{1\,\text{eff}})$$

Le réglage de la tension aval est très progressif.

4.2. Applications du régulateur d'induction. — Le régulateur d'induction peut être utilisé en électrochimie et en électrométallurgie pour le réglage progressif de la tension (donc de la puissance) des fours et sur les plates-formes d'essais de machines électriques pour l'ajustage précis des tensions alternatives d'essais (pour l'étalonnage des compteurs et wattmètres). Il sert aussi à maintenir constante la tension en un point d'un réseau malgré les variations de charge.

Il peut avoir un très faible entrefer, être dépourvu de bagues et de balais (un fil souple suffit pour la faible rotation du rotor), et être immergé dans l'huile ; dès lors il fonctionne avec un bon rendement. Malheureusement il faut souvent employer un transformateur pour réduire la tension d'alimentation du rotor. Par ailleurs, le déphasage (parfois inadmissible) entre la tension réglée et la tension non réglée constitue un inconvénient sérieux.

5. AMPLIFICATEUR MAGNÉTIQUE

Cet appareil, appelé *inductance saturable commandée* ou *transducteur magnétique*, a pour but de régler, dans de larges limites, la puissance fournie à un récepteur Z (à courant alternatif ou non) en agissant sur un faible courant continu dit *courant de contrôle* (fig. VIII-24).

5.1. Principe. — Dans cet appareil on utilise le fait que l'inductance L d'une bobine décroît très rapidement (fig. VIII-25) dès que le circuit magnétique de celle-ci se sature.

Sur un circuit magnétique (fig. VIII-26) on dispose :

— un enroulement A (enroulement de puissance) qui se place en série avec le récepteur Z et la source de courant alternatif ;

— un enroulement B (enroulement de commande) parcouru par un courant continu réglable (courant de contrôle).

Ce courant permet de saturer plus ou moins le fer et l'on aboutit au résultat suivant : sur la courbe $B(H)$ le point figuratif se déplace (du fait du courant alternatif dans A) entre les points M' et N' au lieu d'évoluer entre les points M et N, c'est-à-dire dans une zone où l'inductance L est plus grande. La chute de tension dans A est donc plus faible et la tension d'alimentation de Z est plus grande ainsi que la puissance fournie à ce récepteur.

Le facteur d'amplification en puissance A_p est le rapport d'une variation ΔP_s de la puissance de sortie (puissance dans Z) et d'une variation Δp de la puissance de contrôle. La puissance de contrôle p est la puissance dissipée par effet Joule dans l'enroulement de contrôle ; si sa résistance est appelée r et s'il est parcouru par un courant continu I_c on peut écrire : $p = rI^2_c$

$$A_p = \frac{\Delta P_s}{\Delta p}$$

Le courant continu de contrôle peut être très faible si la bobine B comporte de nombreuses spires d'un conducteur fin.

5.2. Constitution. Application. — Le montage de la figure VIII-25 présente un grave inconvénient : une f.é.m. alternative peut être induite dans la bobine B de contrôle et le courant dans celle-ci est ondulé. Pour remédier à cet inconvénient on divise A en deux moitiés (fig. VIII-27) qui engendrent dans B des flux Φ_1 et Φ_2 toujours égaux et opposés.

On obtient le même résultat en associant convenablement deux transducteurs magnétiques (fig. VIII-28). Les

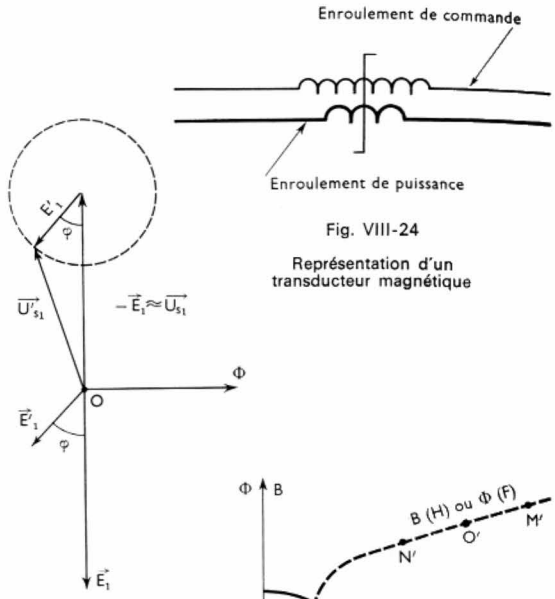


Fig. VIII-24

Représentation d'un transducteur magnétique

Fig. VIII-23

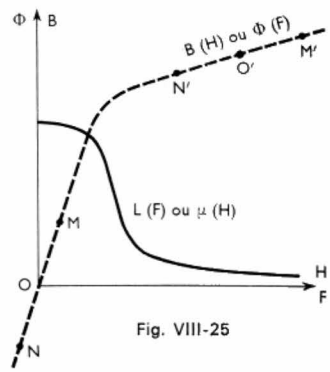


Fig. VIII-25

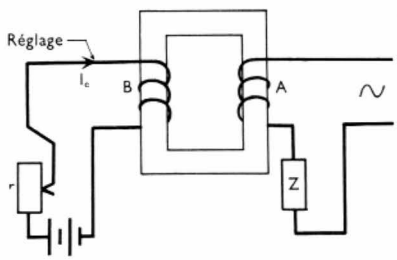


Fig. VIII-26

Transducteur magnétique. Principe

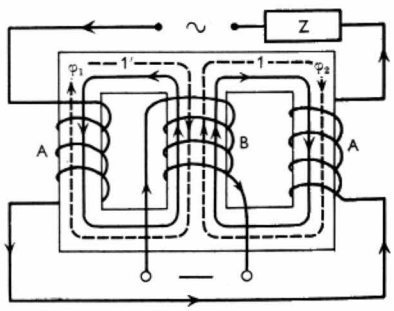


Fig. VIII-27

flux dû à B
flux dû à A

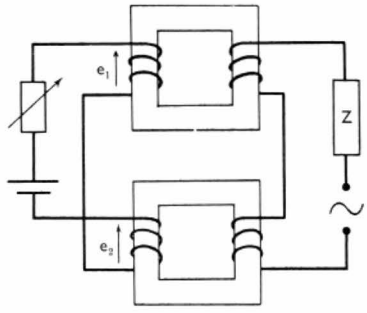


Fig. VIII-28

enroulements de puissance sont disposés en série dans le circuit comprenant le récepteur Z et le générateur de courant alternatif. Dans les enroulements de commande sont induites des f.é.m. alternatives e_1 et e_2 de même amplitude et de même fréquence ; il faut associer les enroulements de façon à ce qu'elles soient constamment en opposition pour qu'aucun courant alternatif ne traverse le circuit de commande.

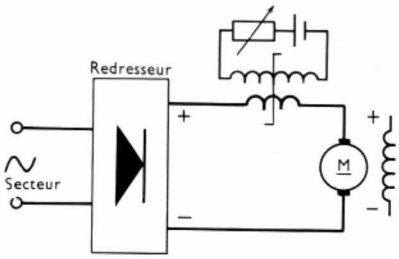


Fig. VIII-29

Réglage de la vitesse d'un moteur à courant continu

Cet appareil est utilisé pour contrôler des courants alternatifs et des courants unidirectionnels (fournis par des redresseurs V. t. 1, Électronique, chap. 18). Il permet le réglage de la vitesse de moteurs à courant continu (fig. VIII-29).

La saturation du noyau ferromagnétique peut dépendre de la tension aux bornes du récepteur Z. C'est ce que l'on obtient dans le montage de la figure VIII-30. Alimenté sous

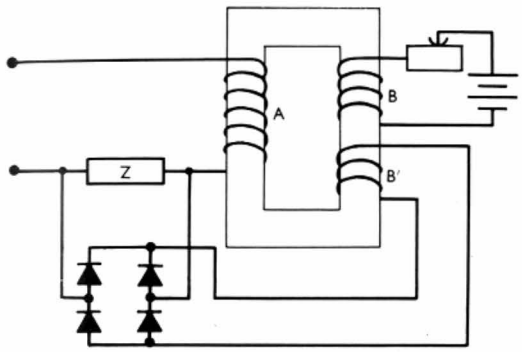


Fig. VIII-30

la même tension que le récepteur Z, un pont redresseur fournit du courant unidirectionnel (fonction de cette tension) à une seconde bobine B' de contrôle : l'ensemble constitue un *servomécanisme*.

Le facteur d'amplification d'un transducteur magnétique peut dépasser mille. Cet appareil est *robuste, stable,* de *bon rendement*. Il peut servir au réglage d'une tension, d'un courant, de la vitesse de rotation d'un moteur, etc. Mais dans toutes ces applications il est de plus en plus supplanté par les *thyristors* (V. t. 1, Électronique, chap. 11).

6. SPIRE DE FRAGER

C'est une spire fermée (fig. VIII-31) qui, placée en regard d'une bobine B, embrasse une partie du flux produite par celle-ci. L'ensemble constitue un transformateur dont le secondaire ($n_2 = 1$ spire) est en court-circuit ($u_2 = 0$) et dont le circuit magnétique n'est pas saturable (inductance l_2 = constante).

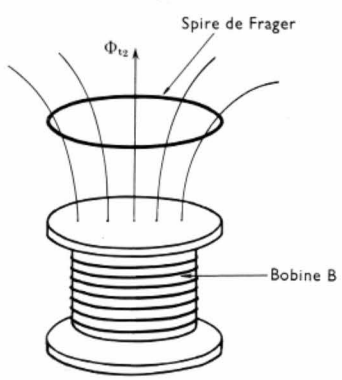


Fig. VIII-31

6.1. Diagramme de Fresnel. — Le circuit magnétique ne pouvant pas se saturer, à un instant t le flux total Φ_{t2} dans la spire S est la somme du flux Φ qui est commun à la bobine et à la spire et du flux Φ_2 d'auto-induction dû à la spire elle-même :

$$\Phi_{t2} = \Phi + \Phi_2$$

La f.é.m. e_{t2} engendrée par le flux Φ_{t2} est donc égale à la somme de la f.é.m. e_2 due au flux Φ et de la f.é.m. d'auto-induction qui est aussi égale à

$$-\frac{d\Phi_2}{dt} = -l_2\frac{di_2}{dt}$$

i_2 représentant l'intensité du courant dans la spire

$$\left(l_2 = \frac{\Phi_{2\,\text{eff}}}{I_{2\,\text{eff}}}\right), \qquad e_{t2} = e_2 - l_2\frac{di_2}{dt}$$

Si la résistance de la spire est égale à R_2, e_{t2} est aussi égale à la chute ohmique $R_2 i_2$ dans la spire puisque celle-ci est en court-circuit.

L'équation des tensions secondaires appliquée à ce transformateur s'écrit :

$$0 = e_{t2} - R_2 i_2 = e_2 - l_2\frac{di_2}{dt} - R_2 i_2$$

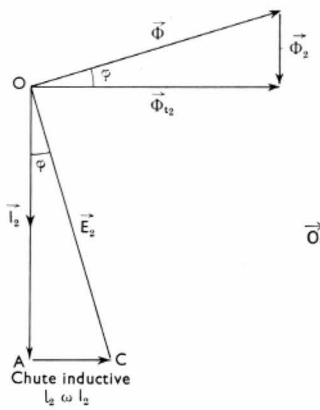


Fig. VIII-32

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{E_{t2}} = \overrightarrow{R_2 I_2}$

Si l'on appelle $\vec{E}_2$, $\vec{I}_2$, $\vec{\Phi}$, $\vec{\Phi}_{t2}$ et $\vec{\Phi}_2$ les vecteurs associés aux grandeurs sinusoïdales précédentes on obtient le diagramme de Fresnel de la figure VIII-32. On place successivement :

— le vecteur $\vec{\Phi}_{t2}$ arbitrairement ;

— le vecteur $\overrightarrow{OA}$ pour représenter la tension $e_{t2} = Ri_2$, elle est déphasée de — 90° par rapport à Φ_{t2} (V. chap. 1, § 7.2) ;

— le vecteur $\vec{I}_2$ de même sens que $\overrightarrow{OA}$ (car e_{t2} et i_2 sont en phase) ;

— le vecteur $\overrightarrow{AC}$ pour figurer la chute inductive dont le module est $l_2\omega I_{2\,\text{eff}}$ et qui est déphasée de + 90° par rapport à i_2 ;

— le vecteur $\vec{E}_2 = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$ puisque $e_2 = l_2\frac{di_2}{dt} + R_2 i_2$;

— les vecteurs $\vec{\Phi}$ et $\vec{\Phi}_2$: le premier est perpendiculaire à $\vec{E}_2$ $\left(e_2 = -\frac{d\Phi}{dt}\right)$ et le second est parallèle à $\vec{I}_2$ $(\Phi_2 = l_2 i_2)$.

Le déphasage φ de i_2 par rapport à e_2 apparaît nettement sur la figure : il est égal à l'angle $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA})$.

6.2. Propriétés de la spire de Frager

6.2.1. Écran électrodynamique. — Comme toute plaque conductrice, une spire de Frager produit un effet d'écran électrodynamique contre tout flux alternatif. En effet, si la résistance de la spire (R_2) est faible, devant $l_2\omega$, l'angle φ est voisin de $\frac{\pi}{2}$ rad et le flux $\Phi_{t2\,\text{eff}}$ dans la spire

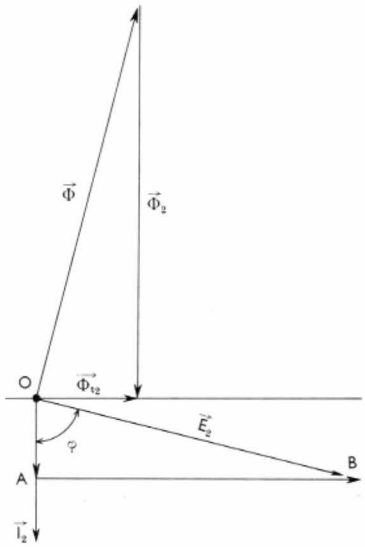


Fig. VIII-33

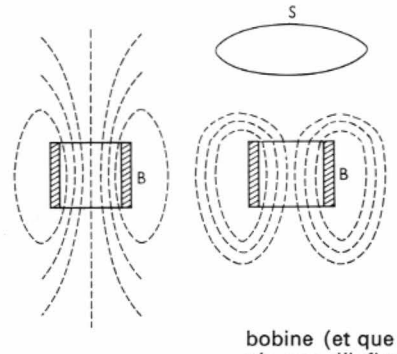


Fig. VIII-34

La spire de Frager S joue le rôle d'écran vis-à-vis du flux

(et a fortiori au-delà de la spire) est faible (fig. VIII-33). La spire en court-circuit *empêche donc le passage* d'un flux alternatif (fig. VIII-34) surtout si celui-ci est à *haute fréquence* ($I_2\omega$ grand). Évidemment une *plaque conductrice* (les courants de Foucault jouent alors le rôle de i_2) produit le même effet. C'est le principe du *blindage électrodynamique* qui permet de protéger un organe contre l'effet des champs magnétiques de haute fréquence.

6.2.2. Répulsion. — Une spire de Frager est *soumise* (ainsi qu'une plaque conductrice) à une *force répulsive*. Si l'angle φ (cas précédent) est grand, le diagramme vectoriel montre que Φ et Φ_2 sont en opposition de phase ($\vec{\Phi}$ et $\vec{\Phi}_2$ sont sensiblement opposés) et il en est de même des courants i_1 et i_2 proportionnels à ces flux. Les circuits primaire et secondaire *se repoussent* donc. Ce phénomène a son application dans le moteur à *répulsion* (V. chap. 19).

6.2.3. Déphasage d'un flux. — Le flux Φ_{t_2} est *en retard* par rapport au flux Φ. Dans une zone déterminée, une spire de Frager permet donc d'obtenir un flux Φ_{t_2} en retard d'un angle φ par rapport au flux Φ produit par la

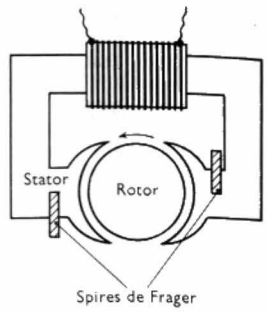


Fig. VIII-35

bobine (et que l'on trouve dans toute la zone où la bobine n'a pas d'influence).

6.3. Applications de la spire de Frager. — En dehors du moteur à répulsion déjà mentionné, la spire de Frager a les applications suivantes :

6.3.1. Petits moteurs monophasés. — Ces moteurs portent deux grosses spires de Frager sur une partie de leurs pièces polaires. Le flux Φ_{t_2} à travers la bobine est en retard sur le flux Φ et, dans l'entrefer, on obtient un flux glissant dans le sens de la flèche et déterminant dans ce même sens, la rotation d'un rotor massif (fig. VIII-35).

6.3.2. Compteurs à induction. — Un disque *A* (fig. VIII-36) mobile autour d'un axe vertical est placé

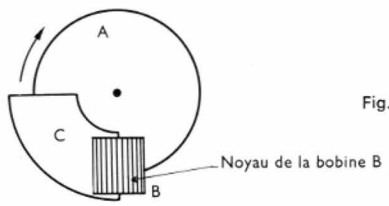


Fig. VIII-36

au-dessus d'une bobine dont le noyau est vertical ; elle est parcourue par un courant alternatif. Entre le noyau *B* et le disque on place une spire de Frager ou une plaque métallique *C* qui couvre environ la moitié du noyau. On obtient ici aussi un glissement du flux (vers la spire ou vers la plaque métallique) et cela provoque la rotation du disque (V. t. 2, Mesures et appareils de mesure, chap. 13).

CHAPITRE IX

MACHINES SYNCHRONES

ALTERNATEUR

1. PRINCIPE. CONSTITUTION

Si un pôle permet d'obtenir un flux à répartition sinusoïdale, l'induction *b* dans l'entrefer peut s'exprimer par la relation suivante $b = B \cos \theta$. Lorsqu'un conducteur *A* se déplace devant ce pôle, une f.é.m. *e* est induite dans ce conducteur. Si l'on désigne par *L* la longueur de *A* et par *v* sa vitesse tangentielle, on peut écrire :

$$e = b\,L\,v = (B \cos \theta)\,L\,v = B\,L\,v \cos \omega\,t$$

Cette f.é.m. est sinusoïdale si le conducteur tourne à une vitesse ω constante.

La constitution de la machine se déduit immédiatement de ce principe. On peut :

a) soit faire tourner les pôles par rapport aux conducteurs actifs (fig. IX-1) ;

b) soit faire tourner des conducteurs actifs portés par le rotor par rapport aux pôles fixes (fig. IX-2).

Sauf pour les petits alternateurs on préfère la première disposition appelée à rotor inducteur ou à roue polaire : ainsi le *rotor est massif* (non feuilleté, plus solide) et *le courant débité par l'alternateur passe par des bornes fixes* et non par des bagues et des balais (isolation, échauffement). Dans les turbo-alternateurs (alternateur entraîné par une turbine à vapeur), la roue polaire est à pôles lisses (V. fig. I-7) ; dans les autres (alternateurs entraînés par une turbine hydraulique ou par un moteur Diesel) la roue polaire est à pôles saillants.

Les pôles sont excités par un courant continu qui est amené aux bobines inductrices par des bagues et des balais (en général). Ce courant continu est alors fourni par une dynamo dite *excitatrice* souvent placée en bout d'arbre (V. t. 1, Centrales thermiques, chap. 4).

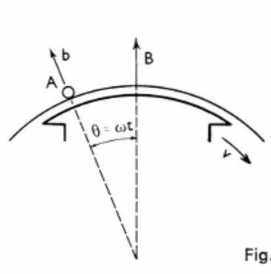


Fig. IX-1

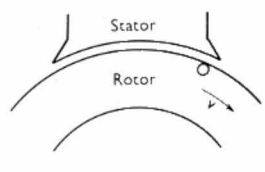


Fig. IX-2

2. FORMULE DE LA FRÉQUENCE

Si l'alternateur n'a *qu'une paire* de pôles, une période de la f.é.m. induite correspond à un tour du rotor; s'il a 2 *paires* de pôles, une période correspond seulement à un demi-tour du rotor. On peut généraliser: si la roue polaire comporte *p paires de pôles* une période correspond à $\frac{1}{p}$ tour de rotor. Si la fréquence de rotation de la roue est n (n étant exprimé en tours par minute) une période est égale à un temps:

$$T = \frac{1}{n/60} \cdot \frac{1}{p} = \frac{60}{pn}$$

Par suite la fréquence f du courant obtenu est donnée par la formule suivante:

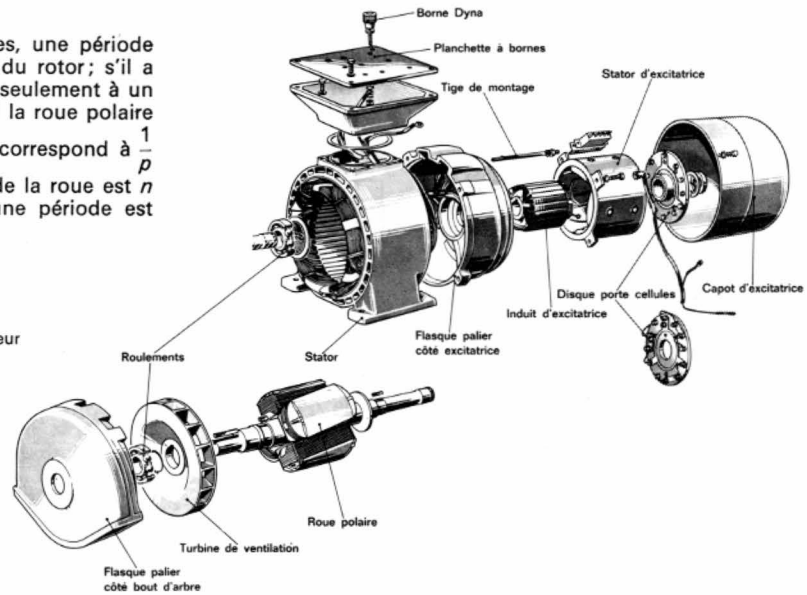
$$\boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{pn}{60}}$$

En Europe, où la fréquence des réseaux a été unifiée à 50 Hz, pour *tous les alternateurs le produit pn est égal à :*

$$pn = 50 \times 60 = 3\,000$$

Dès lors, un alternateur ayant:

2 pôles tourne à 3 000 tr/mn ($p = 1$);
4 pôles tourne à 1 500 tr/mn ($p = 2$);
6 pôles tourne à 1 000 tr/mn ($p = 3$).



Alternateur shunt sans collecteur (*Leroy-Somer*)

3. F.É.M. DE L'ALTERNATEUR

3.1. Force électromotrice théorique. — Pour cette étude on fait deux suppositions:

1° La f.é.m. est rigoureusement sinusoïdale.

2° Les f.é.m. dans tous les conducteurs actifs de l'enroulement sont *en phase,* c'est-à-dire que tous ces conducteurs occupent des positions homologues par rapport aux pôles (fig. IX-3). Dans ce cas les f.é.m. s'ajoutent arithmétiquement.

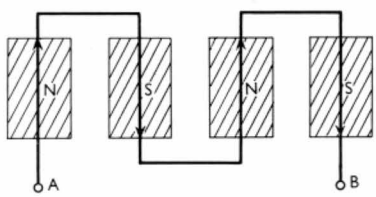


Fig. IX-3

Développement panoramique de l'enroulement

On appelle Φ le flux utile par pôle (flux moyen sous un pôle) et N le nombre de conducteurs actifs entre A et B. Pendant une demi-période les N conducteurs actifs coupent le flux Φ et sont le siège d'une f.é.m. *moyenne* que l'on va déterminer.

$$E_{moy} = \frac{N\Delta\Phi}{\Delta t} = N\,\frac{\Phi}{T/2} = \frac{2\,N\Phi}{T} = 2\,fN\Phi$$

Si cette f.é.m. est sinusoïdale on sait que sa valeur moyenne est égale à $\frac{2\,\widehat{E}}{\pi}$ tandis que sa valeur efficace est:

$$E_{eff} = \frac{\widehat{E}}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\,E_{moy} = 1{,}11\,E_{moy}.$$

L'expression de la f.é.m. *théorique* de l'alternateur est donc la suivante:

$$E_{eff} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \times 2\,fN\Phi = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,\frac{pn}{60}\,N\Phi$$

$$\boxed{E_{eff} = 2{,}22\,p\,\frac{n}{60}\,N\Phi}$$

Cette expression est théorique parce qu'elle repose sur les deux suppositions susmentionnées.

3.2. Force électromotrice réelle

1° Dans la réalité la f.é.m. n'est pas toujours rigoureusement sinusoïdale. Le constructeur cherche le plus possible à réaliser cette condition car, dans le cas contraire, la f.é.m. *renferme des harmoniques* qui présentent des inconvénients.

Si l'onde n'est pas sinusoïdale il faut déterminer sa valeur moyenne (fig. IX-4):

$$E_{moy} = \frac{1}{n}\,(e_1 + e_2 + e_3 + \ldots + e_n)$$

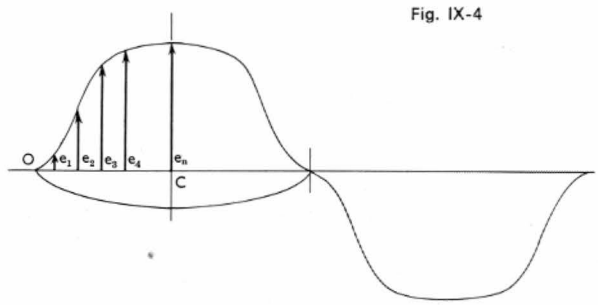


Fig. IX-4

et sa valeur efficace:

$$E_{eff} = \frac{1}{n}\,\sqrt{e^2_1 + e^2_2 + e^2_3 + \ldots + e^2_n}$$

On constate que le rapport $K = \frac{E_{eff}}{E_{moy}}$ n'est pas égal à $\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1{,}11$ et la formule de la f.é.m. théorique doit subir une première correction et s'écrire:

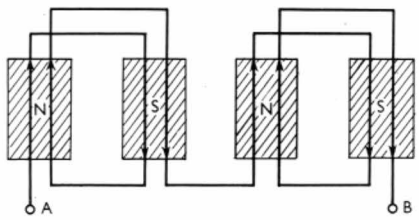
$$E_{eff} = 2\,K_1\,p\,\frac{n}{60}\,N\Phi$$

($K_1 = 1{,}11$ en sinusoïdal).

2° Dans le schéma de la figure IX-3, tous les conducteurs actifs sous un même pôle occupent des positions homologues (*une seule encoche* par pôle) : il faut une grosse encoche et l'armature d'induit est mal utilisée.

En réalité on utilise *plusieurs encoches par pôle* (fig. IX-5). Les f.é.m. dans les conducteurs actifs sous un

Fig. IX-5



pôle *ne sont plus en phase* et, à un instant *t*, la f.é.m. totale est inférieure à la somme arithmétique des f.é.m. Sa valeur efficace peut être obtenue géométriquement. Dès lors la f.é.m. de l'alternateur est plus faible et la valeur théorique doit être multipliée par un coefficient K_2 appelé *facteur d'enroulement* toujours inférieur à 1.

$$K_2 = \frac{\text{f.é.m. résultante sous un pôle}}{\text{somme arithmétique des f.é.m. dans les conducteurs sous le même pôle}}$$

En définitive, la valeur efficace de la f.é.m. réelle de l'alternateur est égale à :

$$E_{\text{eff}} = 2\,K_1\,K_2\,p\,\frac{n}{60}\,N\Phi$$

ou en posant $2\,K_1K_2 = K$,

$$\boxed{E_{\text{eff}} = Kp\,\frac{n}{60}\,N\Phi}$$

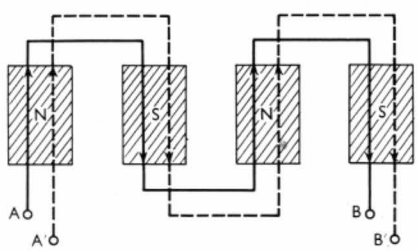
K est appelé *coefficient de Kapp*. Il est compris entre 1,9 et 2,6.

4. ALTERNATEUR POLYPHASÉ

Peut-on utiliser dans un même enroulement toutes les encoches sous un même pôle ? En principe oui, mais le facteur d'enroulement est faible ; la f.é.m. et la puissance de la machine augmentent mais cela impose l'utilisation d'une masse importante de cuivre pour garnir toutes les encoches. Cet inconvénient l'emporte largement sur les avantages. Cela explique que dans un alternateur monophasé les deux tiers seulement des encoches soient utilisées sous chaque pôle (donc les deux tiers de toutes les encoches disponibles).

4.1. Alternateur diphasé. — L'idée surgit naturellement de répartir les encoches sous chaque pôle en deux groupes afin d'en utiliser une moitié pour un enroulement entre A et B (fig. IX-6) et l'autre moitié pour un second

Fig. IX-6



enroulement entre A' et B'. Ces enroulements sont identiques mais sont décalés d'un quart de pas polaire (ce décalage correspond à un angle électrique de 90°). La f.é.m. fournie par ce second enroulement est déphasée de 90° par rapport à celle du premier : on a réalisé un alternateur *diphasé*.

4.2. Alternateur triphasé. — On peut aussi répartir les encoches sous chaque pôle en trois groupes et utiliser chacun d'eux pour placer trois enroulements indépendants (fig. IX-7). Ils sont identiques et décalés d'un tiers de pas polaire l'un par rapport à l'autre (ce décalage correspond

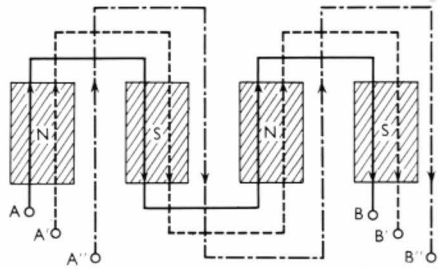


Fig. IX-7

à un angle électrique de 120°). Leurs extrémités sont respectivement A et B, A' et B', A'' et B''. Les f.é.m. dans ces enroulements sont déphasées l'une par rapport à l'autre de $\frac{2\pi}{3}$ rad : on a constitué ainsi un alternateur *triphasé*.

Tout en présentant le plus faible nombre d'encoches par pôle (pour une phase) cet alternateur a *le plus grand facteur d'enroulement*. C'est lui qui utilise le mieux le cuivre de l'induit. *À dimensions égales, à la même fréquence et à la même vitesse, la puissance d'un alternateur triphasé est de 20 % à 30 % plus grande que celle d'un alternateur monophasé.*

En polyphasé la formule donnant la f.é.m. d'un alternateur s'applique à *chacune des phases*. Elle fournit la *f.é.m. par phase* (N désignant alors le nombre de conducteurs actifs par enroulement) appelée aussi f.é.m. *simple* ou f.é.m. *d'enroulement*.

5. ENROULEMENTS DES MACHINES À COURANTS ALTERNATIFS

Il s'agit de connecter en série entre A (appelée *entrée d'un enroulement*) et B (appelée *sortie du même enroulement*) des conducteurs actifs dont les f.é.m. sont sensiblement en phase. L'ordre dans lequel ces conducteurs sont reliés entre eux n'a aucune importance et c'est pourquoi on distingue deux catégories d'enroulements :

5.1. Les enroulements à bobines concentriques. — La figure IX-8 en donne l'aspect panoramique sous deux pôles. La figure IX-9 fournit une perspective des parties frontales (têtes de bobines). Une *section* d'enroulement est formée de deux *faisceaux* (un faisceau étant l'ensemble des conducteurs actifs dans une même encoche) : l'ensemble des sections sous un pôle est désigné sous le nom de *bobine*. Les figures précédentes montrent bien que ces sections sont concentriques (ou coaxiales) et cela explique le nom donné à cet enroulement.

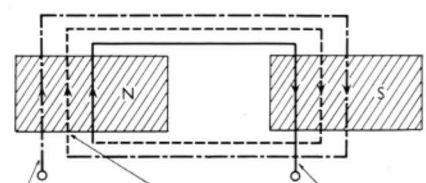


Fig. IX-8

Enroulement à bobines concentriques dit aussi à phases séparées

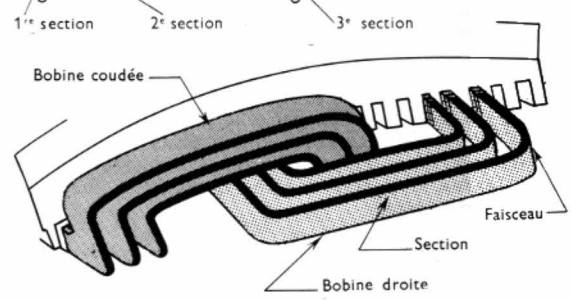
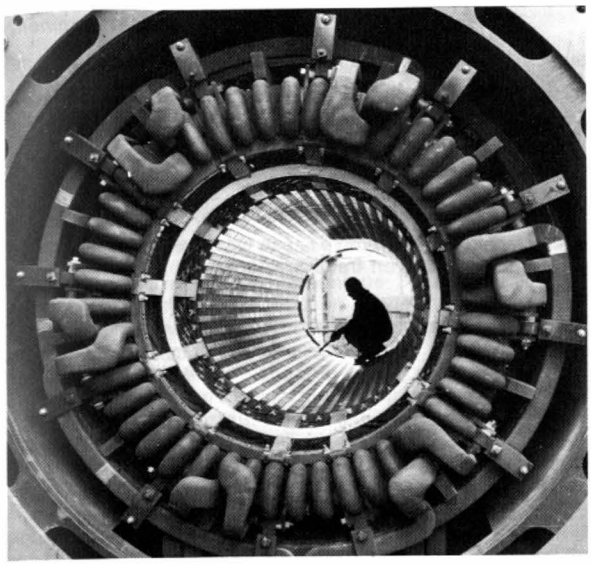


Fig. IX-9

Les enroulements à bobines concentriques sont dits à *pôles conséquents* si les bobines consécutives forment des pôles de même nom ou bien *par pôles* si les bobines consécutives forment des pôles de noms contraires.



Stator bobiné d'un turbo-alternateur de 667 MVA (*Alsthom*)

5.2. Les enroulements à bobines enchevêtrées. — Les sections ont toutes la même largeur et, de ce fait, chevauchent les unes sur les autres. La figure IX-10 en donne le schéma panoramique et la figure IX-11 la vue frontale. Cet enroulement qui peut être réalisé sous la forme ondulée (fig. IX-12), et qui ressemble alors aux enroulements des dynamos, est celui des alternateurs de grande puissance.

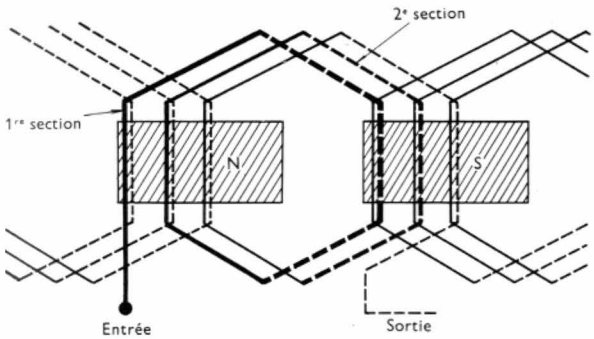


Fig. IX-10 — Partie d'un enroulement à bobines enchevêtrées

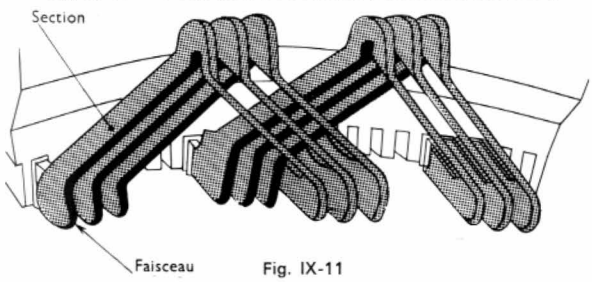


Fig. IX-11

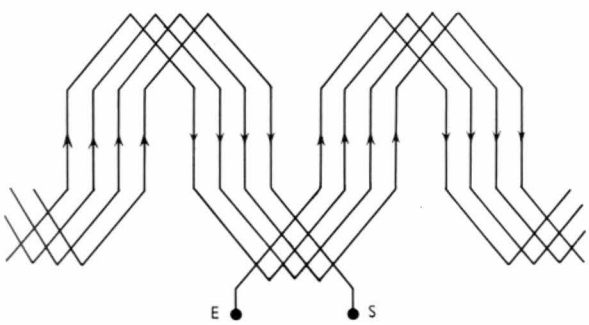


Fig. IX-12 — Partie d'un enroulement ondulé

6. ALTERNATEUR HOMOPOLAIRE

À l'opposé de l'alternateur *hétéropolaire* que l'on a étudié jusqu'ici, l'alternateur homopolaire n'a que des *pôles de même nom*.

La figure IX-13 en donne un exemple. Le flux dans l'entrefer compris entre une couronne fixe et un rotor à pôles saillants est partout *radial et dirigé vers l'axe* de rotation.

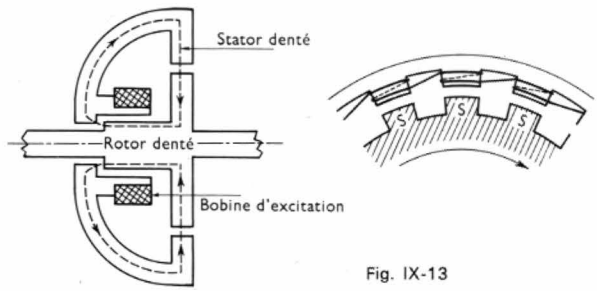


Fig. IX-13

Il est produit par une bobine d'excitation fixe. Tous les pôles rotoriques sont des pôles sud ; tous les pôles statoriques sont des pôles nord. Le flux à travers les bobines disposées autour des pôles du stator est unidirectionnel. Il varie seulement en grandeur mais comme il croît et décroît, les bobines de l'induit sont le siège de forces électromotrices alternatives. En effet, on sait que le sens d'un courant induit dans un bobinage déterminé dépend seulement du sens de la variation de flux.

Comme le nombre de pôles peut être très grand, un tel alternateur convient à l'obtention de courants de fréquences moyennes (jusqu'à plusieurs milliers d'hertz).

7. RÉACTION D'INDUIT

Lorsque l'alternateur est à vide (flux moyen par pôle Φ_v), la valeur efficace de sa f.é.m. est égale à :

$$E_{v\,\text{eff}} = K\ p\ \frac{n}{60}\ N\ \Phi_v$$

Elle varie avec l'intensité du courant d'excitation J à vitesse normale constante. La courbe $E_{v\,\text{eff}}$ (J), appelée caractéristique à vide de l'alternateur (fig. IX-14), représente les variations de $E_{v\,\text{eff}}$ en fonction de J, c'est une véritable courbe d'aimantation (V. chap. 1, § 6).

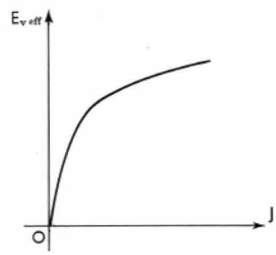


Fig. IX-14

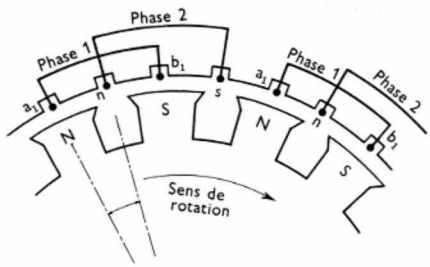
Caractéristique à vide d'un alternateur

Quand l'alternateur débite un courant, on constate que la f.é.m. en charge est *nettement plus faible que* $E_{v\,\text{eff}}$. C'est donc que le flux moyen en charge Φ_{ch} est plus faible que le flux à vide Φ_v. Cela résulte du fait que le flux par pôle est alors dû, non seulement à la force magnétomotrice de l'inducteur, mais aussi à celle de l'induit. La façon dont intervient la force magnétomotrice d'induit constitue la *réaction d'induit*.

7.1. Réaction d'induit en polyphasé. — On va considérer la roue polaire d'un alternateur diphasé à l'instant où la f.é.m. est maximale dans la phase 1. Trois cas sont à envisager.

7.1.1. Le courant *i* est en phase avec la f.é.m. *e*. — À l'instant considéré le courant i est donc maximal dans la phase 1. Les pôles fictifs (V. chap. 1, § 4.4.2.) de l'enroulement induit se trouvent alors *sur les axes* des bobines de la phase 1 et ils s'insèrent à mi-distance entre les pôles du rotor. Quant à la polarité de ces pôles fictifs, elle est donnée

Fig. IX-15

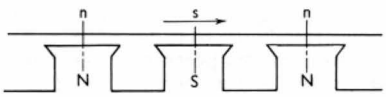


par la loi de Lenz. La position des pôles réels (*N* et *S*) et des pôles fictifs (*n* et *s*) à l'instant *t* considéré est nettement indiquée sur la figure IX-15.

7.1.2. Le courant *i* est déphasé de $\frac{\pi}{2}$ rad en arrière par rapport à *e*. — Par rapport au cas précédent le courant est maximal un quart de période plus tard. À ce moment la position relative des pôles réels et des pôles fictifs est celle de la figure IX-16.

Fig. IX-16

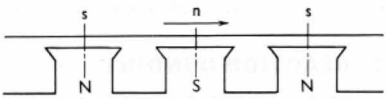
Circuit purement inductif



7.1.3. Le courant est déphasé de $\frac{\pi}{2}$ rad en avance par rapport à *e*. — Par rapport au premier cas le courant est maximal un quart de période *plus tôt*. À cet instant la position relative des pôles réels et des pôles fictifs est celle de la figure IX-17.

Fig. IX-17

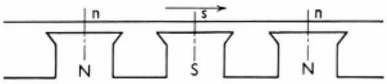
Circuit purement capacitif



7.1.4. Le courant est déphasé d'un angle compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ rad en arrière par rapport à *e* (cas général correspondant au débit dans un circuit inductif). Les pôles *n* et *s* occupent des positions intermédiaires (fig. IX-18) entre celles de la figure IX-15 (courant en phase avec *e*) et celles de la figure IX-16 (courant purement inductif).

Fig. IX-18

Circuit inductif

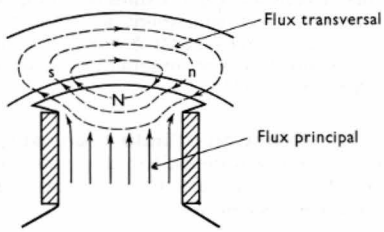


Ces positions relatives des pôles fictifs et des pôles réels sont immuables au cours de la rotation, puisque la roue polaire et les pôles fictifs tournent dans le même sens à la même vitesse.

Les conclusions sont les suivantes :

1° *Quand l'alternateur débite un courant i en phase avec e* (si ψ désigne le déphasage entre *e* et *i*, $\cos\psi = 1$ est maximal) la force magnétomotrice de l'induit agit normalement par rapport à la force magnétomotrice de l'inducteur ; à *elle seule* elle produirait un flux transversal (fig. IX-19). On dit alors que la réaction d'induit est *transversale*.

Fig. IX-19



2° *Quand l'alternateur débite un courant très inductif* ($\cos\psi = 0$ et *i* est déphasé de $\frac{\pi}{2}$ rad en arrière de *e*) la force magnétomotrice de l'induit est *opposée* à celle de l'inducteur (pôles de même nom en regard). On dit alors que la réaction d'induit est *longitudinale soustractive*.

3° *Quand l'alternateur débite un courant purement capacitif* ($\cos\psi = 0$ et *i* est diphasé de $\frac{\pi}{2}$ rad en avance de *e*) la force magnétomotrice d'induit *renforce* celle de l'inducteur (pôles de noms contraires en regard). On dit alors que la réaction d'induit est *longitudinale additive*.

4° Dans le *cas général* (réseau inductif : $0 < \psi < \frac{\pi}{2}$ rad), il est commode de substituer au courant *i*

— sa composante active i_a (de valeur efficace $I_{\text{eff}} \cos\psi$) qui produit la réaction transversale,

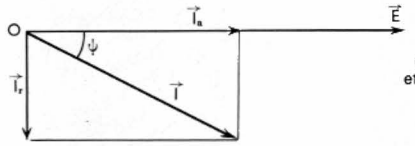
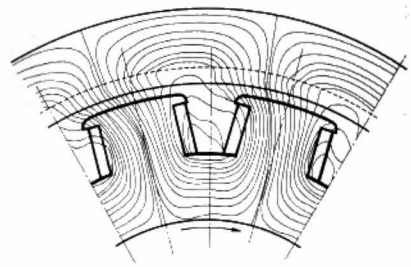


Fig. IX-20

Composantes actives et réactives du courant

Fig. IX-21



— sa composante réactive i_r (de valeur efficace $I_{\text{eff}} \sin\psi$) qui a pour effet d'affaiblir le flux (fig. IX-20).

La figure IX-21 donne le spectre magnétique du flux de l'alternateur dans ce cas général. Il met nettement en évidence la distorsion du flux.

7.2. Réaction d'induit de l'alternateur monophasé. — Le courant de l'induit engendre deux ensembles de pôles fictifs 1 et 2 (fig. IX-22) tournant dans des sens opposés à la vitesse $\frac{\omega}{p}$ (V. chap. 1, § 4.4.5.).

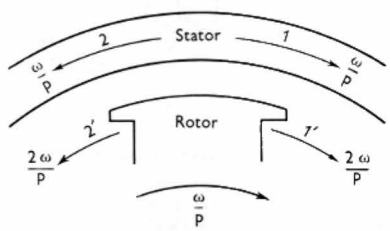


Fig. IX-22

L'ensemble 1 (qui tourne dans le sens du rotor) agit comme en polyphasé. L'ensemble 2, qui tourne à la vitesse $2\frac{\omega}{p}$ par rapport à la roue polaire, induit dans l'enroulement inducteur une f.é.m. de fréquence $2f$. Le courant inducteur devient ondulé (fig. IX-23) à la fréquence $2f$. Ce courant alternatif venu se superposer au courant continu *engendre un flux alternatif* qui (en vertu du théorème de Maurice Leblanc) peut être décomposé en deux flux constants 1′ et 2′ tournant *par rapport à la roue* polaire à la vitesse $2\frac{\omega}{p}$ *dans des sens opposés*.

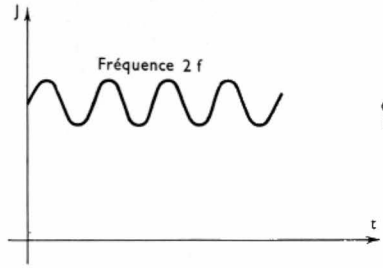


Fig. IX-23

Ondulation du courant inducteur due à la réaction d'induit

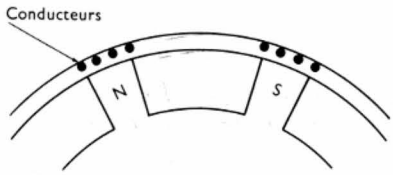


Fig. IX-24

Principe des amortisseurs Leblanc

L'un d'eux tourne par rapport au stator à la vitesse $\frac{\omega}{p} + \frac{2\omega}{p} = \frac{3\omega}{p}$ et induit dans l'enroulement du stator une f.é.m. à la fréquence $3f$ (harmonique 3). En conclusion: *la réaction d'induit se produit en monophasé comme en polyphasé ; en outre elle a pour effet d'ajouter un harmonique 3 à la f.é.m. normalement induite.* C'est un inconvénient car la f.é.m. résultante n'est plus sinusoïdale. En outre, dans les pôles, le flux variable crée des pertes par courants de Foucault, et le défilé des pôles inverses devant les pôles de la roue polaire provoque un ronflement. On s'efforce de remédier à tous ces inconvénients, et l'on y parvient assez bien, par l'emploi d'*amortisseurs Leblanc*. C'est une sorte de cage constituée (fig. IX-24) par des barres de cuivre logées dans les pièces polaires et reliées électriquement entre elles, à leurs deux extrémités, par deux couronnes en cuivre. Cette cage forme *écran électrodynamique* (V. chap. 8, § 6) vis-à-vis du flux alternatif qui engendrait dans l'enroulement inducteur une f.é.m. à la fréquence $2f$.

CHUTE DE TENSION

8. DÉFINITIONS

Pour une excitation J, un alternateur à vide, tournant à sa vitesse normale, présente une f.é.m. de valeur efficace $E_{v\,\text{eff}}$.

Avec la même excitation J, à la même vitesse, l'alternateur débitant un courant dans un circuit de facteur de puissance $\cos\varphi$ présente entre ses bornes une tension U_{eff}.

Pour ce régime de débit la chute de tension relative est:

$$\varepsilon\,\% = 100\,\frac{E_{v\,\text{eff}} - U_{\text{eff}}}{E_{v\,\text{eff}}}$$

Mais, à cet égard pour pouvoir comparer différentes machines de caractéristiques analogues, les règles françaises d'unification définissent:

1° La chute de tension (sous-entendu *relative* et *normale*), c'est-à-dire la grandeur:

$$\varepsilon_c\,\% = 100\,\frac{U_{n\,\text{eff}} - U_{c\,\text{eff}}}{U_{n\,\text{eff}}}$$

$U_{n\,\text{eff}}$ = tension normale à vide

$U_{c\,\text{eff}}$ = tension à pleine charge pour le courant nominal ($I_{n\,\text{eff}}$) et pour un facteur de puissance $\cos\varphi = 0{,}8$

(excitation et vitesse étant maintenues constantes) ;

2° *L'élévation de tension* (sous-entendu *relative* et *normale*) c'est-à-dire la grandeur:

$$\varepsilon_e\,\% = 100\,\frac{U_{v\,\text{eff}} - U_{n\,\text{eff}}}{U_{v\,\text{eff}}}$$

$U_{n\,\text{eff}}$ = tension pour la charge nominale ($I_{n\,\text{eff}}$ et $\cos\varphi = 0{,}8$)

$U_{v\,\text{eff}}$ = tension à vide avec la même excitation et pour la même vitesse.

La première grandeur sert de base au calcul du rhéostat de champ. La deuxième permet de prévoir la brusque élévation de tension qui se produit aux bornes de l'alternateur lorsque le disjoncteur le sépare du circuit dans lequel il débite.

9. MESURE DIRECTE ET MESURE INDIRECTE DE LA CHUTE DE TENSION

Lorsqu'elle est possible, la détermination directe de la chute de tension est facile: il suffit de mesurer la *tension aux bornes* de l'alternateur *avant* et *après* sa mise en charge (l'excitation et la vitesse étant maintenues constantes). Pratiquement, le plus souvent l'essai direct est impossible car on ne dispose pas de récepteurs suffisamment puissants auxquels l'alternateur (grosse machine en général) pourrait fournir sa puissance nominale. C'est pourquoi on a imaginé des méthodes dites *indirectes* permettant la détermination de la chute de tension sans qu'il soit nécessaire de mettre l'alternateur en charge. Chacune d'elles est basée sur un diagramme. Il en existe plusieurs et on exposera ici le plus simple (avec son perfectionnement récent) : le diagramme de *Behn Eschenburg*.

10. DIAGRAMME DE BEHN ESCHENBURG

On suppose que le circuit magnétique de l'alternateur n'est pas saturé: la règle d'addition des flux est applicable (V. chap. 1, § 6).

Si l'on désigne par:

Φ_{ch}: le flux utile par pôle en charge,

Φ_v: le flux dû à la force magnétomotrice *de l'inducteur seulement,*

Φ_a: le flux dû à la force magnétomotrice de l'induit *seul,*

à un instant t on peut écrire:

$$\Phi_{ch} = \Phi_v + \Phi_a$$

On remplace cette relation entre les valeurs instantanées des flux par la relation entre les f.é.m. engendrées par ces flux:

$$e_{ch} = e_v + \text{f.é.m. due à } \Phi_a$$

Or la f.é.m. due au flux Φ_a est une f.é.m. *d'auto-induction* et il lui correspond une chute inductive égale à:

$$-\frac{d\Phi_a}{dt} = -L\,\frac{di}{dt}$$ et de valeur efficace $L\omega I_{\text{eff}}$

$$\left(\text{avec } L = \frac{\Phi_{a\,\text{eff}}}{I_{\text{eff}}}\right)$$

La tension u aux bornes de l'alternateur étant égale à la f.é.m. en charge e_{ch} diminuée de la chute ohmique Ri dans l'induit (R : résistance de l'induit) il vient:

$$u = e_{ch} - Ri = e_v - Ri - L\,\frac{di}{dt}$$

À cette relation entre les valeurs instantanées de ces grandeurs sinusoïdales on peut faire correspondre une relation entre les nombres complexes associés:

$$\underline{U} = \underline{E}_v - R\underline{I} - jL\omega\underline{I}$$

La traduction vectorielle de cette équation constitue le diagramme de Behn Eschenburg (fig. IX-25).

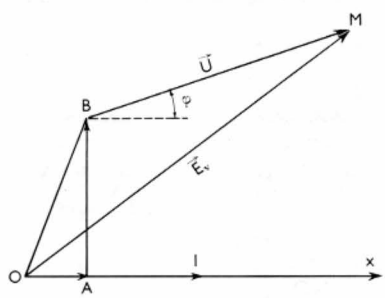


Fig. IX-25

Aux grandeurs i, u et e_v on associe les vecteurs $\vec{I}$, $\vec{U}$ et $\vec{E_v}$ (V. t. 1, Électricité, chap. 30). Les modules de ces vecteurs sont respectivement égaux aux valeurs efficaces des grandeurs qui leur correspondent, et leurs angles polaires, par rapport à un axe définissant l'origine des phases, sont respectivement égaux aux phases initiales de ces mêmes grandeurs.

On choisit le courant i pour définir l'origine des phases. Le vecteur $\vec{I}$ est donc placé suivant l'axe $\overrightarrow{Ox}$. La chute ohmique de tension est représentée par un vecteur $\overrightarrow{OA}$ de module proportionnel à la valeur efficace de cette d.d.p. ($R\,I_{\text{eff}}$) et d'angle polaire nul (i et Ri sont en phase). La chute inductive est figurée par un vecteur $\overrightarrow{AB}$ de module proportionnel au produit $L\omega\,I_{\text{eff}}$ et décalé de $+\,90°$ par rapport à $\vec{I}$ ($L\,\frac{di}{dt}$ est une tension déphasée de $+\,90°$ par rap-

port à i). On place ensuite le vecteur $\vec{U}$ faisant un angle φ avec le vecteur $\vec{I}$ car on suppose la tension u déphasée d'un angle φ par rapport au courant i (circuit inductif). Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ représente la f.é.m. e_v

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \vec{E_v}$$

Pour déduire le vecteur $\vec{U}$ (et donc la tension U_{eff}) à l'aide de ce diagramme il faut connaître :

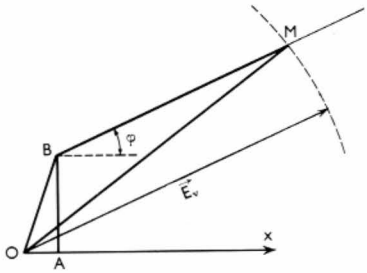
— la résistance R,

— la réactance $L\omega$ (réactance de Behn Eschenburg)'

— la caractéristique à vide de la machine et le courant d'excitation J, pour déduire la valeur efficace de la f.é.m. à vide $E_{v\,\text{eff}}$.

Le point M se trouve à l'intersection d'une droite passant par B, faisant un angle φ avec $\overrightarrow{Ox}$, et d'un cercle de centre O et de rayon proportionnel à $E_{v\,\text{eff}}$ (le coefficient de proportionnalité étant l'échelle adoptée pour représenter les tensions sur ce diagramme ; fig. IX-26).

Fig. IX-26



La mesure de la résistance d'induit R est toujours facile et le problème posé par ce diagramme est la détermination de $L\omega$.

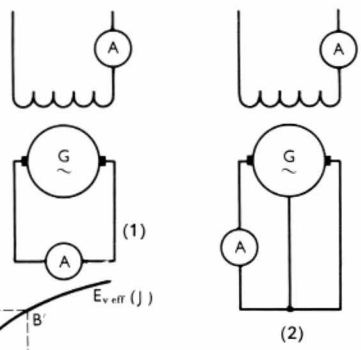
11. DÉTERMINATION DE LA RÉACTANCE Lω DE BEHN ESCHENBURG

On effectue *l'essai à vide* [il fournit la caractéristique à vide $E_{v\,\text{eff}}(J)$] puis *l'essai en court-circuit*. Celui-ci consiste à relever le courant de court-circuit $I_{cc\,\text{eff}}$ en fonction de l'excitation J, à vitesse normale constante ; l'alternateur est en court-circuit, un ampèremètre de résistance négligeable étant placé entre ses bornes (fig. IX-27). La courbe correspondante (fig. IX-28) qui est sensiblement une droite passant par l'origine, s'appelle *caractéristique en court-circuit*.

Fig. IX-27

Essai en court-circuit

(1) Alternateur monophasé
(2) Alternateur triphasé



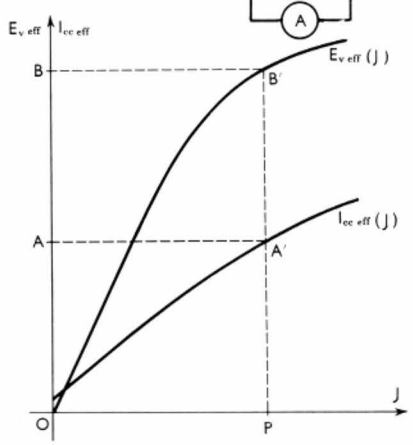


Fig. IX-28

En court-circuit l'équation de Behn Eschenburg prend une autre forme car il faut tenir compte du fait que $u = 0$ et que la f.é.m. n'est plus e_v. Il faut un courant d'excitation J très faible pour que l'alternateur débite un courant i_{cc} d'intensité efficace $I_{cc\,\text{eff}}$ égal au courant nominal. On appelle e_{cc} la valeur instantanée de la f.é.m. dans ce cas.

$$0 = e_{cc} - Ri_{cc} - L\frac{di_{cc}}{dt}$$

En introduisant les valeurs complexes associées on peut écrire l'équation suivante :

$$0 = \underline{E}_{cc} - R\,\underline{I}_{cc} - jL\omega\,\underline{I}_{cc}$$

ou :

$$\underline{E}_{cc} = R\,\underline{I}_{cc} + jL\omega\,\underline{I}_{cc}$$

On déduit alors une autre relation entre les modules des grandeurs considérées :

$$E_{cc\,\text{eff}} = I_{cc\,\text{eff}}\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}$$

Cette relation permet de déterminer la valeur de la réactance de Behn Eschenburg. Dans le cas où le courant d'excitation J est représenté par un segment OP (fig. IX-28), PA' et PB' figurent respectivement les valeurs $I_{cc\,\text{eff}}$ et $E_{cc\,\text{eff}}$. On écrit donc :

$$\sqrt{R^2 + L^2\omega^2} = \frac{E_{cc\,\text{eff}}}{I_{cc\,\text{eff}}} = \frac{PB'}{PA'}$$

Connaissant R, il est facile de tirer $L\omega$.

12. CRITIQUE. — PERFECTIONNEMENT RÉCENT DU DIAGRAMME DE BEHN ESCHENBURG

La figure IX-28 montre que plus l'excitation J est grande (plus la saturation du circuit magnétique est importante), plus le rapport $\frac{PB'}{PA'}$ est faible et plus la valeur obtenue pour $L\omega$ est petite. La réactance de Behn Eschenburg mesurée en régime de non saturation est donc plus grande que dans la réalité (il y a une légère saturation dans le fonctionnement normal). Il en résulte que la chute de tension obtenue par ce diagramme est trop grande. Ce résultat est *pessimiste :* l'erreur peut atteindre 25 % par excès. Il faudrait déterminer la valeur de $L\omega$ correspondant à l'excitation J que l'on s'est fixée (valeur donnant la f.é.m. $E_{v\,\text{eff}}$). En réalité on ne peut pas atteindre cette excitation J en court-circuit sans risquer de détériorer l'enroulement d'induit par effet Joule.

Un perfectionnement apporte une solution à cette difficulté : c'est l'essai en *débit inductif*. Il consiste à brancher l'alternateur sur un récepteur très inductif (transformateur à vide ou en court-circuit, moteur synchrone à vide) et à agir sur ce récepteur de façon telle (fig. IX-29) que l'alternateur débite le courant I que l'on s'est fixé lorsque son circuit inducteur est parcouru par le courant J choisi. On mesure alors la tension $U_{d\,\text{eff}}$ entre les bornes. Dans ces conditions (φ étant voisin de 90°) le diagramme de Behn Eschenburg a l'aspect de la figure IX-30 ; $\vec{E_v}$ et $\vec{U_d}$ ont presque la même direction et l'on a pratiquement :

$$E_{v\,\text{eff}} - U_{d\,\text{eff}} = L\omega\ I_{\text{eff}}.$$

La valeur de $L\omega$ obtenue *correspond alors aux conditions*

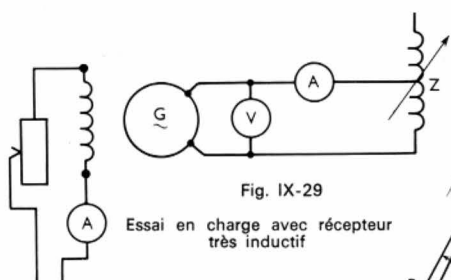


Fig. IX-29

Essai en charge avec récepteur très inductif

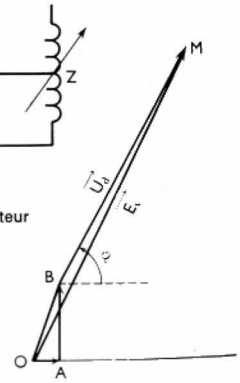


Fig. IX-30

d'excitation et de débit; cette valeur permet d'obtenir la chute de tension avec une précision bien supérieure.

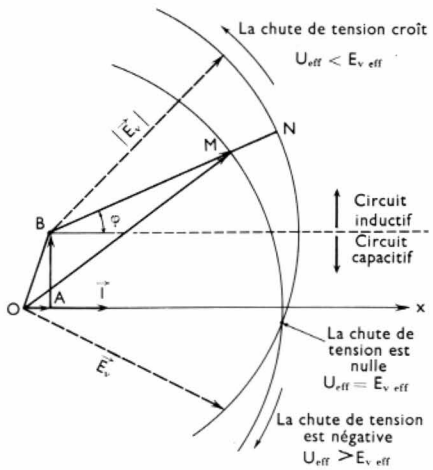
13. VARIABLES DONT DÉPEND LA CHUTE DE TENSION

La chute de tension d'un alternateur est faible quand il a un grand entrefer : cela oblige à accroître la force magnétomotrice de l'inducteur mais de cette façon la force magnétomotrice de l'induit n'a plus qu'une faible importance relative. Il doit également présenter de faibles fuites car celles-ci réduisent le flux utile, toutes choses étant égales. En exploitation la chute de tension dépend :

1° *Du facteur de puissance du récepteur.* — On se place dans l'hypothèse où le courant débité a une valeur efficace constante (I_{eff} = constante) et où le facteur de puissance cos φ du récepteur est variable. Le triangle *OAB* du diagramme de Behn Eschenburg est immuable (les côtés sont proportionnels à I_{eff}). On trace deux cercles de rayon proportionnels à $E_{v\,\text{eff}}$ et ayant *O* et *B* pour centres (fig. IX-31).

$$E_{v\,\text{eff}} - U_{\text{eff}} \approx BN - BM = MN$$

Fig. IX-31



On voit que *O* et *B* étant fixes :

a) *lorsque* φ *augmente*, en réseau inductif, *MN* croît : *la chute de tension augmente* (la réaction d'induit devient de plus en plus *soustractive* en effet),

b) *lorsque* φ *augmente*, en réseau capacitif, *la chute de tension décroît* et devient même *négative* (élévation de tension). En effet, c'est le cas où la réaction d'induit devient de plus en plus *additive*.

En définitive un faible facteur de puissance cos φ *accroît* la chute de tension dans le cas d'un circuit inductif, la diminue dans le cas d'un circuit capacitif ;

2° *Du courant débité* I_{eff}. — On se place dans le cas où le facteur de puissance cos φ (inductif) est constant ; I_{eff} varie (fig. IX-32). Les côtés du triangle *OAB* sont proportionnels à I_{eff} : lorsque ce courant décroît, *B* se déplace vers *O* ; quand $I_{\text{eff}} = 0$ la f.é.m. $E_{v\,\text{eff}}$ est représentée par OM_0. On mène par M_0 la parallèle à *OB* ; elle rencontre en *N* le prolongement de la droite passant par *B* et faisant un angle φ avec $\overrightarrow{Ox}$. Le vecteur $\overrightarrow{BM}$ représente encore la tension *u*. On a évidemment $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{OM_0} \approx E_{v\,\text{eff}}$; et :

$$E_{v\,\text{eff}} - U_{\text{eff}} \approx BN - BM = MN$$

Fig. IX-32

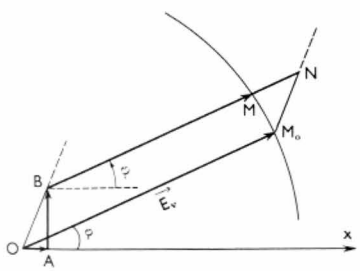
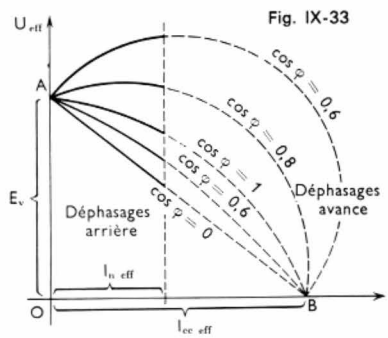


Fig. IX-33



Comme dans le cas du transformateur (diagramme de Kapp) on voit qu'avec un réseau inductif, lorsque le *débit* I_{eff} *augmente* la *chute de tension augmente*. Tous les résultats précédents apparaissent sur le réseau des *caractéristiques externes* de l'alternateur (fig. IX-33). Chacune d'elles, pour une même valeur du courant d'excitation *J* et du facteur de puissance cos φ, fournit la variation de la tension U_{eff} en fonction du courant I_{eff} débité. Elles sont limitées au courant normal $I_{n\,\text{eff}}$ (partie en trait plein) ; toutes partent du même point *A* ($I_{\text{eff}} = 0$, marche à vide) et aboutissent au même point *B* ($U_{\text{eff}} = 0$, marche en court-circuit).

Remarque : Le cahier des charges relatif à un alternateur précise :

— le facteur de puissance cos φ *maximal* qui fixe la puissance du moteur d'entraînement ;

— le facteur de puissance cos φ *minimal* au-dessous duquel il est impossible d'avoir en même temps la tension nominale et le courant nominal (influence de cos φ sur la chute de tension).

14. RÉGULATION DE LA TENSION

Elle s'effectue par l'action sur le courant d'excitation *J*.

1° Lorsque celui-ci est fourni par une dynamo dite excitatrice *Exc* (fig. IX-34) on agit sur l'excitation *J'* de l'excitatrice (dynamo à excitation en dérivation) au moyen d'un rhéostat *Rh*. Dans le cas des alternateurs de grande puissance, le courant *J'* est lui-même si intense qu'il est débité par une excitatrice pilote *EP* (fig. IX-35) beaucoup plus petite, elle-même auto-excitée (en dérivation).

Fig. IX-34

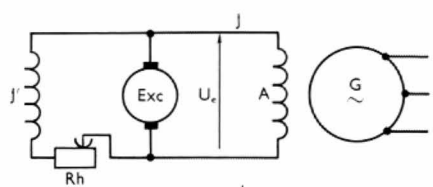
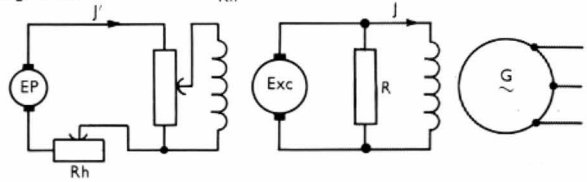
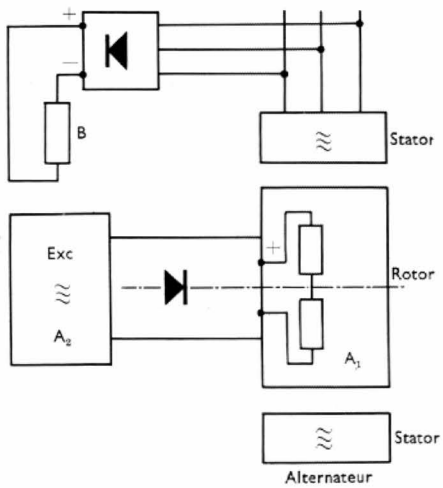


Fig. IX-35



2° Récemment on s'est appliqué à éviter l'alimentation de l'inducteur de l'alternateur par l'intermédiaire de bagues et de balais et l'on a utilisé des redresseurs statiques (V. t. 1, Électronique, chap. 18). Un petit alternateur A_2 (fig. IX-36) placé en bout d'arbre a son *inducteur fixe* et son

Fig. IX-36



induit tournant. Celui-ci fournit un courant alternatif à un redresseur qui est fixé sur l'arbre et qui est relié directement au rotor de l'alternateur A_1. Un second redresseur commandé permet le réglage de la tension de l'alternateur A_2.

15. COURT-CIRCUIT D'UN ALTERNATEUR

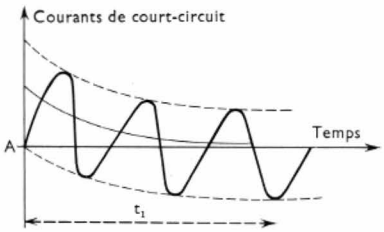
Lorsqu'un court-circuit se produit entre les bornes d'un alternateur, la *réaction d'induit* est *très grande* et *soustractive* (car l'induit de l'alternateur est très inductif). Elle doit donc provoquer une diminution notable du flux.

Mais le *flux* dans un noyau massif ne décroît que progressivement (les courants de Foucault induits dans le noyau tendent à le prolonger). La conséquence est que la f.é.m. $E_{cc\ \text{eff}}$ qui engendre le courant de court-circuit ne décroît que progressivement ainsi que le courant $I_{cc\ \text{eff}}$. Il faut donc distinguer (fig. IX-37) :

a) le courant de court-circuit de la période transitoire (très intense jusqu'à 20 $I_{n\ \text{eff}}$),

b) le courant de court-circuit *permanent* beaucoup plus faible (proche de $I_{n\ \text{eff}}$; parfois il est inférieur à $I_{n\ \text{eff}}$).

Fig. IX-37



Cela explique pourquoi les disjoncteurs sont réglés de façon à ne couper le circuit immédiatement ; en effet il est indispensable que la puissance apparente limite de ces disjoncteurs (au-delà de laquelle des arcs tendent à prolonger le courant) ne soit pas dépassée. Cependant durant la période transitoire l'alternateur doit résister aux forces électrodynamiques (V. t. 1, Électricité, chap. 24) dues au courant très intense. C'est pourquoi le constructeur accroît la seule réactance qui limite ce courant, c'est-à-dire la *réactance de fuites;* en outre il consolide les têtes de bobines.

RENDEMENT

16. RENDEMENT VRAI. MESURE. MÉTHODE DIRECTE

Le rendement *vrai* d'un alternateur s'exprime par le rapport :

$$\eta_{\text{vrai}} = \frac{\text{puissance électrique active fournie}}{\text{puiss. mécanique absorbée} + \text{puiss. d'excitation}}$$

La puissance électrique est facile à mesurer (au moyen de wattmètres) ; de même la puissance nécessaire à l'excitation. Il n'en est pas de même de la puissance mécanique. On peut la déterminer au moyen d'un dynamomètre de torsion qui mesure le couple, mais il est souvent difficile de l'interposer entre le moteur et l'alternateur. De plus cette mesure exige la mise en charge de l'alternateur, ce qui devient impossible s'il faut atteindre une grande puissance. C'est pourquoi on mesure généralement le rendement *approché*.

17. RENDEMENT APPROCHÉ. PERTES MESURABLES. MESURE INDIRECTE

Le rendement approché, pour une puissance électrique active *que l'on s'impose,* se définit par le rapport suivant :

$$\eta_{\text{approché}} = \frac{\text{puissance électrique}}{\text{puissance électrique} + \text{pertes mesurables}}$$

Parmi les pertes de puissance il faut distinguer :

1° Les pertes *mesurables* parmi lesquelles nous avons déjà distingué (V. chap. 2) celles qui sont indépendantes de la charge (mécaniques et pertes dans le fer) et celles qui dépendent de la charge (pertes par effet Joule dans l'enroulement induit). Quant aux pertes par excitation, elles croissent un peu avec la charge puisque l'augmentation de celle-ci oblige à surexciter l'alternateur pour maintenir sa tension (on considère le cas général d'un circuit inductif). La figure IX-38 rappelle comment varient ces différentes pertes en fonction de la puissance apparente S.

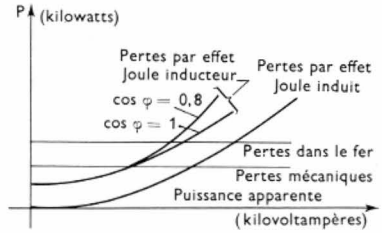


Fig. IX-38

2° Les pertes non mesurables dites *supplémentaires* dues à des phénomènes liés au débit de la machine : concentration du courant vers l'extérieur dans une encoche, supplément de pertes dans le fer lié à la distorsion du flux, courants de Foucault induits dans un conducteur par le courant même qui le traverse, etc. C'est pourquoi le rendement approché l'est toujours *par excès*.

La mesure de ce rendement se ramène à celle des pertes *mesurables*. On accouple l'alternateur à un moteur électrique *taré*, c'est-à-dire dont on connaît le rendement à toutes charges. Connaissant la puissance électrique que ce moteur absorbe (facile à mesurer), on déduit la puissance mécanique qu'il fournit sur l'arbre dans les trois cas suivants :

a) *alternateur à la vitesse normale et non excité :* le moteur taré fournit une puissance W_1, égale aux pertes mécaniques P_m : $W_1 = P_m$,

b) *alternateur à la vitesse normale et excité* de façon à obtenir la f.é.m. $E_{ch\ \text{eff}}$ (bien que l'alternateur soit à vide). Le flux a alors la même valeur qu'en charge et les pertes dans le fer sont les mêmes. Le moteur fournit une puissance W_2 égale à la somme des pertes mécaniques P_m et des pertes dans le fer : $W_2 = P_m + P_{fer}$,

c) *alternateur à vitesse normale débitant en court-circuit le courant* I_{eff} fixé. Dans cet essai, le flux est faible, les pertes dans le fer sont insignifiantes, mais les pertes par effet Joule dans l'induit sont celles qui se produisent en charge. Le moteur fournit une puissance W_3 égale à P_m augmentée des pertes par effet Joule dans l'induit P_{ja} :

$$W_3 = P_m + P_{ja}$$

D'où :

$$\eta_{\text{approché}} = \frac{P_u}{P_u + P_m + P_{fer} + P_{ja} + P_{je}}$$

$$= \frac{P_u}{P_u + W_2 + (W_3 - W_1) + P_{je}}$$

(P_{je} représentant les pertes par effet Joule dans l'inducteur).

TURBO-ALTERNATEUR

Dans un turbo-alternateur l'énergie mécanique est fournie directement par une turbine à vapeur (V. t. 1, Centrales thermiques). Celle-ci ayant un rendement optimal à grande vitesse, le rotor de l'alternateur (généralement à petit nombre de pôles) est accouplé à la turbine et tourne donc à une vitesse comprise entre 750 à 3 000 tr/mn. Pour les puissances élevées, ces vitesses de rotation ont posé des problèmes particuliers quant à la construction de ces machines. En effet, la vitesse tangentielle peut alors atteindre des valeurs considérables, 80 à 100 m/s et même parfois plus de 110 m/s. Pour limiter l'inertie centrifuge, on est obligé de réduire le plus possible le diamètre et d'augmenter en conséquence la longueur de la machine. Cependant, le diamètre ne pouvant être par trop réduit, l'inertie centrifuge reste très importante ; cela oblige à n'employer que des matières très résistantes (bronze et acier spéciaux), à donner au rotor les dispositions appropriées, et à faire les équilibrages statique et dynamique du rotor aussi parfaits que possible.

18. REFROIDISSEMENT

Il doit être en rapport avec la réduction du volume de la machine et des surfaces de refroidissement.

Pour augmenter la ventilation, on ménage dans le rotor (inducteur) et dans le stator (induit), de nombreux *canaux de ventilation* parallèlement à l'arbre et dans des plans perpendiculaires à celui-ci. Les canaux de ventilation parallèles à l'arbre sont relativement peu employés pour le stator.

Parfois, on dispose la carcasse de façon à déterminer un tirage naturel par échauffement de l'air à l'intérieur de la machine. En général, le tirage naturel étant insuffisant, on fait circuler l'air dans la machine, soit au moyen de ventilateurs indépendants, soit presque toujours à l'aide du rotor qui est établi pour former un véritable ventilateur (fig. IX-39).

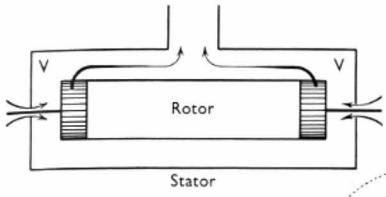


Fig. IX-39

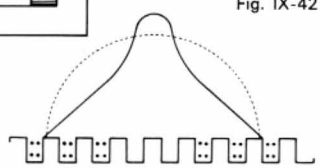


Fig. IX-42

Dans ce cas, l'air qui est puisé à l'extérieur de la salle des machines passe d'abord dans le rotor, en pénétrant de chaque côté de celui-ci, traverse ensuite le stator et s'échappe dans les caniveaux qui conduisent à l'extérieur.

Dans le cas de grandes puissances ce refroidissement s'opère par *l'hydrogène* pour les raisons suivantes :

1° La densité du fluide étant 14 fois plus faible que celle de l'air, il en résulte que, pour une même machine, les pertes d'énergie dues à la ventilation et aux frottements sur les surfaces en mouvement de rotation sont diminuées dans cette proportion.

2° Son coefficient de conductibilité thermique étant 7 fois plus grand que celui de l'air, et son coefficient de convection l'étant 1,35 fois, les dimensions d'un alternateur refroidi à l'air peuvent être diminuées par l'emploi de l'hydrogène, à puissance égale et pour un même échauffement de la machine. Inversement, pour un même dimensionnement, la puissance possible peut être augmentée.

3° L'hydrogène est un gaz inerte et qui n'entretient pas la combustion.

4° Par suite de l'absence d'oxygène, d'humidité et de poussière à l'intérieur de la machine — ce qui n'est pas le cas avec l'air — la tenue diélectrique des isolants est améliorée. L'emploi de l'hydrogène permet une réduction des frais d'entretien.

5° En raison de la faible densité de l'hydrogène qui circule en circuit fermé dans l'alternateur, le bruit est diminué.

Le refroidissement avec de l'hydrogène à une pression un peu supérieure à la pression atmosphérique permet d'obtenir une augmentation de puissance de près de 25 % (par rapport à celle obtenue lorsqu'il est refroidi à l'air) et cela avec un échauffement normal. Ce procédé permet d'augmenter le rendement de plus de 0,5 % à pleine charge.

19. GRAISSAGE ET REFROIDISSEMENT DES PALIERS

Ils doivent être assurés avec soin, du fait de la grande vitesse angulaire. En général, on emploie le *graissage sous pression*. L'huile est envoyée dans les paliers au moyen de pompes actionnées par une turbine à vapeur. Le refroidissement des paliers est obtenu par circulation d'eau.

20. INDUCTEURS

20.1. Inducteurs à pôles non saillants. — L'inducteur a, dans ce cas, la forme d'un induit denté de dynamo à courant continu avec des dents très larges et peu nombreuses. Il est formé d'un cylindre en acier, à la périphérie duquel on a aménagé de larges et profondes rainures (fig. IX-40 et IX-41). Dans ces rainures sont placées des bobines qui permettent de produire le flux inducteur. Certaines encoches, placées au milieu des bobines, ne sont pas utilisées afin de rendre la courbe de l'induction dans l'entrefer plus voisine d'une sinusoïde. On augmente ainsi la réluctance à l'intérieur des bobines et le champ, dans cette région, est moins intense que de chaque côté de celle-ci : de cette façon on obtient une courbe voisine de la sinusoïde (fig. IX-42).

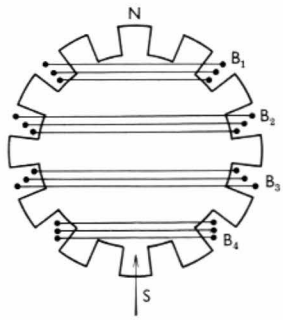


Fig. IX-40 — Rotor inducteur bipolaire

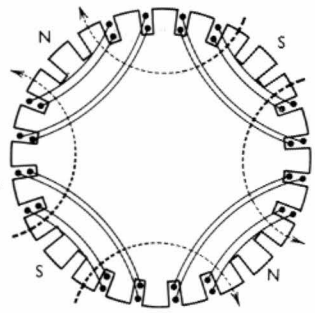


Fig. IX-41 — Rotor inducteur tétrapolaire

Le cylindre d'acier qui forme le rotor est parfois constitué avec des tôles (indispensables pour les alternateurs monophasés) ou avec des disques de 1 à 2 cm d'épaisseur. Dans de nombreux cas, le rotor est un cylindre d'acier massif, dans lequel on creuse des encoches pour l'enroulement et des ouvertures longitudinales et radiales pour la ventilation (fig. IX-43). Le conducteur des bobines inductrices est souvent du ruban de cuivre isolé. On a ainsi des bobines absolument indéformables sous l'action de l'inertie centrifuge. Les conducteurs sont maintenus dans les encoches par des clavettes en bronze spécial ou en acier. De chaque côté du cylindre, pour fixer solidement les parties des bobines qui sont en dehors des encoches, on place une calotte en métal non magnétique, comme le bronze, l'acier amagnétique, le nickel ; elle vient coiffer complètement les bobines.

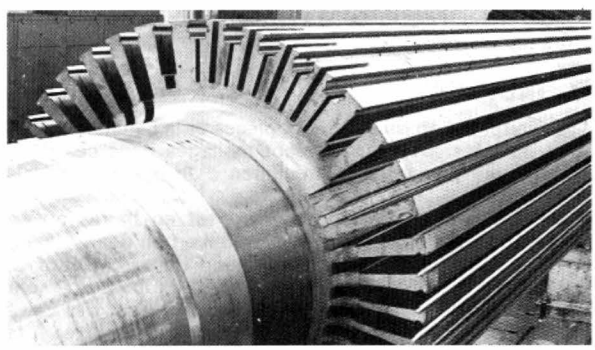


Fig. IX-43 — Détail d'un alternateur de 600 MW (*Alsthom*)

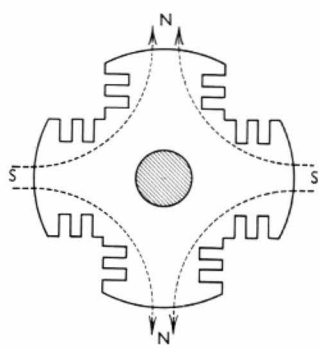


Fig. IX-44

20.2. Inducteurs à pôles saillants. — Ces inducteurs sont munis de noyaux polaires comportant des encoches pour placer les bobines inductrices ; elles sont ainsi maintenues très solidement (fig. IX-44).

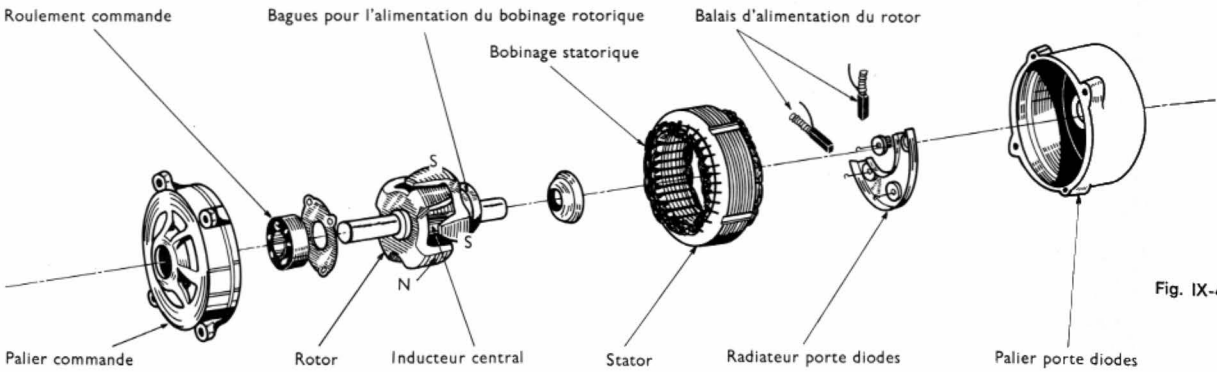


Fig. IX-46

Pour former l'inducteur (fig. IX-45) on emploie, soit des tôles, soit des disques, soit même un bloc d'acier dans lequel on taille des encoches.

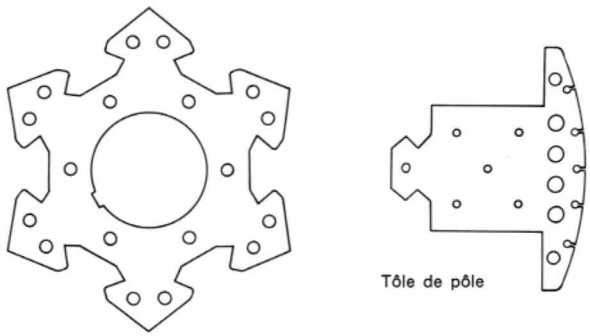


Fig. IX-45 — Tôle de rotor comportant six encoches permettant de placer six tôles de pôle

Comme dans les inducteurs à pôles non saillants, les bobines inductrices sont faites avec un conducteur de cuivre ; elles sont maintenues dans les encoches par des clavettes en bronze, et de chaque côté elles sont fixées par des calottes en bronze ou en acier.

Les pôles saillants présentent l'inconvénient de produire parfois un bruit désagréable à cause de l'air qu'ils entraînent à grande vitesse.

21. INDUIT

Le stator est en une ou deux pièces et la carcasse est en tôles soudées. Des canaux sont ménagés dans ces deux parties pour permettre la circulation d'un fluide de refroidissement.

Suivant la tension, l'enroulement est en barres ou en bobines ; les encoches sont du type ouvert ou demi-ouvert.

Pour obtenir une bonne évacuation de la chaleur, les connexions entre barres ou « *têtes des bobines* » sont écartées les unes des autres et de la masse par des cales en matière isolante ; de forts étriers métalliques, fixés à la carcasse, leur permettent de résister aux efforts mécaniques qui se produisent au moment des courts-circuits.

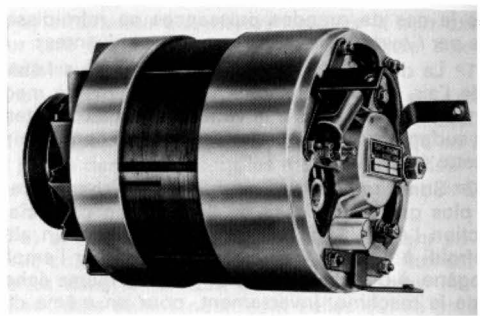
Les têtes des bobines sont complètement recouvertes par des flasques en fonte et protégées contre tout contact accidentel. Après enlèvement de ces flasques, tout l'enroulement peut être visité et nettoyé. Les flasques sont munis, en différents endroits, de trous de visite à volets.

PETITS ALTERNATEURS D'AUTOMOBILES

22. PARTICULARITÉS DE CONSTRUCTION

Les automobiles nécessitent des puissances électriques croissantes en raison de l'utilisation d'accessoires plus nombreux et plus puissants. De plus, quand le moteur tourne au ralenti, la dynamo classique ne peut pas charger la batterie. Enfin, dans la dynamo, l'emploi du collecteur et des balais (dispositifs fragiles et sujets à l'usure) présente des inconvénients : il nécessite réglage, entretien et les risques de panne ne sont pas négligeables. On a substitué un petit alternateur à la dynamo : il alimente un redresseur formé d'éléments semiconducteurs (V. t. 1, Électronique, chap. 18) ; il joue le rôle du collecteur de la dynamo sans en avoir les inconvénients.

Le petit alternateur est à rotor inducteur, mais au lieu d'un bobinage sur chaque pôle, on utilise des pièces polaires aimantées qui s'interpénètrent avec un inducteur central. Par exemple, dans un rotor à huit pôles le flux engendré par la bobine inductrice passe dans le noyau et se divise en quatre branches qui correspondent aux quatre pôles nord du rotor. Ces quatre flux traversent l'entrefer, passent dans le stator, traversent à nouveau l'entrefer au droit des quatre autres branches du rotor (qui constituent les pôles sud) et vont se regrouper dans le noyau.



Alternateur 24 V triphasé 50/65 A (*Paris-Rhône*)

Dans les modèles à excitation séparée le courant d'excitation est amené au rotor par deux petites bagues en contact avec deux balais fixes.

La figure IX-46 donne les différents éléments d'un alternateur d'automobile récent. Il existe des alternateurs à aimant permanent (aimants à base de ferrite) plus robustes et de puissance massique plus grande. Parfois on place les aimants à l'extérieur, sur un rotor, et l'induit est fixé à l'intérieur du générateur.

Un avantage important de l'alternateur est le suivant : l'inductance $L\omega$ d'un circuit à courant alternatif diminuant avec la fréquence (et par suite avec la vitesse de rotation), une sorte d'*autorégulation* se produit quant au courant débité. À partir de 3 000 tours par minute environ, le courant maximal que peut débiter l'alternateur est indépendant de la vitesse de rotation. C'est ce que montre la figure IX-47 qui se rapporte à deux machines (dynamo et alternateur) de même puissance. L'alternateur n'a pas besoin de régulateur d'intensité.

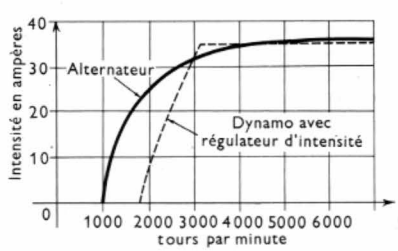


Fig. IX-47

CHAPITRE X

COUPLAGE DES ALTERNATEURS EN PARALLÈLE

Le montage *en série* des alternateurs permettrait d'obtenir des tensions plus élevées. Mais le transformateur élévateur de tension permet d'arriver au même résultat. C'est pourquoi le montage en série (qui par ailleurs serait instable) n'est jamais utilisé. Les alternateurs sont toujours couplés en parallèle.

1. LE SYSTÈME ALTERNATEUR-BARRES

On couple un alternateur en le reliant à des barres de couplage auxquelles sont déjà connectés d'autres alternateurs. Pour étudier les problèmes posés par cette manœuvre on raisonne tout d'abord sur des machines à courant continu. Si E_1 désigne la f.é.m. de la machine couplée aux barres entre lesquelles existe la tension U (fig. X-1 a), on peut écrire :

$$U = E_1 - r_1 I \quad \text{soit :} \quad I = \frac{E_1 - U}{r_1}$$

(on désigne par r_1 la résistance interne de la machine couplée et par I l'intensité du courant débité). Si le couplage

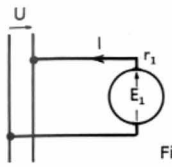


Fig. X-1 a

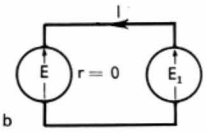


Fig. X-1 b

était effectué sur une machine de f.é.m. E et de résistance interne nulle (fig. X-1 b), on aurait écrit : $I = \dfrac{(E_1 - E)}{r}$

(V. t. 1, Électricité, chap. 6, § 2).

La comparaison des deux équations précédentes montre que la génératrice fournit le même courant I en substituant aux barres (d.d.p. U) un générateur de f.é.m. $E = U$ et de résistance interne nulle.

Ce résultat est encore vrai à un instant t quelconque quand il s'agit d'alternateurs (c'est-à-dire lorsqu'on considère le courant instantané). Dès lors, pour simplifier, on assimile les barres et les alternateurs auxquels elles sont reliées à un alternateur unique de f.é.m. $e = u$ et de résistance interne nulle : on l'appelle *alternateur-barres*. Cela permet de traiter le couplage d'un alternateur sur des barres comme le couplage d'un *alternateur en parallèle avec un autre*.

2. CONDITIONS ÉLECTRIQUES DE COUPLAGE EN PARALLÈLE

Comme pour les transformateurs en parallèle, pour éviter qu'un *courant de circulation* s'établisse, au moment du couplage, entre l'*alternateur-barres* et l'alternateur couplé il faut que *les f.é.m. aient même amplitude et soient en phase. Cela doit être réalisé à tout instant,* car ni les fréquences, ni les phases des deux f.é.m. ne sont liées dans le cas des alternateurs non couplés. Il faut donc que les deux grandeurs sinusoïdales aient la même valeur maximale (ou la même valeur efficace), la même fréquence et qu'elles soient en phase (on suppose qu'elles sont mesurées par rapport à un même point auquel les deux alternateurs sont reliés).

3. MANŒUVRES DE COUPLAGE D'UN ALTERNATEUR

Un alternateur A_2 doit être mis en parallèle avec un alternateur-barres A_1 par l'intermédiaire d'un interrupteur K (fig. X-2), à quel instant doit-on fermer ce dernier ?

3.1. Emploi de lampes de phases. — Entre les branches de K, on dispose une lampe dont la tension de fonctionnement est égale au double de la tension U_{eff} entre barres (ou deux lampes en série de tension nominale U_{eff} chacune).

1° L'alternateur n'étant pas excité, on l'entraîne

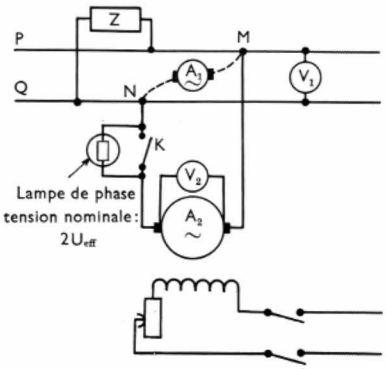


Fig. X-2

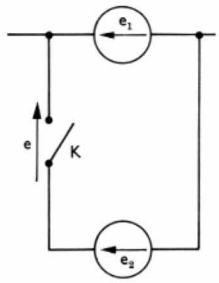
jusqu'à une vitesse voisine du synchronisme ($n = 60\,\dfrac{f}{p}$, f : fréquence entre barres et p : nombre de paires de pôles de l'alternateur).

2° On excite l'alternateur de façon que sa f.é.m. à vide $E_{2\,\text{eff}}$ (mesurée par le voltmètre V_2) soit égale à la tension U_{eff} entre barres (mesurée par le voltmètre V_1). La *première condition* du couplage est réalisée ($E_{1\,\text{eff}} = E_{2\,\text{eff}}$).

On observe alors que l'éclat de la lampe varie périodiquement entre un maximum et une valeur nulle (phénomène de battements). Cela s'explique très bien : le circuit des alternateurs est fermé à travers la lampe et celle-ci est traversée par un courant dû à une f.é.m. e égale à la différence des f.é.m. e_1 et e_2 de A_1 et de A_2 (fig. X-3) :

$$e = e_1 - e_2$$

Mais comme les fréquences de ces deux d.d.p. ne sont pas rigoureusement égales l'amplitude de e n'est pas constante.



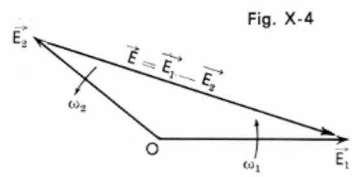


Fig. X-4

Fig. X-3 — Schéma équivalent au montage de la figure X-2

Dans un diagramme de Fresnel ces deux f.é.m. sont figurées par deux vecteurs tournant à des *vitesses angulaires* ω_1 et ω_2 *différentes* (fig. X-4) ; si l'un des vecteurs est supposé fixe, l'autre tourne *lentement* par rapport à lui à la vitesse $\omega_1 - \omega_2$. Divers cas peuvent alors être considérés :

— quand ces vecteurs sont confondus :

$$\vec{E} = 0 \Rightarrow e = 0$$

— quand ils sont opposés :

$$\vec{E} = 2\,\vec{E_1} \Rightarrow e = 2\,e_1$$

Les variations de l'amplitude de e sont d'autant plus lentes que ω_1 est plus proche de ω_2, c'est-à-dire que les fréquences f_1 et f_2 de ces f.é.m. sont plus voisines (si $f_1 = 50$ Hz et $f_2 = 49$ Hz, chacun de ces cas se reproduit toutes les secondes). C'est évidemment dans le second cas que la lampe supporte la plus grande tension et brille le plus.

3° Le mécanicien observant les lampes agit sur le moteur (turbine, par exemple) de façon à ralentir les battements des lampes pour réaliser l'égalité $\omega_1 = \omega_2$, autrement dit $f_1 = f_2$. À ce moment la *deuxième condition* est satisfaite.

4° La *troisième condition* se trouve réalisée à son tour quand e_1 et e_2 sont égales, c'est-à-dire lorsque les

lampes sont éteintes. À ce moment on ferme l'interrupteur K de couplage.

Dans le cas de l'alternateur triphasé, les trois lampes sont disposées aux bornes d'un interrupteur tripolaire. On opère comme précédemment mais de plus, il faut que les lampes « battent » simultanément. S'il n'en est pas ainsi, c'est que l'ordre de succession des tensions de A_2 n'est pas le même que l'ordre de succession des tensions de A_1 (en suivant l'ordre des bornes reliées entre elles). Pour obtenir les battements simultanés, il suffit alors de croiser deux connexions de A_2 avec l'interrupteur de couplage.

3.2. Emploi de voltmètres et d'un synchronoscope. — Sur le pupitre de commande se trouvent :

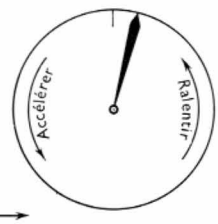
1° Un *bouton* agissant sur l'alimentation du *servomoteur* qui ouvre ou ferme l'admission d'eau ou de vapeur pour atteindre la vitesse de synchronisme (opération dite « du mécanicien »).

2° Des *voltmètres branchés comme* V_1 et V_2.

3° Des *voltmètres* branchés à la place des lampes de phase : avant le couplage ils indiquent alternativement des valeurs maximales et nulles.

4° Un *synchronoscope*. C'est un appareil (fig. X-5) portant une aiguille *tournant comme le vecteur* $\vec{E}$ de la figure X-4. Ce résultat peut être obtenu au moyen d'un petit

Fig. X-5



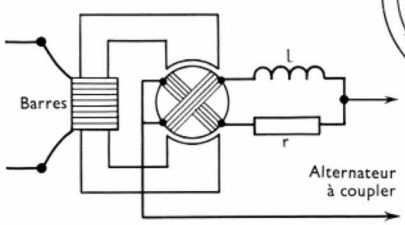


Fig. X-6

moteur alternatif fonctionnant en pseudo-diphasé (fig. X-6). Le rotor porte deux enroulements décalés de $\frac{\pi}{2}$ rad et alimentés par des courants déphasés (grâce à une résistance r et une inductance l) de presque $\frac{\pi}{2}$ rad. Cet ensemble alimenté par l'alternateur A_2 à coupler donne un champ tournant à la vitesse ω_2 (pulsation de A_2). Le stator monophasé relié aux barres (alternateur A_1) donne deux champs tournant en sens opposés à la vitesse angulaire ω_1 (V. chap. 1, § 4). Vis-à-vis du rotor l'un d'eux

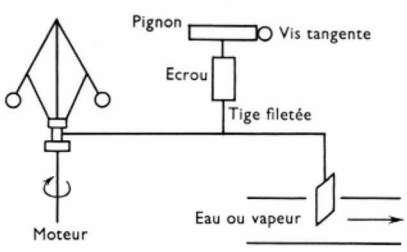


Fig. X-7

tourne à la faible vitesse $\omega_1 - \omega_2$ tandis que l'autre tourne à une grande vitesse : $(\omega_1 + \omega_2)$. Le rotor va tourner lui-même à la vitesse $\omega_1 - \omega_2$: à ce moment le flux rotorique *a rattrapé* le flux statorique tournant dans le même sens que lui et le flux est maximal (véritable accrochage des flux). Suivant que ω_1 est plus grand ou plus petit que ω_2, le rotor (et par suite l'aiguille du synchronoscope qui est liée à celui-ci) tourne lentement dans un sens ou dans l'autre.

L'appareil permet au mécanicien de savoir s'il doit accélérer ou ralentir ; un trait indique la position que doit occuper l'aiguille à l'instant du couplage.

4. CONDITION DE MISE EN CHARGE DE L'ALTERNATEUR

Au moment d'un couplage, l'alternateur ne fournit aucune puissance et ne débite aucun courant si les conditions de couplage ont été respectées. Il faut ensuite le *mettre en charge*, c'est-à-dire lui faire fournir une partie de la puissance électrique demandée par le réseau extérieur. Pour comprendre cette mise en charge, il faut considérer le *groupe électrogène*, c'est-à-dire l'ensemble turbine-alternateur, et ne pas perdre de vue qu'au rendement près un alternateur fournit électriquement la puissance mécanique qu'il reçoit de son moteur. C'est pourquoi il faut considérer tout d'abord le moteur.

5. RÉPARTITION DES PUISSANCES ENTRE LES MOTEURS DE DEUX ALTERNATEURS EN PARALLÈLE

Tout moteur (thermique ou hydraulique) est muni d'un régulateur dont l'action est comparable à celle d'un régulateur à boules (fig. X-7). L'axe vertical est entraîné par le moteur lui-même : un accroissement de vitesse écarte les boules (du fait de l'inertie centrifuge), la bague inférieure remonte et l'admission d'eau ou de vapeur se trouve réduite. En cas de baisse de vitesse c'est l'inverse qui se produit (V. t. 2, Automatismes). Le régulateur permet de maintenir la fréquence de rotation n *presque* constante (fig. X-8). On appelle *écart de réglage* du régulateur le rapport :

$$\frac{\text{vitesse à vide} - \text{vitesse en charge}}{\text{moyenne des vitesses (à vide et en charge)}}$$

Quand deux alternateurs sont en parallèle :

1° Leurs écarts de réglage sont généralement différents.

2° Leurs puissances s'ajoutent.

Leurs fréquences de rotation (et leurs vitesses de rotation) n étant toujours rigoureusement égales, on peut donc tracer la courbe $n\,(P)$ de l'ensemble des deux groupes électrogènes : pour une ordonnée déterminée, la puissance P est la somme des abscisses P_1 et P_2 (fig. X-9).

La répartition d'une puissance P entre les deux machines est parfaitement définie par la condition d'égalité des vitesses. Comment peut-elle être modifiée ? Il faut déplacer la caractéristique $n\,(P)$ de la machine A_2 par rapport à celle de la machine A_1. Pour cela, il suffit au mécanicien d'agir sur l'axe du levier du régulateur de A_2 : s'il le soulève, la puissance fournie à A_2 est plus grande à vitesse

Fig. X-8

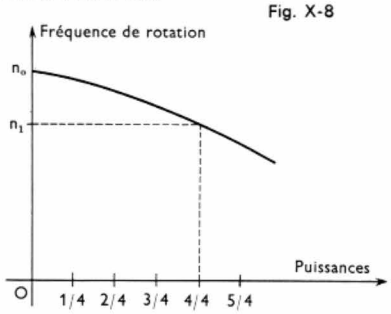
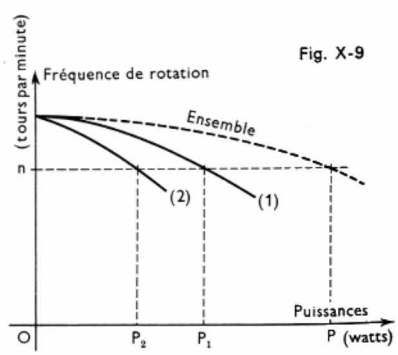


Fig. X-9



égale et la caractéristique $n\,(P)$ de A_2 subit une translation verticale vers le haut (le cas où la vitesse ne reste pas constante sera étudié plus loin, V. ci-après § 8 et 9). L'alternateur A_2 fournit alors une part plus grande de la puissance P demandée par le réseau.

6. COURBE DE LA MARCHE EN PARALLÈLE

On étudie la marche en parallèle de deux alternateurs A_1 et A_2 dans les hypothèses simplifiées suivantes :

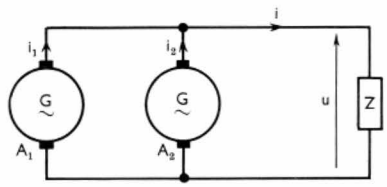
1° Les deux alternateurs sont identiques. L'hypothèse de Behn Eschenburg est applicable (réactance $L\omega$ de Behn Eschenburg constante), les *chutes de tension par résistance sont négligeables.*

2° On s'astreint à maintenir constante leur tension et leur fréquence.

3° La puissance active et la puissance réactive absorbées par le réseau sont constantes.

On suppose le problème résolu : les deux alternateurs A_1 et A_2 débitent les courants i_1 et i_2 dans un réseau représenté par l'impédance Z (fig. X-10). Les facteurs de puissance de A_1 et A_2 sont respectivement cos φ_1 et cos φ_2.

Fig. X-10



Si l'on appelle $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$, $\vec{I}_1$, $\vec{I}_2$ et $\vec{U}$ les vecteurs associés respectivement aux f.é.m. à vide e_1, e_2, aux courants i_1, i_2 et à la tension u, on obtient le diagramme de Fresnel de la figure X-11. Il traduit vectoriellement les deux relations complexes suivantes :

$$\underline{E}_1 = \underline{U} + jL\omega\underline{I}_1$$
$$\underline{E}_2 = \underline{U} + jL\omega\underline{I}_2$$

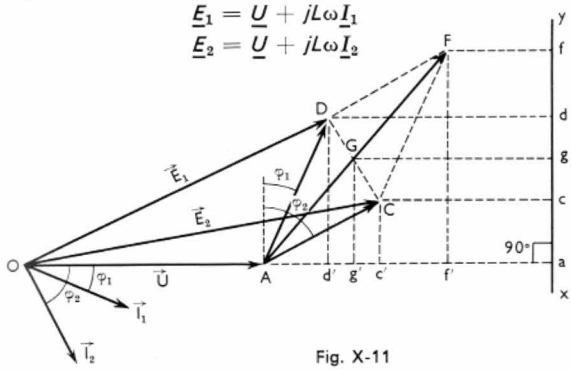


Fig. X-11

On voit que :

a) $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$, de modules respectivement proportionnels à $L\omega I_{1\,\text{eff}}$ et $L\omega I_{2\,\text{eff}}$, peuvent représenter les courants i_1 et i_2 ; $\overrightarrow{AF}$ leur résultante représente le courant i dans le réseau ;

b) les segments ad et ac ($ad \sim I_{1\,\text{eff}} \cos \varphi_1$ et $ac \sim I_{2\,\text{eff}} \cos \varphi_2$) peuvent représenter ($U_{\text{eff}}$ étant constante) les *puissances actives* $U_{\text{eff}}\, I_{1\,\text{eff}} \cos \varphi_1$ et $U_{\text{eff}}\, I_{2\,\text{eff}} \cos \varphi_2$ des deux alternateurs alors que af représente la *puissance active P du réseau ;*

c) les segments Ad' et Ac' ($Ad' \sim I_{1\,\text{eff}} \sin \varphi_1$ et $Ac' \sim I_{2\,\text{eff}} \sin \varphi_2$) peuvent représenter les *puissances réactives* $U_{\text{eff}}\, I_{1\,\text{eff}} \sin \varphi_1$ et $U_{\text{eff}}\, I_{2\,\text{eff}} \sin \varphi_2$ des deux alternateurs, alors que Af' représente la *puissance réactive Q du réseau.*

7. FONCTIONNEMENT OPTIMAL À RÉALISER

On obtient le fonctionnement optimal lorsque les pertes par effet Joule sont minimales. On désigne par $I_{1a\,\text{eff}}$ et $I_{2a\,\text{eff}}$ les valeurs efficaces des composantes actives de i_1 et i_2 et par $I_{1r\,\text{eff}}$ et $I_{2r\,\text{eff}}$ les valeurs efficaces des composantes réactives de ces mêmes courants. Les pertes par effet Joule de l'ensemble des alternateurs sont égales à :

$$P_j = R\,(I^2_{\text{eff}} + I^2_{2\,\text{eff}})$$
$$= R\,(I^2_{1a\,\text{eff}} + I^2_{1r\,\text{eff}} + I^2_{2a\,\text{eff}} + I^2_{2r\,\text{eff}})$$
$$P_j = R\,[(I_{1a\,\text{eff}} + I_{2a\,\text{eff}})^2 - 2\, I_{1a\,\text{eff}}\, I_{2a\,\text{eff}} + (I_{1r\,\text{eff}} + I_{2r\,\text{eff}})^2 - 2\, I_{1r\,\text{eff}}\, I_{2r\,\text{eff}})]$$

Comme le réseau ne change pas :

$$I_{1a\,\text{eff}} + I_{2a\,\text{eff}} = I_{a\,\text{eff}} = \text{constante}$$

et :
$$I_{1r\,\text{eff}} + I_{2r\,\text{eff}} = I_{r\,\text{eff}} = \text{constante.}$$

Si la somme de deux nombres est constante, leur produit est maximal lorsqu'ils sont égaux. Par suite on obtient les pertes par effet Joule minimales (rendement maximal) lorsque

$$I_{1a\,\text{eff}} = I_{2a\,\text{eff}} \quad \text{et} \quad I_{1r\,\text{eff}} = I_{2r\,\text{eff}}$$

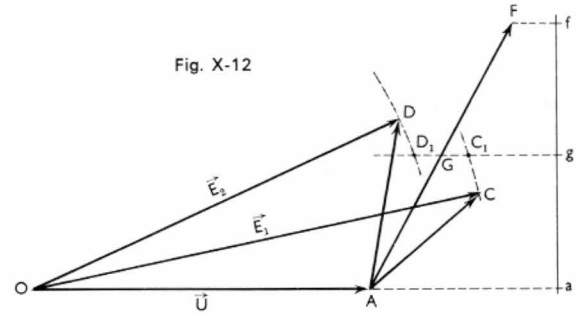
c'est-à-dire lorsque les points D et C (V. fig. X-11) sont confondus au point de rencontre G des diagonales du parallélogramme $ADFC$.

8. RÉALISATION DU FONCTIONNEMENT OPTIMAL

Il faut remarquer que si rien n'est changé dans le réseau alimenté, sur le diagramme de Fresnel le vecteur $\overrightarrow{AF}$ est *constant* en *direction* et en *module.*

1° *Égalisation des puissances actives.* Le mécanicien ouvre l'admission (d'eau ou de vapeur) de A_2 et ferme l'admission de A_1. Les excitations (et par suite les valeurs efficaces des f.é.m. $E_{1\,\text{eff}}$ et $E_{2\,\text{eff}}$) demeurant constantes, les points D et C se déplacent sur des circonférences de centre O et de rayons OD et OC. Quand les points D et C sont en D_1 et C_1 (sur la droite Gg) les puissances actives sont égales $\left(\text{fig. X-12 : } ag = \frac{af}{2}\right)$. Des wattmètres permettent de constater que ces puissances sont effectivement égales. Si, en ouvrant l'admission de l'un des alternateurs, le mécanicien ne fermait pas simultanément l'admission de l'autre, la puissance motrice

Fig. X-12



totale serait supérieure à la puissance résistante (réseau) et la vitesse de rotation des alternateurs augmenterait. La *fréquence* des courants fournis *augmenterait.*

2° *Égalisation des puissances réactives.* À son tour, l'électricien augmente l'excitation de A_1 (OD_1 croît et D_1 se déplace vers G). En même temps, il diminue l'excitation de A_2 (OC_1 décroît et C_1 se déplace vers G). Des ampèremètres dans les circuits de A_1 et de A_2 indiquent le même courant : l'opération est terminée. La marche optimale est réalisée.

Si l'électricien avait augmenté l'excitation de A_1 sans diminuer celle de A_2, dans le diagramme de Fresnel le point G (milieu de C_1D_1) se serait déplacé *vers la droite.* Il en eût été de même du point A (puisque $\overrightarrow{AF}$ est constant en module et en direction). Donc le vecteur $\overrightarrow{OA}$ se serait allongé : *la tension aurait augmenté.*

Il faut donc retenir que :

a) la puissance active est réglée par l'admission ;

b) la puissance réactive est réglée par l'excitation ;

c) un excès global d'admission fait croître la fréquence ;

d) un excès global d'excitation fait croître la tension.

9. CAS GÉNÉRAL D'ALTERNATEURS DE PUISSANCES DIFFÉRENTES

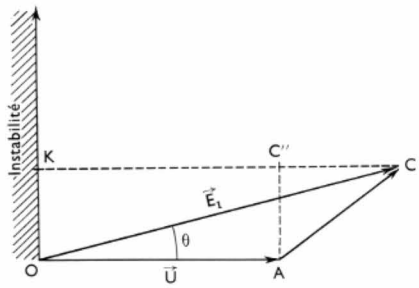
On conçoit que, dans ce cas (courants en phase, addition des puissances apparentes), il convient d'amener les points C et D *sur la droite AF* en des points C' et D' tels que : $\frac{AC'}{AD'} = \frac{S_{1n}}{S_{2n}}$ (S_{1n} et S_{2n} désignant les puissances apparentes des alternateurs A_1 et A_2).

Quelques remarques s'imposent cependant :

1° Toute modification de la puissance active d'un alternateur doit (pour remplir les conditions sus-indiquées) être accompagnée du réglage *d'au moins une des excitations*.

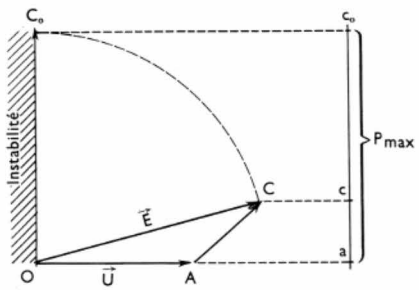
2° Sans toucher à l'admission, si l'on sous-excite un alternateur (par exemple A_1) le courant qu'il débite décroît, passe par un minimum puis croît. Sur le diagramme de Fresnel (fig. X-13), le point C se déplace sur la droite CK (OK est proportionnel à la puissance active et est donc constant) ; l'intensité efficace du courant, proportionnelle à la longueur de AC, est minimale lorsque C est en C''. La puissance *réactive* que fournissait l'alternateur change de signe lorsque le point C se trouve sur la portion $C''K$: le courant i est en avance par rapport à u comme avec un condensateur.

Fig. X-13



3° Si l'on augmente fortement l'admission de A_1 sans toucher à son excitation, la vitesse augmente. Dans le diagramme de Fresnel le point C se déplace sur la circonférence de centre O et de rayon OC (fig. X-14). Mais, au-delà de C_0, un *accroissement de vitesse* correspond à une diminution de puissance donc une diminution du couple résistant que l'alternateur oppose à son moteur : la marche est instable. On dit que l'alternateur *décroche* et il y a risque d'emballement.

Fig. X-14



4° On augmente la stabilité de l'alternateur en augmentant l'excitation, car le rayon OC du cercle est plus grand.

5° Pour *mettre en charge* un alternateur après l'avoir couplé, il faut *augmenter l'admission et l'excitation* (étant donnée l'inclinaison du vecteur $\overrightarrow{AF}$ dans le diagramme de Fresnel).

6° Pour le découplage, opération inverse, on découple l'alternateur quand il ne fournit aucune puissance et ne débite aucun courant.

10. DIAGRAMME DES PUISSANCES À TENSION CONSTANTE

On se place dans le cas fréquent où l'alternateur a une puissance assez faible comparée à celle absorbée par le réseau qu'il alimente : ainsi il ne peut modifier ni la tension, ni la fréquence. Dans ce cas, quelle que soit la valeur de l'excitation J, la tension U_{eff} est la même. Dans le diagramme de Fresnel le vecteur $\overrightarrow{OA}$ a une longueur constante (fig. X-15) ainsi que le segment CH (puissance et admission constantes). La puissance réactive est représentée par le segment AH ($AH \sim L\omega I_{eff} \sin \varphi \sim U_{eff} I_{eff} \sin \varphi$ puisque U_{eff} est constant).

On peut donc graduer la droite OA en *kilovars* à partir du point A (où la puissance réactive est nulle). Pour la puissance active, représentée par CH, on peut graduer la verticale passant par A *en kilowatts* (fig. X-16). Enfin, à excitation J constante (OC = constante) on peut tracer des circonférences de centre O et de rayons correspondant à *différentes valeurs de E*.

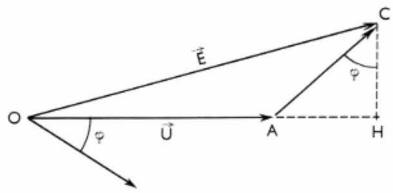


Fig. X-15

On obtient ainsi le *diagramme des puissances à tension constante*. Il permet de suivre les effets des modifications de l'admission ou de l'excitation sur les puissances actives et réactives et sur le facteur de puissance.

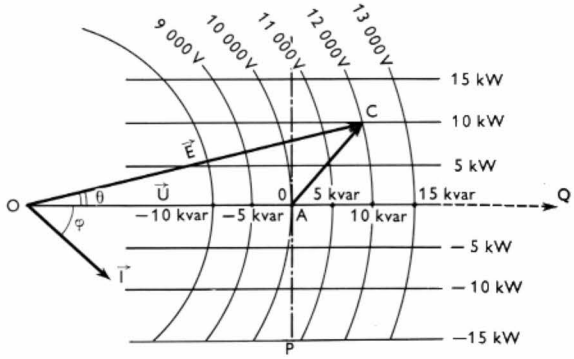


Fig. X-16

11. STABILITÉ. OSCILLATIONS D'UN ALTERNATEUR COUPLÉ

Lorsqu'un alternateur fonctionne, il présente un couple résistant opposé au couple du moteur d'entraînement. Le moment de ce couple dépend du décalage θ des pôles réels et des pôles fictifs (fig. X-17), comme on le verra pour un moteur synchrone (V. chap. 11). À partir de la position relative des pôles réels et des pôles fictifs, définie par le point M ($\theta = 0$), la roue polaire peut être décalée dans le sens de sa rotation. Lorsque l'angle θ est compris entre $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad, c'est la marche en *alternateur stable* (accroissement de vitesse corrélatif d'un accroissement du moment du couple résistant). La valeur T_{m1} du moment du couple du moteur correspond à un moment T_{r1} du couple résistant ($T_{r1} = T_{m1}$) ; le point de fonctionnement est le point P_1 et le décalage est égal à θ_1. Si l'on diminue la charge de l'alternateur, ce qui porte son couple résistant à la valeur T_{r2}, le nouveau point d'équilibre est P_2 (décalage : θ_2). Si l'on passe lentement de T_{r1} à T_{r2} rien d'anormal ne se produit, mais si la décharge de l'alternateur est brusque,

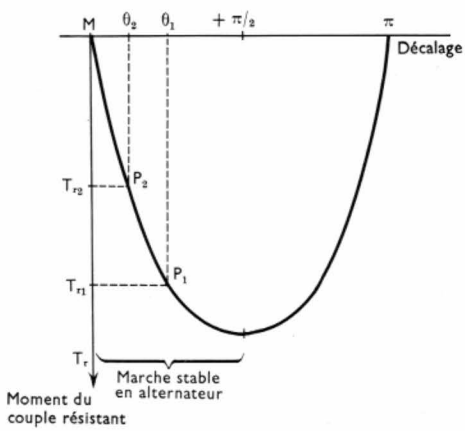


Fig. X-17

le décalage est suivi de quelques oscillations amorties autour de θ_2 (du fait de l'inertie de la roue polaire). C'est dire que le rotor subit des *pompages* (V. chap. 12) mais tout se passe comme s'il existait entre les rotors des alternateurs en parallèle un *ressort* tendant à ramener au synchronisme toute roue polaire qui tendrait à s'en écarter. Le couple élastique de ce ressort fictif est appelé *couple synchronisant*. Ces oscillations ont une période qui dépend des caractéristiques mécaniques du rotor ainsi que de la charge de l'alternateur. Elles sont atténuées au moyen d'amortisseurs Leblanc (V. chap. 9).

12. CONSÉQUENCE DES FAUTES DE COUPLAGE

Trois fautes peuvent être commises lors du couplage d'un alternateur sur les barres :

12.1. Inégalité des tensions. — Du fait de la différence des tensions, un courant réactif traverse les alternateurs au moment du couplage. Le diagramme de Fresnel de la figure X-18 montre bien que si la tension u et la

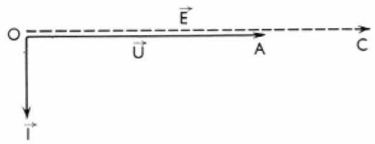


Fig. X-18

f.é.m. e de l'alternateur à coupler (représentées par les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OC}$) sont en phase et ont des amplitudes différentes, le courant i qui prend naissance est tel que la chute inductive (de valeur efficace $L\omega I_{\text{eff}}$) est représentée par $\overrightarrow{AC}$. Elle correspond bien à un courant i entièrement réactif. Si ce courant est trop intense, de dangereuses *forces électrodynamiques* prennent naissance dans les enroulements de l'induit.

12.2. Différence de phase entre la f.é.m. e de l'alternateur et la tension u entre barres. — Cette fois le brusque courant débité par l'alternateur couplé est

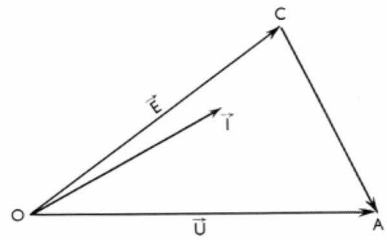


Fig. X-19

surtout *actif* comme le montre le diagramme de la figure X-19. C'est dire que l'alternateur fournit brusquement une puissance active et oppose à son moteur un brusque couple résistant : il peut en résulter une *rupture d'arbre*.

12.3. Différence trop grande des fréquences. — C'est le cas d'un couplage effectué alors que les battements des lampes n'ont pas été assez ralentis (V. ci-dessus, § 3).

1° Si la roue polaire tourne trop vite (l'angle θ augmente) et, du fait de son inertie, l'alternateur peut atteindre la limite de décrochage $\left(\theta = \frac{\pi}{2} \text{ rad}\right)$, malgré le freinage dû à l'accroissement du couple résistant.

2° Si la roue polaire tourne trop lentement, la machine fonctionne en moteur synchrone et retrouve alors son synchronisme. L'inconvénient est moins grave.

13. INTERCONNEXION DES RÉSEAUX

Toutes les centrales sont aujourd'hui interconnectées de façon à pouvoir effectuer entre elles des échanges d'énergie.

Par l'interconnection, il est possible de faire appel à tout instant, pour l'alimentation d'une région quelconque d'un pays, aux centrales qui sont capables de produire l'énergie aux conditions les plus avantageuses.

Le répartiteur central fait coupler de nouveaux alternateurs quand la fréquence baisse, en fait découpler quand la fréquence augmente.

La tension est maintenue constante en modifiant les puissances réactives apportées ou demandées au réseau.

CHAPITRE XI

MOTEUR SYNCHRONE

1. PRINCIPE

1.1. Moteur polyphasé. — Lorsqu'un alternateur triphasé débite dans un réseau inductif, il oppose à la turbine un couple résistant de moment T_r qui peut être expliqué par les moments des forces magnétiques qui s'exercent entre les pôles réels et les pôles fictifs (fig. XI-1). Si l'on réduit la charge de l'alternateur, le moment du couple résistant T_r décroît et les pôles fictifs se déplacent vers l'axe des pôles réels (fig. XI-2). Quand l'alternateur est à vide, pôles réels et fictifs sont sur le même axe (le couple résistant est nul).

On applique maintenant sur l'arbre de la machine un couple *résistant* (un frein est substitué à la turbine). La roue polaire ralentit. La position relative des pôles (réels ou fictifs) devient celle de la figure XI-3 : le moment des forces magnétiques entre ces pôles est opposé au précédent : il s'agit d'un moment *moteur*.

Cette puissance motrice provient de la transformation de la puissance électrique que la machine *absorbe* à ce moment-là. Celle-ci fonctionne en moteur, un moteur qui a la particularité de ne pouvoir fonctionner qu'à une *seule vitesse :* celle du synchronisme $\left(\frac{\omega}{p}\right)$. C'est pourquoi on l'appelle **moteur synchrone.**

1.2. Moteur monophasé. — L'effet de l'ensemble des pôles fictifs tournant dans le sens opposé à la rotation est sensiblement « étouffé » par les *amortisseurs Leblanc* (V. chap. 1). Dès lors, le principe du moteur synchrone monophasé est le même que celui du moteur polyphasé.

2. ÉQUATION DE FONCTIONNEMENT DU MOTEUR SYNCHRONE

Pour cette étude on considère un moteur monophasé ; le raisonnement s'applique intégralement à chaque phase d'un moteur polyphasé.

Le moteur synchrone est un récepteur comme le primaire d'un transformateur. En charge la d.d.p. u entre ses bornes

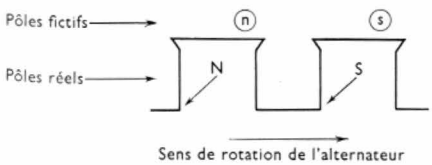


Fig. XI-1

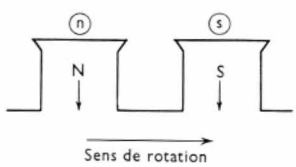


Fig. XI-2

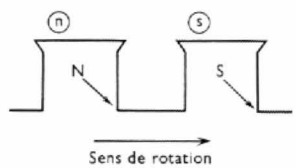


Fig. XI-3

est égale à la f.c.é.m. en charge (opposée de la f.é.m.) e_{ch} augmentée de la chute ohmique interne Ri.

$$u = -e_{ch} + Ri$$

En tenant compte de la valeur de la f.é.m. en charge dans l'hypothèse du diagramme de Behn Eschenburg (V. chap. 9) on peut écrire :

$$e_{ch} = e_v - L\frac{di}{dt}$$

et :
$$u = -e_v + Ri + L\frac{di}{dt}$$

L désignant l'inductance de Behn Eschenburg, et e_v représentant la f.é.m. due à la seule force magnétomotrice de l'inducteur.

Si l'on appelle $\underline{U}$, $\underline{E_v}$ et $\underline{I}$ les nombres complexes associés aux grandeurs u, e_v et i, on peut écrire la relation suivante :

$$\underline{U} = -\underline{E_v} + R\underline{I} + jL\omega\underline{I}$$

3. DIAGRAMME BIPOLAIRE SIMPLIFIÉ

On se place dans les hypothèses suivantes :

— *la machine n'est pas saturée :* $L\omega$ est constante ;

— *la chute ohmique* (RI_{eff}) *est négligeable devant la chute inductive* ($L\omega I_{\text{eff}}$) :

On obtient l'équation simplifiée suivante :

$$-\underline{E_v} = \underline{U} - jL\omega\underline{I}$$

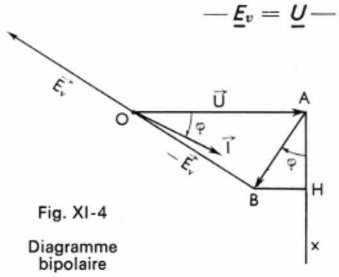


Fig. XI-4

Diagramme bipolaire

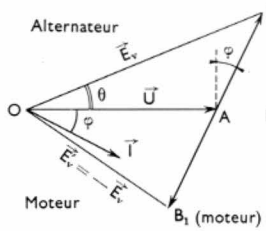


Fig. XI-5

Elle se traduit par le diagramme simplifié de la figure XI-4. On porte les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{I}$ associés à u et i ; l'angle $(\vec{U}, \vec{I})$ est égal à φ (le courant i est en retard d'un angle φ par rapport à u). On place ensuite le vecteur $\overrightarrow{AB}$ pour représenter la chute inductive (le module de $\overrightarrow{AB}$ est proportionnel à $L\omega I_{\text{eff}}$ et $\overrightarrow{AB}$ est perpendiculaire à $\vec{I}$). Le vecteur $\overrightarrow{OB}$, égal à $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB})$, correspond à la f.é.m. $-e_v$

Si l'on projette B en H sur la droite Ax (perpendiculaire en A au vecteur $\vec{U}$) on observe que :

— AB, *proportionnel à* I_{eff}, peut représenter le courant absorbé I_{eff} (à une échelle déterminée),

— $AH \sim L\omega\ I_{\text{eff}} \cos\varphi = \dfrac{L\omega}{U_{\text{eff}}}$ ($U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos\varphi$) peut représenter la puissance électrique absorbée (en marche industrielle U_{eff} est constante).

Comme le rendement du moteur synchrone est excellent, on peut estimer que AH représente la *puissance sur l'arbre* et aussi bien le *moment du couple moteur* ($T_m = \dfrac{P}{\omega}$ avec $\omega =$ constante). On a ainsi un diagramme qui donne toutes les grandeurs intéressant l'usager. Elles sont représentées par des vecteurs dont les uns ont pour origine le point O ($\overrightarrow{OA} = \vec{U}$; $\overrightarrow{OB} = -\vec{E_v}$), les autres le point A ($\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$; $AH \sim P \sim T_m$). Du fait de ces deux origines de vecteurs ce diagramme est dit *bipolaire*.

4. DÉCALAGE ANGULAIRE. MARCHE EN GÉNÉRATEUR. MARCHE EN MOTEUR

On représente le diagramme de Behn Eschenburg et le diagramme bipolaire *simplifié* en adoptant les mêmes hypothèses : $R = 0$, $L\omega =$ constante (fig. XI-5). Dans le triangle OAB_2 on a :

$$\frac{AB_2}{\sin\theta} = \frac{OB_2}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \varphi\right)}$$

ou :
$$\frac{L\omega I_{\text{eff}}}{\sin\theta} = \frac{E_{v\,\text{eff}}}{\cos\varphi}$$

On déduit les égalités suivantes :

$$I_{\text{eff}} \cos\varphi = E_{v\,\text{eff}} \frac{\sin\theta}{L\omega}$$

et :
$$P = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos\varphi = \frac{E_{v\,\text{eff}} U_{\text{eff}} \sin\theta}{L\omega}$$

On voit que la *fourniture* (alternateur) ou *l'absorption* (moteur) de puissance active est liée *au signe de* θ. Physiquement l'angle θ entre les vecteurs $\vec{E_v}$ et $\vec{U}$ correspond à *un décalage réel* $\dfrac{\theta}{p}$ *entre les pôles réels et les pôles fictifs* (fig. XI-6).

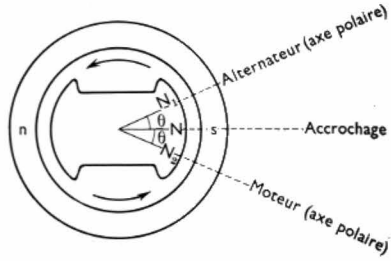


Fig. XI-6 — Décalage des pôles réels et des pôles fictifs dans un alternateur bipolaire ($p = 1$, décalage : θ)

5. CARACTÉRISTIQUES ESSENTIELLES DU MOTEUR SYNCHRONE

5.1. Risque de décrochage. — On va considérer trois positions relatives (fig. XI-7) des pôles réels et des pôles fictifs tournant dans le sens de la flèche F. L'angle électrique entre les axes des pôles fictifs et ceux des pôles réels (ceux-ci se décalant vers l'arrière) est compris entre 0 et π rad ; entre ces positions extrêmes, le moment du couple moteur varie comme l'indique la figure XI-8.

Elle montre qu'entre les points M et N le ralentissement de la roue polaire (croissance de θ) entraîne un accroissement de couple moteur (zone de stabilité). Au-delà de $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ rad le ralentissement détermine une diminution du couple (zone d'instabilité). Entre $\dfrac{\pi}{2}$ rad et π rad le moteur ralentit et s'arrête : c'est le *décrochage*.

Au-delà de $\theta = \pi$ rad le moment du couple change de signe : il devient *résistant* (marche en alternateur). Le décrochage se produit lorsque le moment du couple résistant T_r, opposé au moment du couple moteur (et fixant en S le point figuratif du moteur), *devient supérieur* au couple *maximal* (représenté par le segment NH).

Fig. XI-7

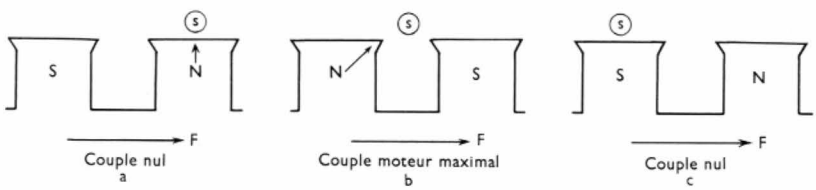
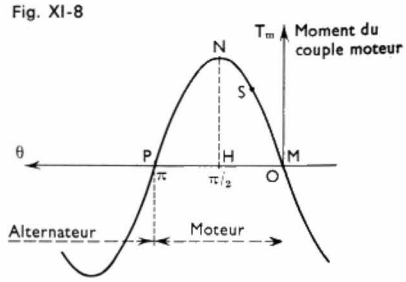


Fig. XI-8



5.2. « Accrochage » d'un moteur synchrone. — Le démarrage d'un moteur synchrone peut être réalisé de deux façons différentes. Soit on alimente uniquement l'induit de la machine pour qu'elle démarre comme un moteur synchrone (V. chap. 13), soit on l'entraîne par un moteur auxiliaire. Dans le premier cas, on peut se demander s'il ne serait pas intéressant d'alimenter également l'inducteur. En réalité le couple T qui en résulterait serait sinusoïdal (donc de valeur moyenne nulle) tant que la vitesse des pôles réels ne serait pas égale à celle des pôles fictifs (fig. XI-9). Il faut attendre que ces vitesses soient suffisamment prochès l'une de l'autre pour que la période du couple soit assez grande et c'est seulement lorsque la vitesse est voisine de celle du synchronisme que le rotor est mis sous tension. Alors, pendant le temps où le couple est *moteur*, le rotor peut rattraper son faible écart de vitesse et le moteur peut ensuite fonctionner normalement. On dit qu'il est *accroché*.

Dans le second cas, l'accrochage d'un moteur synchrone

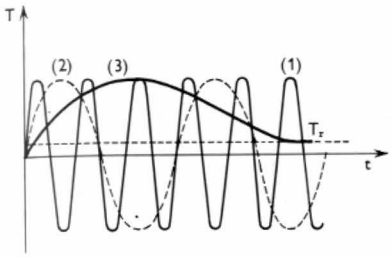


Fig. XI-9

Courbes T (t) pour des vitesses croissantes du rotor
(1) Vitesse très faible
(2) Vitesse moyenne
(3) Vitesse proche de la vitesse de synchronisme

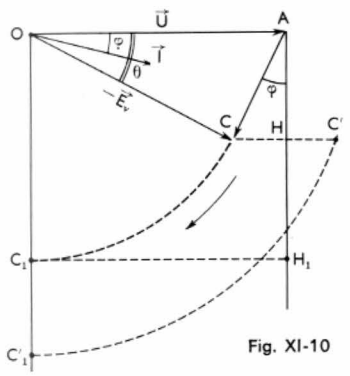


Fig. XI-10

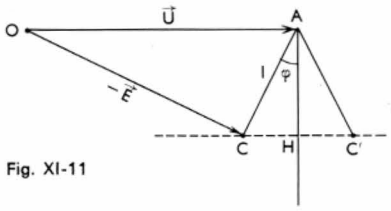


Fig. XI-11

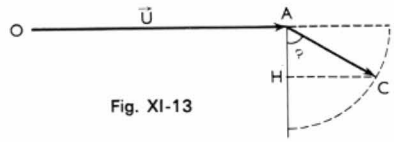


Fig. XI-13

ou le couplage d'un alternateur sur des barres sont, pour une même machine, la *même opération*. Une fois la machine couplée, si on la pousse (avec un moteur) dans le sens de sa rotation elle fonctionne en alternateur, au contraire si on la *freine* (en la liant mécaniquement à une machine-outil) elle marche en *moteur synchrone*.

5.3. La stabilité est fonction de l'excitation. — Soit C (fig. XI-10) le point figurant l'état du moteur dans le diagramme bipolaire. À excitation J constante ($E_{v\,\text{eff}}$ constante), si l'on charge le moteur, AH, segment de longueur proportionnel au moment du couple, doit croître. (V. ci-dessus § 3) et OC doit demeurer constant. Le point figuratif se déplace dans le sens de la flèche sur la circonférence de rayon OC. Lorsque ce point atteint C_1 le moment du couple est maximal (il est représenté par le segment OC_1). Au-delà de C_1, θ dépasse $\frac{\pi}{2}$ rad et le couple moteur diminue : la limite de stabilité est franchie en C_1.

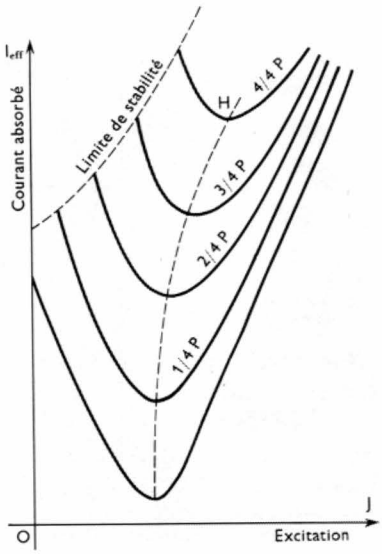
Avant de charger le moteur, si l'on a porté l'excitation à une valeur J' supérieure à J, la f.é.m. a une valeur plus grande ; elle est alors représentée par un vecteur $\overrightarrow{OC'}$. Le point C' se projette encore en H (puisque l'on suppose que la puissance demandée est la même que lorsque le point de fonctionnement se trouvait en C) mais on voit que le moment du couple maximal atteint alors une valeur plus grande (elle est représentée par OC'_1). Le *degré de stabilité* défini par le rapport $\frac{T_{\max}}{T_n}$ est augmenté.

5.4. En surexcitation c'est un générateur de puissance réactive. — Si le moteur fournit une *puissance P constante* tandis que son courant d'*excitation J* est *variable*, le point figuratif C se déplace sur une parallèle à OA (fig. XI-11). En effet, on a vu que si la puissance est constante, le segment AH est aussi constant. Donc à puissance égale et à excitation J croissante :

1° Le courant absorbé (dont l'intensité efficace est proportionnelle à la longueur de AC) décroît, passe par un minimum (lorsque C est en H) puis il augmente à nouveau. Lorsque C est à gauche de AH le courant est inductif. Lorsque C est en H, i et u sont en phase ($\cos\varphi = 1$). Si C est à droite de AH le courant est déphasé en avance sur la tension. C'est un générateur de puissance réactive : on lui donne alors le nom de **compensateur synchrone.**

2° La puissance P étant un paramètre, il y a autant de courbes I_{eff} (J) que de valeurs de P. On les appelle *courbes en V* ou *courbes de Mordey* (fig. XI-12) ; elles s'emboîtent les unes dans les autres. Pour chaque puissance P, l'excitation qui correspond au courant I_{eff} minimal est l'excitation *optimale :* elle correspond au minimum de pertes par effet Joule et donc au maximum de rendement.

Fig. XI-12
Courbes de Mordey



5.5. Un moteur synchrone peut fournir d'autant plus de puissance réactive qu'il est moins chargé. — En effet, si l'on trace (fig. XI-13) la circonférence de centre A et de rayon AC ($AC \sim L\omega I_{n\text{eff}}$, $I_{n\text{eff}}$ étant le courant *normal* à ne pas dépasser) on voit que, plus AH est petit (c'est-à-dire plus la puissance *active* est faible) plus CH est grand. Ce segment étant proportionnel à la puissance réactive on constate donc que pour obtenir une grande puissance réactive, il faut que la charge du moteur soit faible ou nulle.

5.6. Oscillations de vitesse (« pompages »). — Le point figuratif, sur la courbe T_m (θ) du moteur (fig. XI-14) étant en S_1 ($T_{m1} = T_{r1}$), on augmente le couple résistant jusqu'à ce qu'il atteigne une valeur T_{r2}. Que se passe-t-il alors ? La roue polaire devrait ralentir et la vitesse devrait se

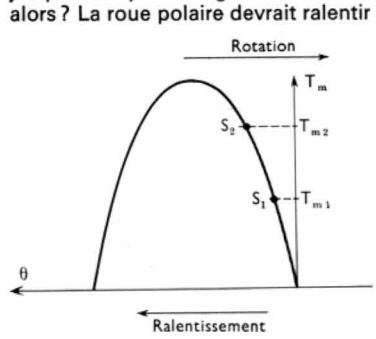


Fig. XI-14

fixer à la position correspondant au point S_2 ($T_{m_2} = T_{r_2}$). En réalité, du fait de l'inertie, le ralentissement du rotor est trop grand : le point de fonctionnement dépasse S_2. Mais alors le moment du couple moteur est supérieur à T_{r_2} et la roue polaire accélère ; pour la même raison que précédemment le point de fonctionnement dépasse S_2.

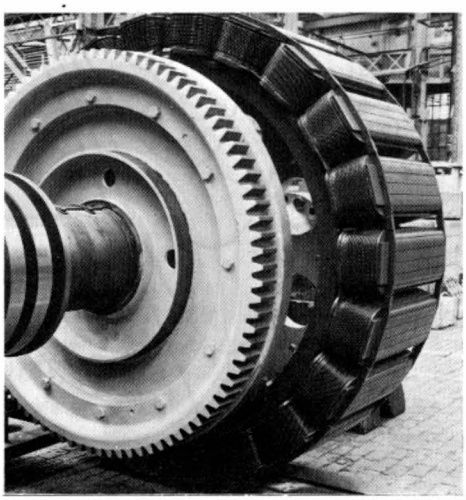
C'est ainsi que le rotor est le siège d'oscillations de vitesse (appelées *pompages*) autour de la vitesse de synchronisme. Elles sont analogues à celles d'un système élastique et sont gênantes, car la f.c.é.m. oscille ainsi que le courant absorbé et la chute de tension en ligne.

Ces pompages à basse fréquence sont atténués par l'emploi d'*amortisseurs Leblanc* qui s'opposent au déplacement relatif des pôles réels et des pôles fictifs.

6. APPLICATIONS DU MOTEUR SYNCHRONE

Il présente des inconvénients dus à son *prix* (obligation d'emploi d'une excitatrice), à la nécessité de son *accrochage*, aux *risques de décrochage* (il impose plus de surveillance que les moteurs asynchrones ; V. chap. 12), à sa *vitesse non réglable*.

En revanche, par rapport au moteur asynchrone il offre de nombreux avantages : *meilleur rendement*, *entrefer* plus *large* (les tolérances d'usure des paliers sont plus grandes), utilisation *directe* des *tensions élevées* si nécessaire, et surtout possibilité de produire de la puissance réactive en le



Rotor pour entraînement de compresseurs à pistons (*G.E.T.-Alsthom*)

surexcitant ; il est utilisé pour *relever le facteur de puissance* de certains réseaux ou de certaines installations importantes (V. chap. 22).

On le préfère actuellement au moteur asynchrone lorsqu'il faut un moteur à *haute tension* ou *à faible vitesse* (à grand entrefer en tout cas), pour assurer un service régulier (commande de compresseurs, d'hélices de navires, de machines d'extraction, etc.). Dans ce cas, il n'y a pas de risque de décrochage et, de plus, il y a apport d'*énergie réactive* à l'installation (influence sur le facteur de puissance moyen).

Électricité de France l'emploie parfois dans son réseau en *compensateur synchrone :* il fonctionne en moteur synchrone *à vide* et il permet de régler (au point où il est placé) la tension du réseau aux différentes charges par le *jeu du facteur de puissance*. La figure XI-15 montre, en effet, que suivant le déphasage entre u et i, toutes choses égales, la tension à l'extrémité de la ligne varie avec φ

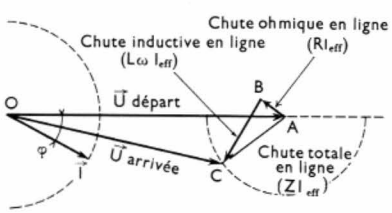


Fig. XI-15

(elle peut même être supérieure à la tension de départ). Un réglage de puissance réactive par l'action sur l'excitation de la machine synchrone constitue, en fait, compte tenu des chutes en ligne, un *réglage de la tension*.

MOTEURS SYNCHRONES DE FAIBLE PUISSANCE

Il s'agit de moteurs dits *fractionnaires* dont la puissance est inférieure à 1 kW.

7. COUPLE ÉLECTROMAGNÉTIQUE SUR UN ROTOR À PÔLES SAILLANTS

Dans certains moteurs synchrones on utilise un rotor bipolaire (fig. XI-16) à pôles saillants *non excité*. En fait ce rotor est l'armature mobile d'un électroaimant : elle tend à prendre la direction $N'S'$ des pôles fictifs pour laquelle *la réluctance du circuit magnétique est minimale* et le flux maximal.

L'attraction est nulle pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad. Pour des positions symétriques par rapport à cette valeur de θ on retrouve la même loi d'attraction, le rotor n'ayant pas de polarité propre. Le moment du couple est nul pour $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad. Le moment du couple de ce moteur est égal à :

$$T_m = T_{\max} \sin 2\,\theta = KI_{\text{eff}} \sin 2\,\theta \qquad (K = \text{Cte})$$

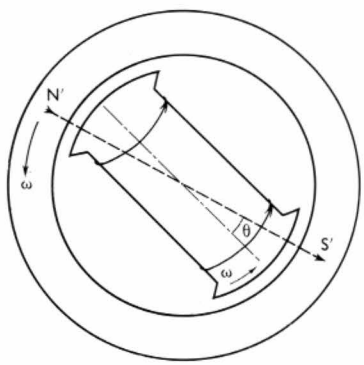


Fig. XI-16

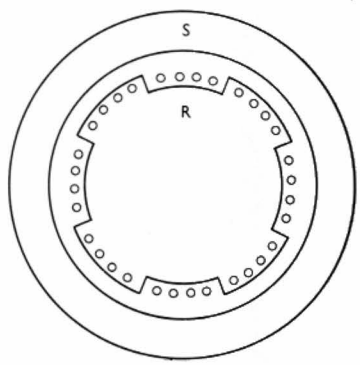


Fig. XI-17

8. MOTEUR AUTOSYNCHRONE

Ce moteur comporte un stator analogue à celui des autres moteurs et un rotor à cage (V. chap. 12). Celui-ci est formé de tôles qui présentent des découpures dessinant l'amorce des pôles saillants (fig. XI-17). La cage d'écureuil se continue en général dans les interpôles.

Pour son démarrage ce moteur a les caractéristiques d'un moteur asynchrone à cage. À la vitesse de fonctionnement, le moment du couple est la somme du moment du couple électrodynamique K_g (en asynchrone) et du moment du couple électromagnétique (dû au dessin des pôles saillants) :

$$T = K_g + T_{sm} \sin 2(\omega - \omega')t = K_g + T_{sm} \sin 2\,g\omega t$$

si g désigne le glissement : $g = \frac{\omega - \omega'}{\omega}$ (ω vitesse de rotation des pôles réels, ω' vitesse de rotation du rotor). Le couple $T_{sm} \sin 2\,g\omega t$ accélère le mouvement quand il varie de zéro à son maximum c'est-à-dire quand $g\omega t$ varie de 0 à $\frac{\pi}{4}$ rad. On voit que pour que l'accrochage soit possible il faut que le couple résistant T_r soit inférieur au moment du couple synchrone maximal T_{sm}. Par ailleurs le passage de la vitesse ω' (en moteur asynchrone) à la vitesse ω (en moteur synchrone) doit se faire dans un temps au plus égal à :

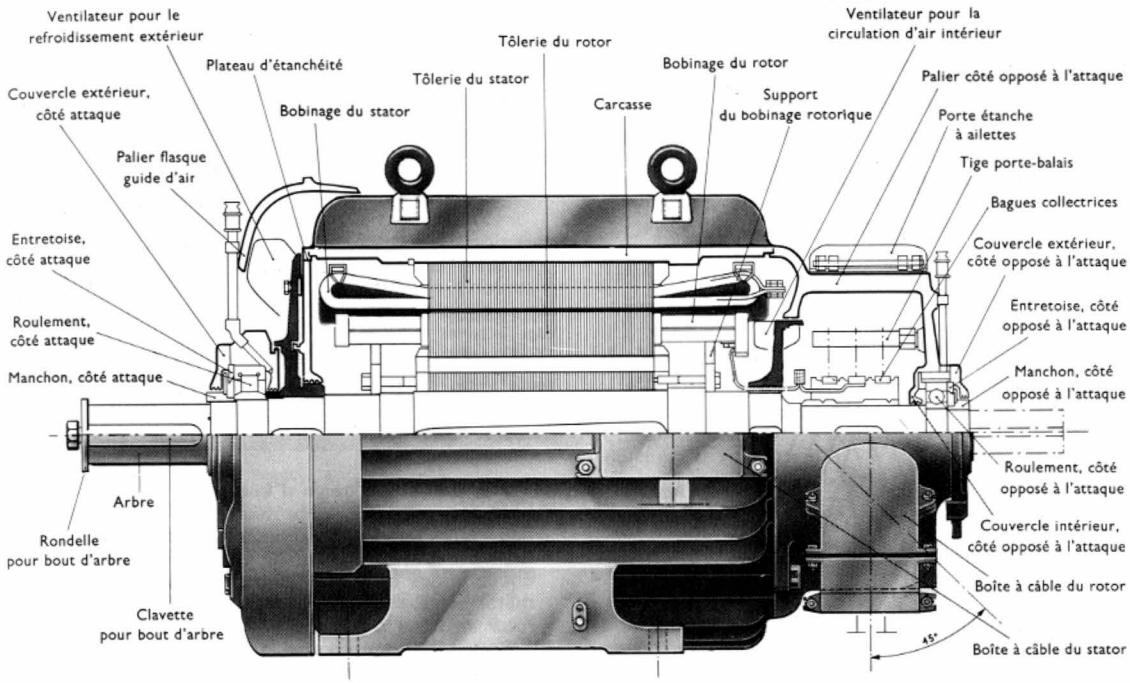
$$t_0 = \frac{1}{g\omega} \cdot \frac{\pi}{4}$$

Il y a un couple résistant à ne pas dépasser pour que le moteur « s'accroche » sur le champ statorique ; on lui donne le nom de *couple d'accrochage*.

CHAPITRE XII

MACHINES ASYNCHRONES

MOTEUR ASYNCHRONE



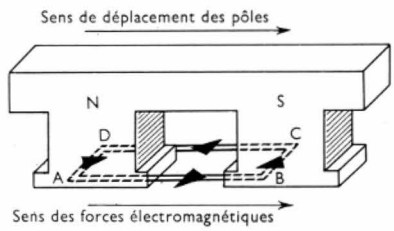
Coupe d'un moteur asynchrone fermé, série Normadyne, type F (*Jeumont*)

CONSTITUTION

1. PRINCIPE

Lorsque deux pôles d'aimant nord (N) et sud (S) sont *mobiles par rapport à une spire fermée*, et que le pôle N s'avance vers l'axe de la spire (fig. XII-1), celle-ci est le siège d'un courant induit ; il circule dans un sens tel que la

Fig. XII-1



spire présente un pôle nord au pôle N qui s'approche (V. t. 1, Électricité, chap. 25). Une force de répulsion s'exerce sur la spire et celle-ci se déplace *dans le même sens que les pôles* N et S. Cependant, elle ne pourra *jamais* être entraînée *à la même vitesse* que ces pôles N et S, car il n'y a courant induit dans la spire que s'il y a variation de flux dans celle-ci, c'est-à-dire déplacement relatif de la spire par rapport aux pôles. Ce principe est mis en œuvre dans le moteur asynchrone.

2. CONSTITUTION D'UN MOTEUR POLYPHASÉ

Dans un moteur asynchrone polyphasé on crée des pôles (fictifs) tournants au moyen d'un stator polyphasé (V. chap. 1) et des spires fermées sur elles-mêmes sont disposées sur le rotor.

2.1. Rotor bobiné en court-circuit. — Les spires du rotor (fig. XII-2) ont une largeur égale à l'intervalle entre les pôles fictifs du stator (pas polaire) ; ainsi les f.é.m. induites dans les deux portions actives d'une même spire sont en phase et s'ajoutent *arithmétiquement*. Le courant induit a alors une amplitude maximale ainsi que la force d'entraînement et le moment du couple moteur.

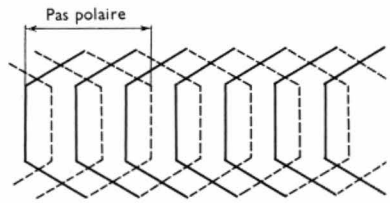


Fig. XII-2

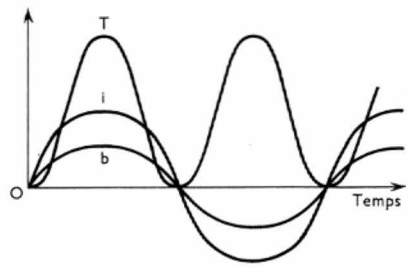
Enroulement rotorique d'un moteur asynchrone. Développement panoramique

De plus, ces spires sont en grand nombre et *réparties régulièrement* autour du rotor. Cela procure deux avantages :

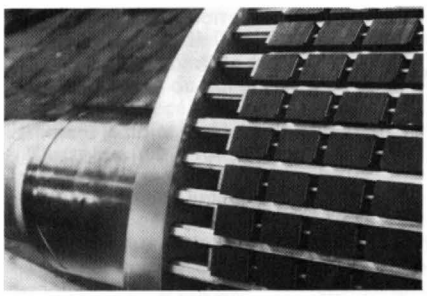
— le rotor est *mieux utilisé*,

— le *couple instantané est constant*. En effet, avec *une* spire par intervalle polaire (une seule encoche garnie

Fig. XII-3



devant chaque pôle fictif) le couple serait *pulsatoire*. C'est ce que montre la figure XII-3 où le courant *i* dans la spire est supposé en phase avec la f.é.m. dans un conducteur actif ($e = blv$; V. t. 1, Électricité, chap. 25, § 3), donc en phase avec l'induction *b*. La force de Laplace ($f = bli$)



Cage d'écureuil avec barres en T inversé ; jonctions barres-couronnes par brasures en cuvettes en cours de fabrication (avant brasage) (*C.E.M.*)

serait pulsatoire et, dans ce cas, le moment T du couple serait *ondulé*.

Il ne l'est plus avec de nombreuses spires, régulièrement décalées, parce que la somme de grandeurs sinusoïdales régulièrement déphasées est constante (fig. XII-4).

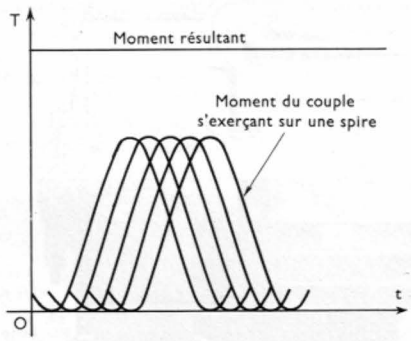
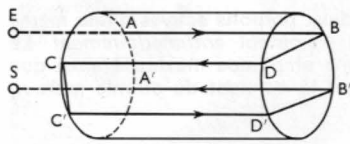


Fig. XII-4

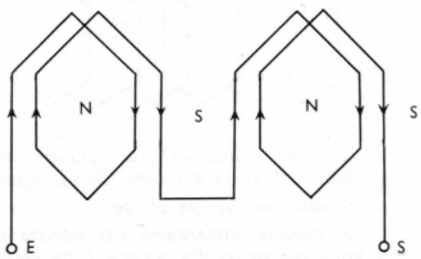
Remarque : Pour obtenir un meilleur couple de démarrage il est souvent avantageux d'insérer des résistances dans l'enroulement du rotor pendant le démarrage (V. ci-après, § 3). Pour cela on est obligé d'employer un rotor comportant un *enroulement ouvert* (fig. XII-5) dont les



Principe de bobinage rotorique d'un moteur asynchrone à quatre pôles

Fig. XII-5

Développement panoramique du bobinage précédent



extrémités aboutissent à *des bagues* (fig. XII-6). Évidemment, pour obtenir un meilleur facteur d'enroulement (V. chap. 9. § 3), il est avantageux que le rotor soit *triphasé*. Dans ce cas, les trois enroulements étant connectés en triangle ou en étoile, *trois bagues suffisent* pour l'insertion momentanée de résistances.

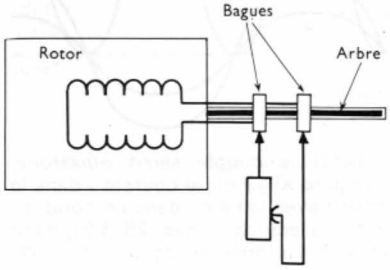
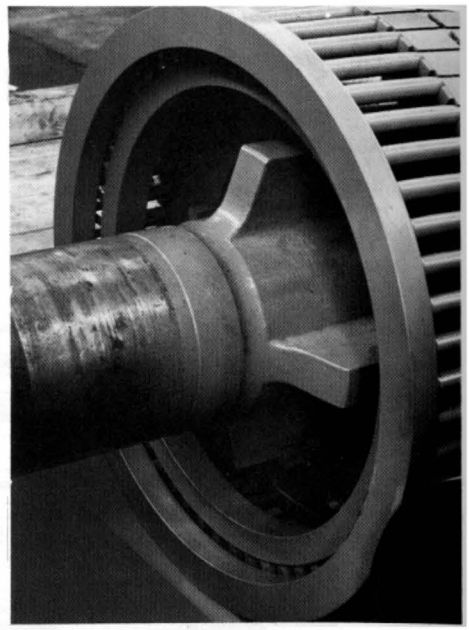


Fig. XII-6



Rotor à double cage à barres rondes (cage extérieure) et barres rectangulaires (cage intérieure) (*C.E.M.*)

2.2. Rotor en cage d'écureuil. — Le rotor précédent peut être simplifié. L'enroulement peut être remplacé par des barres en métal conducteur (cuivre, laiton ou aluminium) disposées sur la périphérie du rotor et réunies, sur chacune des faces de l'armature, par un anneau de même métal et d'assez forte section : l'ensemble constitue un *rotor en cage d'écureuil*.

Pour bien comprendre le fonctionnement d'un moteur, comportant un tel rotor, on considère deux spires voisines $ABDC$ et $A'B'D'C'$ (fig. XII-7) d'un rotor bobiné ; la résistance des portions frontales des spires est supposée négligeable devant celle r de leurs portions actives. Si e désigne la valeur commune de la f.é.m. à l'instant t dans les portions actives AB et CD, la loi d'Ohm permet d'écrire les relations suivantes :

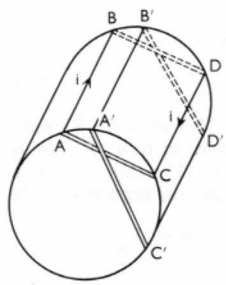


Fig. XII-7

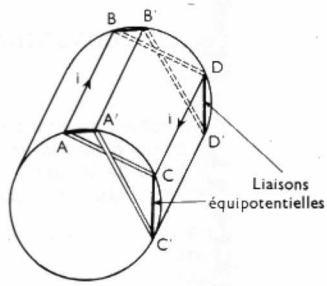


Fig. XII-8

— appliquée à la spire : $e + e = 2ri$ et l'on déduit : $e = ri$;

— appliquée à la portion AB : $(v_B - v_A) = e - ri$ (le conducteur AB se comporte comme un générateur) ;

— appliquée à la portion CD : $(v_C - v_D) = e - ri$.

La comparaison de ces relations précédentes fournit les égalités suivantes :

$$v_B - v_A = 0 \quad \text{soit :} \quad v_A = v_B$$
$$v_C - v_D = 0 \quad \text{soit :} \quad v_C = v_D$$

Cela signifie que l'*énergie électrique* produite dans les portions actives y est *entièrement dissipée par effet Joule*.

Si l'on connecte ensemble les points A et A', cela ne modifie pas les courants dans les spires indépendantes $ABDC$, $A'B'D'C'$; cela revient seulement à porter au même potentiel les portions frontales AC, $A'C'$ (en particulier $v_A = v_{A'} = v_C = v_{C'} \ldots$). Mais comme les relations précédentes sont encore vraies, il résulte qu'en même temps les portions frontales BD, $B'D'$ sont portées au même potentiel (puisque l'on déduit $v_B = v_{B'} = v_D = v_{D'} \ldots$).

Dès lors, sans rien changer encore aux courants dans les spires on peut relier électriquement les points B, B' et D, D' (fig. XII-8). L'ensemble des connexions frontales, sur les deux faces du rotor, constitue un anneau.

La cage d'écureuil équivaut à un rotor en court-circuit mais avec des avantages très importants : *grande robustesse* et *exécution* facile ; les barres dans les encoches n'ont même pas besoin d'être isolées par rapport au fer du rotor. Le rotor à cage est utilisé très fréquemment ; généralement on réalise la cage d'une seule pièce en aluminium coulé.

3. BOBINAGES DU STATOR ET DU ROTOR

Les types de bobinages polyphasés utilisés au stator et au rotor (moteur à bagues) sont ceux que nous avons décrits pour l'alternateur (V. chap. 9).

3.1. Au stator on réserve les enroulements à bobines concentriques aux gros moteurs et aux moteurs à haute tension. Pour les autres on préfère généralement les bobines enchevêtrées.

3.2. Au rotor l'enroulement est à bobines concentriques dans les petits moteurs car cela permet d'utiliser des conducteurs sous la forme de fils. Avec des barres (cas des grands courants), l'enroulement à bobines enchevêtrées est choisi de préférence.

En tout cas, quel que soit l'enroulement :

1° *Les nombres de pôles du stator et du rotor sont toujours égaux.* En effet la largeur d'une spire du rotor doit être égale à l'intervalle polaire de l'enroulement du stator (V. ci-dessus § 2). De la définition même du nombre de pôles d'un enroulement polyphasé (V. chap. 1, § 4), il résulte que le rotor a toujours le même nombre de pôles que le stator.

2° *Le nombre de phases au rotor peut différer du nombre de phases au stator.* En effet, pour agir sur un même rotor, on peut créer au stator un même ensemble de pôles fictifs aussi bien avec un enroulement diphasé qu'avec un enroulement triphasé. *C'est le nombre de pôles qui importe et non le nombre de phases :* un moteur monophasé ou diphasé peut avoir un rotor triphasé.

3° *Les nombres d'encoches doivent être différents au stator et au rotor.* Ainsi on évite que les dents se trouvent périodiquement dans des positions pour lesquelles la réluctance de l'entrefer est minimale ou maximale (fig. XII-9). On élimine ainsi une cause de la vibration des dents, et du *bruit.* Par ailleurs, sans cette précaution le flux varie périodiquement, créant des harmoniques de denture et on peut mettre en évidence des *points morts*, c'est-à-dire des positions pour lesquelles le couple au décollage est minimal (fig. XII-10).

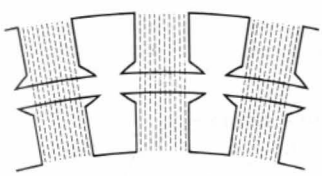


Fig. XII-9a
Position pour laquelle la réluctance est minimale

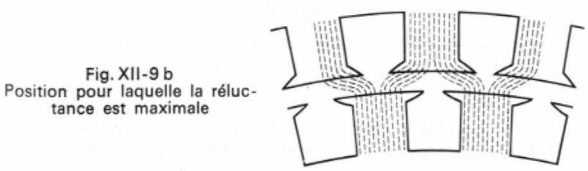


Fig. XII-9 b
Position pour laquelle la réluctance est maximale

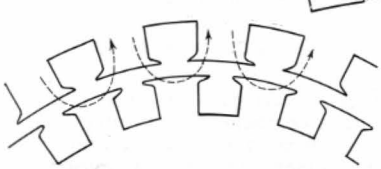


Fig. XII-10

Le flux tend à passer d'une dent du stator à une dent du rotor sans couper les conducteurs actifs du rotor placés dans les encoches

Cela explique pourquoi dans de nombreux moteurs on incline les encoches par rapport aux génératrices du cylindre rotorique (fig. XII-11). L'inclinaison est telle que si sur une face externe la position relative des encoches est celle de la figure XII-9 a, sur l'autre face la position relative est celle de la figure XII-9 b.

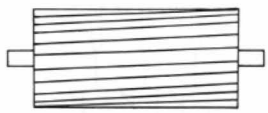
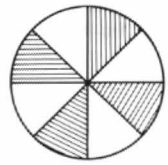


Fig. XII-11

Fig. XII-12



GRANDEURS CARACTÉRISTIQUES DU FONCTIONNEMENT EN CHARGE

La puissance P d'un moteur est numériquement égale au produit du deux facteurs : la *vitesse angulaire* Ω et le *moment du couple* T : $P = T\,\Omega$

On va étudier séparément ces deux facteurs.

4. VITESSE ET GLISSEMENT

Par principe, les spires liées au rotor ne peuvent être entraînées à la vitesse des pôles fictifs du stator. Il se produit un *glissement* du rotor que l'on caractérise au moyen du rapport suivant :

$$g\,\% = \frac{\text{vitesse de synchronisme} - \text{vitesse rotorique}}{\text{vitesse de synchronisme}} \times 100$$

Le glissement d'un moteur est souvent très faible à vide (inférieur à 5 % souvent) ; il augmente légèrement avec la charge. Cependant, dans tous les cas, on ne le mesure *jamais* avec un compte-tours (appareil donnant directement la vitesse du rotor) car une faible erreur sur la vitesse entraînerait une erreur grossière sur le glissement.

On le détermine par deux méthodes.

4.1. Méthode stroboscopique. — On fixe en bout d'arbre un disque (fig. XII-12) portant un nombre de secteurs blancs égal au nombre $2\,p$ de pôles du moteur. On l'éclaire avec une lampe à éclairs qui donne deux éclairs lumineux par période de la tension d'alimentation (celle du réseau sur lequel le moteur est branché). Si en t secondes on voit passer S secteurs blancs devant un repère fixe, le disque paraît tourner de $\frac{S}{2\,p}$ tours soit à la vitesse $\frac{S}{2\,pt}$. C'est la valeur absolue de la vitesse de glissement ; on déduit ensuite le glissement g :

$$g = \frac{\text{vitesse absolue de glissement}}{\text{vitesse de synchronisme}} \times 100 = \frac{S/2\,pt}{f/p} \times 100$$

$$g = \frac{S}{2\,ft} \times 100$$

Par exemple, si l'on voit passer devant un repère fixe, 50 secteurs blancs en 10 secondes (avec $f = 50$ Hz), le glissement est égal à : $g = \frac{50}{2 \times 50 \times 10} \times 100 = 5\,\%$.

4.2. Méthode du millivoltmètre. — Cette méthode est surtout applicable au moteur à bagues. On appelle : n_r la vitesse *relative* (exprimée en tours par minute) du rotor par rapport aux pôles fictifs du stator et n_s la vitesse de synchronisme (de ces pôles fictifs). La fréquence f_r des courants rotoriques est égale à :

$$f_r = \frac{p\,n_r}{60} = \frac{pg\,n_s}{60} = g \cdot \frac{p\,n_s}{60}$$

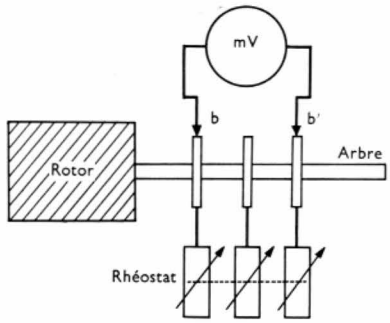
$$= g \times \text{fréquence des courants statoriques}$$

Cette relation permet de déduire g :

$$g = \frac{\text{fréquence des courants rotoriques}}{\text{fréquence des courants statoriques}}$$

La fréquence des courants rotoriques peut être déterminée en utilisant un millivoltmètre à zéro central relié à deux

Fig. XII-13



tiges conductrices frottant sur les bagues (fig. XII-13). Comme le courant du rotor circule entre deux bagues *court-circuitées* (en marche normale), on mesure la faible chute de tension qui se produit aux contacts balais-bagues : elle suffit pour faire dévier le millivoltmètre. L'aiguille se déplace de part et d'autre du zéro de la graduation, elle effectue des oscillations à une fréquence égale à f_r.

En *20 secondes,* si l'on a compté q oscillations de cette aiguille et si la fréquence des courants statoriques est 50 Hz, on déduit :

$$g = 100 \times \frac{q/20}{50} = \frac{q}{10} \quad \text{(en \%)}$$

Remarque : Si le glissement n'est pas trop faible, il est possible d'utiliser un millivoltmètre, même si le moteur n'a pas de bagues (cage d'écureuil). Pour cela, on appuie les deux tiges conductrices sur les *extrémités de l'arbre,* de part et d'autre du moteur (fig. XII-14). Les quelques lignes d'induction du flux utile qui passent à travers l'arbre

Fig. XII-14

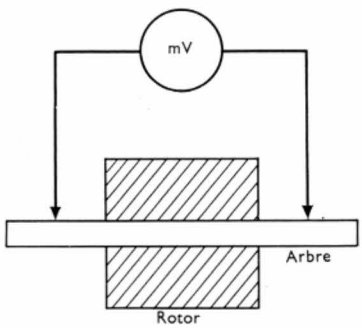
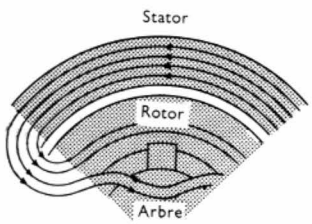


Fig. XII-15



du moteur (fig. XII-15) et qui tournent par rapport à celui-ci à la vitesse de glissement, y induisent le long d'une de ses génératrices (cylindre-arbre) une f.é.m. *de fréquence* f_r. Cette f.é.m. est très faible mais elle suffit pour faire osciller l'aiguille du millivoltmètre.

5. DÉFINITION DU COUPLE TRANSMIS

On désigne par R la résistance du rotor, par Ω_s la vitesse angulaire synchrone $\left(\Omega_s = \dfrac{2\pi n_s}{60}\right)$ et par Ω_r la vitesse angulaire du rotor $\left(\Omega_r = \dfrac{2\pi n_r}{60}\right)$.

Par rapport au *flux statorique supposé fixe* le rotor tourne à la vitesse angulaire $(\Omega_s - \Omega_r)$. L'enroulement rotorique est en court-circuit et il se comporte comme l'induit *en court-circuit* d'un alternateur : *toute la puissance électrique qui y est engendrée se transforme en chaleur par effet Joule.* Le couple T_t développé pour *cette rotation relative* à la vitesse de glissement s'appelle *couple-transmis.* Il est défini par la relation suivante :

$$T_t(\Omega_s - \Omega_r) = P_{jr},$$

(P_{jr} désigne les pertes rotoriques par effet Joule). Ce couple est analogue au couple d'entraînement *par friction* (fig. XII-16) d'un cylindre *B plein* (tournant à la vitesse Ω_r) par un cylindre creux *A* (tournant à la vitesse Ω_s).

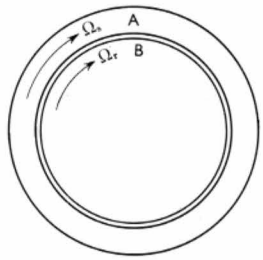


Fig. XII-16

6. BILAN ÉNERGÉTIQUE DU MOTEUR

On appelle :

— P_{abs} : la puissance absorbée par le moteur ;
— P_{fst} : les pertes dans le fer au stator ;
— P_{jst} : les pertes par effet Joule statoriques ;
— P_{jr} : les pertes par effet Joule rotoriques ;
— P_{fr} : les pertes dans le fer du rotor :
— P_m : les pertes mécaniques (rotoriques) ;
— P_u : la puissance mécanique utile.

Le bilan des puissances en jeu dans le moteur asynchrone traduit l'égalité qui suit (fig. XII-17) :

$$P_{abs} = P_{fst} + P_{jst} + P_{jr} + P_{fr} + P_m + P_u$$

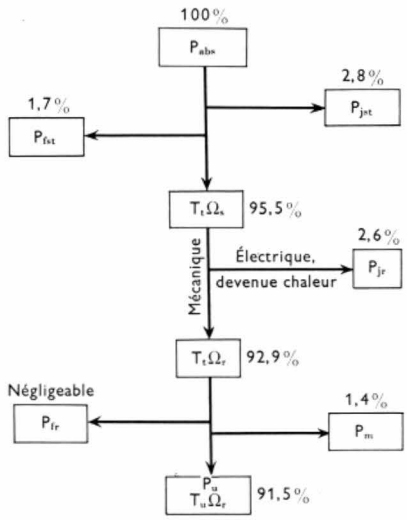


Fig. XII-17

Elle s'écrit aussi sous la forme suivante :

P_{abs} = $(P_{fst} + P_{jst})$ + T_t $(\Omega_s - \Omega_r)$ + P_{fr} + P_m + P_u
P_{abs} = pertes statoriques + $(T_t\,\Omega_s - T_t\,\Omega_r)$ + pertes rotoriques + puissance utile.

Les pertes par effet Joule rotoriques apparaissent comme la *différence* de deux puissances, $T_t\,\Omega_s$ et $T_t\,\Omega_r$

Conclusions :

1° Le stator (déduction faite de ses pertes) *transmet* au rotor la puissance $T_t\,\Omega_s$ (cela explique le nom de *couple transmis* donné à T_t).

2° La puissance transmise $T_t\,\Omega_s$ se divise en deux parts :

— la première T_t $(\Omega_s - \Omega_r)$ est *électrique* (elle se transforme en chaleur dans l'enroulement du rotor) ;

— la seconde $T_t\,\Omega_r$ est *mécanique ;* déduction faite des pertes mécaniques et magnétiques dans le rotor, elle constitue la puissance *utile* (puissance mécanique sur l'arbre).

7. GLISSEMENT ET RENDEMENT

Du bilan énergétique du moteur se déduit la relation suivante :

$$P_{jr} = T_t\,(\Omega_s - \Omega_r) = T_r\,\Omega_s \cdot \frac{\Omega_s - \Omega_r}{\Omega_s}$$

En tenant compte de la définition du glissement on écrit :

$$P_{jr} = T_t \Omega_s \cdot g = (P_{abs} - P_{jst} - P_{fst}) \cdot g$$

Pertes Joule rotor = glissement × (puissance absorbée — pertes statoriques). Cette égalité explique pourquoi le moteur asynchrone *doit avoir un faible glissement*. En effet,

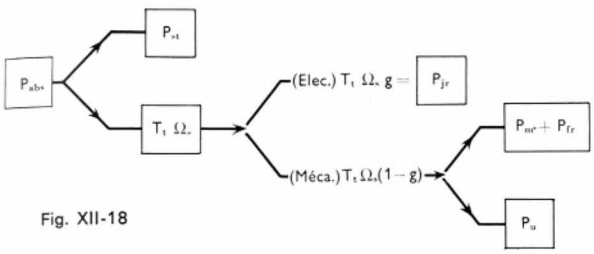


Fig. XII-18

si l'on néglige les pertes statoriques (alors $P_{abs} \approx T_t \Omega_s$) et les pertes mécaniques en écrivant que la puissance utile est égale à : $P_u = T_t \Omega_r = T_t \Omega_s\,(1 - g)$ (fig. XII-18), alors le *rendement* du moteur s'exprime par l'égalité :

$$\eta = \frac{P_u}{P_{abs}} = 1 - g$$

La grandeur $(1 - g)$ est parfois appelée rendement du rotor. *Un fort glissement correspond à un faible rendement.*

8. EXPRESSION DU MOMENT DU COUPLE TRANSMIS

Le moment du couple transmis est égal à :

$$T_t = \frac{P_u + P_m + P_{fr}}{\Omega_r} = T_u + \frac{P_m}{\Omega_r} + \frac{P_{fr}}{\Omega_r}$$

Étant donné qu'en marche les pertes dans le fer du rotor (P_{fr}) sont négligeables, T_t ne diffère du moment du couple utile T_u que par un terme $\left(\frac{P_m}{\Omega_r}\right)$ faible et pratiquement constant.

Comme le moment du couple transmis a une expression (V. ci-après) qui se prête bien à la discussion, on raisonnera toujours, sans erreur sensible, sur le moment du *couple transmis*. On désigne par $E_{2\,\text{eff}}$ la valeur efficace de la f.é.m. e_2 induite dans le rotor ouvert et à *l'arrêt*. Elle est engendrée grâce au flux Φ_1 (fig. XII-19) produit par le stator. En réalité celui-ci fournit un flux $\nu\Phi_1$ (ν : coefficient de fuites du stator par rapport au rotor) et seulement une partie égale à Φ_1 traverse l'enroulement rotorique.

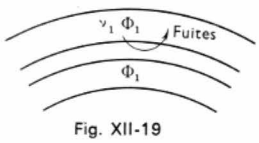


Fig. XII-19

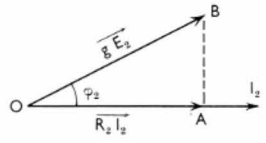


Fig. XII-20

En marche, ce même flux Φ_1 induit dans l'enroulement rotorique une autre f.é.m. de fréquence f_r et dont la valeur efficace est égale à $E_{2\,\text{eff}} \frac{f_r}{f_s}$, si f_s désigne la fréquence des courants statoriques (la valeur efficace de la f.é.m. d'un alternateur est proportionnelle à la fréquence. V. chap. 9). La valeur efficace de cette f.é.m. est donc aussi : $gE_{2\,\text{eff}}$. Cette f.é.m., de valeur instantanée ge_2, engendre dans le rotor un courant i_2 déphasé de φ_2 par rapport à ge_2. Cela se traduit par le diagramme de Fresnel de la figure XII-20 où $\vec{I}_2$ et $\vec{E}_2$ sont les vecteurs associés à i_2 et e_2.

Les pertes par effet Joule d'un rotor monophasé sont égales à : $P_{jr} = T_t\,(\Omega_s - \Omega_r) = R_2 I_{2\,\text{eff}}^2 = (R_2 I_{2\,\text{eff}})\,I_{2\,\text{eff}}$
$= (gE_{2\,\text{eff}} \cos \varphi_2)\,I_{2\,\text{eff}}$

$$T_t = \frac{gE_{2\,\text{eff}}\,I_{2\,\text{eff}} \cos\varphi_2}{\Omega_s - \Omega_r}$$

$$T_t = \frac{1}{\Omega_s - \Omega_r} \frac{\Omega_s - \Omega_r}{\Omega_s} E_{2\,\text{eff}}\,I_{2\,\text{eff}} \cos\varphi_2$$

$$T_t = \frac{E_{2\,\text{eff}}}{\Omega_s} I_{2\,\text{eff}} \cos\varphi_2$$

Or la valeur efficace du courant rotorique est donnée par l'expression suivante :

$$I_{2\,\text{eff}} = \frac{\text{f.é.m. rotorique}}{\text{impédance de l'enroulement rotorique}} = \frac{gE_{2\,\text{eff}}}{\sqrt{R_2^2 + (gX_2)^2}}$$

car si la *réactance du rotor à l'arrêt* (où $f_r = f_s$) est égale à X_2, en marche elle est réduite dans le rapport des fréquences ($f_r = gf_s$) et devient égale à gX_2.

Comme par ailleurs (V. fig. XII-20) :

$$\cos\varphi_2 = \frac{OA}{OB} = \frac{OA}{\sqrt{OA^2 + AB^2}} = \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + (gX_2)^2}}$$

(puisque $\overrightarrow{AB}$ représente la chute inductive rotorique égale à $gX_2 I_{2\,\text{eff}}$) il vient :

$$T_t = \frac{E_{2\,\text{eff}}}{\Omega_s} \cdot \frac{gE_{2\,\text{eff}}}{\sqrt{R_2^2 + (gX_2)^2}} \cdot \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + (gX_2)^2}}$$

$$T_t = \frac{gE_{2\,\text{eff}}^2}{\Omega_s} \cdot \frac{R_2}{R_2^2 + (gX_2)^2}$$

9. CARACTÉRISTIQUE MÉCANIQUE DU MOTEUR ASYNCHRONE

La caractéristique mécanique $T_t\,(n)$ (V. chap. 3) du moteur asynchrone est aussi bien la courbe $T_t(g)$ puisque le glissement est fonction de la vitesse.

Pour $g = 0$, on a : $T_t = 0$.

Pour *g faible* (gX_2 faible), on a sensiblement : $T_t = \frac{gE_{2\,\text{eff}}^2}{\Omega_s R_2}$ et le moment du couple est *proportionnel* à g (car $E_{2\,\text{eff}}$, Ω_s et R_2 sont des constantes).

Pour *g grand*, le terme R_2^2 est négligeable devant le terme $(gX_2)^2$ et l'on a sensiblement :

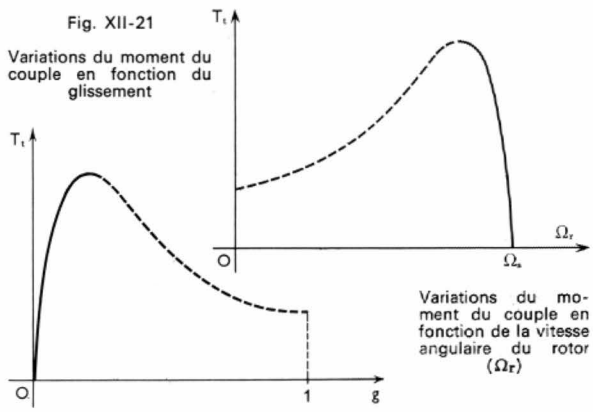
$$T_t = \frac{gE_{2\,\text{eff}}^2 R_2}{\Omega_s \cdot (gX_2)^2} = \frac{E_{2\,\text{eff}}^2 R_2}{\Omega_s\, gX_2^2}$$

le moment du couple est inversement proportionnel à g et la courbe $T_t\,(g)$ est sensiblement une *hyperbole équilatère*.

On conçoit donc que la courbe $T_t\,(g)$ ait l'allure donnée par la figure XII-21. Elle présente un maximum. Seule la portion en trait plein correspond à une marche stable, car un ralentissement (augmentation de g) entraîne un accroissement du couple moteur.

Fig. XII-21

Variations du moment du couple en fonction du glissement



Variations du moment du couple en fonction de la vitesse angulaire du rotor (Ω_r)

10. PROPOSITIONS FONDAMENTALES RELATIVES AU COUPLE ET AU GLISSEMENT

10.1. Propositions vraies quel que soit le glissement

10.1.1. À tension constante le moment du couple est maximal quand la réactance du rotor devient égale à sa résistance. — On peut écrire :

$$T_t = \frac{E_2{}^2{}_{\text{eff}}\, R_2}{\Omega_s} \cdot \frac{g}{R_2{}^2 + (gX_2)^2} = \frac{E_2{}^2{}_{\text{eff}}\, R_2}{\Omega_s} \cdot \frac{1}{\dfrac{R_2{}^2}{g} + gX_2{}^2}$$

À tension constante ($E_{2\,\text{eff}}$ = constante) et résistance R_2 constante, le couple est *maximal* quand le dénominateur $\left(\dfrac{R_2{}^2}{g} + gX_2{}^2\right)$ est *minimal*. Le produit de ces deux termes, (soit $R_2{}^2 X_2{}^2$) étant constant, la somme $\left(\dfrac{R_2{}^2}{g} + gX_2{}^2\right)$ est minimale quand ces deux termes sont égaux $\left(\dfrac{R_2{}^2}{g} = gX_2{}^2\right)$ c'est-à-dire lorsque : $R_2 = gX_2$

10.1.2. À tension constante, le maximum de couple est indépendant de la résistance rotor. — En remplaçant R_2 par gX_2 dans l'expression du moment du couple on obtient le couple maximal $T_{\max}$:

$$T_{\max} = \frac{E_2{}^2{}_{\text{eff}}\, gX_2}{\Omega_s} \cdot \frac{g}{(gX_2)^2 + (gX_2)^2} = \frac{E_2{}^2{}_{\text{eff}}}{2\,\Omega_s X_2}$$

La proposition est démontrée.

De ces deux propositions il résulte qu'en accroissant la résistance du rotor ($R'_2 > R_2$) on passe de la caractéristique (1) à la caractéristique (2) de la figure XII-22 : elles présentent toutes les deux le même maximum mais celui-ci est obtenu avec un plus fort glissement dans le second cas c'est-à-dire pour une vitesse rotorique plus faible.

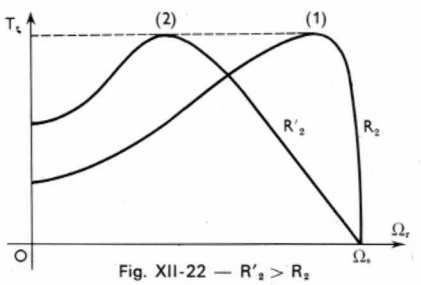


Fig. XII-22 — $R'_2 > R_2$

10.1.3. À résistance R_2 constante et glissement égal, le moment du couple est proportionnel au carré de la tension. — L'expression donnant le moment du couple transmis :

$$T_t = \frac{g\,E_2{}^2{}_{\text{eff}}}{\Omega_s} \cdot \frac{R_2}{R_2{}^2 + (gX_2)^2}$$

montre que si R_2 et g sont constants le moment du couple T_t est proportionnel à $E_2{}^2{}_{\text{eff}}$ donc à $U^2{}_{\text{eff}}$ (tension d'alimentation). Dès lors, pour passer de la caractéristique T_t (g) pour la tension U_{eff} à la caractéristique T_t (g) correspondant à la tension U'_{eff}, il suffit, à abscisse égale, de multiplier toutes les ordonnées par le rapport $\left(\dfrac{U'_{\text{eff}}}{U_{\text{eff}}}\right)^2$ (fig. XII-23)

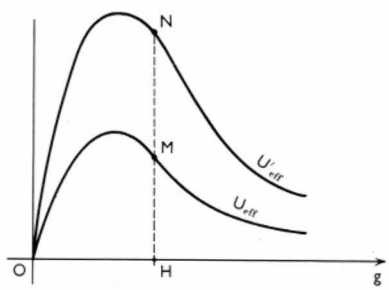


Fig. XII-23

$\dfrac{HN}{HM} = \left(\dfrac{U'_{\text{eff}}}{U_{\text{eff}}}\right)^2$

10.2. Propositions vraies dans les limites d'emploi courant. — Le glissement doit être faible, compris entre g_n et 1,5 g_n (g_n : glissement normal).

Dans ce cas le terme $g^2X_2{}^2$ est négligeable devant $R_2{}^2$ et l'expression du moment du couple peut s'écrire :

$$T_t = \frac{gE_2{}^2{}_{\text{eff}}}{\Omega_s R_2}$$

10.2.1. À tension égale et couple égal, le glissement est proportionnel à la résistance de l'enroulement rotorique. — En effet dans la formule précédente, si $E_{2\,\text{eff}}$ et T_t sont constants, le rapport $\dfrac{g}{R_2}$ est constant.

Comme le segment AB (fig. XII-24) représente la différence $\Omega_s - \Omega_r = g\Omega_s$, on passe du graphe T_t (Ω_r) pour la résistance R'_2 supérieure à R_2 en multipliant les abscisses de la zone utilisable par le rapport $\dfrac{R'_2}{R_2}$.

10.2.2. À résistance d'enroulement rotorique égale et moment du couple égal, le glissement varie en raison inverse du carré de la tension. — La formule $T_t = \dfrac{gE_2{}^2{}_{\text{eff}}}{\Omega_s R_2}$ montre que si T_t et R_2 sont constants, le produit $gE_2{}^2{}_{\text{eff}}$ est aussi constant. Il en est donc de même du produit $gU^2{}_{\text{eff}}$. Dans les limites d'emploi courant, on peut donc passer de la caractéristique T_t (Ω_r) sous la tension U_{eff} (fig. XII-25) à la caractéristique T_t (Ω_r) sous la tension U'_{eff} en multipliant toutes les abscisses (à ordonnées égales) par le rapport $\left(\dfrac{U_{\text{eff}}}{U'_{\text{eff}}}\right)^2$

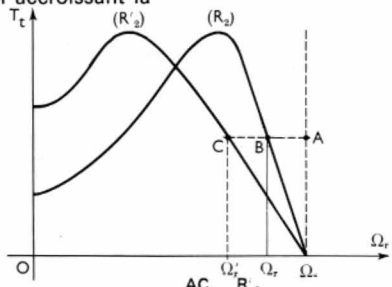


Fig. XII-24 — $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{R'_2}{R_2}$ ($R'_2 > R_2$)

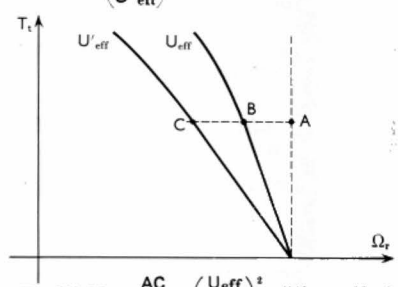


Fig. XII-25 — $\dfrac{AC}{AB} = \left(\dfrac{U_{\text{eff}}}{U'_{\text{eff}}}\right)^2$; ($U'_{\text{eff}} < U_{\text{eff}}$)

DIAGRAMME DU CERCLE

Comme pour les autres machines électriques, il est utile d'établir un diagramme permettant de prédéterminer les caractéristiques de fonctionnement d'un moteur asynchrone à la suite d'essais faciles à exécuter sur une plateforme.

11. RÉACTION MAGNÉTIQUE DU ROTOR

La vitesse relative du rotor par rapport au flux du stator étant ($\Omega_s - \Omega_r$), la pulsation des courants rotoriques est égale à : p ($\Omega_s - \Omega_r$), p désignant le nombre de paires de pôles du moteur.

Or les courants rotoriques engendrent eux-mêmes des pôles fictifs rotoriques tournant *par rapport au rotor* à une vitesse égale à :

$$\frac{\text{pulsation rotorique}}{p} = \frac{p(\Omega_s - \Omega_r)}{p} = \Omega_s - \Omega_r$$

Dans quel sens cette rotation s'effectue-t-elle ? *Par rapport au flux statorique* supposé fixe, le rotor tourne dans le sens inverse du sens réel de la rotation (fig. XII-26). C'est dire que les valeurs maximales des courants dans les bobines du rotor se succèdent dans l'ordre 1, 2, 3 et que les *pôles fictifs rotoriques tournent par rapport au rotor dans le même sens que celui-ci*. Ils glissent par *rapport au rotor à* la vitesse ($\Omega_s - \Omega_r$) donc, par rapport au stator à la vitesse $\Omega_r + (\Omega_s - \Omega_r) = \Omega_s$.

Fait remarquable, le champ du rotor reste accroché à celui du stator comme dans la machine synchrone, mais ici le rotor glisse par rapport à son propre champ.

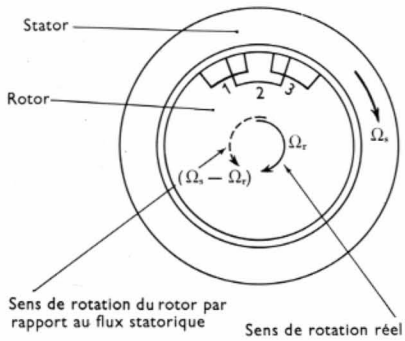


Fig. XII-26

12. RELATION ENTRE FLUX ET TENSIONS

12.1. Principe. — Pour cette étude il faut se rappeler deux particularités importantes du moteur asynchrone :

— le circuit magnétique n'est *pas saturé* (afin de réduire le courant magnétisant, ou réactif, absorbé) ;

— les *fuites sont importantes* car les bobines statoriques et rotoriques ne sont pas sur un même noyau comme dans un transformateur.

Comme le circuit n'est pas saturé, d'une part la loi *d'addition des flux* est utilisable, d'autre part les *coefficients de fuites* ν_1 (du primaire au secondaire) et ν_2 (du secondaire au primaire) sont constants (V. chap. 1).

Remarque : Le raisonnement qui suit s'applique à un moteur monophasé ou à une phase d'un moteur polyphasé.

12.2. Équation des flux et des tensions. — On désigne par $\nu_1\Phi_1$ la valeur instantanée du flux dans le stator dû à la force magnétomotrice statorique seule, et par $\nu_2\Phi_2$ le flux dans le rotor dû à la force magnétomotrice rotorique seule.

En marche, à l'instant t les flux dans le stator et dans le rotor sont respectivement égaux à (fig. XII-27) :

$$f_1 = \nu_1\Phi_1 + \Phi_2 \qquad (1)$$

et :

$$f_2 = \nu_2\Phi_2 + \Phi_1 \qquad (2)$$

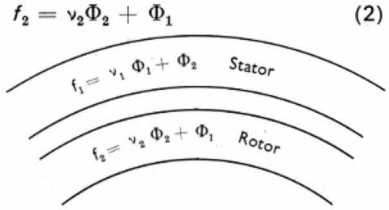


Fig. XII-27

La f.é.m. engendrée dans le rotor par le flux f_2 est donc la somme de deux f.é.m. :

f.é.m. due à f_2 = f.é.m. due à Φ_1 + f.é.m. due à $\nu_2\Phi_2$ ou : $e'_2 = ge_2$ (V. ci-dessus § 8) + f.é.m. due à $\nu_2\Phi_2$. Mais le flux $\nu_2\Phi_2$ est à la fois *engendré et embrassé* par l'enroulement du rotor : c'est un *flux d'auto-induction*. À la f.é.m. d'auto-induction qu'il engendre correspond une chute inductive égale à : $-L_2\dfrac{di_2}{dt}$

avec :

$$L_2 = \frac{kN_2\nu_2\Phi_{2\,\text{eff}}}{I_{2\,\text{eff}}}$$

(k tenant compte du fait que toutes les N_2 spires n'embrassent pas le même flux). Comme les courants rotoriques ont une pulsation égale à $g\omega$, la valeur efficace de cette f.é.m. est égale à $gL_2\omega\, I_{2\text{eff}} = gX_2 I_{2\text{eff}}$ (avec $X_2 = L_2\omega$).

On écrit donc (fig. XII-28) :

$$e'_2 = ge_2 - L_2\frac{di_2}{dt}$$

D'autre part, comme pour le circuit secondaire d'un transformateur en court-circuit, la loi d'Ohm appliquée au circuit rotorique se traduit par la relation suivante :

$$e'_2 - R_2 i_2 = u_2 = 0$$

ou :

$$e'_2 = R_2 i_2$$

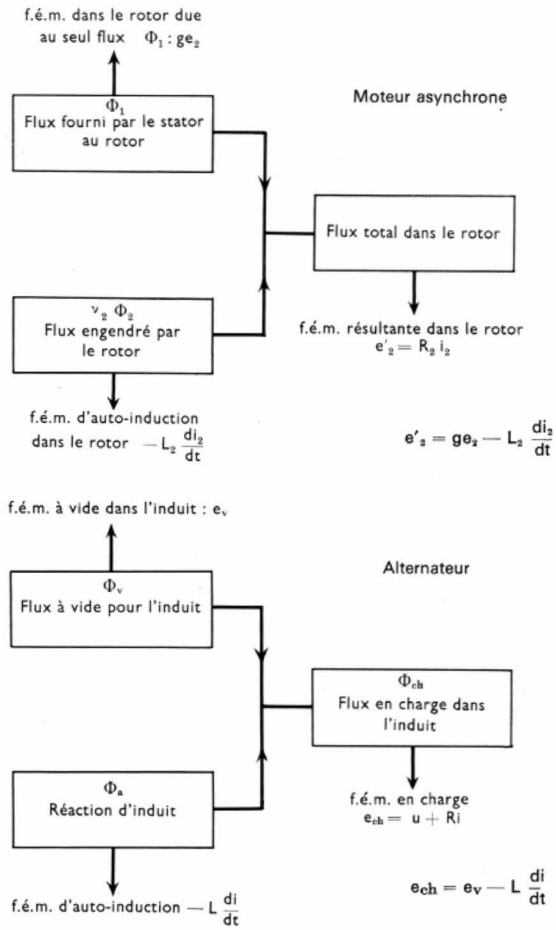


Fig. XII-28 — Analogies entre moteur asynchrone et alternateur

En réunissant ces équations on déduit l'égalité suivante :

$$ge_2 = R_2 i_2 + L_2\frac{di_2}{dt} \qquad (3)$$

Les nombres complexes $\underline{E}_2$ et $\underline{I}_2$ associés à e_2 et i_2 peuvent être utilisés pour exprimer ce résultat. On peut alors écrire :

$$g\underline{E}_2 = R_2\underline{I}_2 + jgL_2\omega\,\underline{I}_2$$

Telles sont les équations des flux et des tensions.

13. DIAGRAMME DES FLUX ET DES TENSIONS

On traduit vectoriellement les équations précédentes (V. t. 1, Électricité, chap. 30). C'est le flux f_2 qui est pris pour définir l'origine des phases (fig. XII-29) ; il est représenté par le vecteur $\overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{OB}$. Ce flux engendre la f.é.m. $e'_2 = R_2 i_2$ déphasée de $\dfrac{\pi}{2}$ rad en arrière de f_2. On place

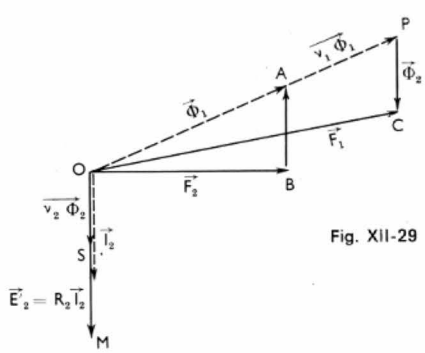


Fig. XII-29

donc un vecteur $\overrightarrow{OM}$ décalé de $-\frac{\pi}{2}$ rad par rapport à $\overrightarrow{OB}$ pour représenter e'_2. Il a même direction et même sens que le vecteur $\vec{I}_2$ qui figure i_2.

Le flux $\nu_2\Phi_2$ créé par i_2 est en phase avec lui ; dans le diagramme il lui correspond un vecteur $\overrightarrow{OS}$ proportionnel à $\vec{I}_2$.

En vertu de l'équation (2) le flux Φ_1 est égal à $(f_2 - \nu_2\Phi_2)$; il est représenté par un vecteur $\overrightarrow{OA}$ égal à la différence $(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OS})$. Le flux $\nu_1\Phi_1$, proportionnel à Φ_1, est figuré par un vecteur $\overrightarrow{OP}$ proportionnel à $\overrightarrow{OA}$. Il va être utilisé pour déterminer le vecteur correspondant à $f_1 = \nu_1\Phi_1 + \Phi_2$. Pour cela on cherche la somme de $\overrightarrow{OP}$ et d'un vecteur $\overrightarrow{PC}$ égal à $\frac{\overrightarrow{OS}}{\nu_2}$: le résultat cherché est le vecteur $\overrightarrow{OC}$.

On traduit ensuite la relation (3) (fig. XII-30). À partir de l'extrémité M de $\overrightarrow{OM} = R_2\vec{I}_2$, on porte le vecteur $\overrightarrow{MN}$ pour figurer la quantité $L_2\frac{di_2}{dt}$. Celle-ci étant déphasée de $\frac{\pi}{2}$ rad en avance sur i_2, $\overrightarrow{MN}$ (dont le module représente la quantité $gL_2\omega I_{2\,\text{eff}} = gX_2I_{2\,\text{eff}}$ à l'échelle adoptée) est perpendiculaire à $\overrightarrow{OM}$ et l'angle $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{MN})$ est égal à $+\frac{\pi}{2}$ rad. Le vecteur $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MN}$ figure la f.é.m. ge_2.

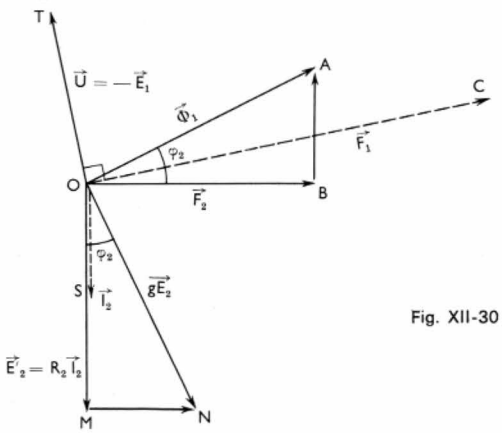


Fig. XII-30

Comme cette f.é.m. est due au flux Φ_1, le vecteur $\overrightarrow{ON}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{OA}$. L'angle φ_2 entre les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ (V. ci-dessus § 8) est égal à l'angle $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$.

Par ailleurs, le flux f_1 induit dans le stator la f.é.m. e_1. Si l'on néglige la chute ohmique R_1i_1 dans le stator à un instant t, la tension d'alimentation u du moteur est égale à l'opposé de cette f.é.m. $u = -e_1$. Cette tension est donc représentée par un vecteur $\overrightarrow{OT}$ décalé de $+\frac{\pi}{2}$ rad par rapport à $\overrightarrow{OC}$.

14. DIAGRAMME DU CERCLE

On prolonge le segment PC jusqu'à sa rencontre B' avec la droite OB (fig. XII-31) ; puis par P on mène la parallèle PD à OB : cette parallèle rencontre en D la droite OC. Les relations géométriques suivantes peuvent alors s'écrire : $\dfrac{CO}{CD} = \dfrac{CB'}{CP} = \dfrac{B'P - CP}{CP} = \dfrac{AB \cdot \dfrac{OP}{OA} - CP}{CP}$

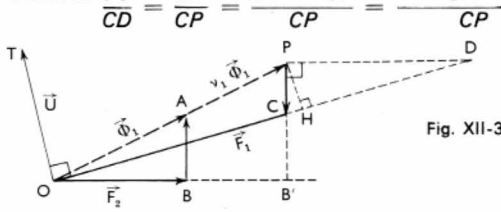


Fig. XII-31

soit : $\dfrac{CO}{CD} = \dfrac{\nu_2\Phi_{2\,\text{eff}} \cdot \nu_1 - \Phi_{2\,\text{eff}}}{\Phi_{2\,\text{eff}}} = \nu_1\nu_2 - 1 = \text{constante}$

Or la valeur efficace de la tension d'alimentation étant constante en *marche industrielle* ($U_{\text{eff}} = \text{Cte}$), f_1 a une amplitude constante et OC a une longueur constante. En vertu de la relation précédente, CD est donc aussi constant. La longueur CD étant constante et l'angle CPD étant droit, le point P se déplace sur la demi-circonférence de diamètre CD.

— *Courant statorique.* — Le moteur n'étant pas saturé, les flux sont proportionnels aux forces magnétomotrices. Dès lors, à une échelle convenable, OP représente la force magnétomotrice du stator, donc le courant i_1 *absorbé par le moteur.*

— *Courant rotorique :*

$$\frac{PC}{OP} = \frac{\Phi_{2\,\text{eff}}}{\nu_1\Phi_{1\,\text{eff}}} = \frac{k_2N_2I_{2\,\text{eff}}}{k_1\nu_1N_1I_{1\,\text{eff}}}$$

si l'on désigne par N_1 et N_2 les nombres de spires au stator et au rotor, par $I_{1\,\text{eff}}$ et $I_{2\,\text{eff}}$ les intensités efficaces des courants statorique et rotorique et par k_1 et k_2 des constantes liées aux facteurs d'enroulement :

$$\frac{I_{2\,\text{eff}}}{I_{1\,\text{eff}}} = \frac{PC}{OP} \cdot \frac{k_1\nu_1N_1}{k_2N_2} = \frac{PC}{OP} \cdot \frac{k_1N_1\nu_1\Phi_{1\,\text{eff}}}{k_2N_2\Phi_{1\,\text{eff}}}$$

$$\frac{I_{2\,\text{eff}}}{I_{1\,\text{eff}}} = \frac{PC}{OP} \cdot \frac{E_{1\,\text{eff}}}{E_{2\,\text{eff}}} = \frac{PC}{OP} \cdot m_0$$

(m_0 : rapport de transformation à vide, c'est-à-dire rotor ouvert).

Donc, au rapport de transformation près, PC représente le *courant rotorique* à l'échelle adoptée pour le courant i_1.

— *Courant actif et puissance absorbée.* Le vecteur $\overrightarrow{OT} = \vec{U}$ étant perpendiculaire à $\overrightarrow{OC}$, PH est égal à la projection de $\overrightarrow{OP}$ sur $\overrightarrow{OT}$; PH a donc une longueur proportionnelle à la valeur efficace $I_{a\,\text{eff}}$ de la composante active du courant absorbé i_1 (fig. XII-32). Puisque la tension U_{eff} est constante, cette composante $I_{a\,\text{eff}}$ peut représenter, *à une autre échelle*, la puissance électrique absorbée $U_{\text{eff}}\,I_{a\,\text{eff}}$ (ou $3\,U_{S\,\text{eff}}\,I_{a\,\text{eff}}$ en triphasé).

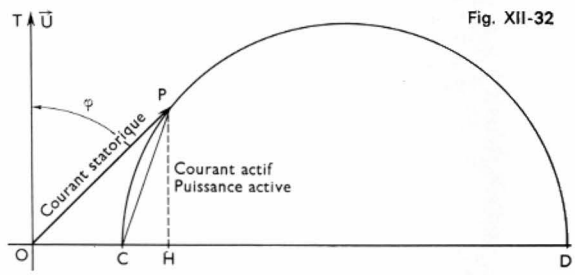


Fig. XII-32

— *Déphasage entre $\vec{U}$ et $\vec{I}$.* C'est l'angle compris entre $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OT}$.

Tel est l'essentiel du diagramme du cercle. Il doit être complété de façon à donner en outre la puissance utile, le moment du couple, le glissement et le rendement.

Différentes constructions ont été proposées pour ce diagramme. La norme C 51.100 de l'U.T.E. préconise l'une d'elles, applicable aux moteurs normaux (ni à double cage, ni à encoches profondes) fonctionnant à *tension* et *fréquence constantes*. Sa démonstration sort du cadre du présent ouvrage, mais on trouvera ci-après un exemple numérique d'application.

15. ESSAIS PERMETTANT LA CONSTRUCTION DU DIAGRAMME DU CERCLE

15.1. Essai à vide. — Le moteur tournant *à vide* (fig.

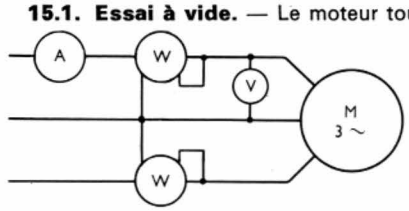


Fig. XII-33

XII-33) sous sa tension nominale, on note les indications suivantes :

— tension à vide : $U_{n\,\text{eff}}$
— intensité du courant : $I_{0\,\text{eff}}$
— puissance absorbée : P_0

15.2. Essai en court-circuit à rotor calé. — Le rotor étant mis en court-circuit et maintenu immobile, on l'alimente sous une tension réduite de façon telle que le courant statorique absorbé soit égal à 1,5 à 2 $I_{n\,\text{eff}}$, $I_{n\,\text{eff}}$ désignant l'intensité nominale du courant statorique du moteur. Pour que l'échauffement produit ne soit pas trop important l'essai doit être réalisé rapidement.

On admet (moteur non saturé) que les valeurs de la puissance et de l'intensité du courant durant un essai en court-circuit sont proportionnelles à la tension ; en conséquence, pour obtenir les valeurs de ces grandeurs sous la tension $U_{n\,\text{eff}}$ il faut multiplier les lectures par le rapport $\frac{U_{n\,\text{eff}}}{U\ \text{réduite}}$.

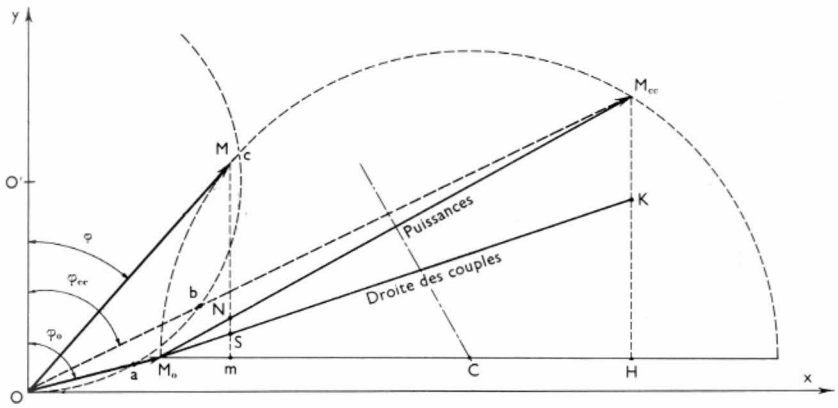


Fig. XII-34

Principe du diagramme du cercle (pour la clarté du schéma, les dimensions réelles n'ont pas été respectées)

16. EXEMPLE NUMÉRIQUE D'APPLICATION DU DIAGRAMME DE L'U.T.E.

Un moteur triphasé a les caractéristiques suivantes : 500 V, 70 kW, 50 Hz, 8 pôles. Ses essais ont donné les résultats suivants :

— à vide : 500 V, 29 A, 2 100 W ;
— en court-circuit : 160 V, 115 A, 7 500 W.

Résistance entre bornes du stator à la température de service : 0,166 Ω.

Quand la puissance utile est égale à 70 kW on va chercher :

— l'intensité du courant absorbé,
— le facteur de puissance,
— le moment du couple utile, le glissement, le rendement et l'intensité du courant rotorique.

16.1. Calculs préliminaires

1° À vide :

$$\cos\varphi_0 = \frac{P_0}{\sqrt{3}\,U_{n\,\text{eff}}\,I_{0\,\text{eff}}} = \frac{2\,100}{500 \times 29 \times \sqrt{3}} = 0{,}0836$$

2° En court-circuit :

$$\cos\varphi_{cc} = \frac{7\,500}{160 \times 115 \times \sqrt{3}} = 0{,}235$$

3° Courant I_{cc} sous la tension nominale :

$$115 \times \frac{500}{160} = 359\ \text{A}$$

4° Puissance en court-circuit perdue dans le stator sous la tension nominale :

$$P_{cc} = 1{,}5\,RI^2 = 1{,}5 \times 0{,}166 \times 359^2 = 32\,145\ \text{W}$$

5° Courant actif par phase correspondant à cette puissance :

$$I_{acc\,\text{eff}} = \frac{32\,145}{\sqrt{3} \times 500} = 37{,}12\ \text{A}$$

6° Courant actif correspondant à la puissance 70 kW :

$$I_{a\,\text{eff}} = \frac{70\,000}{\sqrt{3} \times 500} = 80{,}6\ \text{A}$$

16.2. Construction du diagramme du cercle. — On trace deux axes rectangulaires Ox et Oy (fig. XII-34) puis *l'arc des phases*, c'est-à-dire une circonférence de rayon $O'O$ ($O'O = 50$ mm) passant par O. Sur cet arc, on place les points a et b en portant à partir de O les segments Oa et Ob tels que $Oa = 100 \cos\varphi_0 = 8{,}36$ mm et $Ob = 100 \cos\varphi_{cc} = 23{,}5$ mm.

Pour les courants, on représente un courant de 1,25 A par 1 mm. Sur la droite Oa, on porte $OM_0 = \frac{29}{1{,}25} = 23{,}2$ mm et sur la droite Ob : $OM_{cc} = \frac{359}{1{,}25} = 287$ mm. OM_0 et OM_{cc} représentent les courants statoriques à vide et en court-circuit sous la tension nominale $U_{n\,\text{eff}}$.

1° *Cercle des courants :* on mène par M_0 la parallèle à Ox. La perpendiculaire au milieu de M_0M_{cc} la coupe en un point C qui est le centre du cercle des courants. Il passe par M_0 et M_{cc}.

2° *Droite des puissances :* c'est la droite M_0M_{cc}.

3° *Droite des couples utiles :* par M_{cc} on mène la perpendiculaire à Ox. Elle rencontre en H la parallèle à Ox menée par M_0. Sur la droite $M_{cc}H$ on porte le segment HK correspondant au courant $I_{acc\,\text{eff}} = 37{,}12$ A :

$$HK = \frac{37{,}12}{1{,}25} = 29{,}7\ \text{mm.}$$

On joint M_0K : c'est la *droite des couples utiles.*

4° *Point de fonctionnement M à la puissance 70 kW.* L'intensité du courant actif est alors égale à 80,6 A et elle est représentée par un segment de 64,6 mm. On marque sur le cercle le point M tel que l'on ait $MN = 64{,}6$ mm. C'est le point de fonctionnement à la puissance 70 kW.

16.3. Caractéristiques du moteur à la charge imposée

1° Intensité du *courant absorbé,* on mesure $OM = 84$ mm ; l'intensité du courant absorbé est donc égale à : $1{,}25 \times 84 = 105$ A.

2° Moment du *couple utile,* la droite Mm rencontre en S la droite des couples utiles. On mesure $MS = 66{,}8$ mm, distance correspondant à un courant de $(1{,}25 \times 66{,}8) = 83{,}5$ A et à une puissance de $\left(83{,}5 \times 500\sqrt{3}\right)$ W qui représente la somme de la puissance utile et des pertes par effet Joule. Le moment du couple est sensiblement égal au quotient de cette puissance et de la vitesse de synchronisme : $\Omega_s = \frac{2\pi f}{p} = \frac{314}{4} = 78{,}5$ rad/s.

On trouve : $T_u = \frac{83{,}5 \times 500\sqrt{3}}{78{,}5} = 921$ Nm

3° *Facteur de puissance;* il est obtenu au moyen de l'arc des phases. La droite OM rencontre cet arc en c. On

mesure : $Oc = 86{,}5$ mm. Le facteur de puissance est donc : $\cos \varphi = 0{,}865$.

4° *Glissement*, le rendement du rotor (V. ci-dessus § 7) est égal à $\frac{MN}{MS} = \frac{64{,}6}{66{,}8} = 0{,}967$ soit 96,7 %

Le glissement est donc donné par la différence :

$(1 - 0{,}967) = 0{,}033$. Donc $g = 3{,}3$ %

5° *Rendement*

$$\eta = \frac{MN}{Mm} = \frac{64{,}6}{75{,}8} = 0{,}852 \text{ soit } 85{,}2\ \%$$

6° *Courant rotorique*

$MM_0 \times$ *rapport de transformation à l'arrêt* (non mesuré).

FONCTIONNEMENT INDUSTRIEL

On a distingué trois phases dans la marche d'un moteur : le *décollage*, le *démarrage* et la *marche de régime* (V. chap. 3).

A) DÉCOLLAGE ET DÉMARRAGE

17. PROBLÈME DE COUPLE ET PROBLÈME DE COURANT

On a vu qu'un moteur est caractérisé par le rapport :

$$\frac{\text{moment du couple au décollage}}{\text{moment du couple nominal}} = \frac{T_d}{T_n}$$

Mais le courant rotorique (et, par suite le courant statorique) est un facteur de couple. Si un fort couple correspond à un fort courant absorbé celui-ci va créer une chute en ligne dommageable pour les utilisateurs branchés sur la même ligne que le moteur. C'est pourquoi, suivant les puissances des moteurs alimentés par le réseau basse tension, le distributeur d'énergie électrique impose une limite au rapport :

$$\frac{\text{intensité du courant au décollage}}{\text{intensité du courant normal}} = \frac{I_{d\,\text{eff}}}{I_{n\,\text{eff}}}$$

ou plus exactement au rapport :

$$\frac{\text{puissance apparente absorbée au décollage}}{\text{puissance inscrite sur la plaque}} = \frac{S_d}{P_n}$$

$$= \frac{U_{\text{eff}} \cdot I_{d\,\text{eff}}}{\eta\, U_{\text{eff}} I_{n\,\text{eff}} \cos \varphi_n} = \frac{I_{d\,\text{eff}}}{I_{n\,\text{eff}}} \cdot \frac{1}{\eta \cos \varphi_n}$$

qui est donné, à titre d'exemple par le tableau ci-après :

P_n (kilowatts)	0,4 à 0,75	0,75 à 1,5	1,5 à 5	5 à 15	>15
$\frac{S_d}{P_n}$	7	5	3,7	2,2	1,8
$\frac{I_{d\,\text{eff}}}{I_{n\,\text{eff}}}$	3,8	3,1	2,5	1,6	1,4

(On exprime la puissance apparente S_d en kilovoltampères et P_n en kilowatts.)

Quand on s'intéresse au couple au décollage, on considère, le rapport :

$$\frac{T_d/T_n}{I_{d\,\text{eff}}/I_n}$$

appelé *facteur de qualité* ou *couple spécifique*.

Peut-on mettre un moteur directement sous la tension normale ? Même à vide l'opération est dangereuse, car, au décollage, le moteur asynchrone est *un transformateur statique dont le secondaire est en court-circuit*. On sait que dans ces conditions le courant est très *intense* et bien qu'il passe pendant un temps très court (le courant diminue dès que le moteur prend de la vitesse), il est dangereux. Dès lors, sauf pour les petits moteurs qui démarrent vite (faible inertie) et ont d'ailleurs un rapport $\frac{I_{d\,\text{eff}}}{I_{n\,\text{eff}}}$ plus petit que les gros, il est nécessaire de *réduire le courant au décollage*.

Cette action peut être réalisée de trois façons différentes :

— par action sur le courant primaire (applicable à tous les moteurs),

— par action sur le circuit secondaire (applicable seulement aux moteurs à bagues),

— par des opérations automatiques mettant en œuvre les mêmes principes que l'un ou l'autre des deux procédés précédents.

18. DÉMARRAGE PAR RÉDUCTION MOMENTANÉE DE LA TENSION D'ALIMENTATION

Cette réduction peut être opérée soit au moyen d'une résistance (elle est branchée en *série avec le stator* au moment du démarrage pour produire une chute de tension ; fig. XII-35), soit par un autotransformateur. Le second

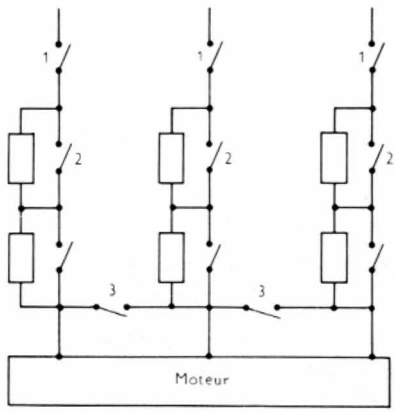


Fig. XII-35

1 et 3 fermés, 2 ouvert : mise sous tension ;
1 fermé, 2 et 3 ouverts : démarrage avec les inductances en série ;
1 et 2 fermés, 3 ouvert : marche normale

procédé est préférable au premier parce qu'il réduit dans le rapport $\frac{\text{H.T.}}{\text{B.T.}}$ le *courant dans le réseau* par rapport au courant dans la machine. Dès lors, il permet d'obtenir un meilleur couple au décollage (avec $\frac{I_{d\,\text{eff}}}{I_{n\,\text{eff}}} = 2$ on a $\frac{T_d}{T_n} = 0{,}2$ avec un rhéostat en série, et $\frac{T_d}{T_n} = 0{,}6$ avec un transformateur).

Mais le *mode le plus fréquent*, parce qu'il ne demande qu'un simple commutateur, est le *démarrage étoile-triangle* (fig. XII-36). Le moteur est établi pour fonctionner *normalement en triangle*. On le branche momentanément

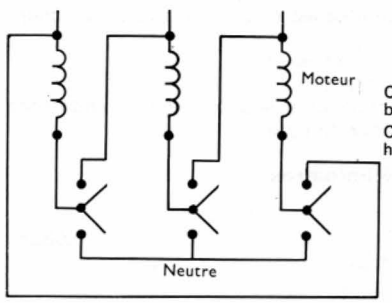


Fig. XII-36

Commutateur en position basse : montage étoile.
Commutateur en position haute : montage triangle

en étoile pour le démarrage : la tension d'enroulement est alors divisée par $\sqrt{3}$. Le moment du couple (proportionnel au carré de la valeur efficace de la tension d'alimentation) est réduit dans le rapport 1/3.

Quant au courant, avec la même tension composée, il est réduit dans le rapport 1/3 lui aussi. En effet, les valeurs efficaces des courants dans les deux cas sont liées par les relations suivantes :

$$I_{étoile} = J_{étoile} = \frac{1}{\sqrt{3}} J_{triangle} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} I_{triangle}$$

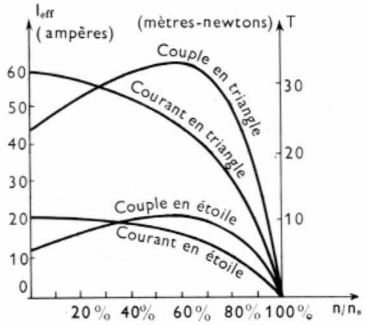
$$= \frac{1}{3} I_{triangle}$$

(on a affecté la lettre I à l'intensité d'un courant en ligne et la lettre J à l'intensité d'un courant dans un enroulement).

Le couple spécifique $\frac{T_d}{T_n}$ est proche de 0,7 si $\frac{I_{d\,\text{eff}}}{I_{n\,\text{eff}}}$ est égal à 2.

La figure XII-37 fournit les caractéristiques $T\ (n)$ et $I\ (n)$ d'un moteur branché en étoile puis en triangle.

Fig. XII-37

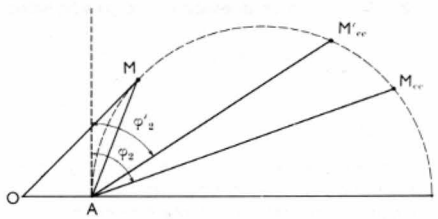


En conclusion : tous les procédés par réduction momentanée de la tension résolvent le problème de courant, mais *aucun d'eux ne permet le démarrage sous charge* ($T_d < T_n$). Ils s'appliquent à l'entraînement d'engins démarrant à faible charge (ventilateurs, pompes centrifuges, machines agricoles, etc.).

19. DÉMARRAGE PAR ACTION SUR LE CIRCUIT SECONDAIRE (ROTOR)

Il consiste en l'insertion momentanée de résistances *en série avec le rotor* (moteur à bagues). Lorsque le rotor est calé (le moteur est alors équivalent à un transformateur statique), le courant dans cet enroulement est réduit ainsi que le courant statorique. Dans le diagramme du cercle (fig. XII-38), le point M_{cc} vient en M'_{cc} ($OM'_{cc} < OM_{cc}$) et l'on voit que le facteur de puissance à rotor calé est plus

Fig. XII-38



grand. En conclusion, le déphasage du courant rotorique est réduit ($\varphi'_2 < \varphi_2 \Rightarrow \cos\varphi'_2 > \cos\varphi_2$) tandis que l'intensité efficace de ce courant est plus petite ($I'_{2\,\text{eff}} < I_{2\,\text{eff}}$). En se reportant à l'expression du couple transmis (V. ci-dessus § 8) :

$$T_t = \frac{E_{2\,\text{eff}}}{\Omega_s} I_{2\,\text{eff}} \cos\varphi_2$$

on constate que c'est le produit de $I'_{2\,\text{eff}}$ et de $\cos\varphi'_2$ qui doit être considéré ; en réalité, le rapport $\frac{T_d}{T_n}$ peut atteindre 2,5 pour $\frac{I_{d\,\text{eff}}}{I_{n\,\text{eff}}} = 2$.

Le démarrage des moteurs à bagues par rhéostat rotorique convient quand on a besoin d'un fort couple de démarrage.

20. RHÉOSTAT À PLOTS (DÉMARREUR)

L'insertion de résistances en série avec le rotor a pour effet :

— *de réduire le courant absorbé* I_{eff} *au décollage* (le point M_{cc} passe en M'_{cc}). Ce courant décroît quand le moteur prend de la vitesse et que le point de fonctionnement passe de M'_{cc} en M (V. fig. XII-38) ;

— *de conserver un couple* de valeur maximale (fig. XII-39) pendant toute la période de démarrage.

En suivant les portions de caractéristiques, tracées en trait gras, on voit comment se déplace le point figuratif

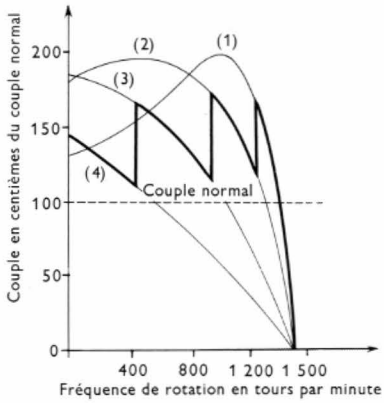


Fig. XII-39

du fonctionnement quand, par sauts brusques, la résistance du rhéostat rotorique passe de sa valeur maximale à zéro.

Pour le calcul des *résistances entre plots* on se fixe :

— d'une part un couple *maximal* en considérant le courant maximal que l'on s'impose ;

— d'autre part un couple *minimal* supérieur au couple résistant de la machine entraînée.

On admet que l'on opère toujours dans la portion rectiligne de la caractéristique de couple et que le moment du *couple est proportionnel* au glissement pendant tout le démarrage.

La construction de la figure XII-40 s'en déduit. Elle s'applique au moteur triphasé pris comme exemple au

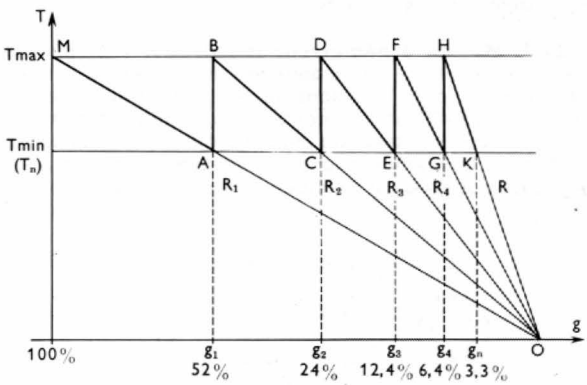


Fig. XII-40

paragraphe 16. On prend souvent $T_{\min} = T_n$ (moment du couple nominal) qui est égal ici à 921 Nm. On a adopté $T_{\max} = 2{,}05\,T_n = 1\,860$ Nm. On place le point H ($T = 921$ Nm et $g = 3{,}3\ \%$) ; cela fixe l'échelle des couples (en ordonnées) et des glissements (en abscisses). On trace successivement les droites *OKH, OGF, OED, OCB, OA*, cette dernière devant aboutir sensiblement au point M (sinon on modifie légèrement le rapport $\frac{T_{\max}}{T_{\min}}$).

Cette construction donne les abscisses g_4, g_3, g_2, g_1 des points G, E, C, A. À couple égal (dans la portion rectiligne de la caractéristique de couple) puisque le glissement est proportionnel à la résistance rotorique (V. ci-dessus § 10), dans l'hypothèse du rotor en étoile (fig. XII-41), on peut écrire :

$$R_4 = R\frac{g_4}{g_n} = \frac{0{,}166}{2} \cdot \frac{6{,}4}{3{,}3} = 1{,}61\ \Omega$$

$$R_3 = R\frac{g_3}{g_n} = \frac{0{,}166}{2} \cdot \frac{12{,}4}{3{,}3} = 3{,}12\ \Omega$$

$$R_2 = R\frac{g_2}{g_n} = \frac{0{,}166}{2} \cdot \frac{24}{3{,}3} = 6{,}06\ \Omega$$

$$R_1 = R\frac{g_1}{g_n} = \frac{0{,}166}{2} \cdot \frac{52}{3{,}3} = 13{,}03\ \Omega$$

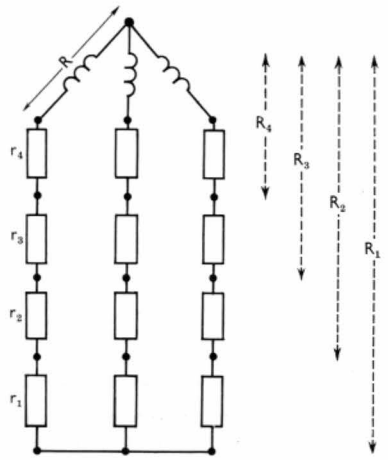


Fig. XII-41

On déduit les résistances entre plots (5 plots) :

$$r_4 = R_4 - R = 1{,}61 - 0{,}83 = 0{,}78\ \Omega$$
$$r_3 = R_3 - R_4 = 3{,}12 - 1{,}61 = 1{,}51\ \Omega$$
$$r_2 = R_2 - R_3 = 6{,}06 - 3{,}12 = 2{,}94\ \Omega$$
$$r_1 = R_1 - R_2 = 13{,}03 - 6{,}06 = 6{,}97\ \Omega$$

21. PROCÉDÉS DE DÉMARRAGE AUTOMATIQUE

On a cherché à éviter la sujétion de la manœuvre du démarreur tout en démarrant avec un fort couple. De nombreux dispositifs ont été proposés à cet effet. Ceux qui subsistent sont les suivants.

21.1. Moteur à démarreur centrifuge. — Un plateau fixé à l'extrémité de l'arbre porte des résistances qui sont en série avec le rotor. Elles sont successivement court-circuitées (fig. XII-42) par des contacteurs centrifuges au fur et à mesure que la vitesse du moteur croît. Chacun d'eux est réglé pour fonctionner à une vitesse déterminée. On a les avantages du rhéostat rotorique sans en avoir les inconvénients.

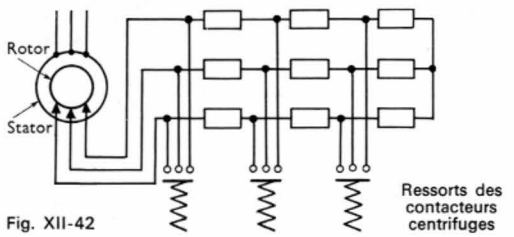


Fig. XII-42

21.2. Moteur à double cage. — Il possède un stator normal et un rotor à deux cages coaxiales (fig. XII-43). La cage externe a des barreaux plus résistants (moindre section) que la cage interne. En revanche, cette dernière, noyée dans le fer, a une plus grande inductance L.

Au décollage, la pulsation des courants rotoriques est alors égale à la pulsation ω des courants statoriques, $L\omega$ est grand et la cage interne a une forte réactance d'induction. Elle constitue un véritable *écran électrodynamique* vis-à-vis du flux utile et celui-ci circule *entre les deux cages*.

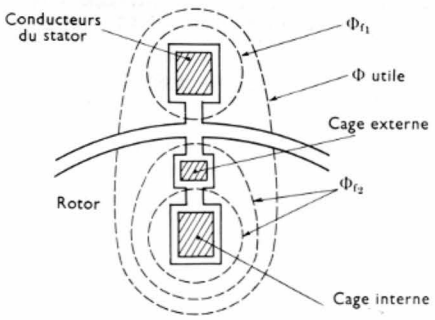


Fig. XII-43

C'est dire que c'est surtout grâce à la cage externe que l'on obtient le couple : on l'appelle *cage de démarrage*. Comme elle est résistante, elle détermine un *bon couple de décollage*.

Au fur et à mesure que la vitesse augmente, la pulsation des courants rotoriques diminue ainsi que la réactance du rotor (devenue $Lg\omega$) ; la cage interne perd son rôle d'écran. Le flux passe à l'intérieur de la cage interne et, comme celle-ci a une faible résistance, le courant induit est plus intense que dans la cage externe. C'est pourquoi la cage interne est appelée *cage de travail*.

Ces appellations ne doivent cependant pas faire oublier qu'à tout instant, au cours du démarrage, le couple est dû à la *somme des couples* agissant sur les deux cages.

Le moteur à double cage, souvent utilisé avec un coupleur étoile-triangle, est robuste, doué d'un bon couple ($\frac{T_d}{T_n}$ est compris entre 1 et 2 pour $\frac{I_{d\,\text{eff}}}{I_{n\,\text{eff}}}$ compris entre 1,1 et 2,5). Il est très fréquemment employé. Sa caractéristique mécanique $T(n)$ a l'allure de la courbe de la figure XII-44 ou de celle de la figure XII-45 (avec un « dos de chameau» et deux portions stables).

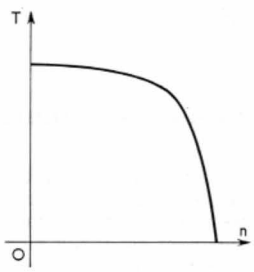


Fig. XII-44

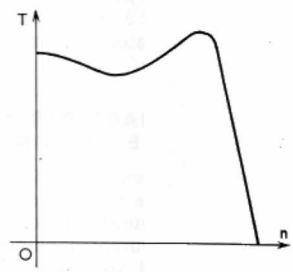


Fig. XII-45

21.3. Moteur à encoches profondes. — Il ne comporte qu'une seule cage, mais ses barreaux (dans des encoches profondes) ont l'une des formes représentées sur la figure XII-46.

Au décollage (pour une tension d'alimentation de fréquence 50 Hz) le courant rotorique dans un barreau se concentre vers l'entrefer ; cela diminue la section de passage du courant et accroît la résistance du barreau. En *marche* (fréquence basse) le courant circule uniformément dans la section du barreau et la *résistance de la partie de conducteur utilisée est plus faible*.

On conçoit qu'un tel moteur se comporte comme un moteur à double cage. Comme sa fabrication est plus simple, il est très répandu. Pour des moteurs assez puissants (plusieurs milliers de kilowatts) il permet le démarrage direct sous de hautes tensions.

21.4. Autres procédés

Procédé dit à « tension dissymétrique » : il est basé sur le fait qu'entre la rupture d'une phase en triphasé ($R = \infty$ et couple nul) et l'application de tensions de même valeur efficace (système triphasé équilibré ; $R = 0$ et couple élevé), une valeur intermédiaire de R (insertion d'une résistance dans une phase du stator) permet d'avoir le couple intermédiaire que l'on désire (fig. XII-47).

Démarrage oscillomatique. — Il s'emploie avec les moteurs à rotor bobiné. On place dans le circuit rotorique une chambre contenant un électrolyte ; elle présente une résistance qui augmente lorsque celui-ci est partiellement vaporisé. La vaporisation nécessaire est produite par la surintensité qui se produit à l'enclenchement (fig. XII-48).

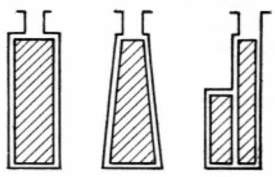


Fig. XII-46

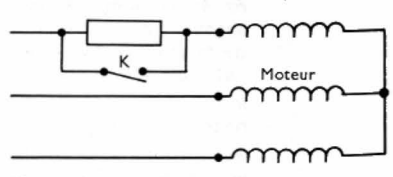


Fig. XII-47

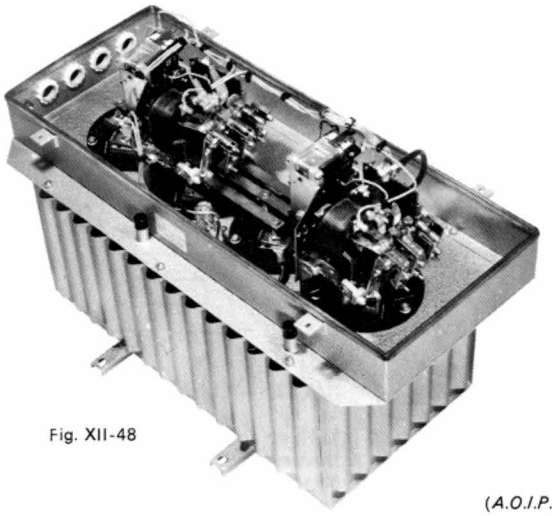


Fig. XII-48

(*A.O.I.P.*)

Démarreur RLV (rhéostats liquide-vapeur) pour moteur à bagues de 80 à 160 ch. équipé en « montage parallèle deux temps » avec contacteur d'insertion, court-circuiteur et relais UNELEC

B) MARCHE DE RÉGIME

La marche de régime est définie par l'égalité des moments des couples moteur et résistant : $T_m = T_r$. Elle est caractérisée par un ensemble de courbes : $T(n)$, I_{eff} (P_u), cos φ (P_u), η (P_u). Il est possible de la modifier, sans toucher à l'appareil entraîné, en agissant sur les paramètres suivants : tension d'alimentation U_{eff}, résistances du stator, résistances du rotor.

22. COURBES CARACTÉRISTIQUES EN MARCHE DE RÉGIME

22.1. Caractéristique mécanique T (n). — Elle montre :

— que l'exploitant doit être attentif au coefficient de stabilité $\frac{T_{\max}}{T_n}$ (fig. XII-49) ;

— que la *puissance d'un moteur asynchrone est sensiblement proportionnelle à son glissement* car, dans les limites d'emploi courant, le moment du couple est proportionnel au glissement et la vitesse de rotation varie peu.

Fig. XII-49

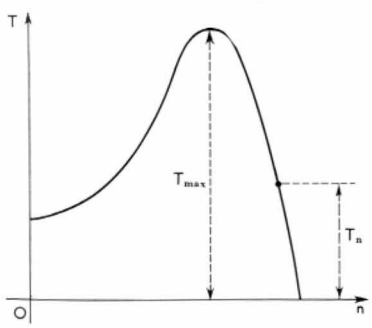
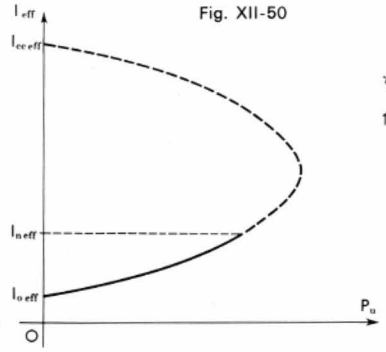


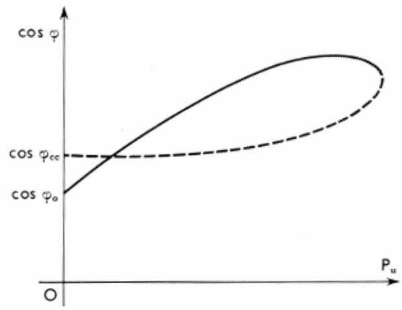
Fig. XII-50



22.2. Caractéristique I_{eff} (P_u). Sur le diagramme du cercle, en suivant le déplacement du point M (V. fig. XII-36) de M_0 (marche à vide) à M_{cc} (arrêt en court-circuit) on voit que l'intensité du courant *croît constamment* alors que la puissance utile P_u présente un maximum (fig. XII-50). Il faut remarquer *l'importance du courant à vide* $I_{0\,\text{eff}}$ ($\frac{I_{0\,\text{eff}}}{I_{n\,\text{eff}}}$ est compris entre 0,25 et 0,5) beaucoup plus intense que dans un transformateur. Ce courant, essentiellement *magnétisant*, résulte de la présence d'un *entrefer important dans le moteur :* même réduit au minimum (pour diminuer la consommation d'énergie réactive), sa réluctance est beaucoup plus grande que celle du fer.

22.3. Caractéristique cos φ (P_u). En suivant encore le déplacement du point M entre M_0 et M_{cc} sur le diagramme du cercle on constate que le facteur de puissance cos φ croît, passe par un maximum puis décroît tandis que la puissance utile P_u présente aussi un maximum (fig. XII-51).

Fig. XII-51



On note que cos φ est très faible à vide : il augmente avec la charge, mais passe par un maximum. Dans un moteur bien construit ce maximum correspond au point de fonctionnement normal (OM doit être tangent au cercle des courants dans le diagramme du cercle). En conséquence, un moteur trop gros (eu égard à l'utilisation) travaille avec un faible facteur de puissance et consomme beaucoup d'énergie réactive.

22.4. Courbe du rendement η (P_u). En se rapportant au bilan énergétique du moteur (V. fig. XII-18) et en considérant que les *pertes dans le fer du rotor sont négligeables* en marche normale, on peut déterminer le rendement approché du moteur :

$$\eta \text{ approché } = \frac{P_{abs} - \text{pertes totales mesurables}}{P_{abs}}$$

Le numérateur peut s'écrire :

$$P_{abs} - (P_{st} + P_{jr} + P_m)$$
$$= P_{abs} - [P_{st} + (P_{abs} - P_{st})\, g + P_m]$$

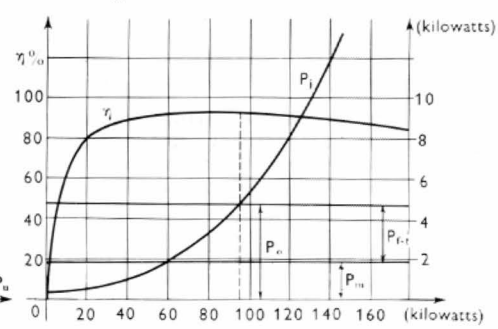
soit :

$$(P_{abs} - P_{st})\ (1 - g) - P_m$$

On remplace sans erreur sensible (car g est faible) le terme P_m par $(1 - g)\ P_m$ et l'on obtient :

$$\eta \text{ approché } = \frac{(P_{abs} - P_{st})\ (1 - g) - P_m\ (1 - g)}{P_{abs}}$$
$$= \frac{(1 - g)\ (P_{abs} - P_{st} - P_m)}{P_{abs}}$$

Fig. XII-52



Or, si l'on désigne par P_0 la puissance mesurée à vide alors que le courant absorbé est $I_{0\,\text{eff}}$, on a (en triphasé) :

$$P_0 - 1{,}5\ R_s I_0{}^2{}_{\text{eff}} = P_m + P_{fst}$$

si R_s désigne la résistance mesurée entre deux bornes du stator.

$$\eta \text{ approché } = \frac{(1 - g)\ (P_{abs} - P_{jst} - P_{fst} - P_m)}{P_{abs}}$$

$$= \frac{(1 - g)\ [P_{abs} - 1{,}5\ R_s I^2{}_{\text{eff}} - (P_0 - 1{,}5\ R_s I_0{}^2{}_{\text{eff}})]}{P_{abs}}$$

$$= \frac{(1 - g)\ [P_{abs} - P_0 - 1{,}5\ R_s\ (I^2{}_{\text{eff}} - I_0{}^2{}_{\text{eff}})]}{P_{abs}}$$

g et I_{eff} désignant respectivement le glissement et le courant statorique, donnés par le diagramme du cercle, et correspondant à la puissance absorbée P_{abs}.

La courbe η (P_u) est donnée par la figure XII-52. Le rendement est maximal entre les trois quarts et les quatre quarts de la puissance nominale. Le tableau suivant donne le rendement à pleine charge de moteurs asynchrones de différentes puissances :

P_u (kilowatts)	0,5	1	2	4	8	10	25	55	85	120	250
η %	74	78	81	84	85	86	87	90	91	92	93

22.5. Modifications des courbes par les variables d'exploitation

22.5.1. Actions sur la tension d'alimentation. — Une *baisse de tension* assez importante accroît les *risques de calage* (le couple maximal est diminué). Cette modification n'est favorable qu'à *faible charge* car à puissance égale, l'intensité du courant absorbé est plus faible et le facteur de puissance cos φ est plus grand (fig. XII-53).

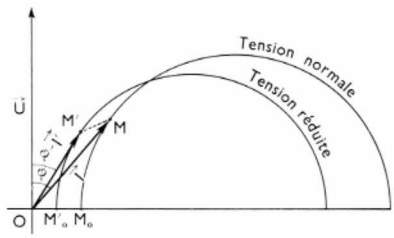


Fig. XII-53

Les points M et M' correspondent à la même puissance utile P_u

Une *élévation de tension* accroît sensiblement la *puissance réactive* consommée (accroissement du flux) et l'intensité efficace $I_{0\,\text{eff}}$ du *courant à vide* (surtout magnétisant).

22.5.2. Influence de la fréquence. — En vertu de la formule de Kapp (V. chap. 1, § 7.2), on peut écrire la relation suivante :

$$\frac{U_{\text{eff}}}{f} = 4{,}44\, N \widehat{F_1}$$

($\widehat{F_1}$ représente la valeur maximale du flux f_1 dans le stator).

Comme le couple et le courant du moteur sont essentiellement liés au flux f_1, donc à sa valeur maximale, une *baisse de fréquence* équivaut à un *accroissement de tension* et réciproquement.

22.5.3. Action sur la résistance statorique. — Elle produit une chute de tension $R_s I_{\text{eff}}$, réduit la f.é.m. $E_{1\,\text{eff}}$, donc réduit le flux $F_{1\,\text{eff}}$. Sur le diagramme le diamètre du cercle est plus petit. Le coefficient de stabilité et le rendement sont diminués. Ces effets sont défavorables.

22.5.4. Action sur la résistance rotorique. — Un accroissement de la résistance rotorique augmente le glissement (V. ci-dessus § 10) et diminue le rendement (augmentation des pertes par effet Joule dans le rotor) ; de plus,

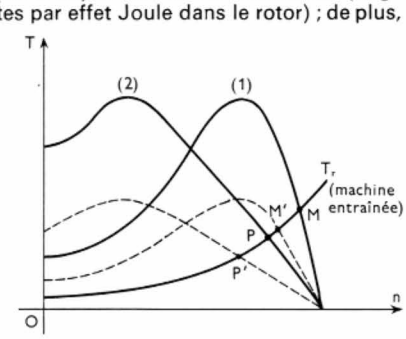


Fig. XII-54

elle accroît la sensibilité du moteur aux variations de la tension. C'est ce qui apparaît sur la figure XII-54 : à *tension normale* le point figuratif passe de M à P (par accroissement de la résistance rotorique) ; à *tension réduite* il passe de M' à P'.

23. ÉNERGIE PERDUE DANS LE ROTOR PENDANT LE DÉMARRAGE

Soit t la durée du démarrage *à vide* entre la vitesse zéro et la vitesse Ω_s. Cette énergie a pour expression :

$$W = \int_0^t R\, i^2\, dt = \int_0^t T_t\ (\Omega_s - \Omega_r)\ dt$$

Or : $T_t = J \dfrac{d\Omega_r}{dt}$ (le moment du couple résistant est nul) et

$$dt = \frac{J d\Omega_r}{T_t}$$

Dès lors :

$$W = \int_0^{\Omega_s} T_t\ (\Omega_s - \Omega_r)\ J \frac{d\Omega_r}{T_t}$$

$$W = \int_0^{\Omega_s} J\ (\Omega_s - \Omega_r)\ d\Omega_r$$

$$W = J \int_0^{\Omega_s} \Omega_s\, d\Omega_r - J \int_0^{\Omega_s} \Omega_r\, d\Omega_r$$

$$W = J \left[\Omega_s \Omega_r\right]_0^{\Omega_s} - J \left[\frac{1}{2}\, \Omega^2_r\right]_0^{\Omega_s}$$

$$W = J\, \Omega^2_s - \frac{1}{2} J\, \Omega^2_s = \frac{1}{2} J\, \Omega^2_s$$

Cette expression montre que *l'énergie perdue par effet Joule dans le rotor pendant le démarrage est égale à l'énergie cinétique acquise par toute la partie tournante au cours de cette période.*

Quand le rotor est bobiné à bagues une fraction importante de cette énergie est perdue à l'*extérieur* du moteur, dans le rhéostat de démarrage. Cela explique pourquoi un moteur à démarrages fréquents doit être *bobiné à bagues*. Dans le cas d'un moteur en court-circuit, le rotor s'échaufferait dangereusement.

C) RÉGLAGE DE LA VITESSE

Entre la marche à vide et la marche à pleine charge la vitesse de rotation Ω_r d'un moteur asynchrone varie peu. Cependant comme cette vitesse est égale à :

$$\Omega_r = (1 - g)\ \Omega_s = (1 - g)\ \frac{\omega}{p}$$

(ω : pulsation de la tension d'alimentation ; p : nombre de paires de pôles) on voit que pour modifier Ω_r il faut agir sur p, ω ou g.

24. ACTION SUR LE NOMBRE DE PÔLES

Le bobinage statorique comporte soit deux *enroulements distincts* ayant respectivement p_1 et p_2 paires de pôles, soit, plus généralement (meilleure utilisation du cuivre), un seul enroulement mais fractionné en deux parties égales. C'est en modifiant les connexions entre ces deux parties que l'on obtient soit p (fig. XII-55) soit 2 p paires de pôles (fig. XII-56).

Ce moteur dit à *plusieurs polarités* ou bien à *plusieurs vitesses* (avec généralement un rotor à cage dont le nombre de pôles est, par principe, toujours égal à celui du stator) convient surtout lorsqu'il s'agit de marches à deux ou

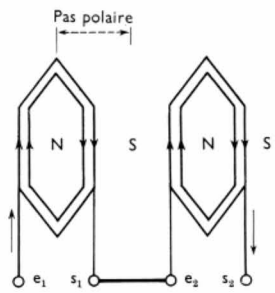


Fig. XII-55

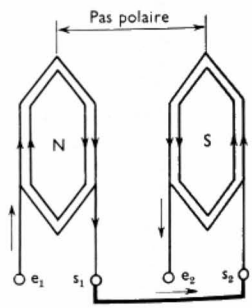
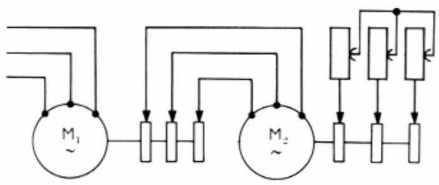


Fig. XII-56

trois vitesses bien différentes (tapis roulants, ascenseurs, etc.). Par rapport au moteur ordinaire il présente les inconvénients suivants : nécessité d'un appareillage parfois important, moindre rendement, plus faible facteur de puissance, prix plus élevé.

Une autre action sur le nombre de pôles est réalisée par le montage en cascade de *deux moteurs mécaniquement accouplés*, l'un M_1 dit *principal*, l'autre M_2 dit de *réglage* (fig. XII-57). On alimente le stator de M_2 (p_2 paires de pôles)

Fig. XII-57



avec les courants rotoriques de M_1 (p_1 paires de pôles). Ces deux moteurs tournent évidemment à la même vitesse Ω_r que l'on peut déterminer en considérant M_1 :

$$\Omega_r = (1 - g_1)\,\frac{\omega}{p_1}$$

(ω = pulsation de la tension appliquée au stator de M_1). Si l'on considère M_2 on peut écrire que cette vitesse Ω_r est égale à :

$$(1 - g_2)\,\frac{\text{(pulsation de la tension appliquée au stator de } M_2)}{p_2}$$

$$\Omega_r = (1 - g_2)\,\frac{g_1\omega}{p_2}$$

En égalant ces deux résultats on obtient la relation suivante :

$$(1 - g_1)\,\frac{\omega}{p_1} = (1 - g_2)\,\frac{g_1\omega}{p_2}$$

soit :

$$g_1 = \frac{p_2}{p_1 + p_2 - p_1 g_2}$$

Dans le cas particulier où $g_2 \approx 0$ (rhéostat de réglage en court-circuit), le glissement g_1 est alors égal à :

$g_1 = \dfrac{p_2}{p_1 + p_2}$. On voit que si $p_1 = p_2$, on a $g_1 = 50\,\%$!

La vitesse de rotation du groupe est donc inférieure à celle de chaque moteur fonctionnant isolément. Suivant que l'on alimente M_1 seul, M_2 seul ou bien M_1 et M_2 en cascade, on obtient trois vitesses différentes :

$$\frac{\omega}{p_1}, \frac{\omega}{p_2} \text{ et } \frac{\omega}{p_1 + p_2}$$

Le montage en cascade est appliqué à la commande de machines d'extraction.

25. ACTION SUR LA FRÉQUENCE D'ALIMENTATION

25.1. Emploi d'un convertisseur de fréquence. — Un moteur asynchrone peut être alimenté par un alternateur fournissant une tension de fréquence réglable (alternateur entraîné par un moteur dont on peut régler la vitesse de rotation) ou par un convertisseur de fréquence. Un convertisseur électromécanique est généralement formé d'un moteur asynchrone *G.A.* à bagues dont le *stator* (*primaire*) *est alimenté à la fréquence* 50 Hz et d'un moteur auxiliaire *M* qui entraîne *G.A.* dans le sens de son propre flux ou en sens inverse (fig. XII-58).

Si le moteur auxiliaire *M* (moteur asynchrone) comporte

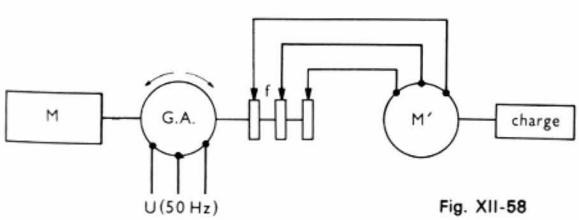


Fig. XII-58

p_1 paires de pôles (et si ω désigne la pulsation du réseau d'alimentation), la vitesse de rotation du rotor est sensiblement $\dfrac{\omega}{p_1}$. Comme le stator de *G.A.* est alimenté sous une tension de pulsation ω, les pôles fictifs engendrés par ce stator tournent par rapport à lui à la vitesse $\dfrac{\omega}{p_2}$ (p_2 : nombre de pôles du rotor et du stator du moteur *G.A.*). Par suite, selon les sens respectifs de rotation, les pôles fictifs tournent à la vitesse $\left|\dfrac{\omega}{p_1} \pm \dfrac{\omega}{p_2}\right|$ par rapport au rotor de *G.A.* Les courants induits dans ce rotor ont donc une pulsation égale à :

$$p_2\left|\frac{\omega}{p_1} \pm \frac{\omega}{p_2}\right| = \omega\left|\frac{p_2}{p_1} \pm 1\right|$$

Leur fréquence f est donnée en fonction de la fréquence du réseau (50 Hz) par la relation suivante :

$$f = 50\left(\frac{p_2}{p_1} \pm 1\right)$$

Si $p_2 = p_1$, f est égale à 0 ou 100 Hz. On comprend que si le moteur auxiliaire n'est pas un moteur asynchrone mais un moteur à vitesse $\left(\dfrac{\omega}{p_1}\right)$ réglable tout se passe comme si p_1 pouvait être modifiée de façon continue. Il en est de même de f qui est alors réglable entre deux limites (0 et 100 Hz si l'on prend $p_1 = p_2$).

Les courants induits dans le rotor de *G.A.* peuvent être utilisés pour alimenter un moteur asynchrone *M'* (*G.A.* joue le rôle de générateur) ; la vitesse de ce moteur variera avec la fréquence f obtenue. Le convertisseur de fréquence est utilisé dans la commande des machines-outils à grande vitesse (travail du bois ou des métaux légers) et de certains outils portatifs ; dans un cas comme dans l'autre, il faut coordonner l'action sur f et sur U de façon à conserver le même couple à glissement égal.

En effet, à glissement égal, si la fréquence est divisée par q, il en est de même de la valeur efficace $E_{2\text{eff}}$ de la f.é.m. induite dans une phase du rotor et de la réactance $X_2 = L_2\omega$ de celle-ci, mais le numérateur de l'expression donnant le moment du couple transmis (V. ci-dessus § 8) :

$$T_t = \frac{g\,E^2_{2\,\text{eff}}}{\Omega_s} \cdot \frac{R^2}{R^2_2 + (g\,X_2)^2}$$

décroît davantage que le dénominateur. Par suite pour conserver le couple désiré, il faut augmenter la tension lorsqu'on diminue la fréquence de rotation.

25.2. Emploi d'onduleurs. — (V. t. 1, Électronique, chap. 19). Le courant d'un réseau triphasé est redressé et le courant continu obtenu est transformé en *courant sensiblement sinusoïdal à fréquence variable* au moyen d'*onduleurs*. La valeur efficace et la fréquence de la tension obtenue sont réglables séparément et très facilement dans de grandes limites.

26. ACTION SUR LE GLISSEMENT

26.1. Moteur à cage ou (mieux) à encoches profondes. — Elle peut être réalisée par le réglage de la *tension d'alimentation* lorsque le moment du couple résistant T_r est du type ventilateur (fig. XII-59) ou lorsque le moteur est à *rotor massif* (rotor constitué par un cylindre de fer doux et très résistant, dans lequel l'effet de peau permet le décollage). Les caractéristiques de ce dernier moteur (fig.

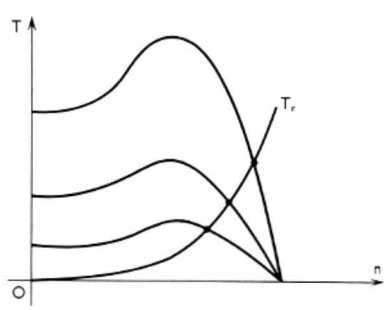


Fig. XII-59

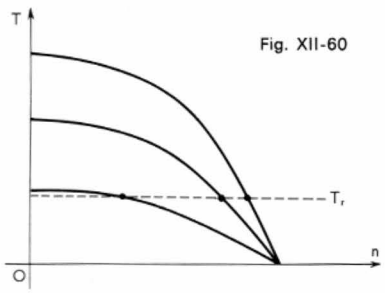


Fig. XII-60

Pour la même variation du rhéostat de glissement la variation de vitesse est d'autant plus importante que le couple résistant est grand

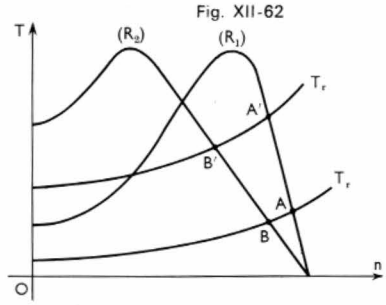


Fig. XII-62

La variation de vitesse est plus grande à forte charge (A' → B') qu'à faible charge (A → B)

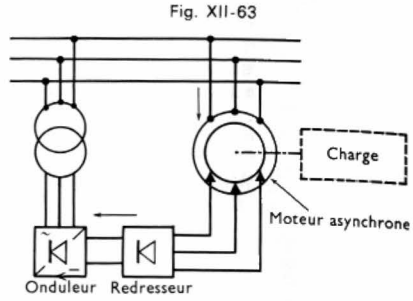


Fig. XII-63

L'énergie électrique transmise au rotor est renvoyée dans le réseau d'alimentation au moyen de l'onduleur

XII-60) montrent d'ailleurs que, même dans le cas d'un couple résistant constant, la tension influe sensiblement sur le glissement.

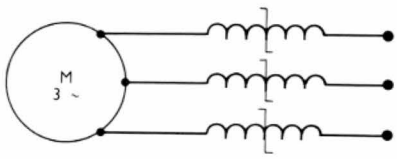


Fig. XII-61

Quant au réglage de la tension, il peut être réalisé au moyen d'un autotransformateur ou d'*inductances saturables* (V. chap. 8) placées en série avec le moteur (fig. XII-61).

26.2. Moteur à bagues

1° On peut employer alors un *rhéostat de glissement* qui se place en série avec les résistances rotoriques. Ce procédé présente de nombreux défauts : diminution du rendement, efficacité sensible seulement aux fortes charges (fig. XII-62), prix du rhéostat élevé dès que la diminution de vitesse demandée est importante. Néanmoins sa simplicité est telle que le rhéostat de glissement est utilisé dans de nombreuses industries (imprimeries, papeteries, etc.).

2° La méthode dite de la *double conversion statique* élimine ces inconvénients puisqu'elle a pour objet la récupération de l'énergie de glissement qui est perdue dans le rhéostat de glissement. À cet effet le courant rotorique est redressé puis transformé par un onduleur en courants alternatifs à la *fréquence du réseau* (fig. XII-63). Par action sur l'onduleur il est possible d'agir sur l'énergie de glissement récupérée, donc sur la vitesse, dans de larges limites et sans détérioration sensible du rendement.

Évidemment, la complexité de l'appareillage auxiliaire est telle que la double conversion statique ne peut s'appliquer qu'à des *moteurs puissants*.

On peut encore réaliser de grandes variations de vitesse avec un moteur asynchrone sans diminuer trop fortement son rendement :

— soit en l'équipant en moteur *diphasé à phase de contrôle;* c'est un moteur de servomécanisme dont il sera question plus loin (V. chap. 20).

— soit en lui adjoignant un collecteur. On est alors conduit à toute une gamme de moteurs triphasés à collecteur succinctement décrits ci-après (V. chap. 19) ; ils sont en voie de disparition.

CHAPITRE XIII

MODES D'UTILISATION ET TYPES PARTICULIERS DE MACHINES ASYNCHRONES

GÉNÉRATEUR ASYNCHRONE

1. PRINCIPE

À l'aide d'un moteur auxiliaire, on peut entraîner, dans le *sens de sa rotation*, le rotor d'un moteur asynchrone (lui-même alimenté par ailleurs) et dépasser la vitesse de synchronisme. En vertu de la loi de Lenz, le *couple électromagnétique* change alors de sens (il s'oppose alors au déplacement relatif du rotor en avant des pôles fictifs du stator) : il est devenu résistant. La machine maintenant absorbe la puissance mécanique que lui fournit le moteur et la transforme en puissance électrique (fig. XIII-1).

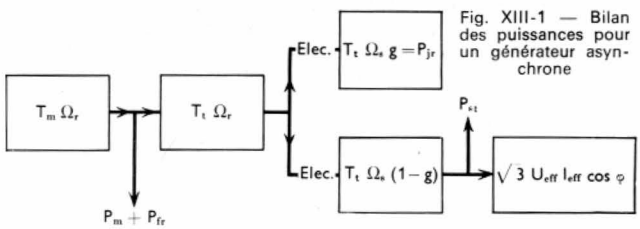


Fig. XIII-1 — Bilan des puissances pour un générateur asynchrone

Cette puissance électrique est *fournie au réseau* d'alimentation de la machine, à la fréquence de 50 Hz *quelle que soit la vitesse de rotation* du rotor à l'hypersynchronisme. En effet le flux créé par le rotor tourne par rapport à lui en *sens inverse* de sa rotation et la vitesse de rotation de ce flux rotorique dans l'espace est égale à :

$$\Omega_r - (\Omega_r - \Omega_s) = \Omega_s$$

(à l'hypersynchronisme Ω_r est supérieur à Ω_s). C'est précisément la vitesse de rotation des pôles fictifs du stator.

2. DIAGRAMME ET CARACTÉRISTIQUES

Comme la puissance active a changé de signe (on compte positivement une puissance reçue et négativement une puissance fournie) il en est de même du courant actif. Donc dans le diagramme du cercle le point figuratif de fonctionnement se place sur le *demi-cercle inférieur* (fig. XIII-2).

La composante *réactive* ou magnétisante du courant (représentée par *Om*) n'a pas changé de signe : la machine

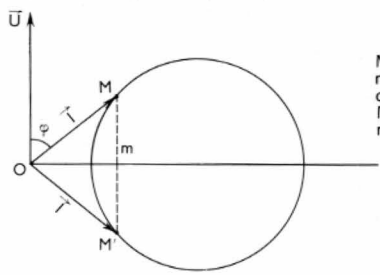


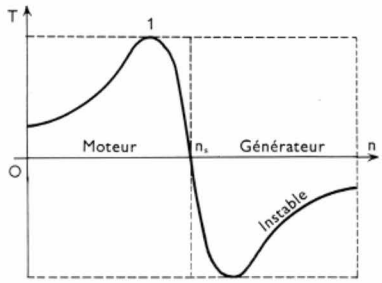
Fig. XIII-2

M : point de fonctionnement en moteur asynchrone
M' : point de fonctionnement en génératrice asynchrone

reçoit toujours sa puissance réactive de l'alternateur qui l'alimente, et lui impose sa fréquence.

De la symétrie des deux modes de fonctionnement de la machine asynchrone (en moteur et en générateur) par rapport à la marche au synchronisme, il résulte que les caractéristiques mécaniques T (n) du moteur et du généra-

Fig. XIII-3



teur sont symétriques par rapport au point de l'axe des abscisses correspondant à la vitesse de synchronisme n_s (fig. XIII-3). Le moment du couple change de signe (il devient résistant) en même temps que le glissement (en arrière en moteur, en avant en générateur).

3. PROPRIÉTÉS ESSENTIELLES DU GÉNÉRATEUR ASYNCHRONE

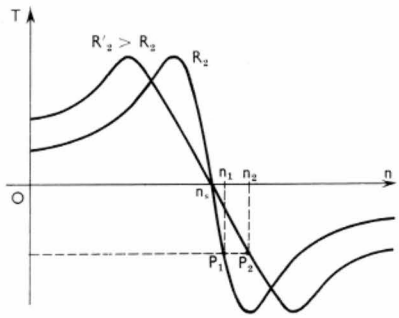
Elles se déduisent des caractéristiques précédentes.

3.1. La machine fournit d'autant plus de puissance électrique qu'elle tourne plus vite. — En effet, la caractéristique $T(n)$ de la figure XIII-3 montre que le couple résistant opposé par le générateur asynchrone au moteur d'entraînement croît en même temps que la vitesse (dans la zone correspondant à un fonctionnement stable). La puissance électrique est sensiblement proportionnelle à ce couple résistant car la vitesse varie peu (glissements faibles).

3.2. À couple égal (moteur d'ascenseur à la descente) la *vitesse de rotation croît* en même temps que la *résistance du rotor* (fig. XIII-4).

Fig. XIII-4

$R'_2 > R_2$
$n_2 > n_1$



3.3. Il y a un couple maximal au-delà duquel le générateur asynchrone a une *marche instable*. Le couple résistant qu'il oppose à son moteur décroît alors quand la vitesse augmente. Le groupe s'emballe.

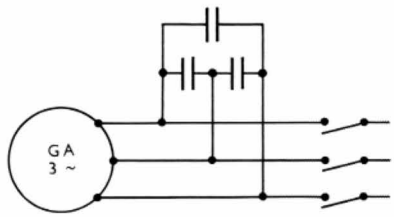
4. AVANTAGES ET INCONVÉNIENTS DU GÉNÉRATEUR ASYNCHRONE

4.1. Avantages. — Le générateur asynchrone, dont le rotor est généralement à cage, est simple, robuste, peu coûteux. Il n'est pas nécessaire de réaliser un accrochage pour le relier au réseau et il ne nécessite qu'un appareillage des plus réduit. Celui-ci est limité à un interrupteur à deux temps qui permet d'insérer momentanément une résistance en série avec le rotor. En effet sans cette précaution, lorsqu'on ferme l'interrupteur, le retard à l'établissement du flux (retard à l'établissement de la f.c.é.m.) provoquerait une surintensité.

Aucun régulateur de vitesse n'est nécessaire. On règle le générateur asynchrone à sa pleine puissance et c'est le réseau (alimenté par un ou plusieurs alternateurs) qui supporte les variations de la puissance demandée par les exploitants.

4.2. Inconvénients. — La génératrice asynchrone ne peut pas être indépendante du réseau : elle consomme de la puissance réactive et diminue le facteur de puissance du réseau qui l'alimente. Cet inconvénient a nui à son développement et limite son emploi à des puissances assez faibles.

Fig. XIII-5

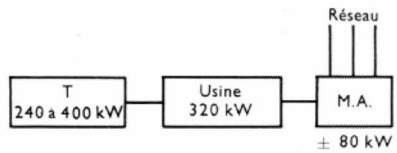


Évidemment en branchant entre ses bornes une batterie de condensateurs (fig. XIII-5), celle-ci peut *fournir* à la machine asynchrone la puissance réactive qui est nécessaire à l'entretien de son flux. Cette adjonction est fréquente, mais si la batterie de condensateurs est trop largement calculée, en cas de rupture de l'alimentation, on risque le phénomène d'*autoarmorçage* (excitation du générateur autonome par la batterie) qui provoque des surtensions dangereuses.

5. APPLICATION DU GÉNÉRATEUR ASYNCHRONE

5.1. Régulateur de puissance. — On peut le mettre en évidence en considérant le cas d'une usine qui utilise directement de l'énergie hydraulique et dispose d'une puissance variant (suivant le débit d'eau) de 240 à 400 kW. On accouple une machine asynchrone de 80 kW à la turbine et à l'installation électrique. Cette machine fonctionnera en *moteur* en période de *basses eaux*, en *générateur* dans la période de grand débit hydraulique (fig. XIII-6). L'usine pourra disposer d'une puissance minimale de 320 kW (au lieu de 240 kW) en période de basses eaux (la puissance est alors fournie par le réseau d'alimentation).

Fig. XIII-6



5.2. Aménagement de petites chutes d'eau. — C'est une application assez répandue (surtout depuis l'apparition de groupes bulbes ; V. t. 1, Aménagements hydroélectriques).

La considération du prix de revient du kilowatt installé, de la facilité de mise en marche, de la suppression de la surveillance, de la possibilité d'automatiser le fonctionnement justifient l'application du générateur asynchrone. Elle est employée pour l'aménagement des faibles chutes ou dans de petites centrales éoliennes.

MOTEUR ASYNCHRONE MONOPHASÉ

6. CONSTITUTION

Le stator est monophasé et son enroulement est analogue à celui de l'alternateur monophasé (V. chap. 9). Mais le rotor est diphasé ou, le plus souvent, triphasé et ne diffère nullement du rotor du moteur polyphasé.

7. CARACTÉRISTIQUE MÉCANIQUE $T(n)$

Le théorème de Maurice Leblanc (V. chap. 1) a permis de montrer qu'un enroulement monophasé (celui du stator) engendre *deux ensembles* de pôles fictifs tournant en sens inverse à la vitesse angulaire $\frac{\omega}{p}$. On appelle *pôles concordants* ceux qui tournent dans le même sens que le rotor et *pôles inverses* ceux qui tournent dans le sens opposé.

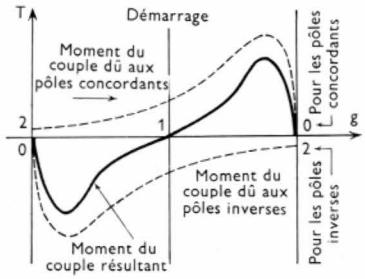
Vis-à-vis des pôles concordants le glissement du rotor est :

$$g = \frac{\Omega_s - \Omega_r}{\Omega_s} = 1 - \frac{\Omega_r}{\Omega_s}$$

Vis-à-vis des pôles inverses, il est égal à :

$$g' = \frac{\Omega_s + \Omega_r}{\Omega_s} = 1 + \frac{\Omega_r}{\Omega_s} = 2 - \left(1 - \frac{\Omega_r}{\Omega_s}\right) = 2 - g$$

Fig. XIII-7



Les pôles concordants d'une part, les pôles inverses d'autre part, exercent sur le rotor des couples opposés. Pour chacun d'eux on peut tracer la courbe du moment du couple en fonction du glissement g (fig. XIII-7) en observant que, lorsque le glissement est nul vis-à-vis des pôles concordants, il est égal à 2 vis-à-vis des pôles inverses. Par addition algébrique des ordonnées, on obtient la courbe $T(g)$ du moteur monophasé entre les deux vitesses de synchronisme opposées.

8. PROPRIÉTÉS PARTICULIÈRES AU MOTEUR MONOPHASÉ

En considérant la caractéristique T (g) du moteur monophasé (fig. XIII-7) on voit que :

8.1. Son couple est nul à l'arrêt. — Le rotor est également sollicité dans les deux sens : il ne peut donc pas démarrer sans artifice.

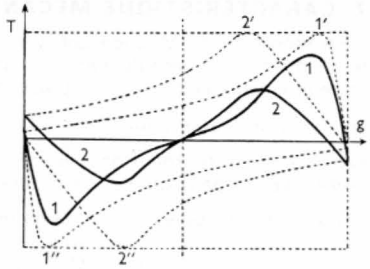
8.2. À dimensions égales, il est moins puissant que le moteur polyphasé. — En effet, la figure montre que le moment du couple inverse se retranche du moment du couple concordant (seul existant en polyphasé) : le moment du couple est plus faible qu'en polyphasé. Comme le couple détermine le dimensionnement du moteur, un moteur monophasé est obligatoirement moins puissant qu'un moteur polyphasé de même taille.

8.3. Son facteur de puissance est plus faible. — Un moteur monophasé est plus volumineux qu'un moteur polyphasé de même puissance et il comporte plus de fer. Comme la puissance réactive consommée est proportionnelle au volume du fer (V. chap. 2), elle est plus grande dans le cas du moteur monophasé et celui-ci fonctionne avec un facteur de puissance plus faible.

8.4. Son rendement est inférieur à celui du moteur polyphasé. — À puissance égale, les pertes dans le fer du stator (proportionnelles au volume du fer) sont plus importantes dans un moteur monophasé. De plus, à cause de l'effet des pôles inverses, il se produit des pertes supplémentaires *dans le fer du rotor*. Enfin dans l'enroulement du rotor les pôles inverses engendrent des courants qui causent des pertes par effet Joule.

8.5. Son coefficient de stabilité est diminué par l'insertion de résistances rotoriques. — C'est ce que montre la figure XIII-8. Du fait de l'accroissement de la

Fig. XIII-8



résistance du rotor, les caractéristiques 1′ et 1″ sont remplacées par les caractéristiques 2′ et 2″. Le moment du couple résultant est alors donné par la courbe 2 : le moment du couple maximal est diminué et, par suite, le coefficient de stabilité est réduit.

9. ARTIFICES DE DÉMARRAGE

9.1. Lancement à la main. — C'est le cas des petits moteurs facilement accessibles. Une simple impulsion dans un sens quelconque détermine *dans ce même sens* un couple qui croît avec la vitesse jusqu'à atteindre le couple nominal.

9.2. Spire de Frager. — Dans certains moteurs (ventilateurs, tourne-disques, etc.) des spires de Frager recouvrent une partie des bobines statoriques (fig. XIII-9) : on obtient ainsi des flux déphasés et un léger couple qui suffit au démarrage. Ces moteurs ne conviennent évidemment qu'aux dispositifs pour lesquels le moment du couple au décollage est faible.

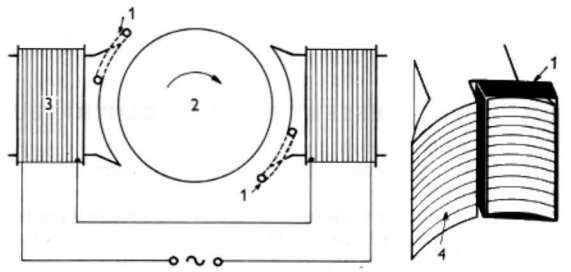


Fig. XIII-9 — Moteur à spires de Frager
1. Spire de Frager. — 2. Rotor. — 3. Inducteur. — 4. Pôle inducteur du moteur

9.3. Moteur à condensateur. — On dispose sur le stator *deux enroulements* :

— un enroulement dit *principal* qui est celui du moteur monophasé,

— un enroulement dit *auxiliaire*, moins important que le précédent, électriquement décalé de $\frac{\pi}{2}$ rad par rapport à celui-ci.

Le problème est d'alimenter ces deux enroulements par des courants sensiblement déphasés de $\frac{\pi}{2}$ rad afin de démarrer la machine *comme un moteur diphasé*. On y parvient :

1° Dans les moteurs *les plus anciens*, à l'aide d'un ensemble résistance-inductance (fig. XIII-10). La résistance est en série avec l'enroulement principal et l'inductance en série avec l'enroulement auxiliaire. De ce fait les courants dans les deux enroulements sont fortement déphasés entre eux : le moteur démarre. Après quoi, on élimine la phase auxiliaire et l'on court-circuite la résistance.

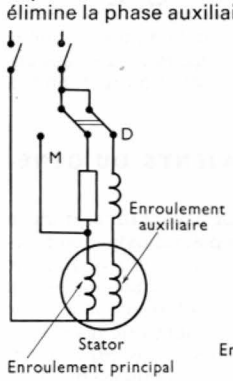


Fig. XIII-10

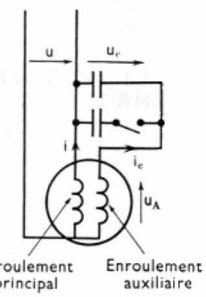


Fig. XIII-11

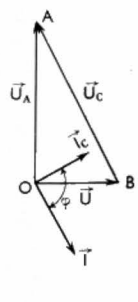
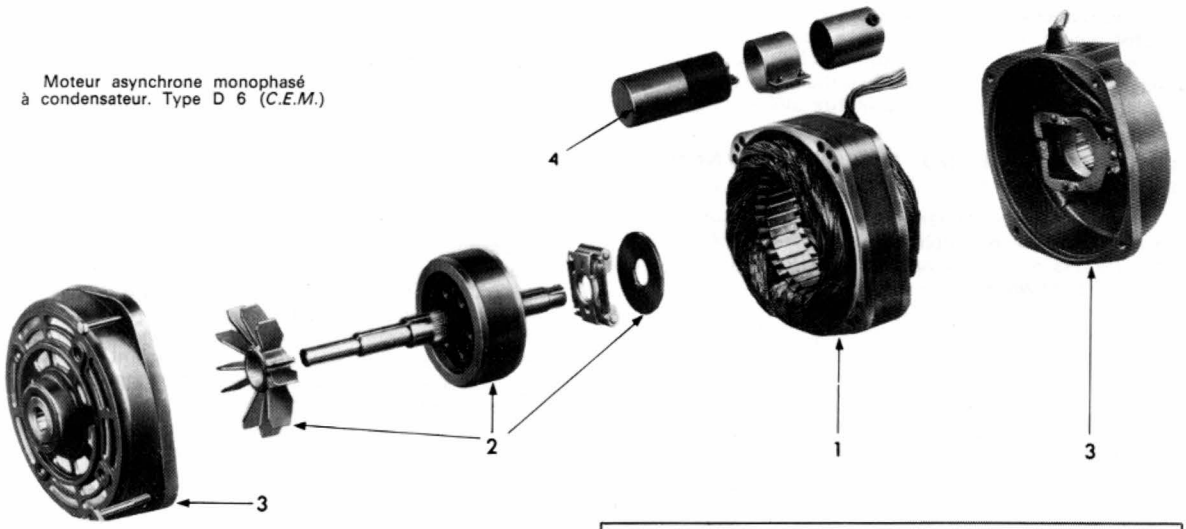


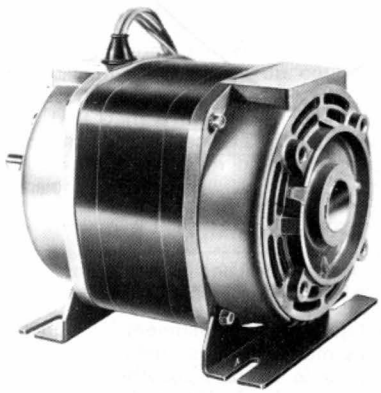
Fig. XIII-12

2° Dans les *moteurs modernes* au moyen de condensateurs (fig. XIII-11). Le diagramme vectoriel (fig. XIII-12) montre, que dans ce cas, le courant i_c dans les condensateurs et la phase auxiliaire, peut (par un choix convenable de la capacité) être déphasé de φ radians en avant du courant i dans la phase principale.

Cela permet d'obtenir un meilleur couple de démarrage qu'avec une inductance auxiliaire. De plus, une partie de la batterie de condensateurs peut être conservée en marche normale et servir au relèvement du facteur de puissance du moteur.

Moteur asynchrone monophasé à condensateur. Type D 6 (*C.E.M.*)





Moteur asynchrone monophasé à démarrage avec condensateur électrolytique et coupleur centrifuge. Type C 9 (*C.E.M.*)

CARACTÉRISTIQUES MÉCANIQUES

1. Ensemble stator
— Circuit magnétique constitué de tôles dynamo
— Bobinage en fil émaillé

2. Ensemble rotor
— Arbre en acier mi-dur
— Paquet de tôles feuilletées et « cage » en aluminium sous pression
— Ventilateur

3. Ensemble flasques-paliers
— À paliers lisses (coussinets bagués minces à réserve d'huile)
— À roulements à billes

4. Ensemble de démarrage
— Par condensateur permanent pour type D 6
— Par condensateur électrolytique pour type C 9

10. APPLICATIONS

L'infériorité du moteur monophasé par rapport au moteur triphasé de mêmes dimensions est telle qu'on ne l'emploie que pour de faibles puissances ou lorsqu'on ne dispose que d'une distribution monophasée. Il convient pour toutes les applications électrodomestiques (V. t. 2, Applications électrodomestiques). Même avec les artifices signalés (et sauf le cas du moteur à condensateur) il ne peut démarrer qu'à faible charge.

MOTEUR ASYNCHRONE SYNCHRONISÉ

Le moteur synchrone et le moteur asynchrone ont des propriétés opposées : le premier a un couple de démarrage nul ou très faible, mais un bon facteur de puissance ; pour le second, le facteur de puissance est assez faible, mais le démarrage est simple et souvent avec un fort couple.

Le moteur asynchrone *synchronisé* est né de l'idée de réunir dans une même machine les avantages de ces deux moteurs polyphasés.

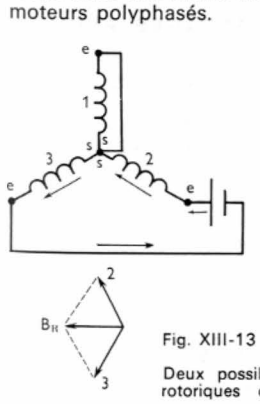


Fig. XIII-13

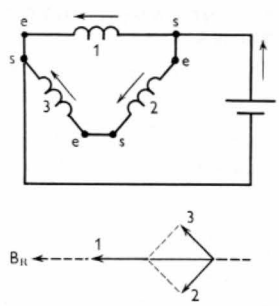


Fig. XIII-14

Deux possibilités d'alimentation des enroulements rotoriques d'un moteur asynchrone synchronisé

11. PRINCIPE

Quand le démarrage d'un moteur asynchrone ordinaire est terminé (enroulement du rotor en court-circuit), on peut envoyer un courant continu dans le rotor, par l'intermédiaire des bagues (fig. XIII-13, pour un moteur bipolaire). Des pôles sont ainsi créés, pôles liés au rotor : (l'induction résultante B_R a une direction bien déterminée dans le cas des figures XIII-13 et XIII-14). Dès lors le moteur asynchrone est transformé en moteur synchrone : on dit qu'il est *synchronisé*.

12. CONSTITUTION

Le stator est le même que celui d'un moteur asynchrone triphasé ordinaire. Dans les modèles récents, le rotor est *diphasé* avec une phase en cuivre occupant environ les deux tiers du pas polaire et une phase *en fer* occupant le tiers du pas polaire (fig. XIII-15).

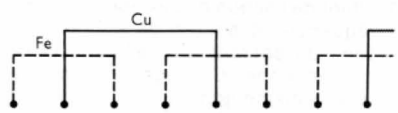


Fig. XIII-15

Dans la marche *asynchrone* (démarrage ou en cas de décrochage) les deux phases (fer et cuivre) interviennent en tant que circuits électriques.

Dans la marche *synchrone* les barres de fer diminuent la réluctance du circuit magnétique ; faisant partie d'une phase mise en court-circuit, elles jouent le rôle d'amortisseurs Leblanc (V. chap. 9).

Le courant continu d'excitation est fourni par une petite génératrice, dite *excitatrice*, généralement en bout d'arbre. Sa particularité est de délivrer une *très basse tension*. En effet la tension de l'excitatrice doit être voisine de $gE_{2\,\text{eff}}$ (f.é.m. rotorique en asynchrone). Le courant d'excitation du moteur asynchrone synchronisé est réglé par un

rhéostat branché sur le débit de l'excitatrice. Entre bagues, à rotor ouvert, la tension est $E_{2\,\text{eff}}$ *beaucoup plus grande* que $gE_{2\,\text{eff}}$. Il faut que $gE_{2\,\text{eff}}$ soit très faible pour que cette tension $E_{2\,\text{eff}}$ ne pose pas de difficiles problèmes pour l'isolement des bagues : elle doit être inférieure à 2 000 V.

13. DIAGRAMME DU MOTEUR ASYNCHRONE SYNCHRONISÉ

La machine fonctionnant en moteur synchrone, c'est le diagramme bipolaire simplifié qu'il faut tracer (V. chap. 11). On porte vers le haut les courants actifs (fig. XIII-16) et l'on a : $OB \sim -E_v$ et $AB \sim I$.

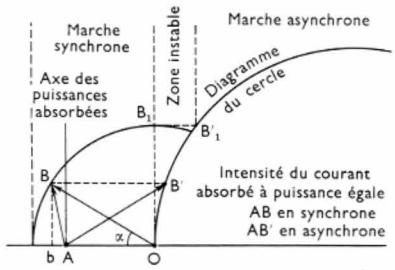


Fig. XIII-16

Si le moteur n'est ni *chargé* ni *excité* par un courant continu, il fonctionne en moteur *asynchrone à vide*. Dès lors, le segment AO représente le courant à vide $I_{0\,\text{eff}}$ du moteur asynchrone et le point O est l'extrémité du diamètre du cercle.

Pour terminer le diagramme, il suffit de tracer la circonférence de centre O et de rayon OB. En marche synchrone, c'est sur cette circonférence que se déplace le point figuratif B lorsque *l'excitation est constante et la puissance variable*.

14. FONCTIONNEMENTS SUCCESSIFS EN SYNCHRONE ET ASYNCHRONE

En marche synchrone, soit B le point de fonctionnement du moteur (fig. XIII-16). On le charge : la puissance active du moteur (représentée par le segment Bb) croît et le point B se déplace sur le cercle de centre O *dans le sens horaire*. Lorsque le couple résistant appliqué atteint le maximum du couple moteur synchrone (correspondant à OB_1), le point figuratif franchit rapidement la zone $B_1B'_1$ instable en marche synchrone et passe sur le cercle figurant le fonctionnement en asynchrone : c'est le *décrochage du moteur synchrone*.

Cette marche en asynchrone permet d'éviter un arrêt du moteur, mais elle ne doit pas durer longtemps en raison de ces inconvénients.

1° Le courant dans le moteur est important et le *facteur de puissance* est faible.

2° Elle est accompagnée de pompages. Le rotor glisse, alors que les pôles sont liés au rotor : suivant les positions relatives de ces pôles et des pôles fictifs statoriques, le couple synchrone est moteur ou résistant (V. chap. 9). De plus le flux résultant de l'action de ces pôles subit des variations à basse fréquence ; il en est de même de la f.c.é.m. du moteur, donc du courant qu'il absorbe et par conséquent des chutes en ligne. C'est gênant pour les exploitants branchés sur la même ligne.

En définitive, la marche en asynchrone ne doit pas être prolongée ; elle permet d'éviter un décrochage du moteur et de reprendre sa marche en moteur synchrone après réduction du couple résistant.

15. STABILITÉ

Pour ne pas risquer trop facilement la marche en asynchrone il faut veiller au coefficient de stabilité (en synchrone) c'est-à-dire au rapport (fig. XIII-17) :

$$\frac{T_{\max}}{T_n} = \frac{OB_n}{B_nA} \approx \frac{AB'_n}{B_nA} = \frac{1}{\cos\varphi_n}$$

B_n est le point de fonctionnement avec un facteur de puissance cos φ égal à 1, et cos φ_n est le facteur de puissance en asynchrone pour le couple nominal. Il apparaît qu'une bonne stabilité en synchrone va de pair avec un faible facteur de puissance en asynchrone (grand entrefer). Quant à la largeur de l'entrefer, le constructeur adopte un compromis ; c'est pourquoi le coefficient de stabilité du moteur asynchrone synchronisé, en excitation optimale est compris entre 1,2 et 1,5 seulement.

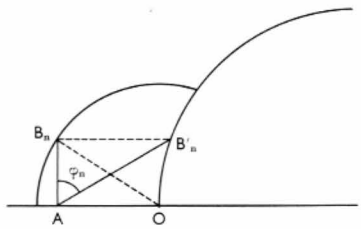


Fig. XIII-17

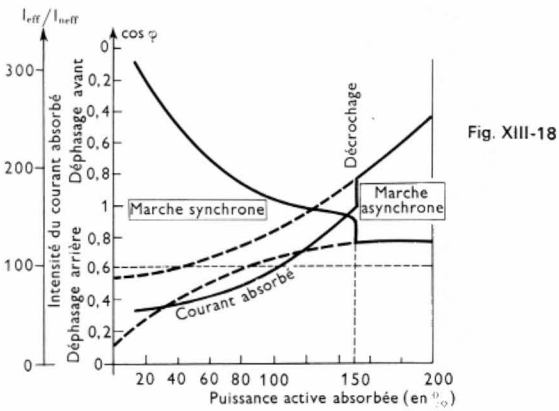


Fig. XIII-18

Les courbes de la figure XIII-18 résument les conclusions précédentes. Elles montrent dans quelle mesure, au décrochage, brusquement le courant absorbé croît et le facteur de puissance cos φ décroît. Une autre caractéristique est importante : c'est celle du facteur de puissance en fonction de la puissance active absorbée à *excitation constante* (fig. XIII-19).

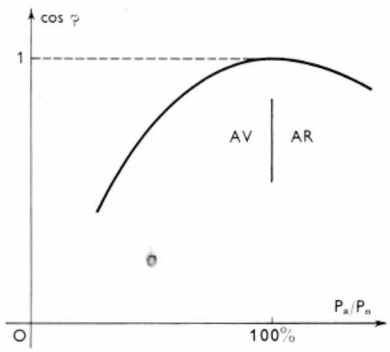


Fig. XIII-19

16. INCONVÉNIENTS ET AVANTAGES. APPLICATIONS

Au moteur asynchrone synchronisé on reproche son *prix* et, dans la marche momentanée en asynchrone, ses pompages et le grand *courant* qu'il absorbe. Mais ses avantages sont importants : en dehors de son *rendement élevé* et de sa propriété de reprendre la *marche synchrone* si une surcharge momentanée a provoqué son décrochage, il *démarre avec un fort couple* (qui peut atteindre 1,5 T_n) et peut *fournir de l'énergie réactive*, d'autant plus qu'il est plus faiblement chargé (V. chap. 11).

Tout cela explique pourquoi le moteur asynchrone synchronisé est utilisé dans des installations de moyenne puissance pour relever le facteur de puissance (il remplace un moteur asynchrone) et toutes les fois qu'il s'agit de démarrages difficiles sans appel de courant exagéré (par

exemple dans l'entraînement de ventilateurs de grande puissance et de grande inertie).

On l'emploie en générateur dans de petites stations hydrauliques ou comme alternateur de secours de faible puissance.

17. DÉMARRAGE DU MOTEUR SYNCHRONE EN ASYNCHRONE

Un moteur synchrone de puissance faible ou moyenne peut être *démarré en asynchrone*. On branche le moteur sous tension réduite : il apparaît aussitôt un *couple asynchrone* dû aux pôles massifs du rotor, à l'amortisseur Leblanc s'il existe et même au phénomène d'hystérésis (V. chap. 11). Le moteur démarre s'il est *faiblement chargé* et il atteint une vitesse un peu plus faible que la vitesse de synchronisme, mais avec un *pompage* car la roue polaire a des pôles saillants et la réluctance du circuit magnétique de ces pôles varie périodiquement suivant leur position par rapport aux pôles fictifs du stator. Ce pompage est tel qu'il permet à la roue polaire d'atteindre la vitesse de synchronisme et de s'y maintenir en vertu du principe du flux maximal. On excite alors les inducteurs : si à ce moment-là, les pôles réels du rotor occupent des positions convenables par rapport aux pôles fictifs du stator (c'est-à-dire celles que nous avons définies au chap. 11, § 5) on constate une diminution brusque du courant absorbé. Le moteur est accroché.

Il faut parfois plusieurs tentatives pour fermer l'interrupteur de couplage, à l'instant favorable. C'est après l'accrochage que l'on branche le moteur sous sa pleine tension.

FREIN ÉLECTRIQUE

Le freinage d'un ensemble moteur — machine-outil est souvent nécessaire, soit qu'il s'agisse d'une *descente après une montée* (ascenseurs, monte-charge) soit qu'il soit nécessaire d'obtenir l'*arrêt rapide* d'un ensemble pour accroître la précision du travail ou la sécurité de l'opérateur (raboteuse, aléseuse, machine à chanfreiner, etc.).

Au lieu d'un frein mécanique appliqué à l'arbre du système il est avantageux d'utiliser la *machine asynchrone* elle-même comme *frein*. Plusieurs procédés peuvent être appliqués.

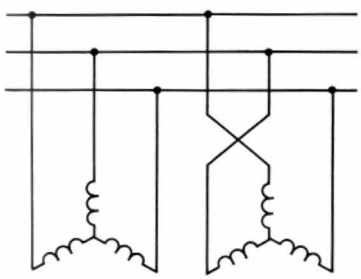


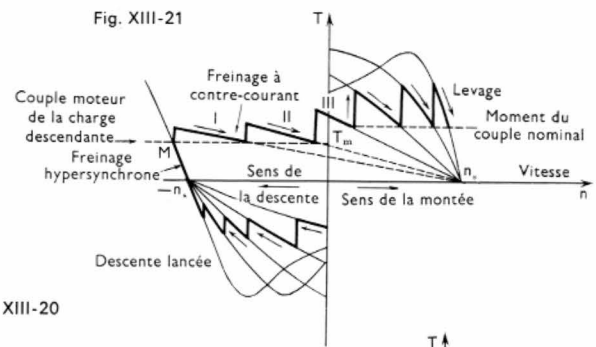
Fig. XIII-20

18. FREINAGE EN GÉNÉRATEUR HYPERSYNCHRONE

Pour fixer les idées, on considère un monte-charge entraîné par un moteur asynchrone. Après la montée (moment du couple positif, vitesse positive), on croise deux connexions de la machine (fig. XIII-20) ; le moment du couple change de signe (action de haut en bas) et la vitesse aussi (descente au lieu de montée). Les courbes $T(n)$ correspondant à la montée et à la descente *lancée* se placent respectivement dans les quadrants 1 et 3 (fig. XIII-21). Mais maintenant le système est soumis à *deux couples moteurs :* celui dû à la pesanteur et celui du moteur. Il prend de la vitesse et franchit la vitesse de synchronisme n_s dans le sens de la descente. La machine fonctionne alors automatiquement en générateur hypersynchrone, donc *freine la descente* (au-delà de la vitesse de synchronisme). Celle-ci s'effectue à une vitesse telle que le moment du couple dû à la pesanteur est opposé à celui dû au freinage de la machine asynchrone (abscisse du point M).

Cette vitesse est grande et la marche en générateur hypersynchrone ne permet pas l'arrêt. D'autre part, on reproche au freinage hypersynchrone le fait que, la machine asynchrone ne freine plus lorsque le couple dû à la pesanteur dépasse une valeur déterminée (V. ci-dessus, § 3.3).

Fig. XIII-21



19. FREINAGE À CONTRE-COURANT

Dans l'exemple considéré précédemment, si l'on croise de nouveau deux connexions du moteur triphasé, le moment du couple moteur s'inverse et agit de bas en haut. C'est un contre-couple qui joue vis-à-vis de la charge descendante le rôle d'un *couple résistant*. Les caractéristiques $T(n)$ de la machine se déplacent alors dans le quadrant 2 (descente avec couple de bas en haut). C'est la marche à *contre-courant* (fig. XIII-21).

Au début il faut un fort rhéostat rotorique sinon le contre-couple ne dominerait pas le couple de la pesanteur et de plus le courant absorbé serait excessif. Avec un rhéostat rotorique à plots, on suit les caractéristiques I, II, III (le contre-couple doit être toujours supérieur au couple de la pesanteur) et on coupe le courant quand la descente est terminée (sinon la charge remonterait).

Les deux modes de freinage décrits présentent l'inconvénient de ne permettre qu'un *réglage imprécis* de la vitesse de descente en raison de la faible inclinaison des caractéristiques $T(n)$. On y remédie, par exemple, en branchant la machine *en monophasé* pour la descente en contre-courant (fig. XIII-22). Dans ce cas, les caractéristiques $T(n)$ (fig. XIII-23) correspondant à l'arrêt partent du point O ; elles ont une plus grande inclinaison par rapport à la caractéristique T_m = Cte et les vitesses de descente sont mieux définies.

20. FREINAGE EN ALTERNATEUR

Il consiste, sans toucher au rotor, à couper l'alimentation du stator et, aussitôt après, à injecter un courant *continu* dans les enroulements du *stator* connectés comme l'indiquent les figures XIII-13 et XIII-14. À ce moment-là, des pôles magnétiques sont liés au stator ; ils sont donc fixes et le rotor fonctionne comme l'induit d'un alternateur alimentant un circuit. Une puissance électrique est produite dans cet induit et un couple *résistant* s'oppose à la rotation de la machine : celle-ci fonctionne comme *frein*.

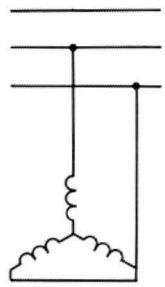


Fig. XIII-22

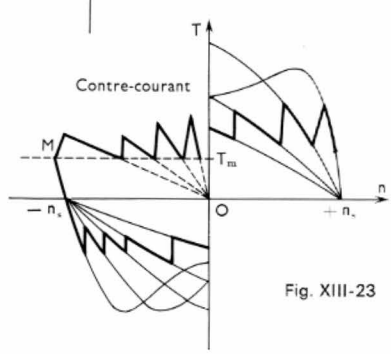


Fig. XIII-23

Ce mode de freinage est plutôt doux. Il est parfois utilisé pour le ralentissement de certaines machines-outils en fin de travail.

UTILISATIONS SPÉCIALES

21. ARBRE ÉLECTRIQUE

Parfois deux moteurs — tout en étant mécaniquement indépendants — doivent entraîner deux organes d'un même système comme s'ils *étaient accouplés sur le même arbre*. C'est, par exemple, le cas des moteurs qui commandent le déplacement des deux palans d'un même portique. On constitue alors un *arbre électrique* en établissant une liaison électrique (fig. XIII-24) entre les rotors des deux moteurs identiques, alimentés par le même réseau triphasé.

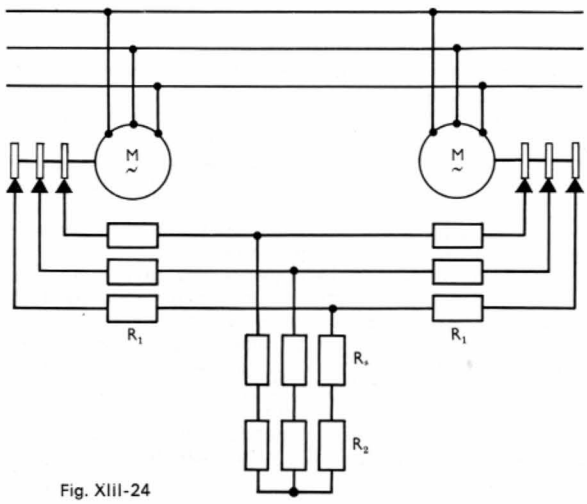


Fig. XIII-24

On suppose les deux moteurs M_1 et M_2 *sous tension et à l'arrêt*. Dans l'étude du régulateur d'induction on a vu que le déphasage des f.é.m. rotoriques dépend de la *position relative du stator et du rotor*. Si ces f.é.m. rotoriques ne sont pas égales et opposées dans les deux machines, un courant circule entre les deux rotors. C'est un courant induit qui, en vertu de la loi de Lenz, s'oppose à la cause qui le produit c'est-à-dire au calage défavorable d'un rotor par rapport à l'autre. Ce courant de circulation engendre donc un *couple dit de synchronisation* qui tend à maintenir les rotors toujours dans la même position relative.

Cela est encore vrai en marche, lorsque les moteurs sont inégalement chargés. Pour que le courant de circulation soit assez intense pour synchroniser les moteurs, il faut que les f.é.m. des rotors soient assez grandes et, pour cela, que le glissement soit suffisant. C'est pourquoi après avoir mis en court-circuit les résistances R_1 et R_2, on maintient en circuit la résistance R_s dite de *synchronisation*.

22. MOTEUR ASYNCHRONE LINÉAIRE

La vitesse linéaire (tangentielle) du flux statorique d'un moteur triphasé dont le rotor a pour rayon R est égale à :

$$v = R\Omega_s = R\,\frac{\omega}{p}$$

(ω : pulsation de la tension d'alimentation du stator ; p : nombre de paires de pôles du stator ; Ω_s : vitesse angulaire des pôles stator). Si ce rayon R devient infini tout se passe comme si le stator était déroulé sur un plan : le stator est *linéaire*. Dans un moteur linéaire on dispose (fig. XIII-25) de part et d'autre d'une lame conductrice (cuivre ou aluminium) et face à face, deux enroulements triphasés à $2p$ pôles que l'on alimente par des courants triphasés. Les flux glissants créés par ces enroulements tendent à entraîner la lame (qui joue le rôle du rotor *massif* dans leur propre sens.

Dans certains relais dits actionneurs (à longue course) la lame joue le rôle de l'armature d'un électroaimant.

Dans certains moyens de transport comme *l'aérotrain* (suspendu par dépression) la voiture *motrice porte les enroulements statoriques* et la *lame* conductrice est *fixe*. Dans ces conditions, c'est la motrice qui se déplace elle-

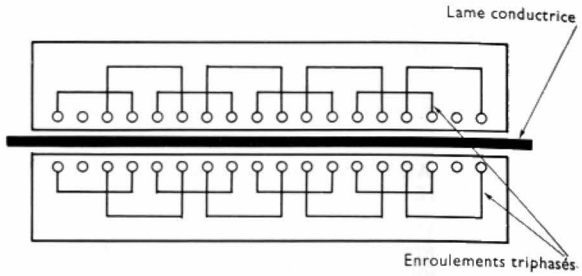


Fig. XIII-25

même à la vitesse v dans le sens opposé au flux glissant qu'elle crée :

$$v = \frac{(1-g)\,l}{T} = (1-g)\,lf$$

(l : distance entre les axes de deux bobines consécutives appartenant à la même phase ; g : glissement ; f : fréquence de la tension d'alimentation).

PETITS MOTEURS SYNCHRONES DÉMARRANT EN ASYNCHRONES

Il s'agit de machines synchrones à aimants permanents. La réalisation de ces moteurs a été rendue possible par les progrès des aimants permanents quant à leur champ coercitif, leur énergie par unité de volume et leur prix. Ce sont en particulier les ferrites de baryum qui ont permis d'enregistrer des progrès décisifs.

23. PRINCIPE DES MOTEURS SYNCHRONES À AIMANTS PERMANENTS

Le stator ne diffère pas de celui des moteurs synchrones ou asynchrones triphasés. En revanche, le rotor comporte :

1° Une *cage* pour le démarrage en asynchrone ;

2° Un *ensemble d'aimants permanents* (en ferrite) en nombre égal à celui des pôles fictifs du stator (fig. XIII-26).

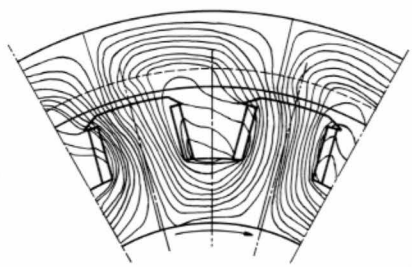


Fig. XIII-26

Grâce à la cage, le moteur démarre en asynchrone ; Les aimants ayant un grand champ coercitif conservent leur induction et leur polarité quand les pôles fictifs du stator tournent lentement par rapport à eux. En marche normale (charge faible) le glissement est très petit et l'accrochage se fait naturellement : la marche devient synchrone.

24. AVANTAGES. INCONVÉNIENTS. APPLICATIONS

Les avantages sont l'excellent facteur de puissance (voisin de 1) et le rendement important.

Les inconvénients proviennent de la difficulté de l'accrochage lorsque la machine entraînée a un grand moment d'inertie, et aussi du prix élevé (supérieur à celui d'un moteur asynchrone ordinaire).

L'emploi du moteur à aimants permanents est donc justifié dans les cas suivants :

1° Lorsque l'économie réalisée grâce au meilleur rendement amortit assez vite le supplément du prix d'achat (cas d'une marche continue).

2° Lorsqu'il ne doit se produire aucune variation de vitesse en fonction de la charge.

3° Quand on prévoit l'utilisation de la machine comme génératrice ou comme frein sans aucun branchement avec le réseau.

De telles machines sont employées dans la technique des fibres synthétiques ou pour l'entraînement des transporteurs à rouleaux, c'est-à-dire lorsqu'il est exigé la même vitesse pour tous les moteurs qui commandent différents organes. C'est par une action simultanée sur la tension et la fréquence de l'alimentation de ces moteurs que l'on obtient la variation de leur vitesse commune.

ACCIDENTS DU MOTEUR ASYNCHRONE TRIPHASÉ

25. MAUVAIS SENS DE ROTATION

Il est facile de l'inverser : il suffit de croiser les connexions de deux bornes au stator.

26. RUPTURE D'UN FIL D'ALIMENTATION (STATOR)

Si le moteur est à l'arrêt, il ne peut pas démarrer. Si la rupture se produit en marche et si le moteur n'est *pas trop chargé*, il continue à tourner : il fonctionne en monophasé. Il « *ronfle* » (effets des pôles inverses) et absorbe un grand courant. S'il est fortement chargé, le courant dans les enroulements alimentés dépasse la valeur nominale et un échauffement important se produit ; si les systèmes de protection ne coupent pas l'alimentation du moteur celui-ci peut être détruit.

Évidemment, les mêmes phénomènes se produisent quand la rupture a eu lieu dans l'un des enroulements du stator. Quand un moteur asynchrone ne veut pas démarrer, il faut d'abord penser à un tel accident.

27. RUPTURE D'UN CONDUCTEUR DU ROTOR PHÉNOMÈNE DE GOERGES

Le rotor devient monophasé. Avec les deux phases non coupées et en court-circuit il peut démarrer ; s'il est en marche, il peut *continuer à tourner* en absorbant un plus grand courant (glissement plus fort pour que l'accroissement du courant rotorique compense la réduction du nombre de spires de l'enroulement du rotor). Mais cela suppose que le moteur ne soit pas trop chargé. Dans le cas contraire, lorsque se produit la rupture d'un fil au rotor, on voit brusquement la vitesse *diminuer de moitié* et le moteur absorber un grand *courant*. C'est le phénomène de Goerges : le courant dans le rotor, de pulsation $p\ (\Omega_s - \Omega_r)$ est *monophasé* et il engendre deux flux, glissant par rapport au rotor dans des sens opposés (fig. XIII-27). Le flux

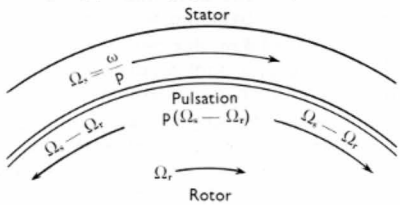


Fig. XIII-27

concordant est le flux de *réaction d'induit* qui tourne par rapport à un repère fixe à la vitesse :

$$\Omega_r + (\Omega_s - \Omega_r) = \Omega_s = \frac{\omega}{p}$$

dans le sens de la rotation ; il engendre un couple dont les variations en fonction de la vitesse sont données par la figure XIII-28.

Le flux inverse tourne, par rapport à des repères fixes, à la vitesse :

$$\Omega_r - (\Omega_s - \Omega_r) = 2\ \Omega_r - \Omega_s$$

On voit que, tant que l'on a :

$$2\ \Omega_r - \Omega_s > 0 \quad \text{ou :} \quad \Omega_r > \frac{\Omega_s}{2}$$

cette vitesse est positive et a le même sens que Ω_s. Le

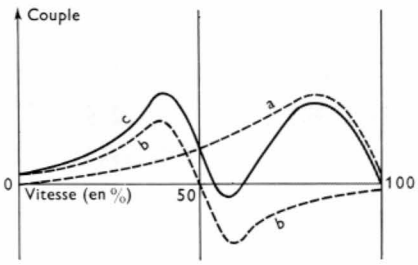


Fig. XIII-28

flux inverse tend à entraîner le stator dans le sens de sa propre rotation et il en résulte un couple *opposé à la rotation*.

Au contraire, lorsqu'on a :

$$2\ \Omega_r - \Omega_s < 0 \quad \text{ou :} \quad \Omega_r < \frac{\Omega_s}{2}$$

le couple dû au flux inverse rotorique est dans le même sens que celui dû au flux concordant (le sens de la rotation).

De plus, à demi-vitesse $\left(\Omega_r = \frac{\Omega_s}{2}\right)$, le couple dû au flux inverse rotorique est nul (courbe b de la figure XIII-28).

En définitive la courbe du couple du moteur s'obtient en faisant la somme algébrique des ordonnées des courbes (a) et (b). C'est la courbe (c) en trait plein. On voit qu'elle comporte une *branche stable* pour des valeurs de la vitesse voisine de la *moitié de la vitesse de synchronisme ;* c'est sur cette branche que se fixe le point de rencontre des caractéristiques $T_m(n)$ et $T_r(n)$ lorsque, la rupture d'un fil se produit au rotor d'un moteur assez fortement chargé. Ce phénomène de Goerges est parfois appelé *rampage*.

28. ESSAIS DE RÉCEPTION

Ils sont identiques aux essais de dynamos à courant continu qui seront décrits plus loin (V. chap. 14).

On ajoute aussi souvent le calibrage de l'entrefer, afin de vérifier si sa valeur est constante tout autour du rotor. En effet, l'entrefer étant toujours très faible, un léger excentrage peut souvent suffire pour faire appliquer le rotor contre le stator et cela provoque le calage du moteur.

29. RECHERCHE DES DÉRANGEMENTS

29.1. Échauffement exagéré du stator :

— Court-circuit dans une phase.
— Contact entre deux phases.
— Résistance accidentelle dans le circuit du rotor.

29.2. Échauffement exagéré du rotor :

— Court-circuit dans l'enroulement du rotor.
— Barre mal soudée dans les rotors à cage d'écureuil.

29.3. Le moteur ne démarre pas :

— Rupture d'une phase.
— Inversion d'une phase.
— Le rotor frotte contre le stator.

29.4. Le moteur ne supporte pas de surcharge, mais démarre facilement :

— Tension d'alimentation trop faible.
— Dans les moteurs à deux couplages (étoile, triangle), erreur de couplage.

Remarque : Dans les moteurs triphasés, un défaut affectant un enroulement (court-circuit ou rupture) est détecté par un essai en courant continu entre les bornes prises deux à deux et en mesurant les courants absorbés.

Si les trois courants sont sensiblement égaux, les trois enroulements sont identiques et bons.

Si l'intensité d'un des trois courants est plus grande, c'est qu'il y a court-circuit dans une phase ou entre deux phases.

Si une des intensités est plus faible, ou même nulle, c'est qu'il y a une coupure.

CHAPITRE XIV

GÉNÉRATRICE DE COURANT CONTINU THÉORIE — CONSTITUTION — CONSTRUCTION ESSAIS DE RÉCEPTION

THÉORIE - CONSTITUTION

1. DÉFINITION

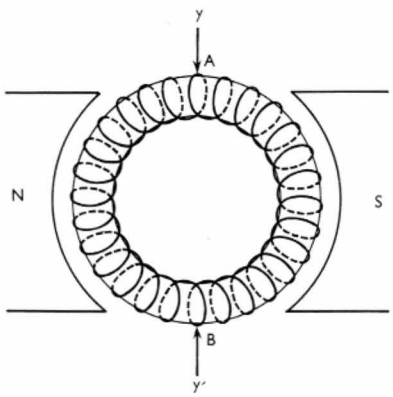
Une *machine à courant continu* permet la transformation de l'énergie mécanique en énergie électrique (génératrice de courant continu) ou la transformation inverse (moteur). On réserve généralement le nom de *dynamo* à la machine fonctionnant en génératrice et le nom de *moteur à courant continu* à la machine utilisée en moteur. Une machine dans laquelle le flux magnétique inducteur est engendré par des *aimants permanents* (et non des électroaimants) est appelée *machine magnéto-électrique,* ou plus simplement *magnéto*.

Le présent chapitre est réservé à l'étude de la dynamo (génératrice).

2. PRINCIPE

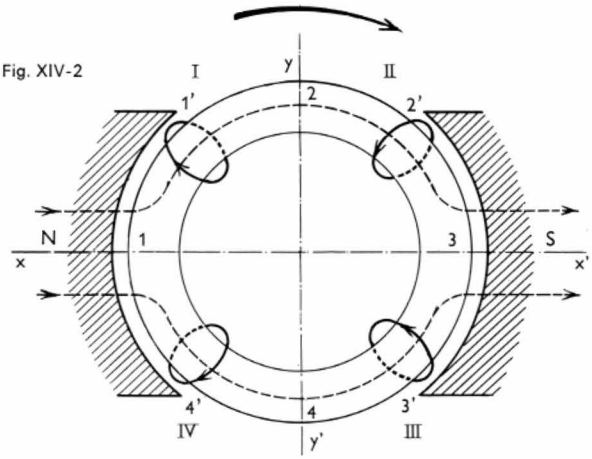
2.1. Rappel : loi de Lenz. — La dynamo constitue une application de la loi de Lenz : une f.é.m. est induite dans toute spire qui embrasse un flux Φ variable. Cette f.é.m.

Fig. XIV-1



engendre un courant *i* (courant induit) si la spire fait partie d'un circuit électrique fermé. Le courant induit crée à son tour un flux (flux induit φ) qui s'*oppose à la cause* qui lui a donné naissance : s'il y a eu *augmentation* du flux embrassé, le flux induit φ est de sens *opposé* au flux principal Φ et la règle du tire-bouchon donne alors le sens du courant induit *i* qui produit le flux φ (V. t. 1, Électricité, chap. 25).

Fig. XIV-2



2.2. Anneau de Gramme. — Ce principe est appliqué dans *l'anneau de Gramme* qui est le modèle dont dérivent les dynamos actuelles. Il comporte un tore en matériau magnétique autour duquel est disposé un enroulement en hélice *fermé sur lui-même,* ce tore pouvant tourner autour de son axe entre deux pôles magnétiques nord et sud (fig. XIV-1).

Pour bien comprendre le fonctionnement on isole par la pensée une spire et on la considère dans ses positions successives (fig. XIV-2).

L'application de la loi de Lenz et de la règle du tire-bouchon nous permet de dresser le tableau suivant :

Quadrant	Position de la spire	Flux principal Φ	Vitesse de variation de Φ	f.é.m. induite (ou courant induit)	Sens de la f.é.m. et du courant
I	1 1' 2	nul croît maxim.	maxim. décroît nulle	maxim. décroît nulle	anti-horaire
II	2 2' 3	maxim. décroît nul	nulle croît maxim.	nulle croît maxim.	horaire
III	3 3' 4	nul croît maxim.	maxim. décroît nulle	maxim. décroît nulle	anti-horaire
IV	4 4' 1	maxim. décroît nul	nulle croît maxim.	nulle croît maxim.	horaire

De ce tableau il résulte que :

— la f.é.m. et le courant induits s'inversent suivant la ligne *yy'* appelée *ligne neutre ;*

— les f.é.m. des deux moitiés (à gauche et à droite de la ligne *yy'*) sont égales et opposées (aucun courant dans l'enroulement en anneau) ;

— si l'on établit deux contacts sur l'enroulement (dénudé vers l'extérieur) en *A* et *B* (V. fig. XIV-1), et si on les relie à une résistance extérieure *R*, les f.é.m. égales et opposées dans les deux moitiés (générateurs en parallèle) engendrent un courant. Ce courant est unidirectionnel (c'est-à-dire qu'il a toujours le même sens) ;

— les courants induits dans les deux moitiés (à gauche et à droite de la ligne *yy'*) sont égaux et de sens opposés.

Alors que le courant dans une spire déterminée est alternatif, le courant débité dans un récepteur R extérieur est unidirectionnel.

3. CONSTITUTION D'UNE DYNAMO MODERNE

L'anneau de Gramme présente des défauts :

1° Les portions intérieures des spires ne coupant aucun flux, sont inutiles quant à la production de la f.é.m. Elles accroissent les pertes par effet Joule et déterminent

une dépense de cuivre supplémentaire. C'est pourquoi on les supprime en réalisant l'enroulement en *tambour* c'est-à-dire en reliant en série des portions extérieures actives prises sous des *pôles différents*, de façon telle que les *f.é.m. qui y sont induites s'ajoutent* (fig. XIV-3 et XIV-4).

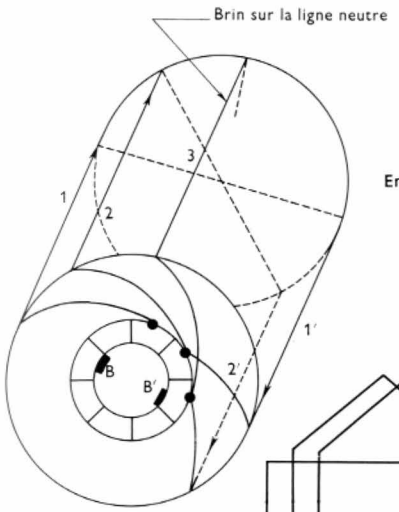


Fig. XIV-3

Enroulement en tambour : vue perspective

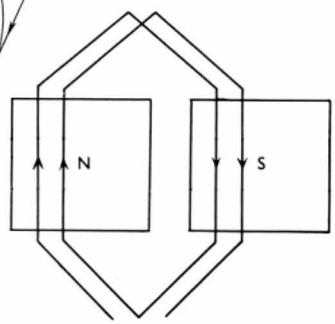


Fig. XIV-4

Enroulement en tambour : développement panoramique

2° Les spires (qui doivent être isolées entre elles et aussi par rapport à la masse) doivent être dénudées à l'extérieur pour l'établissement des contacts *A* et *B* avec des frotteurs. Ceux-ci usent les conducteurs. On remédie à cet inconvénient en logeant les conducteurs dans des encoches et en reliant les spires à de grosses lames de cuivre isolées les unes des autres et isolées de la masse. L'ensemble de ces lames est appelé *collecteur*. C'est sur le collecteur que frottent des balais *B* et *B'* reliés au récepteur extérieur.

4. FORCE ÉLECTROMOTRICE D'UNE DYNAMO BIPOLAIRE

On désigne par *e* la f.é.m. induite à l'instant *t* dans un conducteur actif (portion de cuivre qui coupe un flux Φ et dans laquelle une force électromotrice est induite). Par principe, la f.é.m. de la dynamo (c'est-à-dire celle qui est engendrée dans une moitié de l'enroulement) est *constante*. À un instant quelconque elle est égale à la somme des f.é.m. induites dans les spires d'une moitié de l'enroulement :

$$E = \Sigma\, e = \Sigma\, \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

On obtient sa valeur absolue en prenant une durée Δt *quelconque*, $\Delta\Phi$ représentant le flux coupé par le brin considéré pendant ce temps Δt.

On choisit d'appeler Δt le temps (identique pour tous les conducteurs) que met un conducteur à prendre la place de celui qui le précède. Si *n* est la fréquence de rotation exprimée en tours par minutes, et si *N* est le nombre total de conducteurs, on déduit :

$$\Delta t = \frac{1}{\frac{n}{60}} \cdot \frac{1}{N} = \frac{60}{Nn}$$

et :

$$E = \frac{Nn}{60}\, \Sigma\, \Delta\Phi$$

La variation du flux $\Delta\Phi$ durant ce temps Δt est égale au flux qui passe dans un rectangle dont les côtés sont la longueur d'un conducteur et l'arc qui, sur la surface extérieure du rotor, est compris entre deux conducteurs consécutifs (fig. XIV-5).

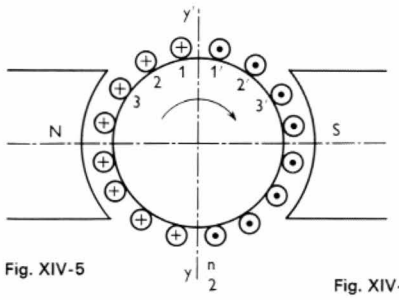


Fig. XIV-5

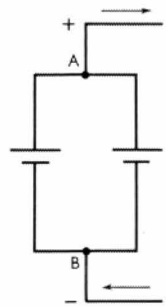


Fig. XIV-6

Or $\Sigma\, \Delta\Phi$ représente le flux qui entre *dans une moitié* de la surface extérieure du rotor, puisque la somme est étendue à tous les conducteurs de cette moitié. C'est donc le flux utile par pôle. En définitive l'expression de la f.é.m. de la dynamo bipolaire est :

$$E = \frac{Nn\Phi}{60}$$

On exprime *E* en volts, *n* en tours par minute et Φ en webers ; *N* est le nombre de conducteurs actifs portés par le rotor.

La dynamo bipolaire peut être considérée comme équivalente à un ensemble de deux piles de même f.é.m. *E* associées en parallèle (fig. XIV-6). Lorsque la machine n'est pas reliée à un récepteur extérieur, ces deux piles forment un circuit dans lequel les deux générateurs sont en opposition et c'est ce qui explique qu'aucun courant de circulation ne prenne naissance dans celui-ci.

5. MACHINE MULTIPOLAIRE

Autour d'un induit en anneau, on dispose 4 pôles alternativement nord et sud, tandis que 4 balais sont placés au milieu de l'intervalle qui les sépare (fig. XIV-7). On constate que :

1° les f.é.m. induites dans *AB* et *CD* ont le même sens, et que ce sens est opposé à celui des f.é.m. des portions *BC* et *DA*.

2° Ces quatre f.é.m. sont égales en valeur absolue par raison de symétrie.

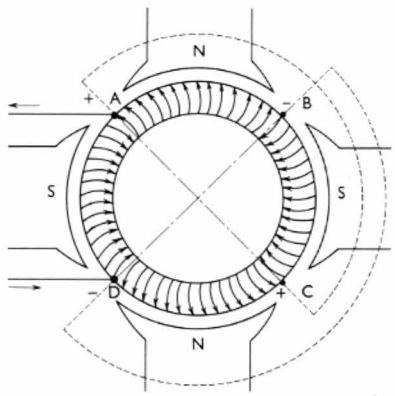


Fig. XIV-7

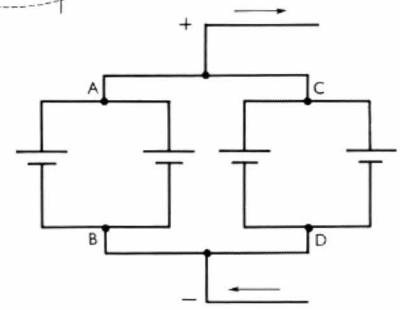


Fig. XIV-8

L'induit peut-être assimilé à quatre piles de même f.é.m. montées en parallèle (fig. XIV-8). Il n'y a pas de courant de circulation à l'intérieur de l'enroulement.

Sans modifier cet équilibre, on peut relier les points A et C (ieurs potentiels ont la même valeur) ainsi que les points B et D. On connecte donc les balais A, C d'une part et les balais B, D d'autre part, au circuit extérieur.

En transformant la machine bipolaire en dynamo à 4 pôles, on a doublé le nombre des dérivations (portions comprises entre deux balais consécutifs) et doublé le nombre de balais. D'une façon générale, une dynamo à $2p$ pôles comporte $2p$ balais et $2p$ dérivations. Les conséquences sont les suivantes :

— avec une même *densité de courant* dans les conducteurs et dans les balais (donc dans les mêmes conditions d'échauffement) le même induit peut débiter un *courant p fois plus* intense. C'est parce que, dans les deux cas, le courant par dérivation et le courant par *balai* sont les mêmes.

— avec un *même flux par pôle*, le *même induit* engendre la *même f.é.m.* En effet le même flux est coupé dans un temps Δt moitié moindre (ce qui multiplie la f.é.m. par 2) mais entre deux balais consécutifs il y a moitié moins de conducteurs actifs (ce qui divise la f.é.m. par 2).

Dès lors, avec des valeurs égales de la densité de courant et du flux par pôle, une dynamo à $2p$ pôles développe une puissance électromagnétique EI qui est p fois plus grande que celle d'une machine bipolaire. Les dynamos puissantes sont *multipolaires*.

La figure XIV-9 donne le développement panoramique d'un enroulement en tambour à 4 pôles. En coupant ce schéma suivant MQ on obtient la représentation panoramique d'un enroulement à deux pôles. Il apparaît qu'*un enroulement à p paires de pôles reproduit p fois le schéma de la machine à 2 pôles*.

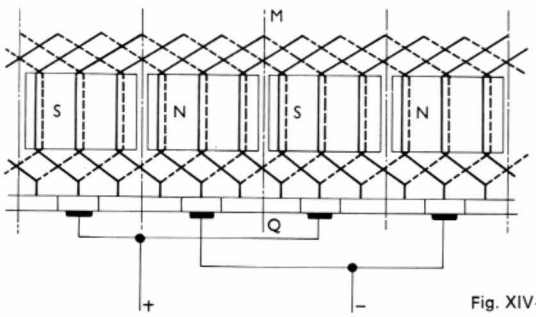


Fig. XIV-9

6. ENROULEMENTS D'INDUIT

6.1. Définitions. — Par principe, un enroulement de dynamo doit être fermé sur lui-même, symétrique (dérivations ou voies d'enroulement identiques) et sensiblement diamétral (largeur d'une spire voisine du pas polaire). Il est essentiellement constitué par des *sections* c'est-à-dire des ensemble de spires enrubannées ayant deux extrémités libres (l'une dite *entrée*, l'autre dite *sortie*) soudées chacune à une lame de collecteur. Quand on enrubanne ensemble plusieurs sections on constitue une *bobine* (fig. XIV-10). Chaque section a deux portions actives appelées *faisceaux* : un *faisceau-aller* qui part du collecteur et un *faisceau-retour* qui revient au collecteur. L'ensemble des sections comprises entre deux balais *consécutifs* constitue une dérivation ou *voie d'enroulement*.

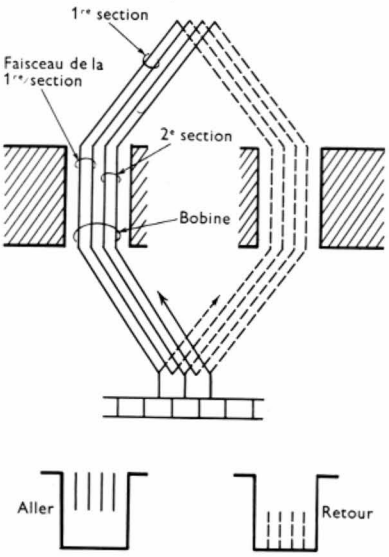


Fig. XIV-10

6.2. Calcul. — Après avoir numéroté les faisceaux dans l'ordre où ils se succèdent à la périphérie du rotor et en attribuant un numéro impair au faisceau-aller et un numéro pair au faisceau-retour, on détermine :

1° la largeur de la section définie par le pas *avant* y_1, différence entre les numéros des deux faisceaux d'une même section. Exemple : pour l'enroulement représenté figure XIV-9 le pas arrière est : $y_1 = 8 - 1 = 7$;

2° les *connexions entre les sections consécutives* définies par le *pas arrière* y_2. C'est la différence entre les numéros du faisceau-aller d'une section, et du faisceau-retour de la section précédente. Exemple : pour l'enroulement de la figure XIV-9 le pas avant est $y_2 = 8 - 3 = 5$;

3° *les connexions au collecteur*. Elles sont données par le *pas au collecteur* y_c. C'est le nombre d'intervalles isolants que l'on compte entre deux lames du collecteur auxquelles sont reliées les extrémités d'une même section. Pour l'enroulement de la figure XIV-9, $y_c = 1$.

6.3. Représentation des enroulements. — Le mode le plus clair et le plus fréquent de représentation des enroulements est le *schéma panoramique* (fig. XIV-9) établi de la façon suivante :

— chaque faisceau est représenté par un simple trait (on suppose qu'il n'y a qu'une spire par section),

— les faisceaux *aller* sont tracés en trait *plein*,

— les faisceaux *retour* sont tracés en *pointillé*,

— on indique la position des balais en remarquant qu'un balai doit reposer sur une lame de collecteur *directement reliée* à un faisceau qui *franchit la ligne neutre*.

6.4. Principaux types d'enroulement. — Les deux principaux types d'enroulement sont :

— l'enroulement imbriqué parallèle,

— l'enroulement ondulé série.

6.4.1. Enroulement imbriqué parallèle. — C'est celui de la figure XIV-9. Les pas y_1 et y_2 sont tels que leur différence est *égale à* 2 (on démontre que y_1 et y_2 doivent être *impairs*). Le pas au collecteur est égal à 1. Les sections chevauchent les unes sur les autres comme les tuiles d'un toit. D'autre part, entre deux balais consécutifs on loge toujours la *moitié* des faisceaux placés sous *deux* pôles consécutifs ; il y a donc autant de voies d'enroulement que de pôles. C'est pourquoi cet enroulement est dit *parallèle* (V. fig. XIV-8). La f.é.m. E s'exprime par la même relation que pour une dynamo bipolaire :

$$E = \frac{Nn\Phi}{60}$$

6.4.2. Enroulement ondulé série. — Il est réalisé de la façon suivante :

— en quittant le faisceau de *retour* de la première section et après avoir touché une lame de collecteur on passe au faisceau d'entrée (non plus sous le pôle nord précédent) mais sous le *pôle nord suivant*. Cela ne change rien aux f.é.m. mises en série ;

— le nombre total de faisceaux de la machine est calculé de façon telle qu'en poursuivant l'enroulement comme on vient de l'indiquer, on rencontre un faisceau séparé du faisceau de départ par deux intervalles. À chaque tour d'induit, il en sera de même. Dès lors, entre deux balais consécutifs on loge la moitié des faisceaux disposés non plus sous 2 pôles seulement mais sous *tous les pôles* de la machine ;

— l'enroulement comporte deux *voies* d'enroulement, *quel que soit le nombre de pôles*.

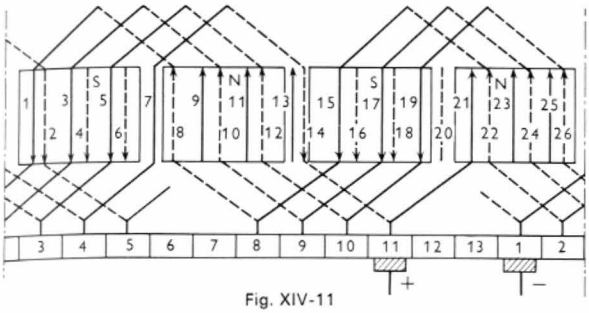


Fig. XIV-11

La figure XIV-11 représente un tel enroulement (4 pôles, 26 faisceaux). Il est dit *ondulé* parce que les sections forment des ondulations et *série* parce que la substitution de cet enroulement à l'enroulement parallèle équivaut au passage du schéma de la figure XIV-12 à celui de la figure XIV-13 c'est-à-dire de la mise en série de f.é.m. qui étaient en parallèle (avec un enroulement imbriqué).

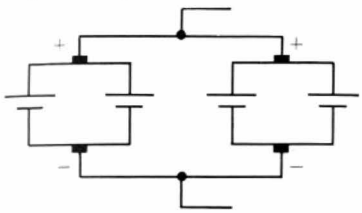


Fig. XIV-12

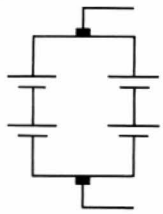


Fig. XIV-13

6.4.3. Applications. — L'enroulement imbriqué parallèle est le plus fréquemment utilisé mais l'enroulement ondulé série lui est préféré dans les cas suivants :

— machines *à tension relativement grande* car la f.é.m. est alors égale à :

$$E = \frac{p\,Nn\Phi}{60}$$

elle est p fois plus grande, toutes choses égales, que celle de l'enroulement parallèle (p fois moins de voies d'enroulement) ;

— *petites dynamos multipolaires* parce que les conducteurs actifs, parcourus par un courant p fois plus grand, doivent être de section p fois plus grande (plus résistants mécaniquement) ;

— *moteurs de traction* parce qu'ils peuvent ne comporter que deux lignes de balais, placées en des points facilement accessibles.

Remarque : Connexions équipotentielles. Dans une dynamo multipolaire avec enroulement *parallèle* il faut que les f.é.m. induites dans les différentes voies soient bien *égales*. S'il n'en est pas ainsi (différences d'entrefer, de perméabilité des noyaux polaires), les courants passant par les balais ne sont pas les mêmes et des étincelles jaillissent entre les plus chargés et le collecteur. Pour éviter ces inconvénients, on réalise des connexions (fig. XIV-14) entre des points séparés par quelques lames du collecteur, points qui sont normalement au même potentiel. Ces *connexions équipotentielles* sont disposées généralement du côté opposé au collecteur.

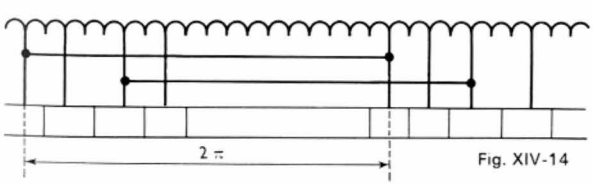


Fig. XIV-14

7. POSITION DES BALAIS

Par principe, pour obtenir une f.é.m. maximale, les balais sont calés sur la ligne $y'y$ (V. fig. XIV-1) le long de laquelle l'induction est *nulle*. C'est la *ligne neutre théorique*.

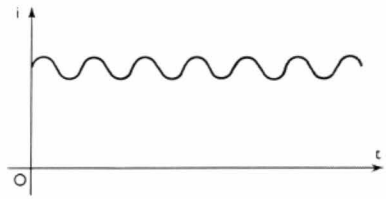


Fig. XIV-15

En fait, la machine à courant continu est une machine à courant alternatif qui fournit une f.é.m. *redressée* (c'est-à-dire unidirectionnelle) grâce au collecteur.

Pendant le temps de passage d'une lame du collecteur sous un balai, l'induit tourne d'un petit angle et la f.é.m. obtenue varie légèrement. C'est pour cette raison que le courant débité présente de légères ondulations (fig. XIV-15). Lorsque ces ondulations sont gênantes la tension aux bornes de la génératrice est filtrée à l'aide d'un condensateur dont la capacité peut être assez faible (0,1 μF par exemple).

8. GÉNÉRATRICE ACYCLIQUE OU UNIPOLAIRE

Elle met en œuvre le phénomène d'*induction unipolaire* découvert par Faraday. Elle comporte un tambour conducteur (fig. XIV-16) qui peut tourner à l'intérieur d'un pôle formant un cylindre creux (ainsi l'induction $\vec{B}$ est radiale). Dans ces conditions, *entre les extrémités des génératrices du cylindre* formant le rotor apparaît une f.é.m. $e = B\,l\,v$ (l : longueur du cylindre, v : vitesse tangentielle, B : intensité de l'induction). En effet, un élément longitudinal coupe les lignes d'induction radiales du champ et présente donc, entre ses extrémités, une d.d.p. puisqu'une f.é.m. a été induite dans cet élément (V. t. 1, Électricité, chap. 25, § 3). Des balais peuvent être employés pour relier cette génératrice à un circuit extérieur ; comme ce qui vient d'être dit est vrai sur

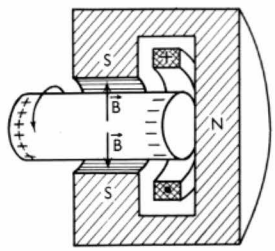


Fig. XIV-16

Génératrice unipolaire. Le champ magnétique inducteur est produit au moyen de la bobine (partiellement coupée sur la figure), placée à l'intérieur du stator

toute la périphérie du rotor, on peut placer autant de balais qu'on le veut. Ils sont parfois remplacés par des contacts métal-liquide conducteur.

À vitesse constante, la f.é.m. est constante. Bien qu'elle soit faible, le courant débité peut être très intense : on a réalisé une machine de 600 kW débitant 40 000 A sous 15 V. Cette génératrice est intéressante pour ces raisons et elle est utilisée en électrochimie et en électrométallurgie. Le courant débité par une dynamo unipolaire ne présente pas les légères ondulations signalées dans les autres dynamos.

CONSTRUCTION (*V. Hors-texte*)

9. CIRCUIT MAGNÉTIQUE

Le flux magnétique dans les pôles inducteurs étant constant, les noyaux de ces éléments ont pu être réalisés en acier massif (ou en fonte). Ils s'évasent vers l'induit (fig. XIV-17) en constituant les *épanouissements polaires* qui

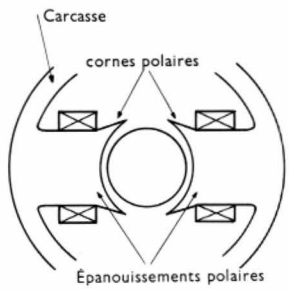


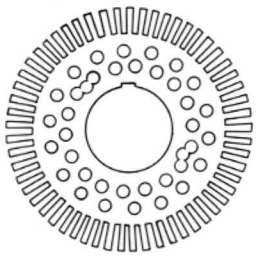
Fig. XIV-17

se terminent par les *cornes polaires* (une dite *d'entrée* et l'autre dite de *sortie*). Ils sont fixés par vis sur la carcasse.

Autour des pôles sont disposées les bobines inductrices formées de galettes ou de couches superposées. On y ménage toujours un passage pour l'air de refroidissement.

À cause de la rotation du rotor le flux dans l'armature d'induit varie à la fréquence $f = \frac{pn}{60}$. Cette armature est donc le siège de pertes par hystérésis et par courants de Foucault. Pour réduire ces dernières, on est obligé de constituer l'armature d'induit avec des tôles (fig. XIV-18) superposées et isolées entre elles. Ici les tôles à grains orientés (V. chap. 2) sont beaucoup moins avantageuses que dans le transformateur statique car le flux a une direction variable par rapport aux tôles.

Fig. XIV-18 — Tôle de rotor de machine à courant continu



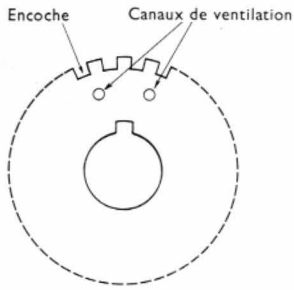


Fig. XIV-19

Dans le sens longitudinal des tôles, des canaux de ventilation sont ménagés (fig. XIV-19) et un ventilateur, placé à l'opposé du collecteur, assure le refroidissement de l'induit.

Les encoches sont découpées à la périphérie des tôles. Dans les machines assez puissantes ces encoches sont rectangulaires.

10. ENROULEMENT D'INDUIT

Dans les petites machines il est constitué par du fil rond émaillé disposé dans les encoches comme l'indique la figure XIV-20 ; dans les dynamos plus puissantes, il est réalisé à l'aide de barres de cuivre méplates placées sur chant (fig. XIV-21). Dans tous les cas, dans une encoche il y a un ou plusieurs *faisceaux-aller* à la partie supérieure et un ou plusieurs *faisceaux-retour* à la partie inférieure.

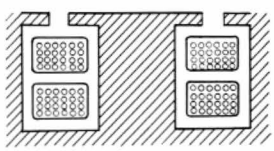


Fig. XIV-20

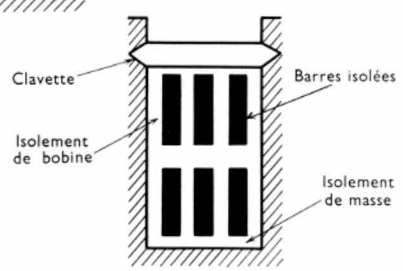
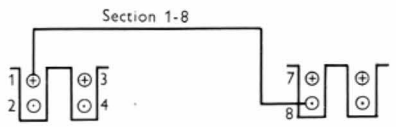


Fig. XIV-21

Si l'on se reporte aux schémas panoramiques des figures XIV-9 et XIV-11, il faut souligner que tous les faisceaux en pointillé (retour) sont placés en réalité *sous* les faisceaux en trait plein (aller). Par exemple, les faisceaux 1 et 2 sont dans une même encoche, tout comme les faisceaux 7 et 8 (fig. XIV-22). Tous les faisceaux sont bloqués dans les encoches par des clavettes isolantes.

Fig. XIV-22



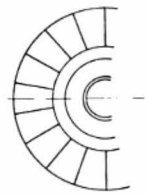


Fig. XIV-23

Collecteur. Vue de face

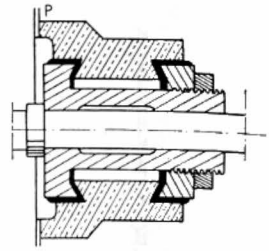


Fig. XIV-24

Collecteur. Vue en coupe

11. COLLECTEUR

Il est formé par des lames en cuivre de section trapézoïdale (fig. XIV-23), isolées de l'axe d'induit et serrées ensemble de façon à constituer un bloc cylindrique. Chaque lame porte une embase (fig. XIV-24) dont l'ensemble forme la *collerette;* elle est fraisée et on peut y souder les extrémités *P* des conducteurs des sections.

Le collecteur dont la construction est délicate est la partie *la plus fragile* de la machine à courant continu.

12. BALAIS

Ils sont en charbon, sauf pour les machines à très grand débit comme celles utilisées en électrochimie. Leur largeur est, le plus souvent, égale à 1,5 fois la largeur d'une lame du collecteur. Les charbons sont calculés de façon à supporter de 6 à 15 ampères par centimètre carré de surface de frottement. La pression par balai est comprise entre 5 000 à 10 000 N/m² suivant la nature de celui-ci.

Quand on met en marche une machine munie de balais neufs, il faut s'assurer que le collecteur est bien rond et parfaitement poli. On vérifie que les balais exercent une pression convenable sur le collecteur à l'aide de pesons, et on ajuste leur courbure à celle du collecteur à l'aide d'un abrasif fin. L'ajustage est amélioré en faisant tourner la machine à vitesse réduite et à vide pendant quelques heures.

Les balais sont fixés à une pièce appelée *porte-balais*. Elle comporte un ressort (fig. XIV-25) qui permet de régler la pression des balais sur le collecteur. Les porte-balais sont enfilés sur des tiges mécaniquement reliées à un collier mobile qui permet de décaler les lignes de balais en même temps.

Les tiges porte-balais de même polarité sont reliées à un cercle et les deux cercles sont connectés à deux bornes constituant les pôles de la machine.

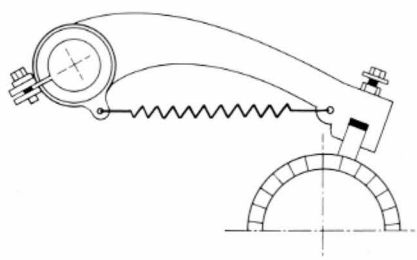


Fig. XIV-25

ESSAIS DE RÉCEPTION — DÉRANGEMENT — ENTRETIEN

13. DONNÉES DE COMMANDE D'UNE DYNAMO

Lorsqu'on commande une machine, on fixe les conditions qu'elle doit remplir ; les essais de réception ont pour but de vérifier si ces conditions sont bien réalisées.

Les contractants peuvent simplement se référer aux prescriptions de la norme NF C 51-100-1961 : « Règles d'établissement des machines électriques tournantes ».

Il y a alors simplement lieu d'indiquer :

1° la puissance aux bornes (exprimée en kilowatts) que la dynamo devra fournir en régime normal ;

2° le genre de service à assurer : service permanent

à régime constant ou variable, service périodique, service intermittent (variable ou périodique), service temporaire ;

3° la tension entre bornes (en volts) : 115, 127, 200, 220, 230, 380, 400, 460 V, augmentées d'environ 10 % ;

4° le courant correspondant (en ampères) ;

5° la fréquence de rotation (en tours par minute) ;

6° le mode d'excitation ;

7° si la génératrice doit fonctionner en parallèle avec d'autres génératrices.

À sa livraison, il y aura lieu de faire subir à la machine :

— un essai d'échauffement pendant lequel on se rendra compte également de la bonne commutation ;
— une épreuve de rigidité diélectrique des isolants ;
— des épreuves mécaniques.

En outre, si la machine doit fonctionner en parallèle avec d'autres génératrices, il y aura lieu de mesurer sa chute de tension. Des garanties de rendement ne sont exigibles que si elles sont stipulées dans le contrat de fourniture.

14. ESSAIS PRÉLIMINAIRES PERMETTANT DE VÉRIFIER LA QUALITÉ DE LA CONSTRUCTION

14.1. Vérification de l'induit. — Cette vérification doit se faire autant que possible avant le montage de la machine. Le procédé le plus simple et le plus employé est le suivant : les deux extrémités d'un circuit comprenant quelques accumulateurs et un rhéostat sont réunies à deux pointes que l'on appuie sur deux lames consécutives du collecteur (fig. XIV-26). La tension fournie par les accumulateurs se

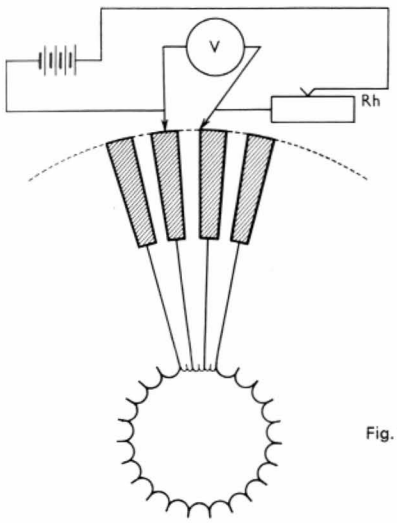


Fig. XIV-26

répartit entre les deux résistances constituées d'une part, par le rhéostat et d'autre part, par la section comprise entre les deux lames considérées. La résistance du reste de l'induit constitue une dérivation sur la section considérée et son influence peut être négligée (grande résistance en parallèle avec une faible résistance).

On mesure la tension aux bornes de cette section, au moyen d'un voltmètre. Si l'on transporte les deux pointes de section en section, la déviation sur le voltmètre est constante si l'enroulement est régulier. Si une section est en court-circuit, par suite d'un contact entre lames, la résistance entre les deux lames est nulle et le voltmètre ne dévie pas ; au contraire, si la section présente une rupture, la résistance entre les deux lames est infinie et la tension devient très grande : le voltmètre dévie fortement.

Ce procédé, très sensible pour vérifier la régularité des enroulements, ne permet pas de révéler un contact entre des points éloignés de l'enroulement. Pour trouver un tel défaut, il suffit de placer les pointes sur *deux lames diamétralement opposées* et de faire tourner l'induit à la main, en maintenant toujours les deux pointes dans leur position ; il est facile de voir que si nous avons un contact entre 2 points *A* et *B* de l'enroulement (fig. XIV-27), la résistance

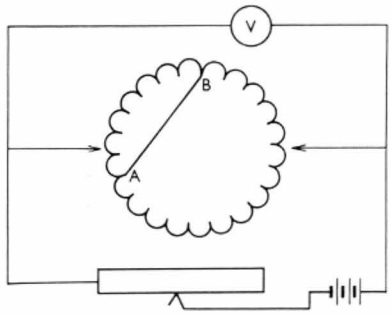


Fig. XIV-27

entre les deux pointes varie suivant la position de l'induit, elle est maximale quand *AB* est perpendiculaire à la ligne des pointes. La résistance devient minimale quand un des points *A* ou *B* passe en regard d'une des pointes, elle peut devenir nulle si les deux points *A* et *B* sont sur un diamètre.

Le raisonnement précédent s'applique au cas d'un induit bipolaire ou de bobinage imbriqué ; si l'on a affaire à un induit multipolaire ondulé, les balais mobiles doivent être écartés d'un pas polaire.

14.2. Recherche d'un court-circuit entre spires. — Un procédé fréquemment employé pour la recherche des courts-circuits entre spires consiste à placer sur la surface de l'induit les branches d'un électroaimant en fer à cheval, alimenté par du courant alternatif. Le noyau de cet électroaimant doit être feuilleté (fig. XIV-28).

Les sections traversées par le flux ainsi créé se comportent

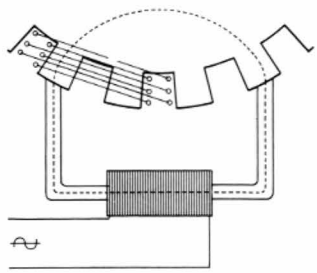


Fig. XIV-28

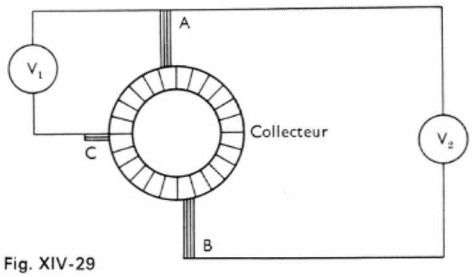


Fig. XIV-29

comme le secondaire d'un transformateur et sont le siège de forces électromotrices alternatives.

Si l'une de ces sections est en court-circuit, un courant y prend naissance et provoque un échauffement important.

14.3. Vérification du bobinage induit sur une dynamo en marche

1° *Méthode de Mordey.* — On fait fonctionner la dynamo à vide. On suppose la machine bipolaire. On se sert d'un petit balai auxiliaire *C* qu'on peut déplacer sur tout le collecteur (fig. XIV-29) ; on dispose un premier voltmètre entre *A* et *C* et un second entre *A* et *B* (ce dernier permet de s'assurer que la tension ne varie pas). *C* porte un index qui se déplace devant un cercle gradué fixe, dont les divisions correspondent aux lames du collecteur. On lit pour chaque division la tension U_1 entre *A* et *C*, en s'assurant que U_2 entre *A* et *B* n'a pas varié. On porte les valeurs relatives en fonction des divisions et on obtient une courbe, dite « en chapeau de gendarme » (fig. XIV-30).

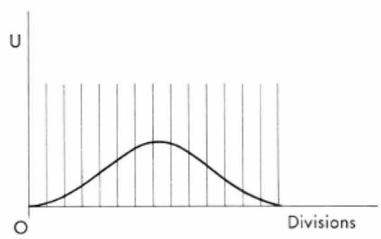


Fig. XIV-30

2° *Méthode de Silvanus Thomson.* — Elle consiste à déplacer devant un cercle gradué un système de petits balais présentant entre eux un écartement de deux lames

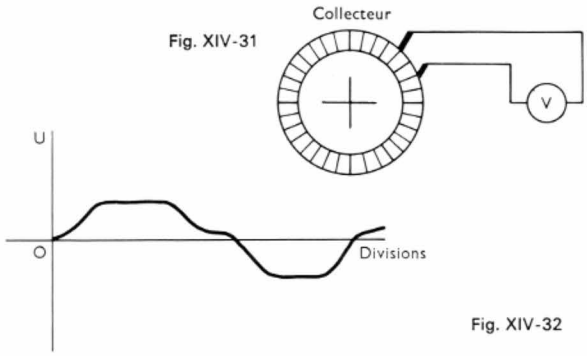


Fig. XIV-31

Fig. XIV-32

de collecteur. On relie les deux balais à un voltmètre ; on porte les indications en ordonnée et les graduations du cercle en abscisse (fig. XIV-31 et XIV-32).

Cette méthode oblige à mettre la machine en marche, et a l'inconvénient de présenter des risques d'accident si la machine a un défaut que l'on n'observe pas attentivement pendant l'essai. En second lieu, certaines inégalités de ces courbes peuvent provenir non pas du bobinage, mais des inégalités du champ d'excitation.

14.4. Vérification des inducteurs. — Pour vérifier la polarité des inducteurs, il suffit de faire passer un courant continu et de vérifier à la boussole que les pôles sont bien alternativement nord et sud. Si l'on trouve deux pôles consécutifs de même nom, il suffit d'inverser les connexions d'un des pôles.

14.5. Rigidité diélectrique. — Pour mesurer l'isolement des différentes parties de la machine, on emploie des mégohmmètres. On doit également faire une vérification de la rigidité électrostatique des isolants. Dans les ateliers de bobinage on commence par faire un essai simple en disposant une lampe à incandescence entre la masse de la dynamo et une borne du réseau, l'autre borne étant reliée à la pièce conductrice à vérifier (fig. XIV-33). S'il y a contact franc, la lampe s'allume. Parfois l'isolement est mauvais sans être nul et la lampe rougit faiblement.

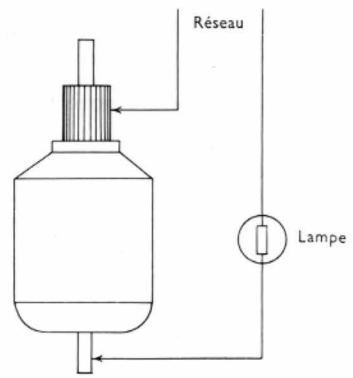


Fig. XIV-33

14.6. Essai de réception. — L'épreuve de rigidité diélectrique des isolants a lieu de préférence aussitôt après l'essai d'échauffement afin que la machine soit à une température voisine de celle du régime.

L'application de la tension se fait entre l'enroulement et le bâti, avec le noyau relié au bâti et aux enroulements non soumis à l'essai.

Cet essai n'est fait que sur machine neuve et complètement terminée avec tous ses organes en place dans les conditions de marche ordinaire. La tension d'essai est alternative et la forme de la courbe de la tension, de préférence sinusoïdale. L'essai est commencé à une tension inférieure au tiers de la tension d'épreuve ; la tension est augmentée jusqu'à la tension maximale, avec la plus grande rapidité qui soit compatible avec l'indication correcte de sa valeur par l'instrument de mesure.

Les tensions d'épreuves sont les suivantes :

— pour une dynamo de puissance égale ou inférieure à 1 kilowatt : 500 volts plus deux fois la tension nominale ;

— pour une dynamo au-dessus de 1 kilowatt : 1 000 volts plus deux fois la tension nominale.

La durée d'application de la tension d'épreuve doit être d'une minute.

Essai. — L'essai de rigidité diélectrique se fait à l'aide d'un transformateur élévateur de tension. On peut régler la tension à l'aide d'une inductance réglable *S* intercalée dans le circuit basse tension (fig. XIV-34). Un voltmètre *V* branché

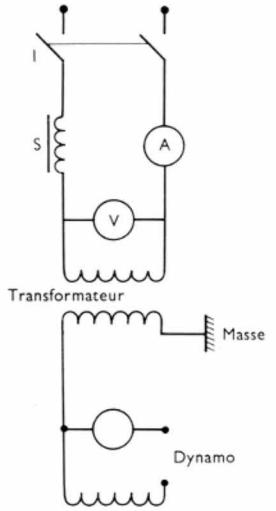


Fig. XIV-34

entre les bornes de l'enroulement primaire donne la tension $U_{1\,\text{eff}}$ aux bornes de cet enroulement et donc la tension $U_{2\,\text{eff}}$ aux bornes du secondaire, le rapport de transformation m du transformateur étant connu ($U_{2\,\text{eff}} = mU_{1\,\text{eff}}$).

Cette tension secondaire est amenée progressivement à la valeur maximale prévue en retirant peu à peu le noyau de la bobine *S*.

Si l'isolant de la machine est percé (claquage), l'aiguille de l'ampèremètre *A* dévie brusquement et on ouvre l'interrupteur *I*.

15. TABLEAU DES DÉRANGEMENTS ET DE LEURS CAUSES

La dynamo ne fournit pas de courant	Court-circuit ou mauvais isolement dans la dynamo ou la canalisation.	Court-circuit dans les bobines inductrices. Court-circuit dans l'induit. Court-circuit dans le collecteur. Court-circuit en un point de la canalisation. Mauvais isolement des bobines inductrices. Mauvais isolement des porte-balais. Mauvais isolement des bornes. Mauvais isolement de l'induit par rapport à la masse.
	Interruption du circuit dans la dynamo ou la canalisation.	Rupture ou mauvais contact de conducteur dans les inducteurs. Rupture ou mauvais contact de conducteur dans l'induit. Rupture ou mauvais contact de conducteur dans le circuit extérieur. Les balais ne portent pas sur le collecteur.
	Magnétisme rémanent des inducteurs trop faible à la suite de l'inversion des bobines inductrices.	

Tableau des dérangements et de leurs causes (suite)

Échauffement anormal	des paliers :	Mauvais graissage. Blocage des bagues des paliers à coussinets Malpropreté ou corps étrangers dans les coussinets. Arbre faussé. Coussinets trop serrés. Courroie trop tendue (dans le cas d'une transmission par courroie). Montage défectueux de l'induit et de l'arbre sur les paliers.
	de l'induit :	Humidité des bobines de l'induit. Surcharge du circuit. Court-circuit dans l'induit.
	des inducteurs :	Humidité des bobines inductrices. Courant d'excitation trop intense.
Étincelles aux balais		Mauvais état du collecteur. Surcharge de la dynamo. Mauvais calage des balais. Rupture de conducteur dans l'induit ou dans les connexions au collecteur. Court-circuit dans l'induit. Mauvais état des balais et des porte-balais. Mauvais isolement de l'induit. Courant d'excitation trop faible. Vitesse de rotation trop élevée.
La dynamo ne tourne pas à sa vitesse normale		Causes donnant lieu à l'échauffement des paliers. Surcharge de la dynamo. Frottement de l'induit contre les pièces polaires. Court-circuit dans l'induit.
La dynamo fait du bruit		Lorsqu'une dynamo fait du bruit, cela provient le plus souvent d'un défaut de montage ou d'entretien : écrous desserrés, mauvais calage des balais, induit et poulie mal équilibrés, chocs de l'arbre sur les coussinets ou de la courroie sur la poulie ou les coussinets.

16. ENTRETIEN DES DYNAMOS

Les machines doivent être nettoyées et soufflées, dans les endroits peu accessibles, au moyen d'un soufflet dont l'extrémité est garnie de caoutchouc pour éviter de détériorer les isolants ou au moyen de l'air comprimé en s'assurant qu'il n'entraîne ni huile ni eau. Les paliers doivent être tenus fermés et doivent être nettoyés au moins une fois par mois, si l'atmosphère est poussiéreuse ; on change l'huile à chaque nettoyage.

Si le frottement des balais donne lieu au brunissage du collecteur, on passe celui-ci à la toile émeri très fine quelques instants avant l'arrêt ; après l'arrêt, on enlève les poussières de cuivre qui en résultent. On retire avec un chiffon sec toute poussière de charbon déposée sur le collecteur.

Les lames isolantes de ce dernier ne doivent jamais faire saillie sur les lames de cuivre. Dans le cas contraire, à l'aide d'un grattoir spécial, on amène les isolants à être un peu au-dessous des lames de cuivre.

Pour donner à l'extrémité du charbon la forme du collecteur, on intercale successivement entre chaque ligne de charbons et le collecteur une bande de toile émeri ou mieux de papier de verre, l'abrasif étant du côté du charbon, et on donne à cette bande un mouvement de va-et-vient.

On doit essuyer le collecteur de temps en temps, en marche, avec un chiffon *bien sec* et *ne jamais graisser le collecteur avec de l'huile*.

Il faut vérifier périodiquement la pression des balais sur le collecteur ; on s'assure également de temps en temps qu'il n'y a aucune connexion desserrée.

Enfin, on vérifie que l'entrefer n'est pas modifié de façon appréciable par l'usure ou le remplacement des coussinets : à cet effet, on prend une cale en plomb en forme de coin, on mesure l'écartement d'un point déterminé de l'induit aux différents points de l'inducteur en faisant tourner l'induit à la main et on s'assure que, dans chaque position, le coin s'enfonce de la même quantité.

CHAPITRE XV

RÉACTION D'INDUIT - COMMUTATION

RÉACTION D'INDUIT

1. DÉFINITIONS

La réaction d'induit est l'ensemble des phénomènes qui résultent de l'intervention de la *force magnétomotrice de l'induit* lorsque la dynamo débite. Généralement il y a *diminution du flux utile*.

Cette réaction d'induit apparaît expérimentalement de la façon suivante (fig. XV-1) : à la vitesse n, avec un courant d'excitation d'intensité J, le voltmètre V indique une tension E_v (pratiquement égale à la f.é.m. de la dynamo) lorsque l'interrupteur K est ouvert ($I = 0$). À la même vitesse n et avec le *même courant d'excitation J*, lorsque l'interrupteur

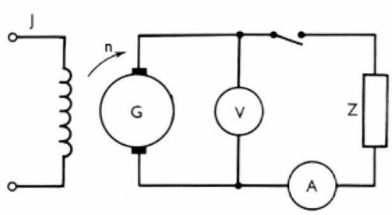


Fig. XV-1

K est fermé et que l'ampèremètre A indique le passage d'un courant d'intensité I, le voltmètre indique une tension U inférieure à la valeur théorique $(E_v - R_a I)$:

$$U < E_v - R_a I$$

($R_a I$ désignant la chute de tension dans l'enroulement d'induit augmentée de la chute qui se produit aux contacts balais-collecteur).

Or si l'on désigne par E_{ch} la f.é.m. de la dynamo *en charge* on peut écrire :

(formule des générateurs) $U = E_{ch} - R_a I$

La comparaison des deux relations précédentes montre que la f.é.m. en charge est inférieure à la f.é.m. à vide.

$$E_{ch} < E_v$$

La f.é.m., supposée égale à $\frac{n N}{60}$ fois le flux qui la produit, a été affaiblie du fait de la force magnétomotrice de l'induit ; comme la vitesse n était la même à vide et en charge, on peut conclure que le flux a été affaibli ($\Phi_{ch} < \Phi_v$).

On désigne par *réaction magnétique*, la grandeur :

$$h_m = E_v - E_{ch} = \frac{n}{60} N (\Phi_v - \Phi_{ch})$$

et par *réaction totale* la grandeur :

$$h_t = h_m + R_a I = E_v - U$$

2. LIGNES NEUTRES

On distingue :

1° la *ligne neutre théorique :* celle qui est dans le plan de symétrie des pôles inducteurs (ligne yy' sur la fig. XIV-1),

2° la *ligne neutre magnétique :* celle qui est dans le plan où les conducteurs actifs ne sont le siège *d'aucune f.é.m.*

On va voir que ces deux lignes sont souvent distinctes. Auparavant on notera que, dans un faisceau :

— la f.é.m. change de sens quand il passe au niveau de la *ligne neutre magnétique*,

— le courant change de sens à son passage à une *ligne de balais*.

Cela conduit à distinguer divers cas de fonctionnement comme on va le voir à présent.

3. BALAIS CALÉS SUR LA LIGNE NEUTRE THÉORIQUE

La réaction d'induit a deux effets dans ce cas :

3.1. Affaiblissement du flux. — On considère une dynamo bipolaire dont les balais B_1 et B_2 sont calés sur la ligne neutre théorique. Avec les polarités et le sens de rotation indiqués, les sens des courants dans les conducteurs actifs de l'induit sont ceux de la figure XV-2. L'induit apparaît comme une bobine dont la force magnétomotrice (et aussi bien le champ magnétique) est perpendiculaire à l'axe des pôles inducteurs : c'est la réaction magnétique transversale. (On a représenté quelques lignes d'induction de ce champ). On voit que pour l'une des cornes polaires d'un pôle, le champ de l'induit s'*ajoute* au champ de l'inducteur seul, tandis que pour l'autre les deux champs se *retranchent*.

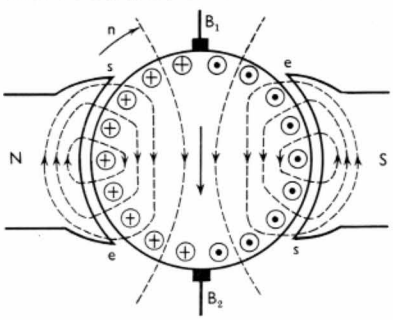


Fig. XV-2 — (B_1 et B_2 représentent conventionnellement les balais)

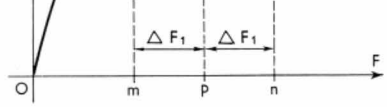


Fig. XV-3

Pour expliquer ce résultat on va considérer la courbe représentative du flux Φ (fig. XV-3) en fonction de la force magnétomotrice F produisant ce flux (elle est proportionnelle à l'intensité J du courant d'excitation s'il n'y a pas de courant dans l'induit).

Le point figuratif du fonctionnement à vide de la machine sur ce graphique de magnétisation (véritable caractéristique à vide) est en P, dans le coude de cette courbe $\Phi(F)$. Pour la corne d'entrée il faut *retrancher* la f.m.m. ΔF_1 (point figuratif en M) ; pour la corne de sortie il faut ajouter la même f.m.m. ΔF_1 (point figuratif en N). Du fait du *coude* de la courbe $\Phi(F)$, la *valeur moyenne* du flux sous les cornes polaires (hauteur moyenne Kp du trapèze curviligne $mMNn$) est *plus petite* que la valeur Pp de ce flux à vide. C'est ce qui explique que le flux en charge est inférieur au flux à vide.

3.2. Distorsion du flux. — Les figures XV-4 (a et b) donnent les courbes de l'induction dans l'entrefer d'une dynamo, relevées à l'oscillographe. La première (a) est la courbe à vide, la seconde est celle en charge ; la déformation du flux apparaît nettement.

En effet la diminution de l'induction sous les cornes polaires d'entrée et son augmentation sous les cornes polaires de sortie entraînent une rotation de la ligne d'induction moyenne dans le *sens de rotation* de la dynamo (fig. XV-5). C'est le phénomène de *distorsion magnétique :* la ligne neutre magnétique tourne d'un angle α dans le sens de la rotation ; α est d'autant plus grand que la dynamo débite un plus fort courant. Pour obtenir toujours la f.é.m. maximale il convient donc d'effectuer un décalage des balais, variable suivant le débit. Pour éviter cette sujétion :

— pour les *petites machines* ($P < 5$ kW) on donne aux balais un décalage moyen satisfaisant pour tous les courants débités ; cela est réalisé expérimentalement aux essais.

— pour les *machines plus puissantes* on annule le champ transversal (V. ci-dessous, § 7) et on maintient les balais sur la ligne neutre théorique.

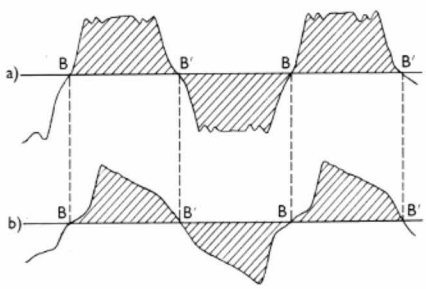


Fig. XV-4 — Distorsion (B et B' représentent les positions des balais)

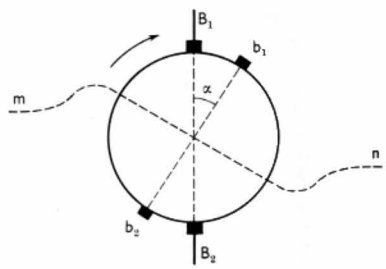
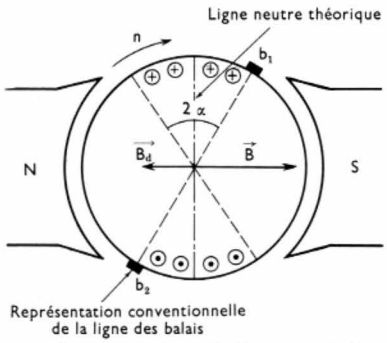


Fig. XV-5 — Distorsion ($b_1 b_2$: ligne neutre magnétique)

4. BALAIS CALÉS EN AVANT DE LA LIGNE NEUTRE THÉORIQUE

On verra plus loin (V. ci-dessous § 9) qu'on peut être conduit à décaler systématiquement les balais d'un certain angle α en avant de la ligne neutre théorique. Cette disposition présente en effet des avantages mais un inconvénient en résulte : c'est une *réaction antagoniste* (*démagnétisante*) *importante*.

Fig. XV-6



On sait que le courant s'inverse suivant la ligne des balais Si l'on sépare par la pensée les conducteurs actifs compris dans l'angle 2α (fig. XV-6), ils forment une bobine, dont l'axe est celui des pôles. L'induction B_d due à cette bobine est directement opposée à celle obtenue au moyen des inducteurs. Il faut donc retrancher une force magnétomotrice de celle des pôles inducteurs. Cette réaction d'induit est donc antagoniste ou *démagnétisante ;* elle affaiblit fortement le flux. Évidemment si les balais étaient calés en sens inverse la réaction d'induit serait magnétisante, donc favorable (pour des raisons de commutation ce procédé est à proscrire).

Dans la construction actuelle, on tend à maintenir les balais sur la ligne neutre théorique. Dès lors la réaction antagoniste *n'existe pas*.

5. LA RÉACTION MAGNÉTIQUE EN EXPLOITATION

La réaction magnétique d'une machine est d'autant plus grande que son entrefer est plus petit (l'entrefer est traversé deux fois par le flux de réaction d'induit).

Pour *l'utilisateur*, la réaction magnétique

$$h_m = \frac{n}{60} N(\Phi_v - \Phi_{ch})$$

apparaît comme une *véritable force contre-électromotrice* avec les caractères suivants :

— elle est *proportionnelle à la vitesse*,

— elle *croît* en même temps que le débit I (la f.m.m. transversale est proportionnelle à I),

— elle est *fonction de l'excitation J* puisqu'elle est liée à l'importance relative de la f.m.m. de l'induit par *rapport à celle de l'inducteur*.

Dès lors à vitesse n constante, il est utile de connaître les courbes $h_m(I)$ avec pour paramètre l'excitation J (fig. XV-7).

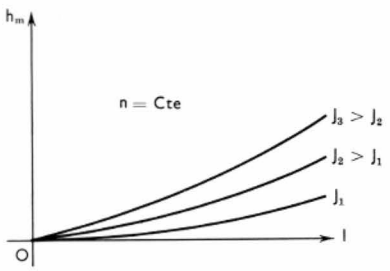
L'expérience montre que :

— pour les *petites machines* (à fort décalage des balais) ces courbes sont des *arcs de paraboles*,

— pour les *machines assez puissantes* ce sont des droites passant par l'origine.

Mais, en toute hypothèse, l'*excitation J n'a pas* sur h_m *une influence très sensible* et c'est pourquoi on adopte une courbe moyenne $h_m(I)$ que l'on peut considérer comme vraie quelle que soit l'excitation (sauf dans le cas de grandes variations de J).

Fig. XV-7



6. INCONVÉNIENTS DE LA RÉACTION MAGNÉTIQUE

— *La réaction magnétique diminue le rendement de la dynamo*. En effet, pour compenser la diminution de la f.é.m., il faut accroître l'excitation J et donc les pertes par effet Joule dans les inducteurs.

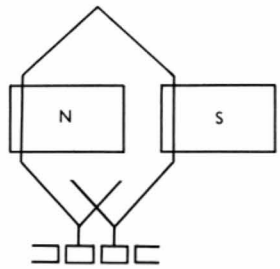


Fig. XV-8

— Par ailleurs, elle crée des *risques de coup de feu au collecteur*. En effet, la réaction transversale accroît l'induction au niveau des deux cornes polaires sous lesquelles passent les deux faisceaux d'une même section (fig. XV-8). Cette section est donc le siège d'une grande f.é.m. Or, cette f.é.m. représente aussi la d.d.p. entre deux lames voisines et un arc électrique peut s'amorcer entre ces deux lames. Il se propage de lame en lame car l'air est ionisé autour du collecteur et, *brusquement, une couronne de feu* entoure celui-ci (elle est accompagnée d'une détonation). Cette couronne met les balais en court-circuit. L'accident est grave ; on l'appelle parfois *flash*.

La réaction magnétique d'induit accroît la constante de temps (V. t. 1, Électricité, chap. 26) $\frac{L}{R}$ de l'induit (car l'inductance $L = \frac{\Phi}{I}$ correspond au flux transversal Φ). Une grande constante de temps est une caractéristique défavorable dans les machines qui doivent réagir rapidement lorsque le courant dans l'induit varie (servomécanismes).

7. DIMINUTION OU COMPENSATION DE LA RÉACTION D'INDUIT

Pour diminuer la réaction d'induit on *corrige la déformation* de la courbe de l'induction dans l'entrefer en *saturant les cornes polaires* ou en *augmentant la largeur de l'entrefer* de la corne d'entrée à la corne de sortie. On peut aussi *saturer les dents* de l'armature d'induit (traversées transversalement par le flux d'induit), ou bien pratiquer des fentes dans les pôles d'induit (fig. XV-9). Leur influence sur le flux principal est à peu près nulle, mais elles diminuent sensiblement le flux transversal à cause de leur réluctance.

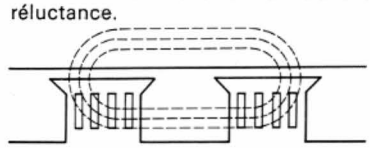


Fig. XV-9

Diminution du flux transversal dans les pôles au moyen de fentes

On peut annuler le champ transversal au moyen d'un *enroulement compensateur* disposé dans des encoches ménagées dans les pièces polaires (fig. XV-10 a et b) ; il est placé en série avec l'enroulement d'induit. Si le nombre de spires de cet enroulement et le sens dans lequel le courant I le parcourt sont judicieusement choisis, on conçoit que la f.m.m. de l'enroulement compensateur, proportionnelle à I comme le champ de l'induit, permette de *compenser automatiquement celui-ci* à toutes charges.

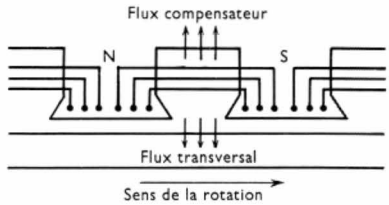


Fig. XV-10 a

Évidemment, l'enroulement compensateur accroît le prix de la machine et accroît la chute par résistance (RI). C'est pourquoi on le réserve aux dynamos *puissantes*,

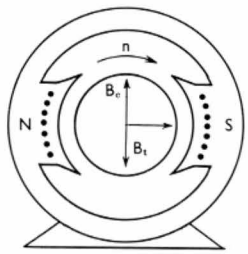


Fig. XV-10 b

Enroulement de compensation disposé dans les pôles d'une machine à courant continu

surtout lorsqu'elles débitent un *grand courant*. Dans de petites machines, intégrées dans des servomécanismes, on l'utilise aussi dans le but de réduire leur constante de temps.

COMMUTATION

On désigne sous ce nom l'ensemble des phénomènes qui accompagnent le renversement du sens du courant dans une section court-circuitée par un balai.

8. FORCES ÉLECTROMOTRICES DANS UNE SECTION EN COMMUTATION

On considère trois sections *M*, *N*, *P* (fig. XV-11) dont l'une *M* est en commutation : le courant qui la parcourt doit passer du sens horaire au sens anti-horaire pendant le temps où elle est court-circuitée par le balai *B*.

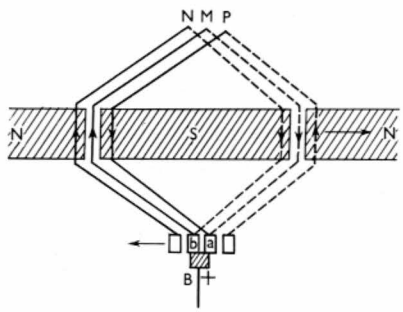


Fig. XV-11

Pour rendre l'exposé plus clair, on va supprimer le chevauchement des sections en les étalant sur un plan horizontal (fig. XV-12). La section *M* dont les faisceaux se trouvent sur la ligne neutre théorique est le siège de deux f.é.m.

1° Une f.é.m. e_s d'auto-induction qui tend à prolonger le courant dans le sens (h) de la section *N* (position antérieure). On l'appelle la f.é.m. de *réactance*.

2° Une f.é.m. d'induction e_t due au flux *transversal* coupé par les faisceaux de la section *M* et qui agit *dans le même sens que la précédente*.

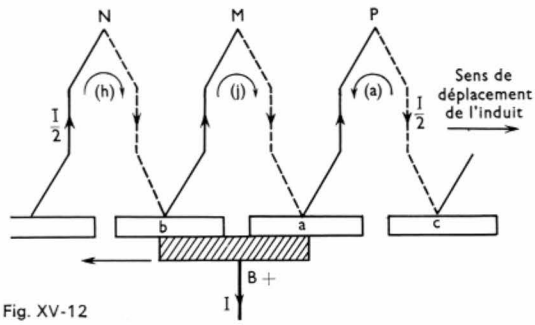


Fig. XV-12

Sans ces deux f.é.m., les courants venant de *N* et de *P* et passant dans le balai *B* se répartiraient suivant les conductances des contacts *Bb* et *aB*. Cette répartition serait *linéaire* et lorsque *B* quitterait *a*, il n'y aurait aucun courant entre *B* et *a*. Mais les deux f.é.m., à elles seules, engendrent un courant *j* qui n'est pas nul lorsque *B* quitte *a*. Une étincelle apparaît entre *B* et *a*.

Des étincelles trop importantes (jaunâtres, triangulaires, en forme de flèche) entre balais et collecteur indiquent une *mauvaise commutation* et détériorent le collecteur.

9. REMÈDES UTILISÉS POUR OBTENIR UNE COMMUTATION CONVENABLE

On obtient une meilleure commutation avec les machines dans lesquelles les f.é.m. e_t et e_s ont des valeurs limitées. Pour réduire la f.é.m., d'induction e_t il faut diminuer le flux transversal (V. ci-dessus § 3). Pour diminuer la f.é.m. de réactance e_s qui est la plus importante, on réduit le nombre de spires par section (afin de diminuer *L*). Dans ce cas, pour un nombre de conducteurs déterminés, il faut augmenter le nombre de sections et le nombre de lames du collecteur.

On améliore également la commutation en opposant une f.é.m. à la somme des deux f.é.m. e_s et e_t :

1° Les *chutes de tension* aux contacts *aB* et *Bb* réduisent le courant *j* dû à $(e_s + e_t)$ et elles jouent le rôle de véritables f.c.é.m. vis-à-vis de ce courant défavorable. Cela explique l'importance de la qualité du charbon et du contact balai-collecteur pour ce qui concerne la commutation. Un choix de balais appropriés et la réalisation d'excellents contacts balais-collecteur constituent le premier remède employé pour améliorer la commutation.

2° Le décalage des balais en avant (dans le sens de la rotation de l'induit) est un second remède. La section en commutation (la section *P* sur la figure XV-12 si le balai est décalé de la largeur d'une lame) coupe le flux principal dans une zone où celui-ci vient de changer de sens : elle est donc le siège d'une f.é.m. opposée à e_s et e_t. Par un décalage convenable des balais elle peut les annuler complètement.

3° Le troisième remède est l'emploi des *pôles auxiliaires*, étroits, placés dans l'axe des lignes neutres, excités par le courant débité par la machine (fig. XV-13). Si la

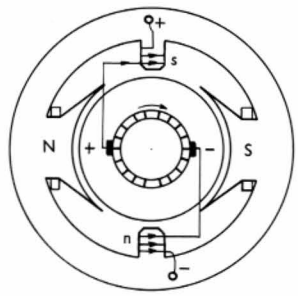


Fig. XV-13

Pôles auxiliaires d'une machine à courant continu. Leurs bobines inductrices sont en série avec l'induit

polarité de chacun d'eux est celle du *pôle inducteur qui le suit* (dans le sens du mouvement du rotor), la f.é.m. qu'il induit dans un faisceau de la section en commutation peut être égale et opposée à la somme $(e_s + e_t)$; cela est réalisé quel que soit le débit de la machine, car le flux des pôles auxiliaires (circuit non saturé) est proportionnel à l'intensité *I* du courant débité comme les flux qui ont donné naissance aux f.é.m. e_s et e_t.

Le décalage des balais qui exige un réglage constant a été abandonné, sauf pour les machines de faible puissance. La presque totalité des dynamos modernes ont des pôles auxiliaires ; dans le cas de petites machines l'emploi de pôles de commutation élèverait sensiblement le prix et l'on se contente de donner un décalage constant aux balais ; le réglage est tel qu'à toutes charges la commutation se fait sans étincelles dangereuses.

10. CONCLUSIONS PRATIQUES

L'usager doit connaître :

1° la surcharge à partir de laquelle on admet l'apparition d'étincelles dans une dynamo donnée,

2° les conditions pratiques d'une bonne commutation. Ces conditions sont surtout *mécaniques* (qualité du contact balai-collecteur).

CHAPITRE XVI

DYNAMOS - CARACTÉRISTIQUES

Tout en mettant en œuvre les mêmes principes, diverses dynamos peuvent être réalisées et on les distingue habituellement par leur mode d'excitation.

Le courant d'excitation nécessaire à une génératrice peut être fourni *par une source séparée* **(génératrice à excitation séparée)**, ou *par la génératrice elle-même*. Dans ce cas le circuit inducteur est placé en parallèle sur l'induit **(génératrice à excitation en dérivation** ou **shunt)**, ou en série **(génératrice à excitation en série)**, ou bien il comprend une partie en dérivation et une autre en série **(génératrice à excitation composée** ou **compound)** de façon à réunir les avantages des deux systèmes. On règle l'intensité du courant d'excitation à l'aide d'un rhéostat, appelé **rhéostat de champ**, ou **rhéostat d'excitation** qui est disposé en *série* avec l'inducteur pour les génératrices à excitation séparée ou celles à excitation en dérivation, et en *parallèle* avec cet enroulement pour une génératrice à excitation en série.

1. CARACTÉRISTIQUES USUELLES

Quatre grandeurs permettent de définir la marche d'une dynamo : la fréquence de rotation n, la tension U aux bornes de l'induit et les intensités I du courant dans l'induit et J du courant inducteur. Ces grandeurs sont liées et des courbes appelées *caractéristiques* traduisent les relations qui existent entre ces grandeurs.

Les caractéristiques dites *usuelles* sont tracées pour une *fréquence n constante*. Elles concrétisent donc graphiquement les relations entre les grandeurs U, I et J ; pour une caractéristique déterminée l'une est la *fonction*, une autre est la *variable* et la troisième est le *paramètre*. Ces caractéristiques peuvent se déduire les unes des autres et pratiquement il suffit de connaître :

— la *caractéristique à courant I constant* (fig. XVI-1) (U fonction, J variable) dont un cas particulier est la caractéristique *à vide* ($I = 0$),

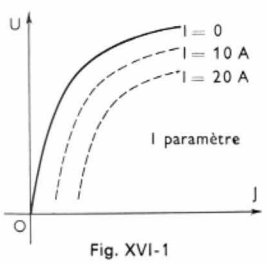


Fig. XVI-1

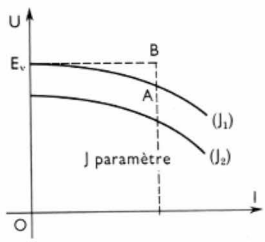


Fig. XVI-2

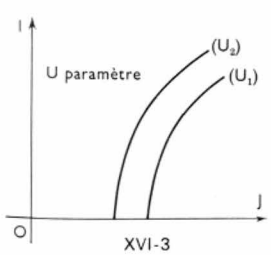
— la *caractéristique en charge à excitation J constante* (fig. XVI-2) (U fonction, I variable),

— la *caractéristique de régulation à tension constante* (I fonction, J variable) qui peut être obtenue à partir des deux précédentes (fig. XVI-3).

Remarques :

1° On a souvent besoin de la courbe de réaction d'induit $h_m(I)$. On l'obtient à partir de la caractéristique en charge (V. fig. XVI-2). En effet :

$$h_m = h_t - R_a I = (E_v - U) - R_a I = AB - R_a I$$



XVI-3

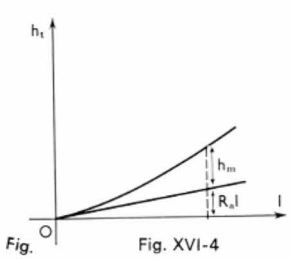


Fig. Fig. XVI-4

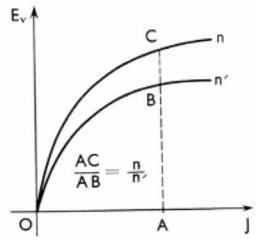
Elle a l'allure donnée par la figure XVI-4 ; on rappelle qu'on peut la considérer comme indépendante de J.

2° En vertu de la formule

$$E_v = \frac{n}{60} N \Phi_v$$

donnant la valeur de la f.é.m. à vide de la dynamo, pour une même excitation J (c'est-à-dire pour un même flux) la f.é.m. E_v *est proportionnelle à la vitesse*. On obtient donc la caractéristique à vide à la vitesse n' en multipliant toutes les ordonnées de la caractéristique à la vitesse n par le rapport $\frac{n'}{n}$ (fig. XVI-5).

Fig. XVI-5



DYNAMO À EXCITATION SÉPARÉE

2. CARACTÉRISTIQUE EN CHARGE

La machine est calculée pour que la tension entre ses bornes soit U_n quand elle fournit un courant d'intensité I_n ; c'est ce qui détermine l'excitation J_n. La dynamo étant entraînée à sa vitesse nominale et l'intensité du courant d'excitation étant constante et égale à J_n, on la fait débiter dans un récepteur R (fig. XVI-6). On note la tension U

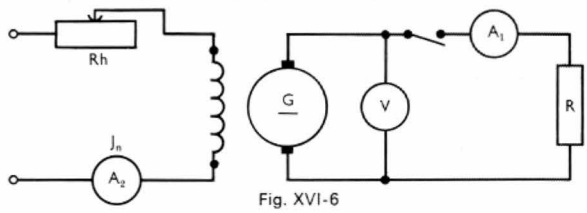


Fig. XVI-6

sur le voltmètre V et l'intensité I du courant fourni au moyen de l'ampèremètre A_1. En modifiant la résistance du récepteur on peut obtenir diverses valeurs pour I entre 0 et I_n. La caractéristique en charge est donnée par la figure XVI-7.

3. CARACTÈRES ESSENTIELS. APPLICATIONS

Avec cette dynamo on peut compenser la chute de tension h_t et maintenir constante la tension U lorsque l'intensité du courant débité I croît : il suffit d'augmenter la f.é.m. à vide, c'est-à-dire le courant d'excitation. C'est ce que montre la figure XVI-8 où le passage de J_1 à J_2 permet d'avoir une chute de tension nulle (point de fonctionnement en A) lorsque le courant débité est I_1.

Fig. XVI-8

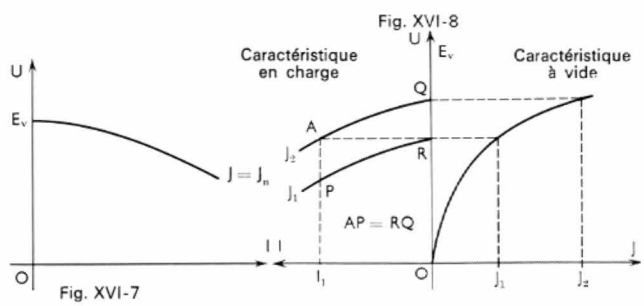


Fig. XVI-7

Mais la propriété essentielle de cette dynamo et sa *stabilité d'amorçage*, c'est-à-dire que par l'excitation J on est maître de la tension U depuis sa plus faible valeur (due au flux rémanent) jusqu'à sa valeur maximale. C'est pourquoi on l'utilise :

— lorsque la tension doit varier de $+U$ à $-U$ et dans de larges limites,

— lorsque l'amplification et le contrôle du courant d'excitation sont nécessaires,

— lorsque la tension doit être proportionnelle à la vitesse (excitation constante, faible débit).

DYNAMO À EXCITATION EN DÉRIVATION (SHUNT)

C'est une dynamo auto-excitatrice : l'enroulement inducteur est branché en dérivation sur l'induit (fig. XVI-9).

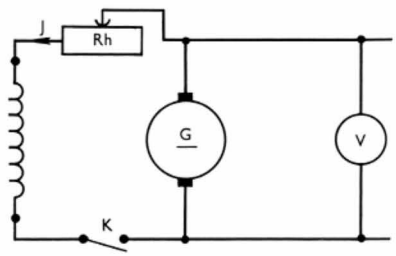


Fig. XVI-9

4. AMORÇAGE

Entre la f.é.m. E_v et le courant d'excitation J existent deux relations : celle que traduit graphiquement la caractéristique à vide $E_v(J)$ et la relation $E_v = R_d J$ (R_d = résistance du circuit inducteur augmentée éventuellement de la résistance du rhéostat placé en série avec lui) qui est représentée graphiquement par la *droite des inducteurs*. Le point de fonctionnement à vide est donc au point P (fig. XVI-10).

La condition *nécessaire de l'amorçage est que la droite des inducteurs rencontre la caractéristique à vide*. Pour cela il faut que la résistance R_d du circuit inducteur soit *inférieure* à une résistance R_c dite critique ; pour obtenir un amorçage plus sûr on place le curseur du rhéostat d'excitation de façon que la résistance de cet appareil soit nulle.

Cette condition n'est pas suffisante cependant. Quand la dynamo tourne, le flux rémanent suffit pour engendrer

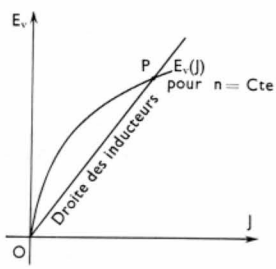


Fig. XVI-10

Point de fonctionnement d'une génératrice à excitation en dérivation

une f.é.m. de faible valeur c'est-à-dire une d.d.p. U faible entre les balais. Un courant d'excitation J peu intense prend alors naissance. S'il a pour effet de renforcer le flux rémanent, la f.é.m. augmente, accroissant l'excitation, et ainsi de suite : la dynamo s'amorce (le point figuratif se place en P sur la fig. XVI-10). Dans le cas contraire, le flux rémanent est diminué : la dynamo ne s'amorce pas. Il faut alors *croiser les connexions* entre inducteur et induit ou bien *changer le sens de rotation* pour réaliser les conditions nécessaires à l'amorçage.

Si malgré cela, la machine ne s'amorce pas, il faut vérifier les contacts balais-collecteur (qui sont interposés dans le circuit inducteur) et parfois accroître la vitesse au-delà de la valeur nominale.

Dans le premier cas on fait pivoter la droite des inducteurs (fig. XVI-11) dans le sens horaire (en diminuant les résistances de contact c'est-à-dire R_d) et dans le second cas on cherche un point d'intersection avec une autre caractéristique $E_v(J)$ (fig. XVI-12). Il est ensuite possible de revenir à la vitesse nominale dans la mesure où la valeur de R_d a été diminuée par ce fonctionnement.

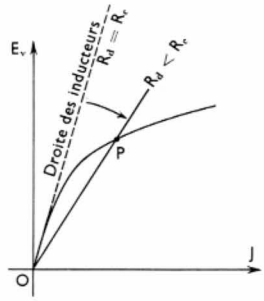


Fig. XVI-11

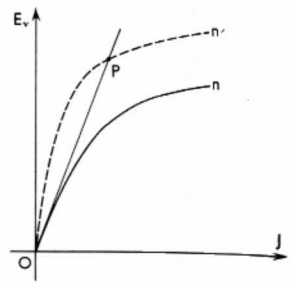


Fig. XVI-12

5. CARACTÉRISTIQUE À VIDE

Elle doit être relevée en utilisant la génératrice en excitation séparée. Cependant, quand la machine n'est pas trop petite et lorsque le courant inducteur J est une très faible

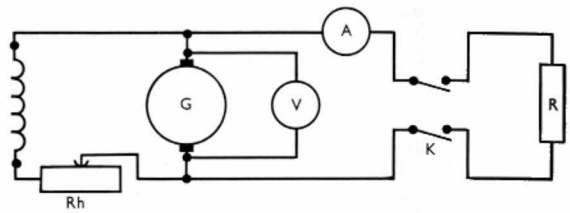


Fig. XVI-13 — Caractéristique à vide : K ouvert.
Caractéristique en charge : K fermé

fraction du courant induit I, on peut relever la caractéristique à vide en utilisant la génératrice avec son excitation en dérivation (fig. XVI-13).

6. CARACTÉRISTIQUE EN CHARGE

C'est la courbe $U(I)$ avec R_d = Cte (et non plus J = Cte). L'intensité du courant d'excitation $J = \dfrac{U}{R_d}$ décroît en même temps que U et il en est de même de la f.é.m. E_v (correspondant à J), ce qui est différent du fonctionnement en excitation séparée où J est constant. C'est dire que la caractéristique en charge d'une génératrice à excitation en dérivation est *plus tombante* qu'en excitation séparée (fig. XVI-14) ; elle l'est tellement que le courant

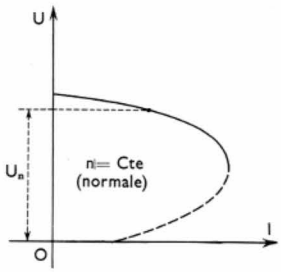


Fig. XVI-14

débité passe par un maximum peu élevé (proche de 1,5 à 2 I_n). On voit d'autre part que le courant de *court-circuit* (dû au seul flux rémanent) est faible ce qui constitue un avantage de la dynamo à excitation en dérivation.

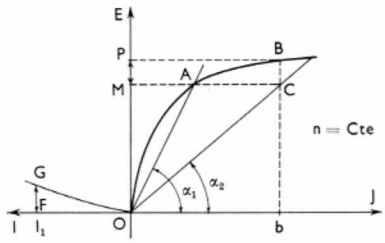
Le point de fonctionnement en charge sur un réseau déterminé est obtenu comme indiqué au chap. 3 (V. chap. 3, § 2.3).

Remarque : La branche inférieure de la caractéristique en charge est inutilisable parce qu'elle correspond à une marche instable (V. chap. 3, § 1.4).

7. PROPRIÉTÉS ESSENTIELLES. APPLICATIONS

La dynamo à excitation en dérivation ne permet pas d'obtenir de grandes variations de tension en raison des risques de désamorçage (par baisse de vitesse ou parce que la résistance du circuit inducteur est trop grande) et par

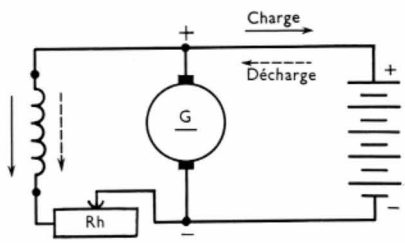
Fig. XVI-15



suite de la sensibilité de la tension aux variations de vitesse. Mais dans les limites de stabilité, la tension est réglable. La figure XVI-15 montre comment en passant de la droite des inducteurs *OA* à la droite *OC,* on peut avoir en charge (courant I_1 ; réaction totale : $h_t \simeq GF$) la même tension qu'à vide. Dans la marche à vide le point de fonctionnement est le point *A*, et la tension *U* aux bornes de la machine est représentée par *OM*. En charge, lorsque la machine débite un courant d'intensité I_1 la chute totale de tension est représentée par *GF* et si l'on désire conserver la tension *U* il faut que la f.é.m. de la génératrice soit figurée par le segment $OP = OM + GF = bB$. La droite des inducteurs ne passe pas par le point *B* mais par le point de coordonnées (J, U) car $U = R_d J$, c'est-à-dire par *C*.

L'utilisation majeure de cette génératrice est l'alimentation d'un *réseau à tension constante*. Elle convient également à la charge des batteries d'accumulateurs (fig.XVI-16).

Fig. XVI-16

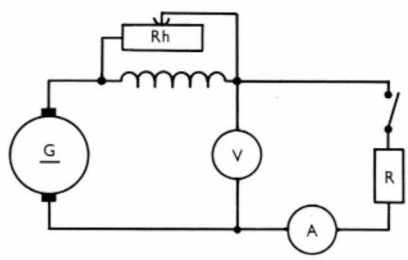


En effet, si la f.é.m. de la batterie devient supérieure à celle de la dynamo, l'inversion du courant *I n'entraîne pas l'inversion de la polarité de la dynamo* (le sens de son courant inducteur n'a pas changé). La f.é.m. de la dynamo devient f.c.é.m. : elle marche *en moteur,* sa vitesse augmente, par suite sa f.é.m. croît également, et la *charge* de la batterie *reprend naturellement*.

DYNAMO À EXCITATION EN SÉRIE

Elle est excitée par le courant *I* débité par la machine, ou bien par une fraction de ce courant *I* lorsqu'elle com-

Fig. XVI-17



porte un rhéostat de champ *Rh* (fig. XVI-17) en dérivation sur l'enroulement inducteur (quelques spires de gros fil). Sa caractéristique à vide $E_v(I)$ ne peut évidemment être relevée qu'en excitation séparée.

8. CARACTÉRISTIQUE EN CHARGE

C'est la caractéristique $U(I)$ qui est relevée à vitesse *n* constante, avec un rhéostat constant et qui passe par le point de fonctionnement nominal *P* (U_n, I_n).

On peut la relever expérimentalement. Dans un premier temps on recherche les conditions de fonctionnement nominal (U_n, I_n) en réglant le récepteur *R* (V. fig. XVI-17) et le rhéostat *Rh*. Ensuite on maintient la vitesse *n* constante, la valeur de *Rh* n'est pas modifiée et on agit sur le récep-

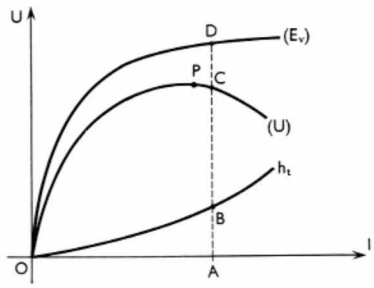


Fig. XVI-18

Caractéristique en charge d'une génératrice à excitation en série.
AC = AD — AB

teur *R* de façon à faire varier le courant *I* de la valeur I_n à zéro. On note les valeurs correspondantes de la tension *U*.

Si R_{ti} représente la résistance équivalente à l'enroulement inducteur et à son rhéostat, cette tension est égale à :

$$U = E_v - h_t = E_v - h_m - (R_a + R_{ti})\, I$$

Cette caractéristique comporte une branche descendante (fig. XVI-18).

9. AMORÇAGE

On va considérer une génératrice débitant sur une résistance *R* non inductive. Entre la tension *U* aux bornes de la génératrice et l'intensité *I* du courant on a deux relations : celle que traduit graphiquement la caractéristique en charge et celle obtenue en appliquant la loi d'Ohm au récepteur : $U = RI$. Graphiquement (fig. XVI-19) on obtient le point figuratif en *P* (avec tg $\alpha = R$). On voit que si la valeur de la résistance *R* est supérieure à la résistance critique $R_c = \text{tg}\ \alpha_c$, la tension aux bornes de la dynamo devient inférieure à zéro : la génératrice se désamorce.

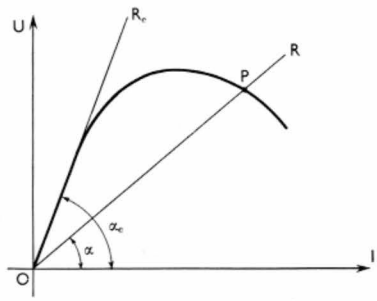


Fig. XVI-19

L'amorçage de la dynamo est possible si la résistance R est inférieure à R_c

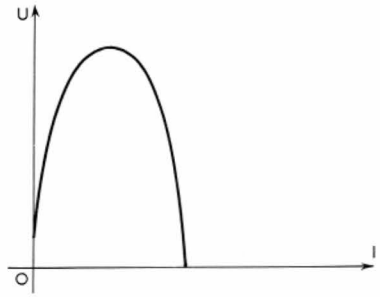
La condition nécessaire de l'amorçage est donc traduite par l'inégalité suivante : $R < R_c$; la dynamo série étant autoexcitatrice, il faut, en outre, que les connexions entre inducteur et induit soient convenables.

10. APPLICATIONS

En génératrice la machine série a peu d'applications. Elle ne peut être employée pour alimenter un réseau *d'éclairage* (résistance morte) car elle se désamorcerait si ce réseau ne demandait pas une puissance suffisante ou si sa propre vitesse s'abaissait trop fortement. Pour l'alimentation d'un réseau de *récepteurs* présentant une f.c.é.m. (par exemple, une batterie d'accumulateurs) son utilisation est exclue également : l'inversion de courant *I* entraînerait l'inversion de la polarité de la dynamo et elle se trouverait alors en *série* avec les récepteurs devenus des générateurs : il en résulterait un débit très important et dangereux. La dynamo série n'est donc utilisée que dans des cas très particuliers (alimentation de postes de sou-

dage) où il faut une caractéristique $U(I)$ très tombante (fig. XVI-20) et dans le *freinage électrique* qui sera étudié plus loin.

Fig. XVI-20

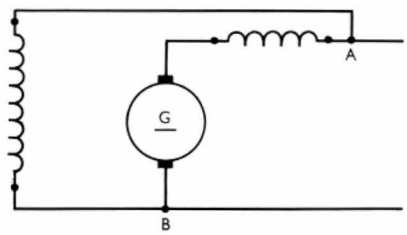


DYNAMO À EXCITATION COMPOSÉE (COMPOUND)

11. PRINCIPE ET CONSTITUTION

Une dynamo est dite à *excitation composée* (autrefois compound) lorsqu'on a disposé sur ses pôles inducteurs des enroulements dérivation et des enroulements série.

Fig. XVI-21



Généralement (fig. XVI-21) elle est à *longue dérivation* (enroulement en dérivation entre les bornes de sortie) mais parfois (fig. XVI-22), elle est à *courte dérivation* (enroulement en dérivation placé entre les balais).

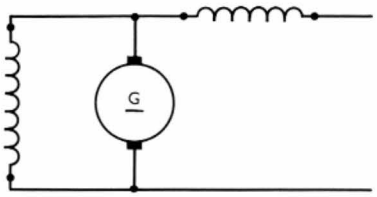


Fig. XVI-22

Quand les deux forces magnétomotrices (dues aux enroulements dérivation et série) agissent dans le même sens, la dynamo est dite à *flux additif ;* dans le cas contraire, elle est à *flux soustractif.*

12. RAPPORT D'ÉQUIVALENCE. TAUX DE COMPOUNDAGE

Si l'on désigne par N_s le nombre de spires de l'enroulement série et par m le nombre de spires de l'enroulement dérivation on définit :

— le rapport d'équivalence : $\alpha = \dfrac{N_s}{m}$ (de l'ordre de 0,1) ;

— le taux de compoundage : $\dfrac{N_s I}{mJ}$

On peut faire varier le taux de compoundage soit en utilisant des prises variables sur l'enroulement série (fig. XVI-23) soit en shuntant celui-ci au moyen d'une résistance faible et variable.

Le rapport d'équivalence d'une dynamo composée est déterminé expérimentalement en obtenant, à une vitesse n, la même f.é.m. au moyen (fig. XVI-24) :

— soit d'un courant I_1 dans l'*enroulement série seul,*

— soit d'un courant J_1 dans l'*enroulement dérivation seul.*

On peut alors écrire :

$$N_s I_1 = m J_1 \quad \text{d'où :} \quad \alpha = \frac{N_s}{m} = \frac{J_1}{I_1}$$

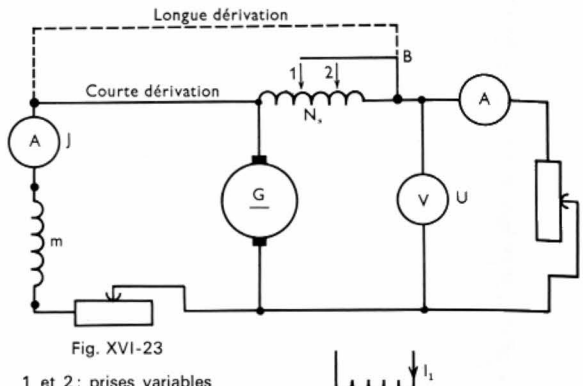


Fig. XVI-23

1 et 2 : prises variables sur l'enroulement série

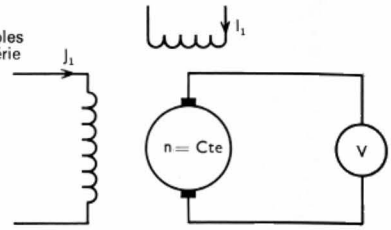


Fig. XVI-24

13. CARACTÉRISTIQUES EN CHARGE POUR DIFFÉRENTS COMPOUNDAGES

13.1. En flux additif. — La f.m.m. de l'enroulement série s'ajoute à la f.m.m. de l'inducteur en dérivation et elle renforce le flux (donc la f.é.m. E_v) d'autant plus que le courant débité est plus intense. La caractéristique en charge se trouve donc *au-dessus* de la caractéristique en dérivation.

Si U_n désigne la tension à pleine charge correspondant au courant nominal I_n (et à la vitesse normale n), on dit que l'on a (fig. XVI-25) :

— un hypocompoundage si U_n est inférieure à E_v,

— un compoundage normal si U_n est égale à E_v,

— un hypercompoundage si U_n est supérieure à E_v.

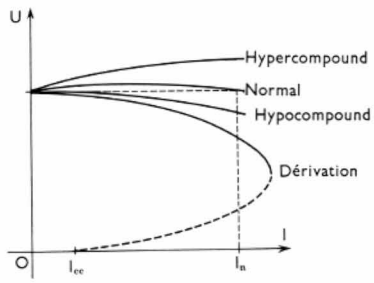


Fig. XVI-25

13.2. En flux soustractif. — Dans ce cas on dit que la dynamo est *anticompound.* Sa caractéristique en charge est plus tombante que la caractéristique dérivation (fig. XVI-26). Toutes ces caractéristiques peuvent être obtenues expérimentalement, ou bien graphiquement connaissant $E_v(J)$; $h_m(I)$ et le rapport d'équivalence α.

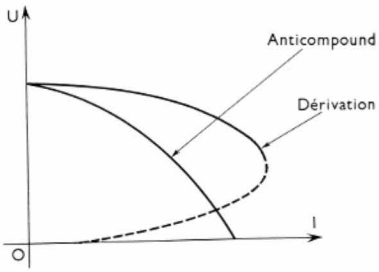


Fig. XVI-26

14. APPLICATIONS

14.1. À flux additif. — Cette dynamo peut servir à alimenter un ensemble de récepteurs sous tension constante ; ces récepteurs peuvent être disposés près de la gé-

nératrice (génératrice à compoundage normal) ou être alimentés par l'intermédiaire d'une ligne (génératrice à hypercompoundage pour compenser la chute en ligne).

14.2. À flux soustractif. — Cette génératrice peut être utilisée pour alimenter des récepteurs présentant une caractéristique $U(I)$ à pente négative (on dit présentant une résistance négative) comme les arcs de projecteurs, les postes de soudage, etc., pour lesquels on veut un courant constant malgré des variations de tension (longueur d'arc). Elle est également employée avec des récepteurs souvent en court-circuit comme les moteurs de pelles électriques, par exemple (ils sont souvent bloqués par la charge).

COUPLAGE DES DYNAMOS

On a montré les conditions de couplage des générateurs en parallèle et en série (V. chap. 10), aussi va-t-on se borner à exposer ici ce qui est particulier aux dynamos dans les couplages les plus fréquents.

15. DYNAMOS EXCITÉES EN DÉRIVATION COUPLÉES EN PARALLÈLE

On branche toujours l'inducteur aux *barres de couplage* (fig. XVI-27), cela pour n'avoir *aucun problème d'amor-*

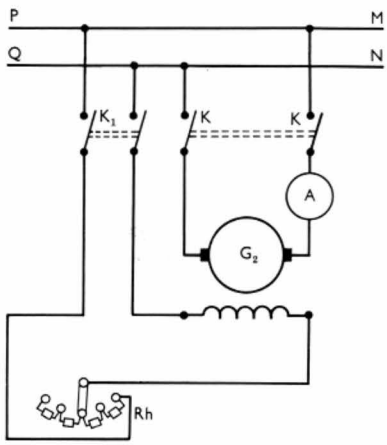


Fig. XVI-27

çage et pour ne jamais *risquer* une *inversion de polarité* d'une machine par rapport aux autres (tous les sens des courants inducteurs sont ainsi liés de la même façon à la tension entre barres).

Avant de fermer l'interrupteur de couplage K on vérifie que la polarité de G_2 correspond à celle des barres et que la tension de la dynamo est égale à celle entre barres.

Pour charger la dynamo, *il suffit d'augmenter l'intensité du courant d'excitation* (« de la surexciter ») ; ainsi on fait croître E_v et l'on a :

$$I = \frac{E_v - U}{h_t}$$

Automatiquement le groupe ralentit et le moteur qui entraîne la dynamo fournit une puissance plus grande.

16. DYNAMOS EXCITÉES EN SÉRIE COUPLÉES EN PARALLÈLE

C'est le montage qui est utilisé dans le freinage électrique d'une motrice comportant des moteurs à excitation en série associés en parallèle. Durant cette période de freinage les moteurs fonctionnent en générateurs, le mouvement du rotor étant dû au déplacement de la motrice. Dans ce cas on craint l'inversion de la polarité d'une dynamo par rapport à l'autre, c'est-à-dire qu'un courant d'échange I circule dans les générateurs. Pour écarter ce risque, il suffit de croiser les inducteurs (fig. XVI-28). Soit E_1 et E_2 les f.é.m. des deux dynamos ; si E_2 est inférieur à E_1, le courant I_1 de G_1 est supérieur au courant I_2 de G_2 et alors l'excitation de G_2 est renforcée : E_2 croît. Il y a donc impossibilité d'un écart sensible entre les deux f.é.m. et a fortiori impossibilité d'une inversion de polarité.

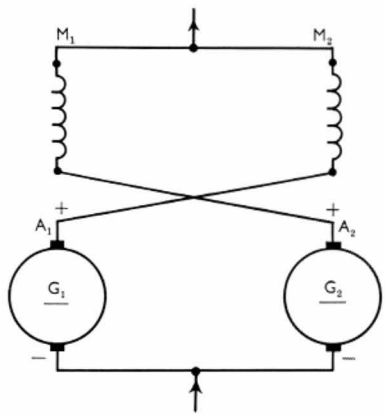


Fig. XVI-28

Freinage électrique avec deux génératrices à excitation en série

DYNAMOS SPÉCIALES

17. DÉFINITION

Ce sont des génératrices à courant continu :

— soit *régulatrices* c'est-à-dire destinées à maintenir constante une grandeur préalablement réglée (courant, tension, vitesse, etc.),

— soit *amplificatrices* et qui permettent le réglage de grandes puissances par action sur un circuit de puissance beaucoup plus faible,

— soit *transformatrices*, c'est-à-dire utilisables pour transformer une puissance $U_1 I_1$ transportée par un courant continu en une puissance $U_2 I_2$ sensiblement égale, U_2 et I_2 étant respectivement différents de U_1 et I_1.

Dans toutes ces machines :

— les circuits magnétiques *ne sont pas saturés*,

— on utilise la *réaction d'induit* et la combinaison de plusieurs enroulements inducteurs.

18. DYNAMO À TROIS BALAIS

C'est une dynamo régulatrice : à partir d'une certaine vitesse elle peut débiter dans une batterie d'accumulateurs un courant *constant quelle que soit sa vitesse*.

Elle ne diffère de la dynamo à excitation en dérivation que par l'addition d'un balai supplémentaire *b*. L'enroulement inducteur est branché entre ce balai *b* et un balai principal *A* (fig. XVI-29). La machine tourne à la vitesse n et débite un courant I ; deux f.é.m. prennent alors naissance dans l'induit :

1° Une f.é.m. E_1 due au flux inducteur Φ_i et qui change de sens suivant la ligne *AB*.

2° Une f.é.m. E_2 due au flux transversal Φ_a de réaction d'induit et qui change de sens suivant l'axe des pôles.

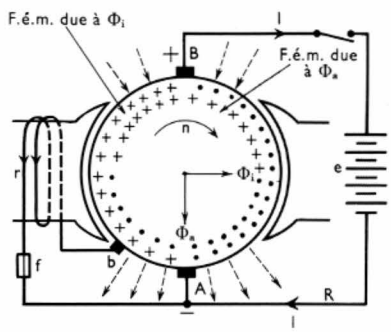


Fig. XVI-29

Représentation conventionnelle d'une dynamo à trois balais

On a représenté par des croix et des points le sens des f.é.m. dont les sommes sont E_1 et E_2. Il apparaît qu'entre *A* et *b* ces f.é.m. se retranchent. Or entre ces deux points :

— la f.é.m. due à Φ_i est égale à $K_1 ni$ (circuit non saturé),

— la f.é.m. due à Φ_a est égale à $K_2 nI$,

K_1 et K_2 étant des coefficients de proportionnalité.

Donc la loi d'Ohm appliquée au circuit d'excitation de résistance r s'écrit : $K_1 ni - K_2 nI = ri$ (1)

Mais la f.é.m. E_{AB} entre A et B étant due aux flux Φ_i est égale à $E_{AB} = K_3 ni$ (dans laquelle K_3 est un coefficient de proportionnalité) et la loi d'Ohm appliquée au circuit de débit constitué par une batterie de f.c.é.m. E' et de résistance R (y compris la résistance de l'induit de la dynamo) s'exprime par la relation suivante :

$$E_{AB} - E' = RI \text{ ou : } K_3 ni - E' = RI \qquad (2)$$

En tirant i de l'équation (1) et en portant la valeur trouvée dans l'équation (2) on obtient l'expression suivante :

$$I = \frac{(K_1 n - r)\, E'}{K_3 K_2 n^2 - R\ (K_1 n - r)}$$

Quand la vitesse atteint la valeur qui rend le numérateur positif (soit $n > r/K_1$) un *conjoncteur-disjoncteur* (placé

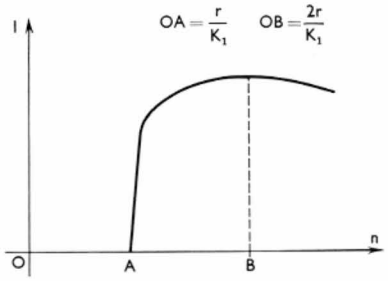


Fig. XVI-30

dans le circuit pour empêcher la batterie de se décharger dans la dynamo) *se ferme* et la dynamo *commence à charger la batterie*. Au-delà de cette vitesse, la courbe $I(n)$ a l'allure donnée par la figure XVI-30 ; c'est dire que le courant I se maintient sensiblement constant quelle que soit la vitesse.

La dynamo à trois balais sert à la charge des accumulateurs des avions, des automobiles et des trains.

19. AMPLIDYNE

C'est une machine amplificatrice qui comporte deux pôles principaux pourvus d'enroulement *série*, deux pôles secondaires et deux balais *a*, *b* mis en court-circuit (fig. XVI-31). Le courant I' entre *a* et *b* crée un flux horizontal $\Phi_h = K_1 I'$, lequel engendre une f.é.m. égale à :

$$E_{AB} = K'_1\, nI'$$

K'_1 étant une constante et n désignant la vitesse du rotor·

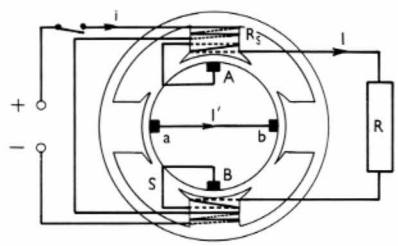


Fig. XVI-31

Le flux *vertical* de direction *AB* (flux de réaction d'induit dû au courant I dans la résistance R) est annulé par les enroulements-série S de résistance R_s. La loi d'Ohm appliquée au circuit de débit permet d'écrire la relation suivante (R_a représentant la résistance d'induit) :

$$I = \frac{E_{AB}}{R + R_a + R_s} = \frac{K'_1\, nI'}{R + R_a + R_s}$$

Comme la f.é.m. induite qui produit la circulation du courant I' est égale à $K_2 ni$, K_2 étant une constante et i représentant l'intensité du courant d'excitation, on déduit :

$$I' = \frac{K_2\, ni}{R_a}$$

$$\text{et } I = \frac{K'_1 n}{R + R_a + R_s} \cdot \frac{K_2\, ni}{R_a} = \frac{K'_1\, K_2 n^2\, i}{R_a\,(R + R_a + R_s)}$$

La puissance utilisable est égale à :

$$P = RI^2 = \frac{R\ (K'_1\, K_2\, n^2 i)^2}{R^2_a\,(R + R_a + R_s)^2}$$

tandis que la puissance fournie au circuit de commande de résistance r a pour valeur : $p = ri^2$

Le *coefficient d'amplification* est donc :

$$K = \frac{P}{p} = \frac{R}{r} \cdot \frac{(K'_1\, K_2\, n^2)^2}{R^2_a\ (R + R_a + R_s)^2}$$

L'amplidyne permet d'atteindre des coefficients d'amplification très importants (de 10^2 à 10^4). Sa simplicité et sa robustesse ont leur application dans l'excitation de gros alternateurs, de moteurs d'extraction et dans de nombreux montages régulateurs.

20. ROTOTROL

C'est une dynamo à la fois amplificatrice et régulatrice qui comporte *au moins* trois enroulements :

1° Un enroulement *d'autoexcitation* C généralement *série*.

2° Un enroulement A alimenté par une source à tension constante et parcouru par un courant réglable dit *de référence*.

3° Un enroulement B parcouru par un courant fonction de la grandeur à réguler.

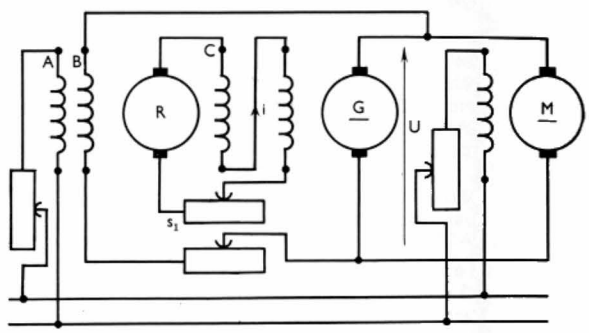


Fig. XVI-32

La figure XVI-32 représente un rototrol R débitant dans l'*enroulement inducteur* d'une génératrice G (groupe Ward-Léonard ; V. chap. 17) qui alimente un moteur M.

On désigne par *a* et *b* les f.é.m. que donnerait au rototrol *chacun* des enroulements A et B ; celle qui serait donnée au rototrol par l'enroulement *série* C seul a pour expression $c = ri$ (r = résistance du circuit de débit du rototrol et i intensité du courant débité). En définitive les sens des courants inducteurs sont tels que la f.é.m. de la machine, due à l'ensemble des flux, est :

$$E_r = (c + a - b)$$

Comme l'on a toujours $E_r = ri$, on peut écrire les égalités suivantes :

$$ri = c + a - b \quad \text{et :} \quad a = b \ \text{(puisque } c = ri\text{)}$$

Comme b est proportionnel à la tension U aux bornes de la génératrice G et également au courant d'excitation i de cette dynamo (elle n'est pas saturée), on écrit :

$b = a = k'U = k''i$ (k' et k'' désignant des constantes).

Par suite l'excitation $i = \frac{a}{k''}$ de la génératrice G est bien déterminée par le courant dans l'enroulement A de commande.

D'autre part, la grandeur *régulée* est la *tension* U. Si la charge de G croît (plus fort couple demandé au moteur M), U décroît ainsi que b ; le terme a devient prépondérant : E croît ainsi que i jusqu'à ce que la tension U ait repris sa valeur initiale.

Le rototrol est souvent utilisé dans des *servomécanismes*. Par exemple, si l'enroulement de commande B est branché aux bornes d'une dynamo tachymétrique (dont la f.é.m. est liée à la vitesse à réguler) cette vitesse est maintenue constante et peut être régulée par l'enroulement A de commande.

CHAPITRE XVII

MOTEUR À COURANT CONTINU COUPLE — VITESSE — CARACTÉRISTIQUES

COUPLE

1. PRINCIPE DU MOTEUR

Pour fixer les idées on va considérer une dynamo à excitation séparée dont on alimente l'induit. Chaque conducteur actif est parcouru par un courant d'intensité I et est placé dans une induction magnétique $\vec{B}$ *radiale* (due aux enroulements inducteurs) ; il est donc soumis à une force de Laplace tangente au rotor (fig. XVII-1). Toutes les forces électromagnétiques engendrent des couples de même sens : la somme de ces couples détermine la rotation de l'induit. La machine reçoit de la puissance électrique et fournit de la puissance mécanique : c'est un moteur. Comme la puissance mécanique P est égale au produit du moment du couple moteur T et de la vitesse angulaire ω, nous

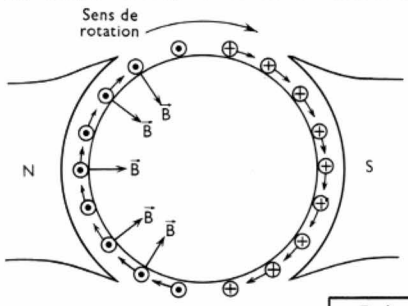


Fig. XVII-1

sommes amenés à considérer le *couple* puis la vitesse de rotation.

Il est à noter que lorsque la machine fonctionne en génératrice de courant continu chaque conducteur est également soumis à une force de Laplace (puisqu'il est parcouru par un courant et qu'il se trouve dans un champ magnétique). Les couples engendrés sont alors des couples résistants : le moment résultant est opposé au moment du couple moteur transmis à la génératrice par le moteur qui l'entraîne.

2. SENS DU COUPLE ET DE LA ROTATION

Le sens du couple dépend du sens *relatif* de l'induction $\vec{B}$ (donc du flux inducteur) et du courant dans les conducteurs actifs. D'autre part avec la *même polarité* entre les bornes de la machine, le sens du courant *en moteur* est opposé au sens du courant *en générateur* (fig. XVII-2). Cela explique la *règle des quatre variables* qui s'énonce ainsi : si l'on considère les quatre grandeurs suivantes :

— *sens du courant inducteur ;*
— *sens du courant dans l'induit ;*
— *sens de rotation ;*
— *nature de fonctionnement* (*moteur ou générateur*),

elles varient toujours en nombre pair.

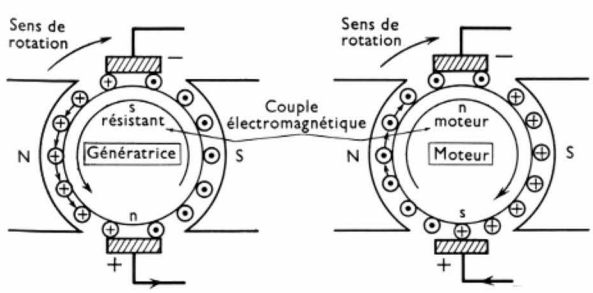


Fig. XVII-2

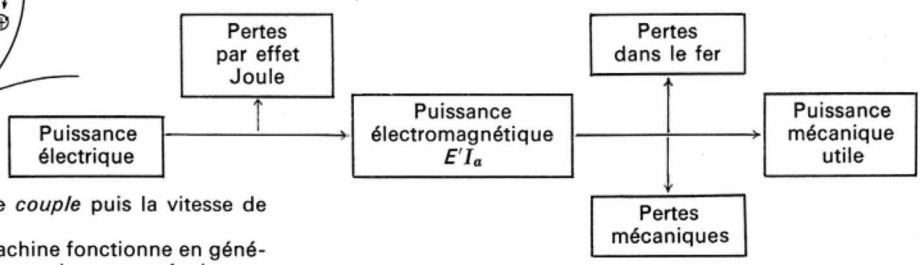
Ainsi avec les mêmes sens pour les courants dans l'induit et dans l'inducteur, si la nature du fonctionnement change il en est de même du sens de rotation de la machine. En moteur si l'on veut changer le sens de rotation, il faut inverser le sens du courant soit dans l'induit soit dans l'inducteur.

3. DÉFINITION ET EXPRESSION DU COUPLE ÉLECTROMAGNÉTIQUE

Dans une machine à courant continu, le couple électromagnétique de moment T_e est la grandeur qui correspond au passage de la puissance de la forme mécanique à la forme électrique ou réciproquement. La f.c.é.m. E' représentant la puissance transformée dans le moteur autrement qu'en chaleur, lorsque l'intensité du courant est 1 A, on déduit facilement la valeur T_e du moment du couple électromagnétique :

$$T_e\,\omega = E'I_a \quad \text{et :} \quad \boxed{T_e = \frac{E'I_a}{\omega}}$$

si l'on désigne par I_a l'intensité du courant dans l'induit. Le bilan des puissances dans un moteur peut se résumer de la façon suivante :



Dans une dynamo le bilan se présente sous la même forme, seul le sens des flèches longitudinales est opposé au précédent.

Dans les deux cas, le bilan fait apparaître l'expression du couple électromagnétique :

$$T_e = \frac{E_{ch}I_a}{\omega} = \left(\frac{60}{2\,\pi\,n}\right)\cdot\left(\frac{n}{60}\,N\Phi_{ch}\right)I_a = \frac{N}{2\pi}\,\Phi_{ch}I_a$$

soit :

$$\boxed{T_e = \frac{N}{2\pi}\,\Phi_{ch}\,I_a}$$

Remarque : On peut aussi écrire :

— dans une dynamo :

$$T_e = \frac{30\,(U + R_aI_a)\,I_a}{\pi\,n} \quad \text{car :}\ E_{ch} = U + R_aI_a$$

— dans un moteur :

$$T_e = \frac{30\,(U - R_aI_a)\,I_a}{\pi\,n} \quad \text{car :}\ E_{ch} = U - R_aI_a$$

(R_a désignant la somme des résistances de l'induit, des contacts balais-collecteur et des connexions intérieures).

Le bilan des puissances montre aussi que le moment du couple électromagnétique T_e ne diffère du moment du couple mécanique T_u que par le terme égal à :

$\dfrac{p_{fer} + p_{meca}}{\omega}$ c'est-à-dire par un terme faible et constant (en marche industrielle). C'est pourquoi, le plus souvent on considère *le moment du couple électromagnétique* T_e, dont l'expression est *plus simple*, plutôt que le moment du couple utile. Une fois pour toutes, on sait qu'il est *un peu plus grand* que ce dernier.

Le couple électromagnétique d'un moteur à courant

continu est analogue au *couple transmis* d'un moteur asynchrone (V. chap. 12 § 8), lui aussi un peu plus grand que le couple mécanique.

Observation importante : L'expression du moment du couple électromagnétique : $T_e = \frac{N}{2\pi} \Phi_{ch} I_a$ montre qu'à flux et courant constants le *couple est indépendant de la vitesse*. Cette propriété confère une supériorité au moteur à courant continu sur le moteur asynchrone.

4. RÉACTION MAGNÉTIQUE ET CHUTE TOTALE DE TENSION

La figure XVII-3 montre que la réaction magnétique d'induit d'un moteur *augmente* l'induction sous les cornes d'entrée et la diminue sous les cornes de sortie ; elle entraîne une distorsion magnétique en sens *inverse* de la rotation contrairement à ce qui se passe dans un générateur (fig. XVII-4).

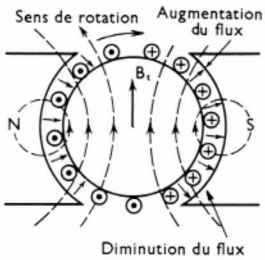


Fig. XVII-3 — Moteur

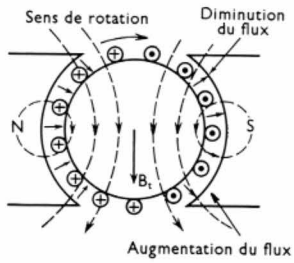


Fig. XVII-4 — Générateur

Cette distorsion *affaiblit le flux*, comme dans une dynamo et elle conduit à décaler les balais *en arrière* par rapport à la rotation. Donc quand le *sens de rotation* en moteur est *opposé* au sens de rotation en dynamo (cas où la polarité est identique), on ne doit *pas modifier le calage* des balais (fig. XVII-4). Puisque h_m représente une *diminution* de f.é.m. due à la réaction d'induit, on écrit :

$$E_{ch} = E_v - h_m$$

d'où (loi d'Ohm pour un moteur) :

$$U = E_{ch} + R_a I_a = E_v - h_m + R_a I_a$$

On fait intervenir E_v (f.é.m. due à la f.m.m. de l'inducteur seul) car elle est directement donnée par la caractéristique à vide E_v (J) de la machine.

VITESSE

5. EXPRESSION DE LA VITESSE

La vitesse se déduit de l'expression écrite ci-dessus

$$E_{ch} = E_v - h_m = \frac{n}{60} N\Phi_v - h_m = U - R_a I_a$$

D'où l'expression de la vitesse :

$$n = \frac{60}{N} \cdot \frac{U - R_a I_a + h_m}{\Phi_v}$$

(cas d'un enroulement parallèle simple)

De cette formule se dégagent des conséquences importantes. *En marche industrielle* (U = constante) :

— la vitesse est inversement proportionnelle au flux ;

— il ne faut *jamais couper l'excitation* avant le courant dans l'induit, car annuler Φ_v entraîne soit *l'emballement* du moteur (dans le cas d'un faible couple résistant) soit son *calage* lorsque le couple moteur (le flux est un facteur de couple) ne parvient pas à dominer le couple résistant ; dans ce dernier cas le moteur est traversé par un courant très intense et très dangereux ;

— la vitesse est *sensiblement proportionnelle à la tension* lorsque l'excitation J est constante (car les termes $R_a I_a$ et h_m sont petits devant U).

6. COMMUTATION

Quand on passe de la marche en générateur à la marche en moteur, *avec la même polarité*, le courant I dans l'induit change de sens, et il en est de même du flux des pôles auxiliaires (leur courant d'excitation est aussi I) : l'effet de ces pôles est donc également favorable. Il n'y a *donc pas à modifier les connexions des enroulements des pôles auxiliaires* quand on passe de la marche en générateur au fonctionnement en moteur *avec la même polarité*.

Il en serait évidemment de même des enroulements compensateurs si la machine en comportait.

7. FORMULES APPLICABLES À LA MACHINE À COURANT CONTINU

Le tableau ci-après donne l'ensemble des formules applicables à la machine à courant continu utilisée en générateur ou en moteur. On désigne encore par p le nombre de paires de pôles et par a le nombre de voies d'enroulement.

Grandeur	Générateur	Moteur
f.é.m. à vide : E_v	$E_v = \frac{pn}{a\,60} N\Phi_v = Kn\Phi_v$ $(K = pN/60a)$	Idem
f.é.m. en charge : E_{ch}	$E_{ch} = Kn\Phi_{ch} = U + R_a I_a$	$E_{ch} = Kn\Phi_{ch} = U - R_a I_a$
Réaction magnétique : h_m	$h_m = E_v - E_{ch}$	Idem
Tension : U	$U = E_{ch} - R_a I_a = E_v - h_m - R_a I_a$	$U = E_{ch} + R_a I_a = E_v - h_m + R_a I_a$
Réaction totale : $E_v - U$	$h_t = h_m + R_a I_a$	$h'_t = h_m - R_a I_a = (h_t - R_a I_a) - R_a I_a = h_t - 2R_a I_a$
Fréquence de rotation n	$n = \frac{E_v}{K\Phi_v} = K' \frac{U + R_a I_a + h_m}{\Phi_v}$ $(K' = 1/K = 60\,a/pN)$	$n = \frac{E_v}{K\Phi_v} = K' \frac{U - (R_a I_a - h_m)}{\Phi_v}$ $K' = 1/K = 60a/pN)$
Moment du couple électromagnétique : $T_e = \frac{E_{ch} I_a}{\omega}$	$T_e = \frac{(U + R_a I_a)\ I_a}{\omega} = \frac{p}{a}\frac{N}{2\pi} \Phi_{ch} I_a = K'' \Phi_{ch} I_a$ $(K'' = pN/2\,\pi a)$	$T_e = \frac{(U - R_a I_a)\ I_a}{\omega} = \frac{p}{a}\frac{N}{2\pi} \Phi_{ch} I_a = K'' \Phi_{ch} I_a$ $(K'' = pN/2\,\pi a)$

CARACTÉRISTIQUES DES MOTEURS À COURANT CONTINU

Comme pour les dynamos, on désigne sous ce nom un ensemble de courbes qui traduisent les relations entre les variables d'exploitation des moteurs.

8. CARACTÉRISTIQUES USUELLES D'UN MOTEUR

On a vu que quatre grandeurs U, I, J, N régissent la marche de la dynamo. Mais, dans le moteur, on veut

faire apparaître le moment du couple et on considère cinq grandeurs :

— la tension U,
— l'intensité du courant I fourni par la source,
— l'intensité du courant inducteur J,
— le moment du couple électromagnétique T_e,
— la fréquence de rotation n,

dont quatre (puisque T_e est fonction de J et de I) suffisent à définir la marche de la machine.

Parmi ces grandeurs, la *tension U* est toujours considérée comme *constante* et c'est pourquoi les caractéristiques *usuelles* des moteurs (les plus importantes) sont les suivantes :

— la caractéristique de vitesse : $n(I)$, paramètre T_e ;
— la caractéristique de couple : $T_e(I)$, paramètre n ;
— la caractéristique mécanique : $T_e(n)$, paramètre I.

Chacune d'elles appartient en réalité à une *famille de courbes*, chaque courbe correspondant à une valeur du paramètre. Il faut observer :

— qu'il est facile d'obtenir une famille de courbes à partir des deux autres ;
— qu'il est facile de passer des caractéristiques en dynamo aux caractéristiques en moteur ;
— que l'une quelconque des caractéristiques est dite *nominale* quand elle correspond à la vitesse n et à la tension U_n indiquées sur la plaque. Quand on ne précise pas, il s'agit toujours de la caractéristique nominale.

MOTEUR À EXCITATION EN DÉRIVATION (OU SHUNT)

Le moteur dérivation se confond avec le moteur à excitation séparée, car l'enroulement inducteur est toujours branché à une *source* de tension U_s que l'on considère constante (fig. XVII-5).

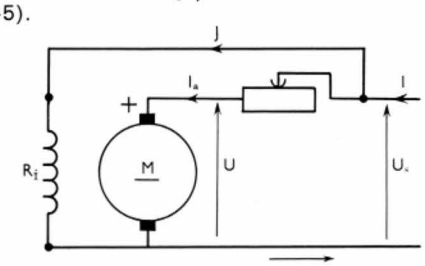


Fig. XVII-5

9. CARACTÉRISTIQUE DE VITESSE

On peut la relever directement ou l'obtenir graphiquement à partir des caractéristiques $E_v(J)$ et $h_m(I)$. La vitesse n du moteur est donnée par l'expression suivante :

$$n = \frac{60}{N} \cdot \frac{U - R_a I_a + h_m}{\Phi_v}$$

Si la tension U est constante, l'intensité J du courant d'excitation l'est aussi, ainsi que le flux à vide Φ_v : n varie en fonction de I comme varie le numérateur. Tant que h_m est plus faible que $R_a I_a$ ($I_a = I - J$) la vitesse baisse ; quand on a h_m supérieur à $R_a I_a$ la vitesse croît.

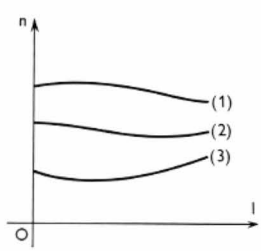


Fig. XVII-6

Caractéristiques de vitesse d'un moteur à excitation en dérivation

L'allure de la courbe $n(I)$ à tension nominale est la caractéristique (1) de la figure XVII-6. À faible tension (J faible) la réaction d'induit h_m est relativement importante et la caractéristique prend les allures (2) et (3). Elles montrent bien que la vitesse d'un moteur dérivation est sensiblement constante à toutes charges. Il est autorégulateur de vitesse.

10. CARACTÉRISTIQUE DE COUPLE

L'expression du couple électromagnétique $T_e = \frac{N}{2\pi} \Phi_{ch} I_a$ montre que le moment du couple, d'abord proportionnel au courant, ne l'est plus tout à fait quand la réaction d'induit diminue Φ_{ch}. La courbe T_e (I) a l'allure indiquée sur la figure XVII-7.

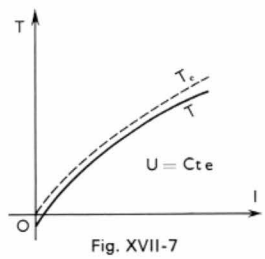


Fig. XVII-7

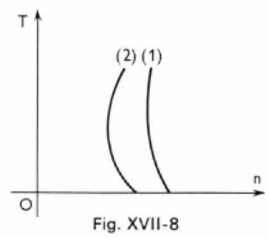


Fig. XVII-8

11. CARACTÉRISTIQUE MÉCANIQUE

Obtenue par élimination graphique de I entre les caractéristiques précédentes, elle a l'allure (1) ou (2) (fig. XVII-8) suivant que la tension est normale ou faible.

12. APPLICATIONS

C'est par excellence le moteur des machines-outils dont la vitesse ne doit pas dépendre de la charge. Dans ses applications il correspond au moteur asynchrone polyphasé. On l'emploie également dans la commande des appareils de levage où la charge peut être brusquement supprimée et où le risque d'emballement (avec un moteur série) serait à craindre.

MOTEUR À EXCITATION EN SÉRIE

Son montage est donné par la figure XVII-9. Les cinq grandeurs définissant sa marche sont :

— la tension d'alimentation U,
— l'intensité I du courant fourni par la source,
— la valeur Rh du rhéostat d'excitation,
— la vitesse de rotation n du moteur,
— le moment T_e du couple électromagnétique.

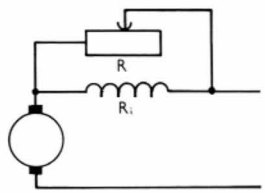


Fig. XVII-9

En fait, quatre grandeurs suffisent, car T_e ne dépend que de I et de Rh. Les caractéristiques usuelles supposent la tension U constante et Rh infini (pas de rhéostat de champ).

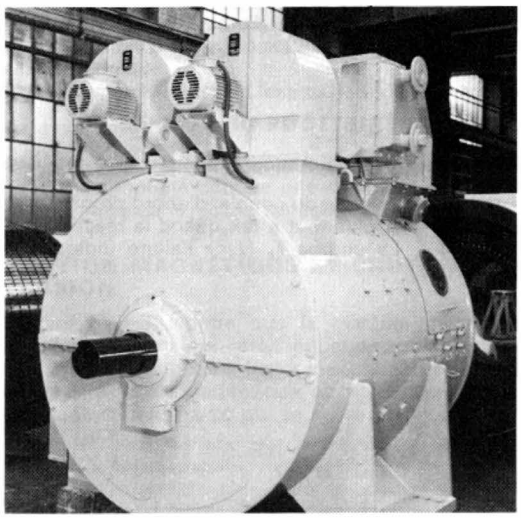
13. CARACTÉRISTIQUE DE VITESSE

Tant que le moteur *n'est pas saturé,* le flux est proportionnel à l'intensité I du courant (en particulier : $\Phi_v = K_1 I$) et l'expression de la vitesse établie précédemment (V. ci-dessus § 5) devient :

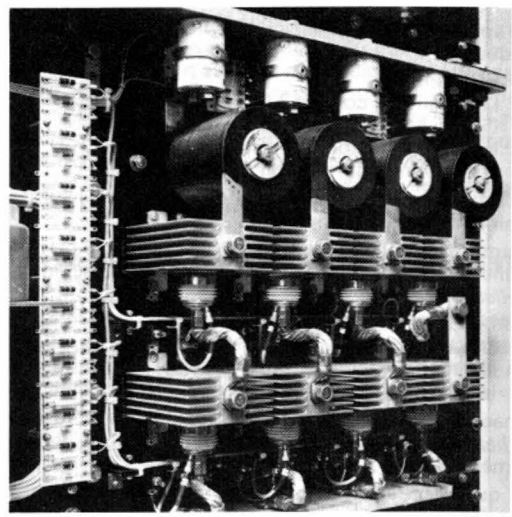
$$n = \frac{60}{N} \frac{U - (R_a + R_s)\, I + h_m}{K_1\, I}$$

R_s désignant la résistance de l'enroulement d'excitation en série avec l'induit. Comme l'ensemble $[(R_a + R_s)\, I - h_m]$ est petit devant U cette expression s'écrit :

$$nI \approx \text{Constante}$$



Moteur à courant continu de dérouleuse avec dispositif de refroidissement de 370 kW (*Alsthom*)



Pont mixte pour alimentation de huit moteurs de train à fil (550 V, 4 000 A) (*Alsthom*)

La courbe $n(I)$ est sensiblement une hyperbole équilatère (fig. XVII-10).

Quand la machine se sature, c'est-à-dire lorsque le courant I (qui passe dans l'induit et dans l'inducteur) dépasse un seuil, alors le flux Φ n'augmente plus proportionnellement à I (Φ devient inférieur à $K_1 I$). La courbe se détache de l'hyperbole équilatère et se place au-dessus de celle-ci. On observe qu'à vide (courant I_0) la *vitesse* du moteur est *très grande : le moteur série s'emballe à vide* et, même au démarrage, il doit entraîner une charge.

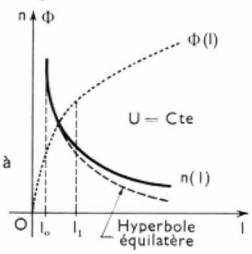


Fig. XVII-10

Caractéristique de vitesse d'un moteur à excitation en série

14. CARACTÉRISTIQUE DE COUPLE T_e (I)

Le relevé direct exige un frein et c'est pourquoi on la détermine souvent par voie graphique à partir de la caractéristique à vide E_v (J).

Avant la saturation du circuit magnétique ($\Phi_{ch} = K_1 I$) le moment du couple est égal à :

$T_e = \dfrac{N}{2\pi} \Phi_{ch}\, I = \dfrac{n}{2\pi} K_1 I^2$ (on néglige la réaction d'induit) ;

il est proportionnel à I^2 et la courbe $T_e(I)$ se confond avec un arc de parabole (fig. XVII-11). Elle s'en écarte et se place au-dessous d'elle quand le fer se sature ($\Phi < K_1 I$), et elle se rapproche de plus en plus d'une droite ($\Phi \approx$ Cte) quand l'intensité du courant est grande.

15. CARACTÉRISTIQUE MÉCANIQUE T_e (n)

On l'obtient par élimination graphique de I entre les deux précédentes. Elle a l'allure donnée par la figure XVII-12.

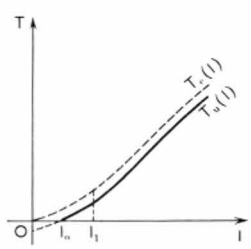


Fig. XVII-11

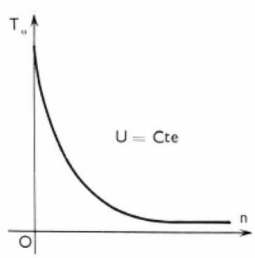


Fig. XVII-12

Elle s'écarte peu de l'hyperbole équilatère : $T_e n$ = Cte. C'est dire que, sous tension constante, *la puissance du moteur est constante* dans tous ses régimes de marche (il ralentit quand on lui demande un fort couple, accélère quand le couple est faible). On dit qu'il est autorégulateur de puissance ou à changement de vitesse automatique.

16. APPLICATIONS

Le moteur série est donc par excellence un moteur *de traction;* il est aussi utilisé dans la commande des engins de levage, des pompes à piston, des gonfleurs de garage, etc. Dans toutes ces applications, le moteur ne risque pas de s'emballer car il est toujours chargé. On apprécie alors sa robustesse et aussi l'avantage (appréciable en bout de ligne) de l'indépendance entre le couple et la tension d'alimentation.

MOTEUR À EXCITATION COMPOSÉE (OU COMPOUND)

17. CARACTÉRISTIQUES

C'est un moteur dérivation auquel on a ajouté quelques spires en série avec l'induit ; la machine est soit à flux additif, soit à flux soustractif. Il suffit de remarquer que les spires-série ont un faible effet à faible charge (l'intensité est alors faible) et un effet important aux fortes charges, pour prévoir l'allure des caractéristiques du moteur à excitation composée (fig. XVII-13 à XVII-15).

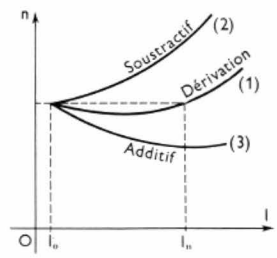


Fig. XVII-13

Comparaison des caractéristiques des moteurs composés (à flux additifs ou à flux soustractifs) avec celles des autres moteurs à courant continu

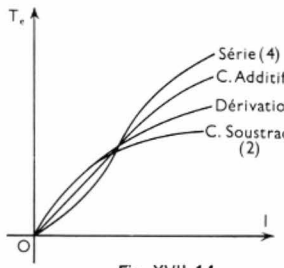


Fig. XVII-14

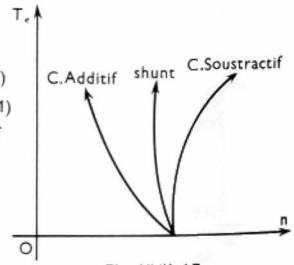
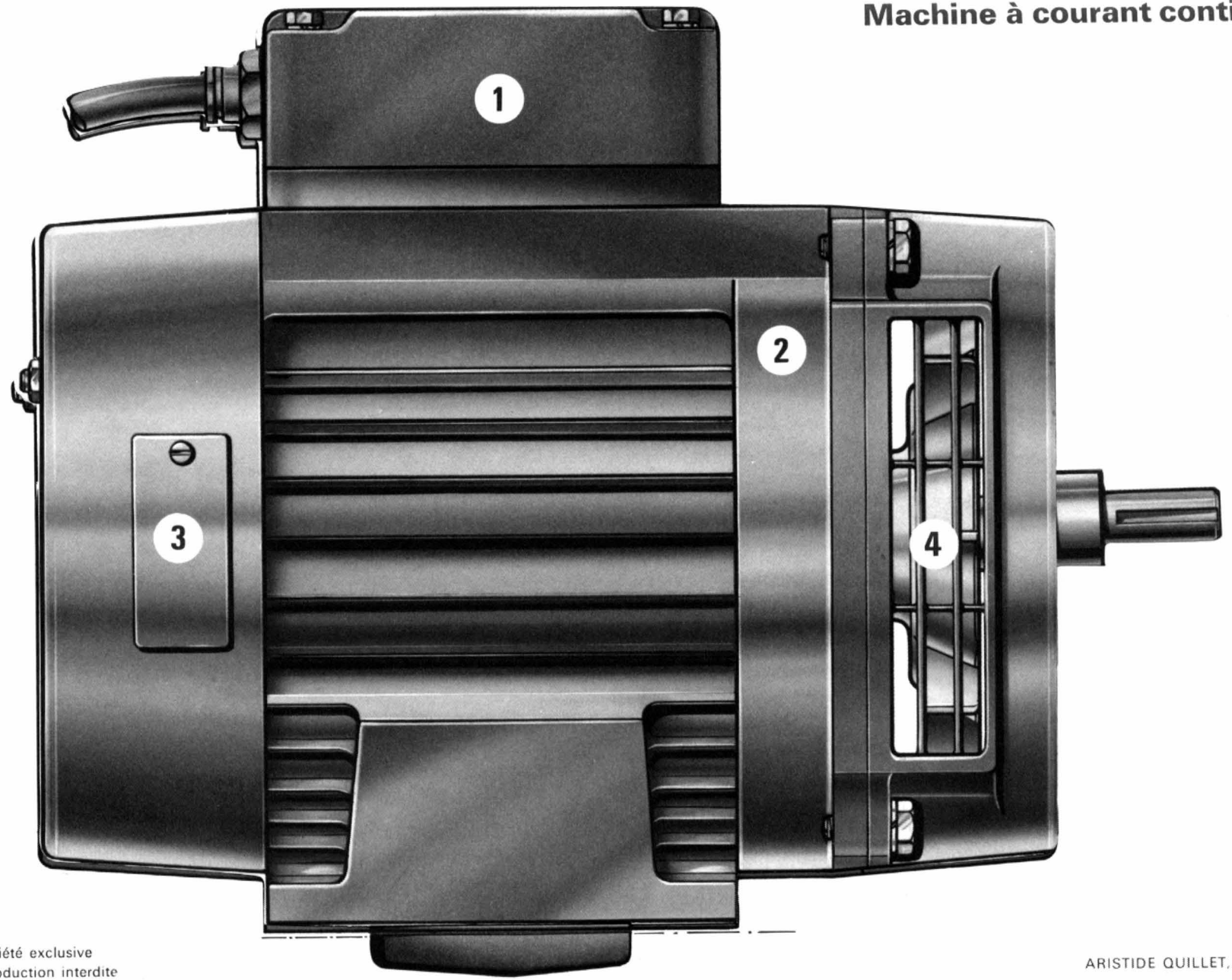


Fig. XVII-15

Machine à courant continu

1. Boîte à bornes
2. Carcasse du moteur
3. Trappe de visite des balais
4. Aération et ventilateur à l'arrière-plan
5. Rotor
6. Collecteur
7. Bobine rotorique
8. Frette
9. Bobinage rotorique
10. Rotor formé de tôles assemblées
11. Ventilateur
12. Roulements à billes
13. Porte-balai
14. Balai
15. Pôle inducteur
16. Circuit inducteur
17. Conducteur d'alimentation de l'induit
18. Conducteur d'alimentation de l'inducteur

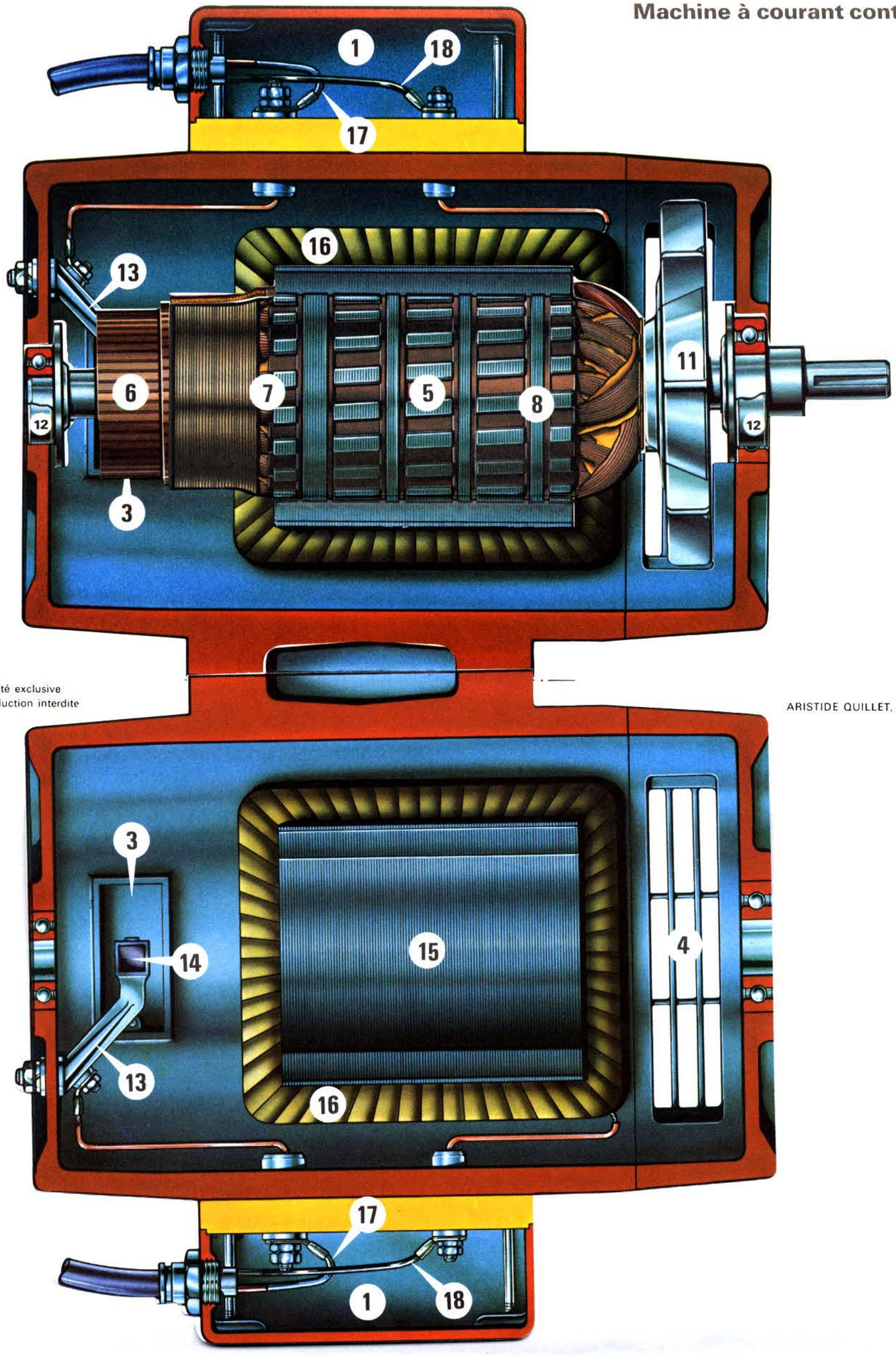
Machine à courant continu



Propriété exclusive
Reproduction interdite

ARISTIDE QUILLET, Éditeur

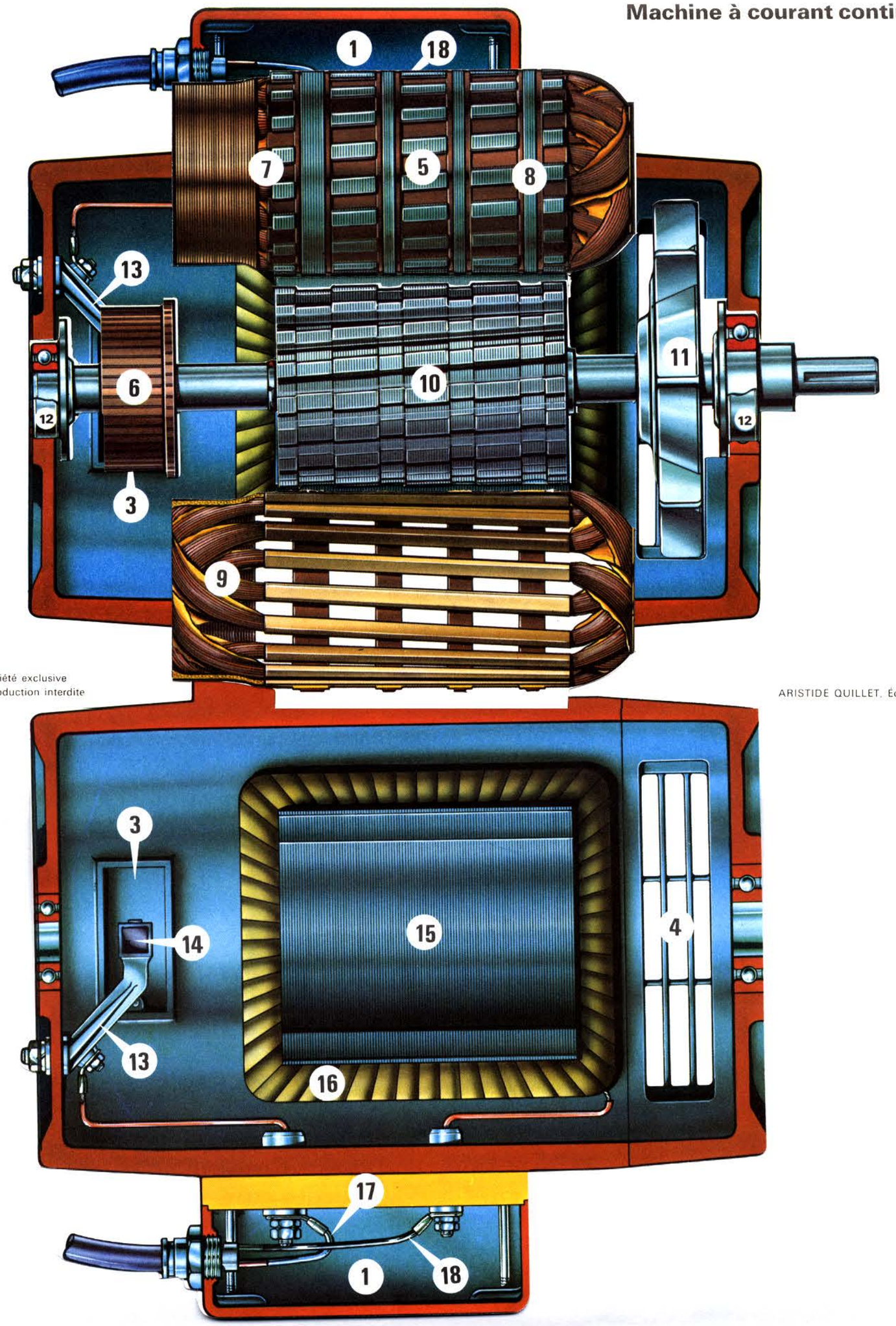
Machine à courant continu



Propriété exclusive
Reproduction interdite

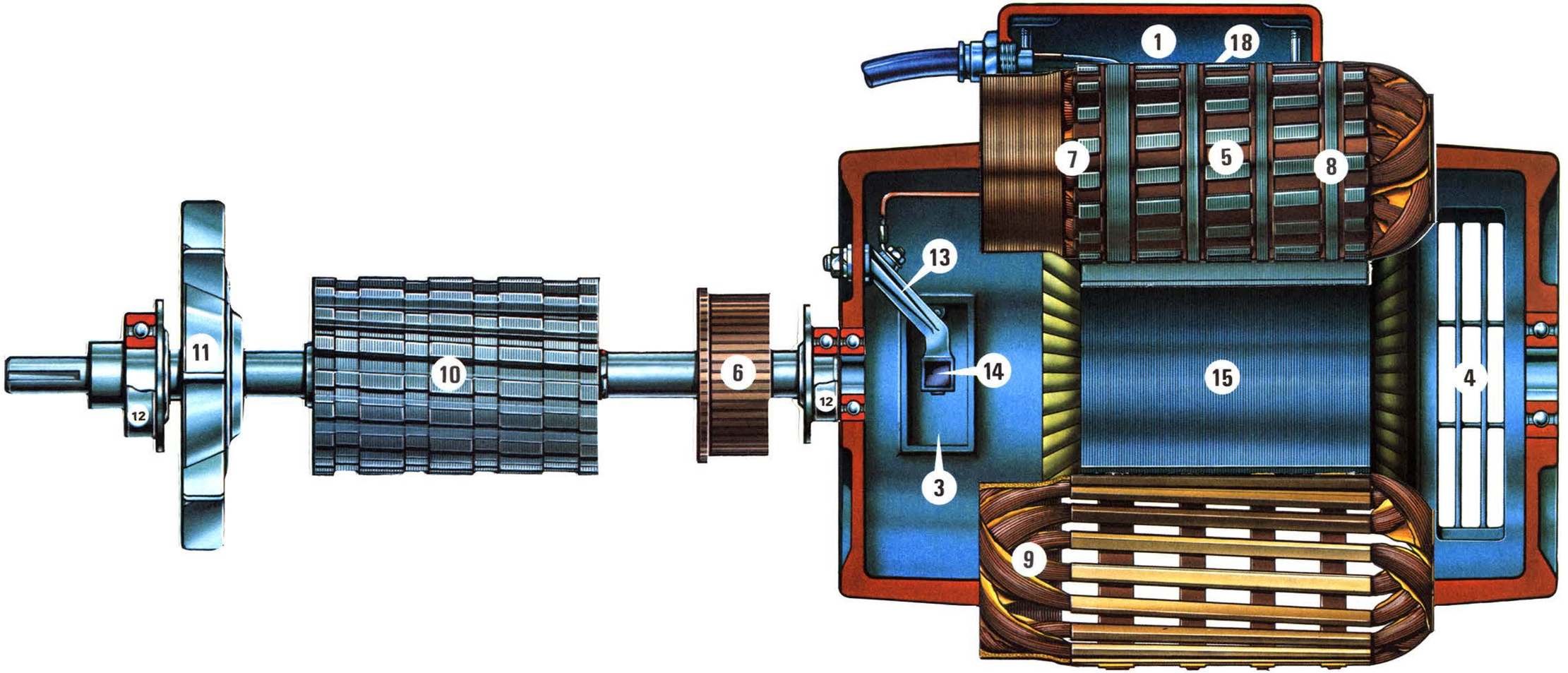
ARISTIDE QUILLET, Éditeur

Machine à courant continu



Propriété exclusive
Reproduction interdite

ARISTIDE QUILLET, Éditeur


1
18
7
5
8
13
14
15
4
3
9
11
10
6
12
12

18. APPLICATIONS

Le moteur à flux additif ne s'emballe pas à vide et sa vitesse baisse notablement quand sa charge augmente. Au décollage, il possède un couple supérieur à celui du moteur à excitation en dérivation. Il convient pour la commande de machines qui demandent un couple de démarrage élevé (motrice de traction, laminoirs, appareils de levage, étaux limeurs, raboteuses, treuils, calandres, cabestans, pompes à piston) et de celles dont le couple est très variable (cisailles, poinçonneuses, etc.).

Souvent, dans les petits moteurs à excitation en dérivation, dont l'entrefer est étroit (réaction magnétique importante) et qui ont tendance à s'emballer, le constructeur ajoute quelques spires-série (flux additif) pour stabiliser le fonctionnement.

Le moteur à flux soustractif n'est pratiquement pas utilisé en raison des risques d'emballement (lorsque le flux décroît dans de trop fortes proportions) et des risques d'inversion de polarité : lors de surcharges, le flux change de sens et le moteur devient un générateur en série avec la source (surintensités dangereuses).

CHAPITRE XVIII

MOTEUR À COURANT CONTINU MARCHE INDUSTRIELLE

DÉMARRAGE

1. PROBLÈME DE COUPLE - PROBLÈME DE COURANT

Comme dans le moteur asynchrone (V. chap. 12) le démarrage du moteur à courant continu pose un problème de couple et un problème de courant. Comme le moment du couple est proportionnel au flux et au courant ($T_e = \frac{N}{2\pi} \Phi I$) la solution consiste à faire en sorte que *durant le démarrage le flux Φ soit maximal et que la tension U aux bornes de l'induit soit suffisamment réduite pour que le courant dans l'induit soit supportable*. La réduction de la tension aux bornes du moteur s'effectue très généralement au moyen d'un *rhéostat* dit de *démarrage* qui est mis en série avec l'induit pour provoquer une chute de tension durant le démarrage. Pendant le fonctionnement normal il est éliminé du circuit.

2. RHÉOSTAT DE DÉMARRAGE DU MOTEUR À EXCITATION EN DÉRIVATION

Pour réaliser la condition de flux maximal il faut connecter l'enroulement inducteur directement *à la source* (fig. XVIII-1) afin qu'il soit toujours sous la tension maximale.

Le rhéostat de démarrage, en série avec l'induit est généralement *à plots*. Le calcul du nombre *n* de plots et des résistances entre plots se fait graphiquement en tenant compte des deux conditions suivantes :

— l'intensité du courant ne doit pas dépasser une valeur maximale I_{max} (elle est généralement comprise entre I_n et $2I_n$) pour éviter un échauffement exagéré ;

— l'intensité ne doit pas devenir inférieure à une valeur minimale I_{min} pour que le moment du couple moteur permette d'obtenir une accélération suffisante.

Au décollage la f.c.é.m. E' est nulle et il faut une résistance R_1 pour limiter l'intensité du courant à la valeur I_{max}.

$$I_{max} = \frac{U}{R_1} \quad (U \text{ étant la tension d'alimentation})$$

On déduit donc ainsi R_1 et la valeur Rh du rhéostat à placer en série avec l'induit (de résistance R_a)

$$R_1 = Rh + R_a \Rightarrow Rh = R_1 - R_a$$

Le moteur démarre sur le plot 1 (résistance totale R_1). Il prend de la vitesse : la f.c.é.m. E' croît et l'intensité du courant dans le moteur décroît. Lorsqu'elle devient égale à la valeur I_{min} il faut passer sur le plot 2 pour diminuer la résistance insérée dans le circuit et obtenir à nouveau le courant I_{max}.

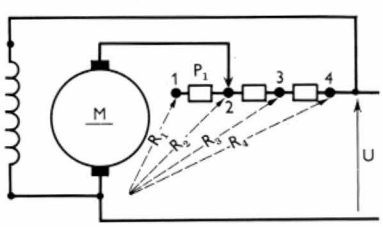


Fig. XVIII-1

Juste avant le changement de plot la f.c.é.m. est égale à E' (on néglige la réaction d'induit : $E'_v = E'_{ch} = E'$) et l'on peut écrire :

$$I_{min} = \frac{U - E'}{R_1}$$

Aussitôt après le changement de plot la vitesse ayant la même valeur qu'avant le changement, il en est de même de E', mais la résistance du circuit est alors égale à R_2 et l'intensité du courant est :

$$I_{max} = \frac{U - E'}{R_2} ; \quad \text{d'où :} \quad \frac{R_2}{R_1} = \frac{I_{min}}{I_{max}}$$

Le raisonnement précédent s'applique également au passage du plot 2 au plot 3, etc.

Donc on peut écrire : $\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_3}{R_2} = \frac{R_4}{R_3} = \frac{R_5}{R_4} = \frac{I_{min}}{I_{max}}$.

Les résistances R_1, R_2, R_3 sont donc en *progression géométrique* décroissante. Au lieu de les calculer, on préfère généralement les obtenir graphiquement (fig. XVIII-2) :

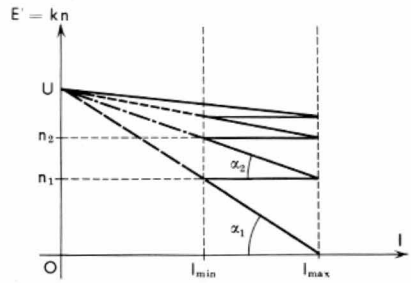


Fig. XVIII-2

On trace les droites représentant des équations de la forme $E' = U - R_n I$, R_n étant égal à R_1 si le curseur se trouve sur le plot 1, à R_2 s'il se trouve sur le plot 2, etc. Elles passent toutes par le point d'ordonnée égale à U. On observe que la décroissance du courant est linéaire pendant le temps où le curseur se trouve sur un plot. L'axe des ordonnées peut être gradué en volts (E') et aussi en vitesse (proportionnelles à E') : on peut ainsi déterminer directement les vitesses au moment des changements de plots.

Il faut noter que :

— les résistances successives R_1, R_2, ... jusqu'à la résistance finale R_a, sont données par les tangentes des angles α_1, α_2, etc. ;

— les résistances entre plots sont données par les différences $(R_1 - R_2)$, $(R_2 - R_3)$, etc.

Un rhéostat de démarrage est toujours dimensionné en tenant compte du fait qu'il sert peu de temps et qu'il est mis *hors circuit en marche normale*.

3. LE DÉMARREUR ET SES MONTAGES INCORRECTS

Un rhéostat de démarrage est généralement du type à plots, le nombre de plots étant fonction des limites maximale (I_{max}) et minimale (I_{min}) de l'intensité du courant au

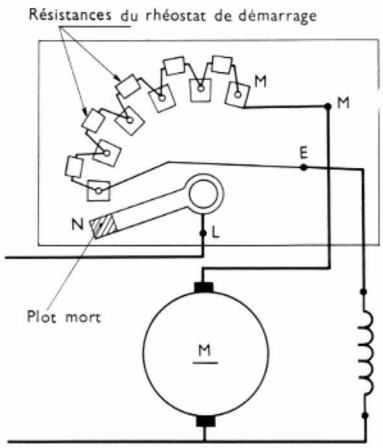


Fig. XVIII-3

Rhéostat de démarrage (moteur à l'arrêt)

cours du démarrage. Il peut être placé dans le montage comme l'indique la figure XVIII-3 qui est une autre représentation de la figure XVIII-1. Le rhéostat porte 3 bornes souvent désignées, sur les schémas, par les lettres *L*, *M*, *E*, afin de rappeler qu'il faut relier *L* à la ligne d'alimentation, *M* au moteur, *E* à l'inducteur (excitation).

La figure XVIII-4 donne le montage correct d'un rhéostat de démarrage dit *à minimum de tension*, c'est-à-dire comportant un électroaimant excité par le courant inducteur et attirant la manette du rhéostat. Si la tension devient trop faible ou si le circuit inducteur est coupé, le moteur ne peut s'emballer car le curseur est rappelé sur le plot mort *N* par un ressort et le moteur n'est plus relié au réseau.

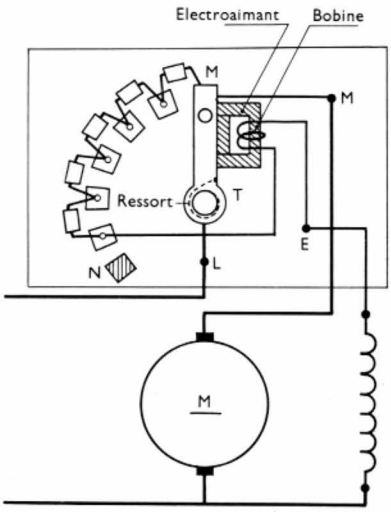


Fig. XVIII-4

Rhéostat de démarrage à minimum de tension (moteur en marche normale)

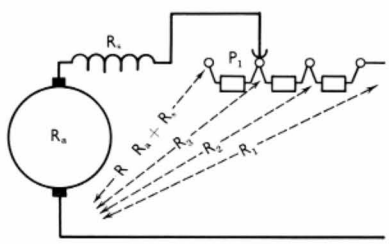


Fig. XVIII-7

Pour monter un rhéostat de démarrage, il faut se rappeler la règle fondamentale suivante: *la connexion directe à l'alimentation se fait à la borne commune à l'inducteur et à l'induit.*

Deux fautes peuvent être commises:

1° *La règle fondamentale n'est pas observée* et le schéma de montage équivaut à celui de la figure XVIII-5. Le démarrage commence normalement: la résistance R_d du rhéostat étant grande, la d.d.p. entre ses bornes est importante et un fort courant passe dans l'inducteur qui se trouve

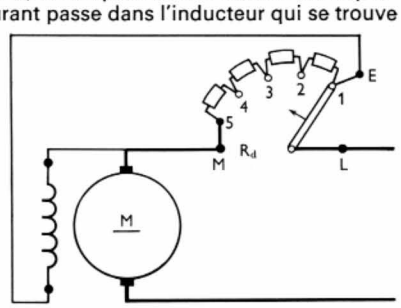


Fig. XVIII-5

Montage incorrect d'un rhéostat de démarrage

en parallèle avec ce rhéostat. Au fur et à mesure que R_d décroît, le moteur est sous-excité et il s'emballe (inducteur de plus en plus court-circuité) : il est impossible d'atteindre sans danger le dernier plot.

2° *Les connexions gros fils « ligne » et « moteur » ont été inversées.* — L'enroulement inducteur n'est pas connecté à la source, mais aux bornes de l'induit

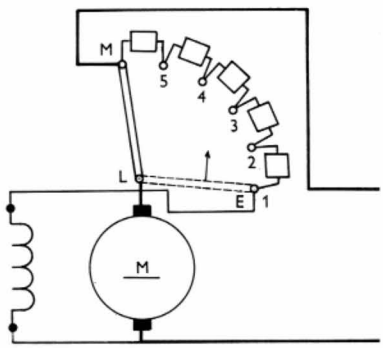


Fig. XVIII-6

(fig. XVIII-6). La tension aux bornes de l'inducteur est faible, ainsi que le courant d'excitation. Le moment du couple moteur peut être insuffisant pour le décollage ou le moteur risque de s'emballer. Cependant, cette erreur de montage n'a plus d'effet quand le démarrage est terminé (si on a pu le réaliser).

4. RHÉOSTAT DE DÉMARRAGE DU MOTEUR À EXCITATION EN SÉRIE

Il est branché comme l'indique la figure XVIII-7. Dans ce cas le flux Φ varie avec le courant I et la vitesse qui est égale à :

$$n = K\frac{U - R_x I}{\Phi}$$

varie *linéairement* en fonction de R_x lorsque le courant I est constant.

On trace donc deux droites $n(R_x)$ correspondant l'une

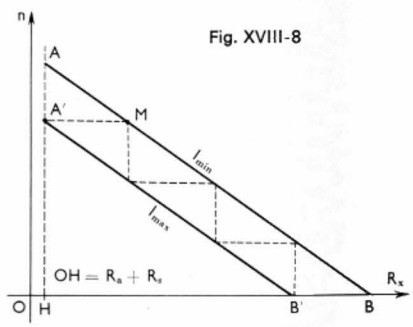


Fig. XVIII-8

à $I = I_{max}$, l'autre à $I = I_{min}$ (fig. XVIII-8). Elles sont déterminées chacune au moyen de deux points: *A* et *B* pour la première, *A'* et *B'* pour la seconde.

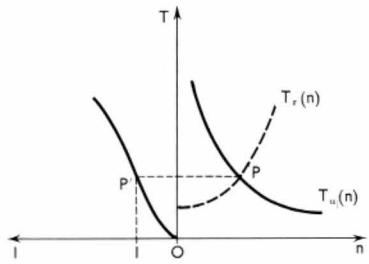
La caractéristique de vitesse $n(I)$ donne les vitesses correspondant à I_{max} et I_{min} lorsqu'il n'y a pas de rhéostat dans le circuit (c'est-à-dire lorsque $R_x = R_a + R_s$). Cela permet de placer les points *A* et *A'*. La loi d'Ohm donne les points *B* et *B'* : au décollage ($E' = 0$) $OB' = \dfrac{U}{I_{max}}$, la résistance R_x est égale à $\dfrac{U}{I_{min}}$ dans un cas et à $\dfrac{U}{I_{max}}$ dans l'autre cas. On trace ainsi *AB* et *A'B'*.

Comme la vitesse ne varie pas quand on passe d'un plot au suivant et comme R_x ne change pas tant qu'on ne change pas de plot, les résistances R_x successives sont données par les parties horizontales des marches d'escalier établies entre les droites *AB* et *A'B'* (la dernière s'arrêtant à *A'*).

RÉGLAGE DE LA VITESSE

Comme on l'a montré (V. chap. 3), la marche de régime d'un moteur qui entraîne une machine-outil est déterminée

Fig. XVIII-9



par les coordonnées du point de rencontre P (fig. XVIII-9) des caractéristiques $T_u(n)$ et $T_r(n)$. C'est dire que pour régler la vitesse sans toucher à la machine-outil, il faut déplacer la caractéristique $T_u(n)$ en modifiant l'un de ses paramètres : la *tension U* ou *l'excitation J*.

5. RÉGLAGE DE LA VITESSE PAR ACTION SUR LA TENSION D'ALIMENTATION

Le problème est le suivant : connaissant la caractéristique $T(n)$ sous la tension U, il faut déterminer la même caractéristique sous la tension U' différente de U.

Comme $T(n)$ s'obtient par élimination graphique de I entre les caractéristiques $n(I)$ et $T(I)$, le problème se ramène à la détermination de ces deux dernières caractéristiques lorsque la tension est égale à U'.

Les figures XVIII-10 à XVIII-14 montrent l'influence (facile à vérifier au moyen des formules donnant n et T) de la tension sur les caractéristiques d'un moteur dérivation et d'un moteur série. Un accroissement de tension se traduit par une augmentation de la vitesse.

Fig. XVIII-10

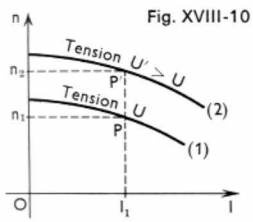


Fig. XVIII-11

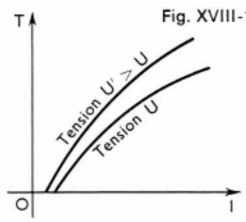
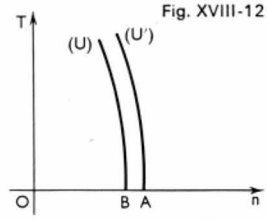


Fig. XVIII-12



Influence de la tension sur les caractéristiques d'un moteur à excitation en dérivation

Fig. XVIII-13

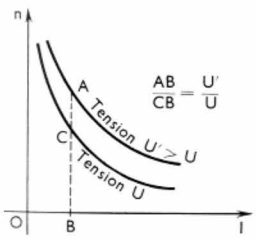
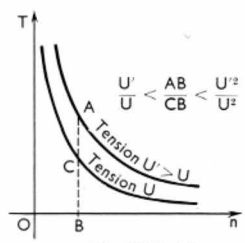


Fig. XVIII-14



Influence de la tension sur les caractéristiques d'un moteur série

Dans le cas où les variations de tension sont obtenues par *contrôle rhéostatique*, c'est-à-dire en provoquant une chute de tension dans un rhéostat de résistance x placé en série avec l'induit, la tension $U' = U - xI$ aux bornes du moteur *dépend de* I. Dans ce cas les caractéristiques précédentes doivent être déterminées *en partant d'un courant* I et l'on déduit ensuite la tension U' aux bornes du moteur. Le contrôle rhéostatique conduit à un gaspillage d'énergie (par effet Joule) dans le rhéostat et à un faible rendement. Sa simplicité justifie néanmoins son emploi (notamment en traction électrique) mais pour des variations de vitesse limitées.

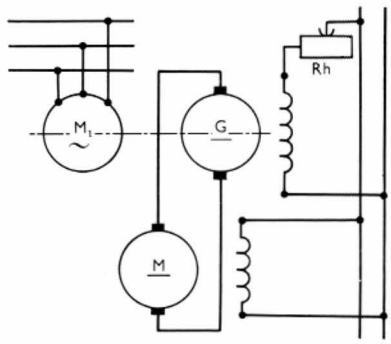


Fig. XVIII-15
Groupe Ward-Léonard

Quand ces variations sont importantes, on emploie le système Ward-Léonard (fig. XVIII-15). Il consiste à affecter une génératrice G (à excitation séparée) à l'alimentation du moteur M (à excitation séparée) dont on veut faire varier la vitesse. La génératrice G permet d'obtenir de larges variations de la tension U à ses bornes (V. chap. 16), donc aux bornes du moteur. Le système Ward-Léonard est extrêmement souple : il permet de démarrer très progressivement et de freiner en renvoyant de l'énergie dans le réseau (les rôles des trois machines sont inversés dans le freinage par récupération ; V. ci-après, § 9. Malgré son prix et la faiblesse de son rendement, ce système est fort employé : commande d'ascenseurs, de machines d'extraction, de grandes souffleries, d'automotrices (pas de boîte de vitesses ni d'embrayage), de téléphériques, de certaines machines-outils, etc.

De plus en plus on utilise également des alimentations à tension variable comportant des *thyristors* (V. t. 1, Électronique, chap. 11). Ces sources permettent d'obtenir une tension continue réglable de 0 à U ou de $-U$ à $+U$ selon le cas, en redressant les tensions de réseaux de distribution alternatifs. D'un emploi facile et souple, et caractérisées par un rendement élevé, ces alimentations tendent à remplacer l'ensemble moteur M-génératrice G des systèmes Ward-Léonard dans de nombreuses utilisations (machines-outils, laminoirs, souffleries, etc.).

6. RÉGLAGE DE LA VITESSE PAR ACTION SUR LE FLUX

Les expressions de n et de T montrent que, pour un *même courant d'intensité* I :

— la vitesse varie en raison inverse du flux,
— le moment du couple est proportionnel au flux.

On passe donc des caractéristiques $n(I)$ et $T(I)$ correspondant à un flux Φ_1 aux caractéristiques correspondant à un flux Φ_2 si l'on connaît le rapport $\frac{\Phi_2}{\Phi_1}$. Celui-ci est donné par la caractéristique à vide $E_v(J)$. Ce réglage est obtenu pratiquement au moyen d'un *rhéostat de champ* placé :

— en série avec l'inducteur pour un moteur dérivation,
— en parallèle avec l'inducteur pour un moteur série.

Ce mode de réglage est *simple, économique* (faible consommation d'énergie dans le rhéostat de champ) et il est fort employé. Mais ses limites de réglage de la vitesse sont assez étroites (au maximum dans le rapport de 1 à 3) parce que :

— du côté des faibles vitesses : il faut un flux important et le circuit magnétique se sature ;
— du côté des grandes vitesses : le flux est faible et l'on risque le calage par défaut de couple ($T = K\Phi I$).

7. COMPARAISON DES DEUX MODES DE RÉGLAGE DE LA VITESSE

Soit I_n l'intensité du courant *nominal* du moteur et U sa tension nominale. La puissance nominale absorbée (à ne pas dépasser) est égale à UI_n et, au rendement près on peut écrire :

$$UI_n = T_{\max} \cdot \omega$$

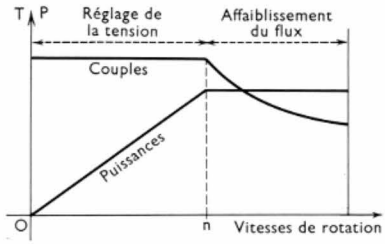


Fig. XVIII-16

À tension variable et flux constant *le couple maximal* (obtenu pour $I = I_n$: $T_{max} = K\Phi I_n$) *est constant* (indépendant de n). La puissance maximale que l'on peut faire fournir $T_{max}\,\omega = UI_n$ est donc proportionnelle à la vitesse.

À tension constante et flux variable la puissance maximale UI_n qui peut être obtenue est indépendante de n; le moment du couple maximal est inversement proportionnel à la vitesse. On perd sur le couple maximal ce que l'on gagne sur la vitesse. C'est ce que montrent les courbes (fig. XVIII-16) qui donnent, en fonction de la fréquence de rotation n, les moments des couples et les puissances que l'on peut, sans risque, demander à un moteur. Ces courbes font apparaître l'avantage majeur du réglage de la vitesse par action sur la tension: c'est un réglage à *couple maximal constant* tandis que ce couple est réduit dans le réglage par le flux.

FREINAGE ÉLECTRIQUE

On a déjà vu (V. chap. 12) que le freinage électrique consiste à faire fonctionner un moteur en générateur, son couple électromagnétique devenant le couple résistant pendant le freinage.

8. FREINAGE RHÉOSTATIQUE

Il consiste à faire fonctionner la machine en génératrice et à la faire débiter dans des résistances auxiliaires: l'énergie de freinage est ainsi perdue par effet Joule.

8.1. Machine dérivation. — L'inducteur est toujours relié à la source (fig. XVIII-17) et la résistance de débit R alimentée sous la tension U, est traversée par un courant d'intensité I. La puissance absorbée par R est égale à UI et le moment du couple résistant a pour valeur:

$$T_r = \frac{UI}{\omega} = \frac{KUI}{n} \quad (K \text{ étant une constante}).$$

D'où: $$T_r = KU \cdot \frac{U}{R} \cdot \frac{1}{n} = \frac{KU^2}{Rn}$$

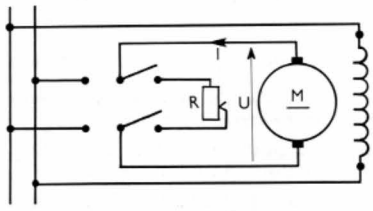


Fig. XVIII-17

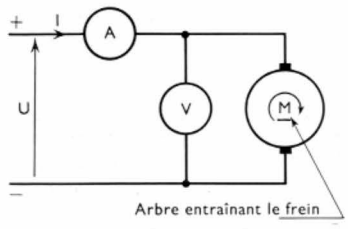


Fig. XVIII-18

Comme le flux Φ est constant, la f.é.m. E (et sensiblement U) sont proportionnels à n ($U = K'n$), et l'on a donc:

$$T_r = \frac{K(K'n)^2}{Rn} = K'' \frac{n}{R} \qquad (K'' = \text{Cte})$$

On peut donc conserver *constante la vitesse n* en maintenant le produit (T_rR) constant.

Par exemple, la *vitesse* de descente d'un monte-charge (le moment du couple moteur T_m est constant) est entièrement déterminée *par la résistance R* du rhéostat de freinage. Le réglage de cette vitesse est *précis*.

8.2. Machine série. — Elle est nécessairement auto-excitatrice. La règle des quatre variables (V. chap. 17) montre que pour *s'amorcer*, elle doit tourner dans le *sens opposé* au sens de rotation en moteur: cela convient donc pour le freinage d'une grue, d'un pont-roulant, d'un ascenseur, etc. Mais dans la traction électrique où il faut freiner alors que le sens de rotation n'a pas changé, il faut *croiser les connexions* entre l'inducteur et l'induit dès que l'on veut freiner, afin que la machine s'amorce.

9. FREINAGE AVEC RÉCUPÉRATION

Il consiste à renvoyer au réseau d'alimentation l'énergie électrique qui est produite par la génératrice de freinage.

9.1. Machine dérivation. — Il y a une vitesse n_0 pour laquelle la f.é.m. E de la machine est égale à la tension U du réseau: au-dessous de n_0, E est inférieur à U et la machine est motrice; au-dessus de n_0, E est supérieur à U et la machine se comporte en génératrice et débite dans le réseau. Ce phénomène est analogue à l'hyposynchronisme et à l'hypersynchronisme de la machine asynchrone (V. chap. 12). Cependant la machine dérivation étant peu utilisée dans les commandes où le freinage électrique s'impose, ce mode de freinage est *très peu employé*.

9.2. Machine série. — Le freinage avec récupération présente des difficultés car, lorsque le *courant I s'inverse*, la *polarité* de la machine série *s'inverse* également: elle se met en série avec le réseau (au lieu d'être en opposition avec lui) et cela donne lieu à un court-circuit brutal. En raison de ce risque on préfère brancher l'enroulement inducteur du moteur en *excitation séparée* dès que l'on veut (c'est le cas en traction électrique) réaliser le freinage électrique avec récupération.

RENDEMENT

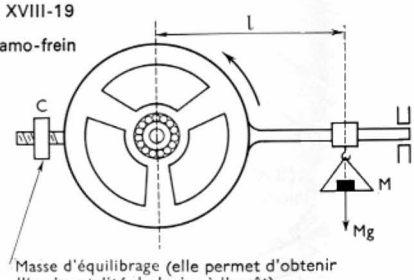
On a déjà établi la distinction entre le rendement *vrai* d'une machine et son rendement *approché* (V. chap. 2).

10. MESURE DU RENDEMENT VRAI

En *moteur* il faut mettre le moteur en charge (fig. XVIII-18). La puissance électrique *absorbée* est donnée par le produit UI des indications du voltmètre et de l'ampèremètre et pour mesurer la puissance mécanique *sur l'arbre* il faut disposer d'un *frein*. L'un des meilleurs est la *dynamo-frein*: c'est une dynamo dont chacun des paliers porte une bague à roulement à billes sur laquelle les flasques de la carcasse viennent prendre appui. Par ailleurs elle est munie d'un levier portant une masse M mobile, solidaire de la carcasse. Quand la dynamo-frein est entraînée par le moteur à essayer elle débite un courant (dans un rhéostat) et son stator tend à être entraîné dans le sens de rotation. On oppose à ce couple moteur, le couple résistant obtenu en plaçant convenablement la masse marquée sur le levier. Lorsque celui-ci est horizontal les moments de ces couples sont égaux au produit Mgl (fig. XVIII-19). On démontre qu'aux pertes par ventilation près (on les rend très faibles par construction) Mgl mesure le couple sur *l'arbre du moteur*. La puissance mécanique du moteur est donc donnée par la relation suivante:

Fig. XVIII-19

Dynamo-frein



$$P_m = T\omega = Mgl \frac{\pi n}{30}$$

(si n est exprimée en tours par minute).

Quand il s'agit de mesurer le *rendement d'une dynamo*, la machine-frein est utilisée en *moteur*: elle donne alors

le moment du couple sur l'arbre et l'on déduit facilement la puissance mécanique fournie à la dynamo en essai.

Dans le cas où l'on dispose de *deux machines identiques* on peut mesurer leur rendement en les manchonnant l'une à l'autre et en faisant débiter l'une (génératrice) dans l'autre (moteur). L'ensemble de leurs pertes doit être fourni soit par un moteur auxiliaire en bout d'arbre soit par un réseau dont la tension est égale à la tension nominale des machines (méthode de Rayleigh et Kapp).

11. MESURE DU RENDEMENT APPROCHÉ. MÉTHODE DU MOTEUR À VIDE

Elle consiste à déterminer les pertes *mesurables* (V. chap. 2) en faisant fonctionner la machine en moteur à vide, à *vitesse normale* et à *flux normal*. Dans cet essai, pour réaliser cette double condition, il suffit d'alimenter la machine sous la tension $U_0 = U_n + R_a I_a$ si l'on veut le rendement en générateur, $U_0 = U_n - R_a I_a$ si l'on veut le rendement en moteur (U_n: tension nominale, R_a: résistance de l'induit, I_a: courant dans l'induit choisi). En effet, dans les deux cas, la f.é.m. (liée à la vitesse et au flux) est celle que présente la machine lorsque l'intensité du courant dans l'induit est égale à I_a. On règle alors le courant d'excitation de façon à avoir la vitesse *normale*. La puissance électrique $U_0 I_0$ fournie à la machine (I_0 étant l'intensité du courant à vide) représente la somme des pertes mécaniques p_m et des pertes dans le fer p_{fer}. Il ne reste plus qu'à calculer les pertes par effet Joule qui se produisent en charge, dans le cuivre de l'induit, dans celui de l'inducteur et dans les rhéostats.

Dans l'expression du rendement, on *se donne* la puissance électrique UI (*utile* dans la marche en dynamo, *absorbée* dans la marche en moteur). On applique alors l'une des formules données par le tableau suivant:

La méthode du moteur à vide est facile à exécuter et d'application fréquente (fig. XVIII-20). Elle donne le rendement *par excès*. Elle convient pour des machines de *puissance moyenne* (quelques kilowatts à une centaine de kilowatts) et elle doit être rejetée pour des machines de faible puissance. Elle est souvent imposée dans les cahiers des charges comme méthode de contrôle à la réception de machines construites en série.

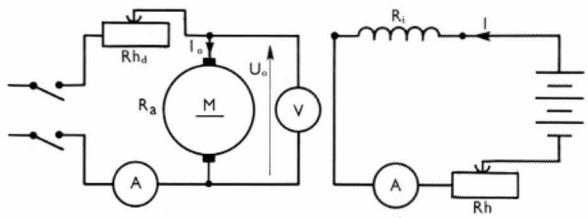


Fig. XVIII-20 — Montage utilisé pour la mesure du rendement approché d'une machine série

Dans les machines à courant continu, le rendement est *maximal* (V. chap. 2) au voisinage des 2/3 ou des 3/4 de la puissance nominale. Le tableau ci-dessous donne les valeurs approximatives du rendement maximal pour des machines de différentes puissances:

P en kilowatts	0,5	1	5	150	1 000
η	50-65 %	70-75 %	84-86 %	93 %	95 %

Machine à excitation en dérivation	Machine à excitation en série
Génératrice: $\eta = \dfrac{UI}{UI + (U_0 I_0 - R_a I_0^2) + R_a (I + J)^2 + UJ}$	Génératrice: $\eta = \dfrac{UI}{UI + [(U_0 I_0 - R_a I_0^2) + (R_a + R_i) I^2]}$
Moteur: $\eta = \dfrac{UI - [(U_0 I_0 - R_a I_0^2) + R_a (I - J)^2 + UJ]}{UI}$	Moteur: $\eta = \dfrac{UI - [(U_0 I_0 - R_a I_0^2) + (R_a + R_i) I^2]}{UI}$

CHAPITRE XIX
MOTEURS À COLLECTEUR

Ce sont des moteurs à *courants alternatifs* qui, grâce à l'addition d'un collecteur permettent un réglage de vitesse *dans de larges limites*.

MOTEURS MONOPHASÉS

Les moteurs monophasés ont soit une caractéristique *série*, soit une caractéristique *série-dérivation*, c'est-à-dire série au démarrage et dérivation en marche de régime (V. chap. 3).

1. MOTEUR SÉRIE MONOPHASÉ

Il a une caractéristique série.

1.1. Principe. — Le sens de rotation d'un *moteur-série* est le *même quel que soit le sens du courant d'alimentation*. Un moteur série à courant continu peut donc fonctionner lorsqu'on l'alimente sous une tension alternative. Cependant, comme son inductance L est grande il absorbe un faible courant, son facteur de puissance est faible ainsi que sa *puissance* (comparée à sa puissance en courant continu).

1.2. Constitution. — Pour en faire un moteur utilisable en courant alternatif il faut apporter certaines modifications:

1° On réduit L en diminuant surtout le nombre de spires du stator dont le circuit magnétique est le moins réluctant.

2° Le flux statorique s'en trouvant diminué, pour obtenir un couple suffisant on accroît le nombre de spires de l'induit (le moment du couple dépend du produit de ces deux grandeurs comme en courant continu); on dit parfois que le moteur est *tout en induit*.

3° On annule le flux rotorique par des enroulements compensateurs (V. chap. 15).

4° On calcule le moteur pour une *grande vitesse de rotation*: à puissance égale, le moment du couple est plus petit et, comme le dimensionnement du moteur est lié au couple, le moteur est plus petit et plus économique;

5° Le stator (soumis à un flux alternatif) est feuilleté; il peut être à pôles *saillants* (jusqu'à 0,25 kW) ou à pôles *lisses* (puissances supérieures). Dans ces derniers moteurs, le stator est analogue à celui d'un alternateur monophasé, tandis que le rotor est celui d'une machine à courant continu.

La puissance de ce moteur est limitée par les difficultés d'une bonne commutation (V. chap. 15) et par la réalisation d'une compensation satisfaisante.

1.3. Caractéristiques. — Ce sont sensiblement celles du moteur série à courant continu (fig. XIX-1). Au fur et à mesure que la vitesse *augmente :* le courant absorbé, le couple et le déphasage *décroissent* mais la *puissance* croît, passe par un *maximum* puis décroît. D'autres courbes peuvent être utiles en exploitation, ce sont celles qui fournissent la vitesse n, le facteur de puissance cos φ, la puissance P et le rendement η en fonction de l'intensité efficace du *courant absorbé* (fig. XIX-2).

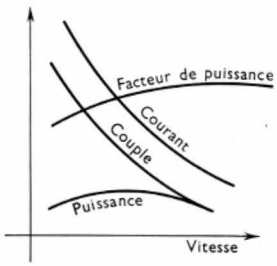


Fig. XIX-1

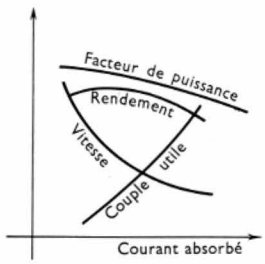


Fig. XIX-2

1.4. Applications. — Le moteur série monophasé est utilisé :

— Comme petit *moteur universel*, c'est-à-dire fonctionnant indifféremment sur réseau continu et sur réseau alternatif. Les caractéristiques $T(n)$ sont cependant moins favorables en courant alternatif. La figure XIX-3 donne ces caractéristiques en continu et en alternatif pour deux moteurs qui ont le même couple nominal.

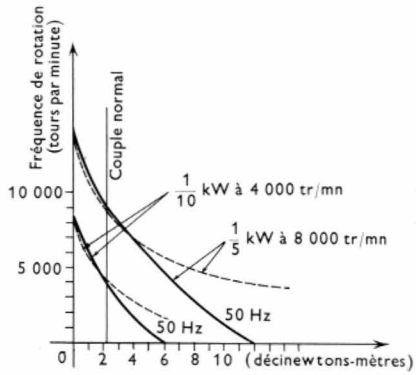


Fig. XIX-3

Caractéristique $n(T_u)$ pour un moteur série monophasé :
— à 50 Hz
---- en courant continu

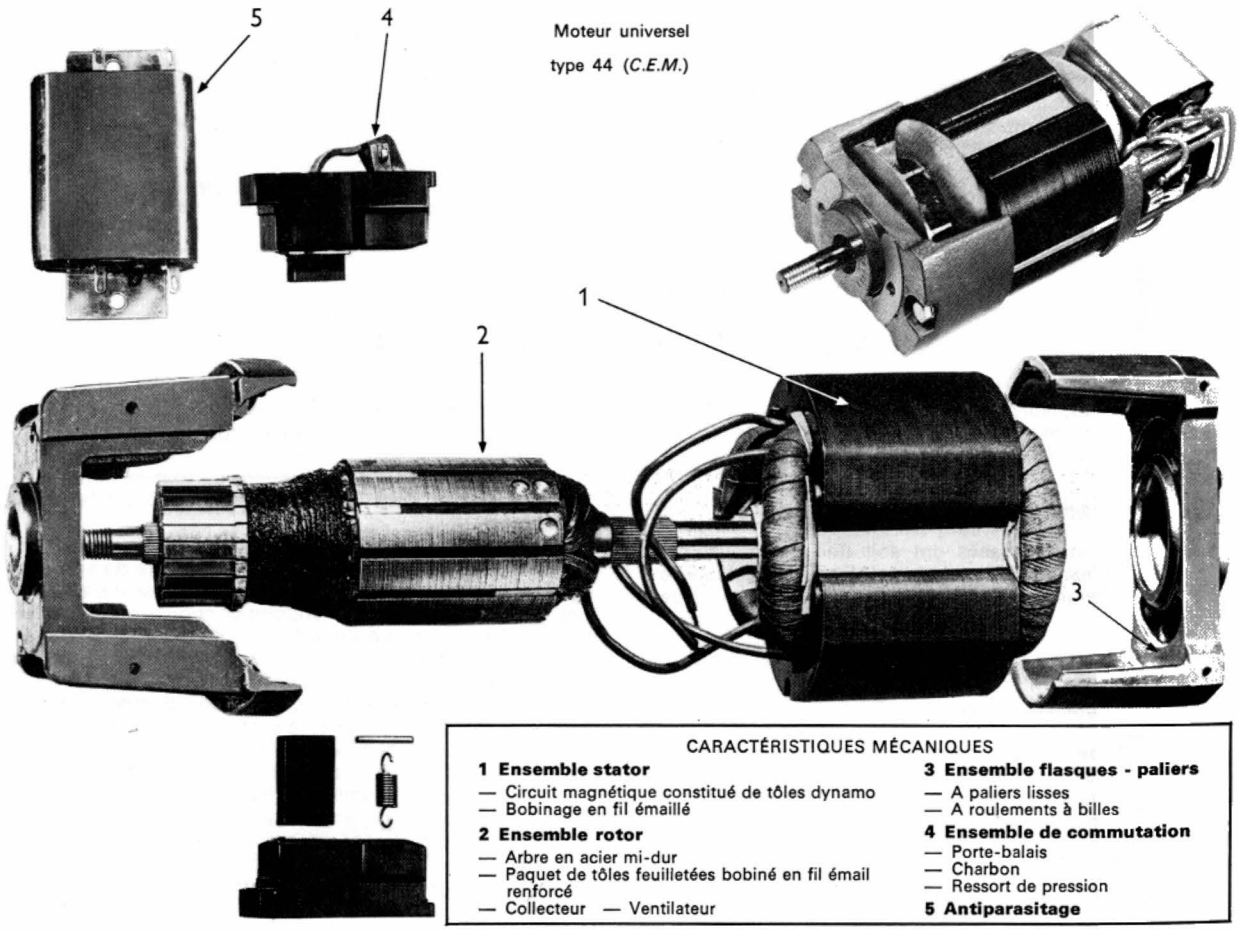
Il faut souligner que le vrai domaine du moteur universel est le *régime intermittent* (l'usure des balais est importante et il faut obligatoirement l'antiparasiter). C'est pourquoi il convient à la commande des appareils électrodomestiques, des outils portatifs ou bien comme servomoteurs.

— Comme *moteur de traction* depuis que l'on alimente les caténaires par du courant alternatif à haute tension. Le démarrage et le réglage de la vitesse s'effectuent aisément par action sur les prises d'un transformateur qui est porté par l'automotrice et qui alimente le moteur série.

2. MOTEUR À RÉPULSION

C'est un moteur qui a également une caractéristique série.

2.1. Principe. — L'inducteur d'un moteur bipolaire peut être alimenté par un courant alternatif, tandis que



Moteur universel type 44 (*C.E.M.*)

CARACTÉRISTIQUES MÉCANIQUES

1 Ensemble stator
— Circuit magnétique constitué de tôles dynamo
— Bobinage en fil émaillé

2 Ensemble rotor
— Arbre en acier mi-dur
— Paquet de tôles feuilletées bobiné en fil émail renforcé
— Collecteur — Ventilateur

3 Ensemble flasques - paliers
— A paliers lisses
— A roulements à billes

4 Ensemble de commutation
— Porte-balais
— Charbon
— Ressort de pression

5 Antiparasitage

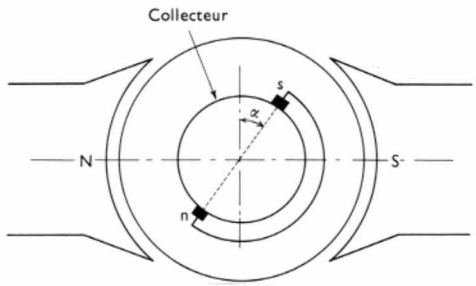


Fig. XIX-4

les *balais*, décalés d'un angle α par rapport à la ligne neutre théorique, sont mis en *court-circuit* (fig. XIX-4). Quand le rotor est à l'arrêt, l'enroulement qu'il porte est *parcouru par un courant induit*. Ce circuit constitue le *secondaire* d'un transformateur dont l'enroulement *inducteur* est le primaire. Ces courants primaire et secondaire sont pratiquement en *opposition de phase* (V. chap. 5).

Mais l'induit est un électroaimant dont le flux est dirigé *suivant la ligne des balais*. C'est dire que ses pôles nord et sud sont en *n* et *s* suivant cette ligne (V. chap. 15). Les pôles inducteurs nord (*N*) et sud (*S*) sont dans l'axe de l'enroulement inducteur. Des forces répulsives entre *N* et *n*, *S* et *s* prennent naissance; elles ont des composantes tangentielles dans le sens *opposé au décalage* des balais: un couple s'exerce sur le rotor et provoque sa rotation.

On voit que, par l'action sur le calage des balais, on peut agir sur le sens de rotation du moteur et sur le moment de son couple.

2.2. Fonctionnement. Caractéristiques. — L'étude théorique du moteur à répulsion conduit aux résultats suivants confirmés par l'expérience:

1° *À calage constant des balais*, ses caractéristiques sont celles du moteur série monophasé.

2° *À calage variable :*

a) le *courant absorbé* est minimal au démarrage pour $\alpha = 0$ et en marche pour $\alpha = 45°$ (angles électriques),

b) le *couple* est maximal au démarrage pour $\alpha = 70°$ et en marche (à courant constant) pour $\alpha = 45°$,

c) la *vitesse* (à couple constant) suit la même loi de variation que le moment du couple. À couple constant on a donc la possibilité de *régler la vitesse* par le *décalage des balais*.

Le *facteur de puissance* est *maximal* pour $\alpha \approx 70°$ quel que soit le couple.

En définitive, en marche, le décalage des balais le plus favorable est compris entre 65° et 70° (angle électrique).

La *commutation* étant *bonne* au voisinage de la vitesse de synchronisme, on peut utiliser le moteur à répulsion sur un réseau à *moyenne fréquence*.

2.3. Moteur Déri. — Une variante fréquente du moteur à répulsion est le moteur *Déri* qui comporte *deux lignes de balais* (*AB* et *A'B'*) par paire de pôles (fig. XIX-5). On voit qu'il ne passe de courant que dans les portions *A'B* et *B'A* de l'induit; ce moteur équivaut à un moteur ordinaire dont le décalage serait:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi - \gamma}{2}\right) = \frac{\gamma}{2}$$

Tout se passe donc comme si le décalage des balais était *deux fois plus grand* que dans le moteur réel; cela permet un réglage plus souple de la vitesse.

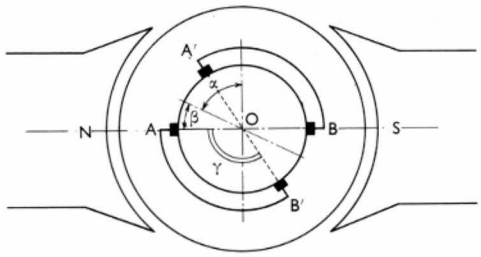
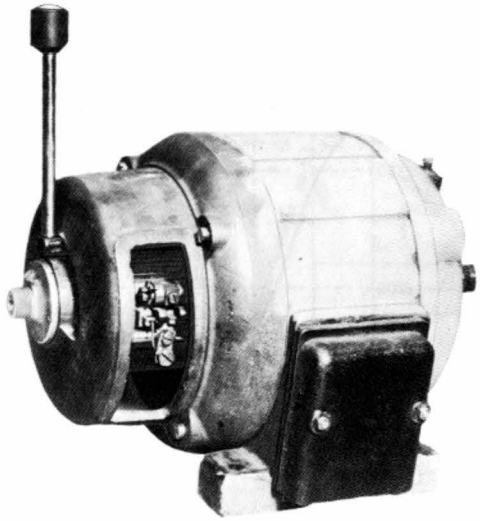


Fig. XIX-5



Moteur monophasé à répulsion et à réglage de vitesse (*E.N.C.O.*)

2.4. Applications. — Il sert à la commande des appareils qui s'accommodent d'une caractéristique série et qui exigent, soit un fort couple de démarrage, soit une vitesse réglable en charge (pompes à commande automatique, ascenseurs, monte-charge, métiers à filer, vannes, appareils de manutention mécanique de faible puissance, machines à percer sensitives, centrifugeuses, etc.).

3. MOTEUR À RÉPULSION - INDUCTION

3.1. Principe. — Ce moteur fonctionne en répulsion uniquement au démarrage. Un peu avant que la vitesse de régime soit atteinte, un court-circuiteur centrifuge (fig. XIX-6 et XIX-7) intervient pour mettre en court-circuit toutes les lames du collecteur et transformer ainsi le moteur en *véritable moteur asynchrone*.

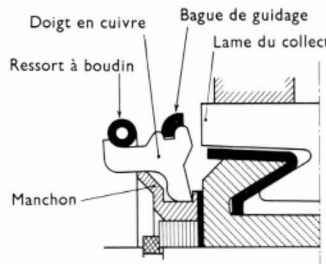


Fig. XIX-6

Position arrêt

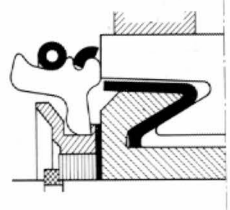
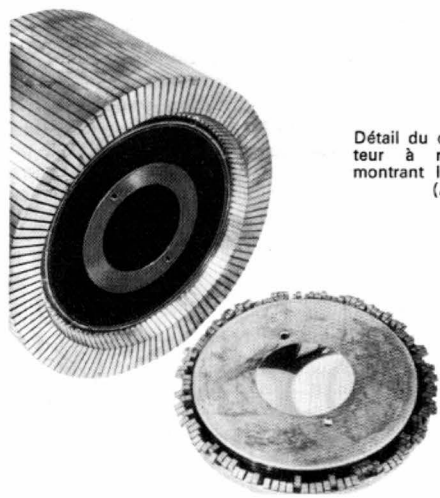


Fig. XIX-7

Position marche normale



Détail du coupleur d'un moteur à répulsion-induction montrant les doigts mobiles (*E.N.C.O.*)

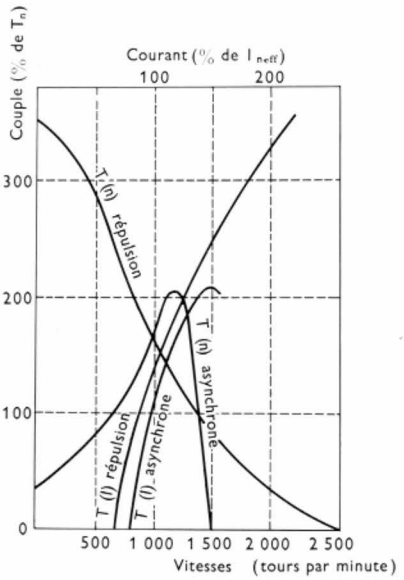


Fig. XIX-8

Ce n'est que dans le cas de fortes surcharges (accompagnées de ralentissement) que le moteur reprend son fonctionnement en répulsion.

Pour les deux modes de fonctionnement possibles, la figure XIX-8 donne les caractéristiques d'un moteur répulsion-induction (4 pôles) dont le court-circuiteur fonctionne dès que la fréquence de rotation atteint 1000 tr/mn.

3.2. Propriétés. Applications. — Il est caractérisé par un fort couple au décollage ($T_d = 3{,}75\ T_n$ pour $I_{d\,\text{eff}} = 2{,}2\ I_{n\,\text{eff}}$). Sa vitesse varie peu tant que le moment du couple ne dépasse pas 1,5 fois le couple nominal. Sa stabilité est grande grâce à sa possibilité de fonctionner en répulsion. Il n'émet pas de parasites radiophoniques. L'usure des balais est réduite au minimum (ils ne sont utilisés qu'au moment du démarrage). Le moteur répulsion-induction est d'un emploi fréquent dans la commande des machines-outils qui tournent souvent *à vide* et dont *l'emballement* est à *éviter* (machines à bois, machines agricoles, pompes, compresseurs, petits broyeurs, etc.). Mais son prix reste élevé par rapport au moteur à condensateur (V. chap. 13) qui a sensiblement les mêmes applications.

MOTEURS TRIPHASÉS À COLLECTEUR

Ces moteurs se rencontrent de plus en plus rarement dans l'industrie et c'est pourquoi on ne leur consacre qu'un faible développement.

4. ROTOR À COLLECTEUR (ET BAGUES)

Un induit de machine à courant continu tournant dans un simple stator feuilleté comporte trois prises à 120° les unes des autres. Ces prises sont reliées à des bagues calées sur l'arbre. Sur le collecteur frottent trois balais disposés à 120° les uns des autres. La figure XIX-9 en donne une représentation schématique : l'induit est figuré par un anneau et les balais appuyent directement sur les spires de l'induit. On alimente cet enroulement en reliant

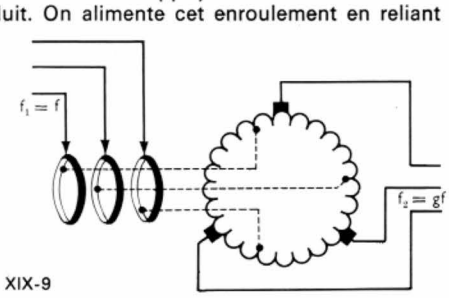


Fig. XIX-9

les bagues à un réseau triphasé (fréquence f_1). Les trois bobines en triangle que constituent les trois portions du rotor (entre les prises) engendrent un flux glissant (une paire de pôles fictifs). Ce flux se déplace avec une vitesse égale à :

$$\Omega = \frac{\omega}{1} = 2\,\pi\,f_1 = 2\,\pi \times 50 \text{ rad/s}$$

ce qui correspond à une fréquence de rotation de 3 000 tr/mn si $f_1 = 50$ Hz.

Au moyen d'un moteur auxiliaire on entraîne le rotor, dans le *sens inverse* de ce flux glissant, à une vitesse Ω' correspondant à une fréquence de rotation de 2 900 tr/mn. Comme la polarité d'un balai ne dépend que de sa position par rapport au flux inducteur, cette polarité varie à la fréquence f_2 correspondant à la vitesse $(\Omega - \Omega')$ soit : $f_2 = f_1 \dfrac{\Omega - \Omega'}{\Omega} = 50 \cdot \dfrac{100}{3\,000} = 1{,}66$ Hz. La quantité $\dfrac{\Omega - \Omega'}{\Omega}$ correspond au glissement g du rotor par rapport au flux statorique. La fréquence de la *tension entre balais* est donc égale à g fois la fréquence de la d.d.p. appliquée entre les bagues (comme la fréquence des courants rotoriques d'un moteur asynchrone alimenté sous une tension de fréquence f_1).

Remarque : Les rôles des balais et des bagues peuvent être inversés : si la tension entre balais a une fréquence égale à f_1 celle entre bagues devient égale à gf_1.

5. PRINCIPE DU MOTEUR TRIPHASÉ À COLLECTEUR

On suppose qu'un moteur asynchrone entraîne un rotor à collecteur. Entre les trois bagues on applique une fraction de la tension d'alimentation du moteur asynchrone grâce à un transformateur (fig. XIX-10). La fréquence de cette tension est 50 Hz. Les glissements des deux moteurs sont égaux : la fréquence gf de la tension entre balais du moteur triphasé à collecteur est égale à la fréquence des courants rotoriques du moteur asynchrone (glissement : g) qui l'entraîne.

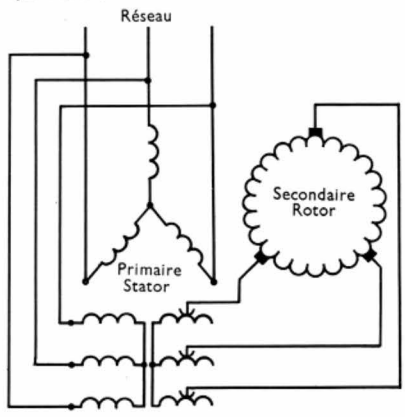


Fig. XIX-10

Si l'on relie donc les balais du rotor à collecteur aux bagues du moteur asynchrone, on applique au rotor de ce moteur des tensions qui ont automatiquement la fréquence des f.é.m. rotoriques du moteur asynchrone. On peut modifier la *valeur efficace* de ces f.é.m. (par la tension d'alimentation appliquée aux bagues du rotor à collecteur) et la *phase* en modifiant le calage des balais. C'est dire que l'on réalise les conditions du réglage de la vitesse du moteur asynchrone sans gaspiller l'énergie de glissement dans un rhéostat (V. chap. 12). Dans le moteur à collecteur elle est renvoyée *au réseau*.

Pratiquement le moteur asynchrone et le rotor à collecteur sont réunis dans une même machine. Comme les rôles des balais et des bagues peuvent être inversés, on alimente le rotor soit par les bagues soit par les balais. Il existe des moteurs triphasés à collecteur à *caractéristique dérivation ;* ils permettent de démarrer avec un bon couple,

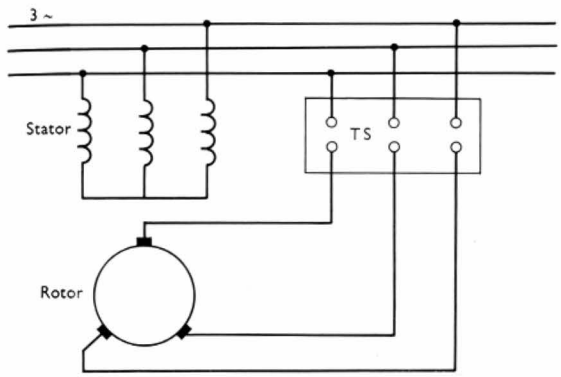


Fig. XIX-11

sans surintensité, de régler la vitesse dans de larges limites et de façon économique, de fonctionner sans observer de variation de vitesse avec la charge lorsque celle-ci a été réglée initialement. Ils servent à la commande de calandres, machines à papier, métiers à tisser, ventilateurs centrifuges, pompes centrifuges, ascenseurs, etc. Leur montage est donné par la figure XIX-11.

Il existe aussi des moteurs triphasés à collecteur à *caractéristique série*. Ils conviennent à la commande de machines dont le couple résistant croît avec la vitesse et a une valeur bien définie pour chaque vitesse : presses d'imprimerie, rotatives, transbordeurs, certaines machines-outils, etc. Les figures XIX-12 et XIX-13 donnent le montage de ces moteurs sous de basses tensions ou sous des tensions moyennes ou élevées. La figure XIX-14 représente les caractéristiques $n(T)$ pour différents calages des balais.

Les facilités offertes par les thyristors pour redresser une tension alternative et pour transformer un courant continu en courant alternatif de fréquence réglable (onduleur) ont fait peu à peu décroître l'intérêt du moteur triphasé à collecteur. C'est pourquoi cette machine tend à disparaître.

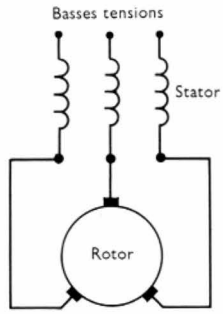


Fig. XIX-12

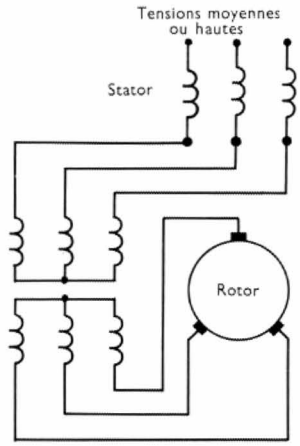


Fig. XIX-13

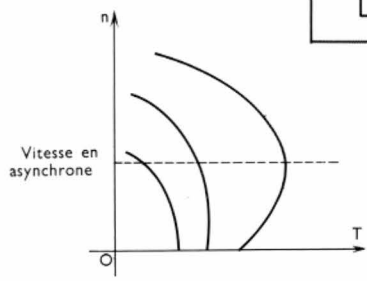


Fig. XIX-14 — Caractéristiques n(T) lorsque la position des balais est modifiée

CHAPITRE XX

PETITES MACHINES UTILISÉES DANS LES SERVOMÉCANISMES

1. PARTICULARITÉS DE CES MACHINES

1° *Leur puissance et leur rendement sont faibles ;* celui-ci n'a pas d'importance pratique.

2° La *réaction d'induit* (en raison des faibles courants) est *négligeable* et la commutation ne pose pas de problème.

3° *Aucun emballement n'est à craindre dans les moteurs série* grâce à l'adjonction d'un ventilateur.

4° Le *couple a une importance majeure :* c'est lui qui détermine le dimensionnement et le prix de la machine.

5° L'inertie du rotor joue un rôle *important*, ainsi que les constantes de temps en raison des grandes accélérations souvent nécessaires.

6° Le *régime de fonctionnement très variable* oblige à prévoir un cycle de fonctionnement et à vérifier si la machine ne dépasse pas les températures permises au cours de cycles indéfiniment répétés.

Ces machines peuvent être divisées en trois catégories :

— les *petites machines spéciales* qui asservissent la vitesse ou le couple à une grandeur d'utilisation,

— les *génératrices tachymétriques* qui ramènent la mesure d'une vitesse à celle d'une grandeur électrique,

— les *télétransmetteurs* qui reproduisent à distance des grandeurs d'utilisation.

PETITES MACHINES SPÉCIALES

2. MOTEUR DIPHASÉ D'ASSERVISSEMENT

2.1. Caractéristiques. — C'est un moteur asynchrone (fig. XX-1) qui présente les caractéristiques suivantes :

1° L'un des deux courants inducteurs a une amplitude *constante*, tandis que celle de l'autre est *réglable* de zéro à un maximum égal à l'amplitude du premier.

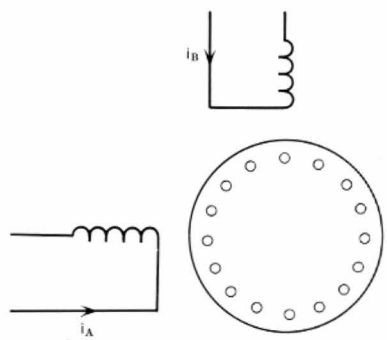


Fig. XX-1

2° Le rotor à cage est *très résistant ;* en première approximation cela permet d'admettre que la *courbe $T(n)$ est une droite* dans toute la gamme des vitesses (fig. XX-2).

Le déséquilibre des tensions appliquées aux deux enroulements provoque un couple *direct* (dans le sens de la

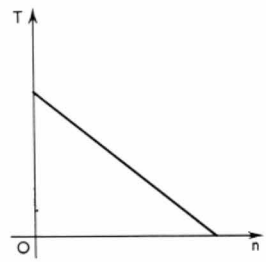


Fig. XX-2

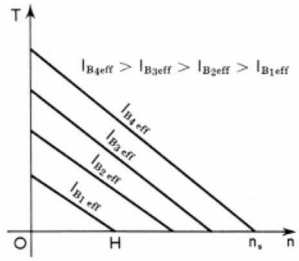


Fig. XX-3

rotation) et un couple *inverse* dans le sens opposé (V. chap. 1). Si $I_{A\,\text{eff}}$ désigne l'intensité efficace du courant dont l'amplitude est constante et $I_{B\,\text{eff}}$ celle de l'autre courant, on montre que :

— le moment du couple à l'arrêt est proportionnel à $I_{B\,\text{eff}}$ (courant d'amplitude variable),

— la vitesse à vide peut être très inférieure à la vitesse de synchronisme n_s,

— pour les *faibles vitesses*, les caractéristiques $T(n)$, tracées pour des valeurs de $I_{B\,\text{eff}}$ constantes, sont *pratiquement parallèles*. Dès lors, pour équation de ces courbes, on peut adopter l'expression suivante : $T = K_1 I_{B\,\text{eff}} - K_2 n$ (K_1 et K_2 désignant des constantes) (fig. XX-3).

2.2. Applications. — Le moteur diphasé d'asservissement est peu coûteux, car il est très simple. Robuste, ne nécessitant aucun entretien, il est très souvent utilisé dans les servomécanismes.

Dans les applications où il doit présenter une faible inertie on lui donne une forme particulière : le rotor, cylindre creux en cuivre, est engagé dans l'entrefer entre le stator bobiné et un noyau magnétique central feuilleté (*moteur cloche*).

3. MOTEUR À HYSTÉRÉSIS

3.1. Principe. — Les pertes par hystérésis sont proportionnelles au *nombre de cycles par seconde :* dans un moteur asynchrone elles sont égales à :

$$P_H = K_H\,(\Omega_r - \Omega_s) \quad (K_H \text{ étant une constante}).$$

Elles représentent toujours une dépense de puissance. Dès lors le couple correspondant dont la valeur est : $C_H = \dfrac{P_H}{\Omega_r - \Omega_s}$ change de signe en même temps que $(\Omega_r - \Omega_s)$ puisque P_H est un nombre toujours positif. Donc au *passage par la vitesse de synchronisme le couple s'inverse* (fig. XX-4). Physiquement, ce couple s'explique

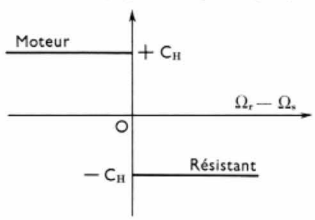
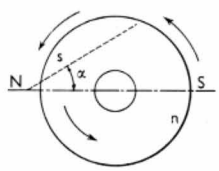


Fig. XX-4



α : angle hystérétique

Fig. XX-5

par le fait que, lorsque les pôles fictifs statoriques nord (*N*) et sud (*S*) tournent dans le sens indiqué (fig. XX-5) l'induction est plus grande dans les zones du rotor où le champ décroît que dans les zones du rotor où le champ croît (fig. XX-6). Les pôles fictifs rotoriques (*s*) et (*n*) ne sont plus sur l'axe *NS* : les attractions réciproques entre *N* et *s* d'une part, entre *S* et *n* d'autre part, ont une composante tangentielle. Cela explique l'entraînement du rotor par les pôles fictifs statoriques *N* et *S*.

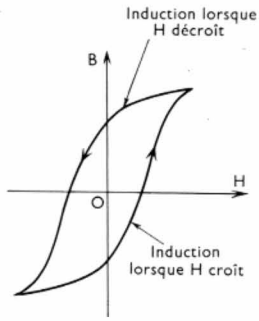


Fig. XX-6

3.2. Constitution. — Le stator est celui d'un moteur polyphasé ordinaire. Le rotor peut être un simple cylindre ou bien il peut comporter des pôles saillants. Les particularités de construction sont les suivantes :

— le matériau constituant le rotor doit avoir un *cycle d'hystérésis* large (cycle de grande aire). C'est en choisissant ce matériau (induction rémanente, champ coercitif) que l'on donne au moteur les caractéristiques optimales eu égard à l'utilisation (couple, courant de décollage) ;

— l'*entrefer* doit être *extrêmement faible* (pas de champ inverse) ; la construction *mécanique* doit donc être *extrêmement précise*.

Le bobinage du stator étant délicat, parfois on inverse les rôles du stator et du rotor : celui-ci porte alors l'enroulement alimenté par l'intermédiaire de bagues.

3.3. Synchronisation automatique. — Quand le rotor a un faible glissement, un couple asynchrone s'ajoute au couple hystérétique et la courbe $T(n)$ n'est pas rigoureusement rectangulaire (fig. XX-7).

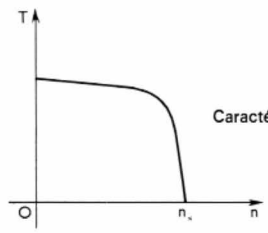


Fig. XX-7

Caractéristique mécanique d'un moteur à hystérésis

Cependant, si le couple résistant est faible (glissement particulièrement faible), le rotor, aimanté par les pôles fictifs du stator et doué d'un fort champ coercitif, ne change pas de sens d'aimantation : il « s'accroche » spontanément sur le flux du stator. Le moteur se *synchronise automatiquement*.

3.4. Propriétés et applications. — Le moteur à hystérésis est très employé pour les *faibles puissances* (inférieures à 100 W) car :

— il démarre seul,
— il se synchronise automatiquement,
— son couple moteur est constant,
— l'intensité du courant au démarrage est faible,
— au moment d'une brusque variation de couple les surintensités restent limitées,
— il ne nécessite aucun entretien,
— il est robuste électriquement et mécaniquement.

Malgré son prix relativement élevé (du fait de la précision mécanique) il sert en horlogerie (chronométrie), dans les industries textiles et particulièrement pour la commande des cabestans de magnétophones.

4. MOTEUR PAS À PAS

Le moteur pas à pas permet de réaliser des rotations brusques, limitées, et éventuellement périodiques (comme l'échappement dans une horloge, par exemple).

4.1. Principe. — Le rotor cylindrique est un aimant permanent constitué par un alliage *hypercoercitif* (c'est-à-dire de très grand champ coercitif) ; il peut conserver son sens d'aimantation même s'il se trouve dans des champs opposés à celui qu'il produit. Il y a deux stators aimantés par des courants fournis par un générateur de courant continu ; le sens de ces courants peut être inversé par l'intermédiaire d'un inverseur mécanique ou d'un commutateur électronique.

Les figures XX-8 à XX-10 donnent le principe de fonctionnement d'un moteur bipolaire dit « à quatre phases ». Le rotor conserve toujours la même polarité et, à chaque

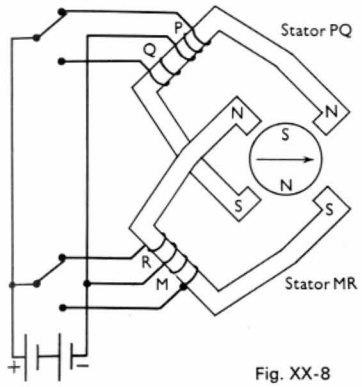


Fig. XX-8

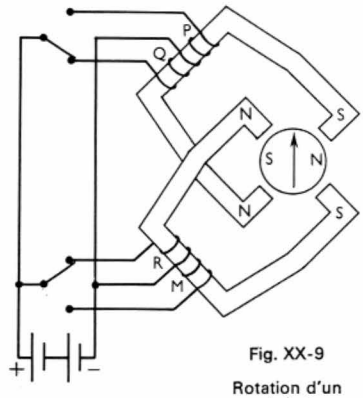


Fig. XX-9

Rotation d'un quart de tour

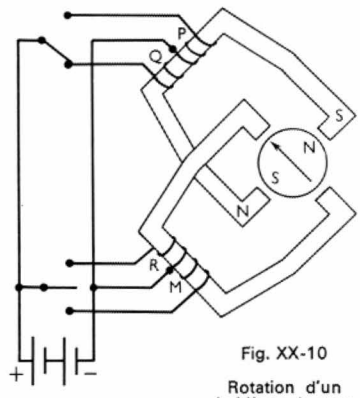


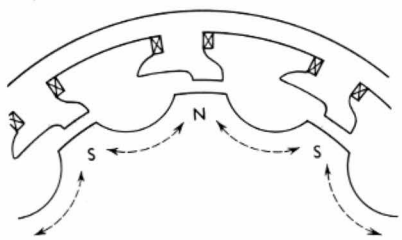
Fig. XX-10

Rotation d'un huitième de tour

inversion de courant (ou rupture) dans les bobines *MR* et *PQ*, il se déplace d'une fraction de tour appelée *pas*. Ainsi il occupe constamment la position correspondant à la réluctance minimale.

En général le rotor solidaire de l'axe n'est pas bipolaire : il comporte de nombreuses paires de pôles (12 ou plus) en ferrite de baryum distribués sur la circonférence (fig. XX-11).

Fig. XX-11



4.2. Caractéristiques. — La caractéristique $T(n)$ a l'allure donnée par la figure XX-12. Une autre caractéristique est importante : c'est la courbe qui donne la déviation à partir de la position de maintien lorsque le moteur passe de l'état sans charge (position définie dite « zéro ») à celui avec charge appliquée (fig. XX-13) ; elle met en évidence la rigidité de la force de maintien.

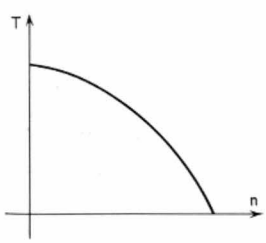


Fig. XX-12

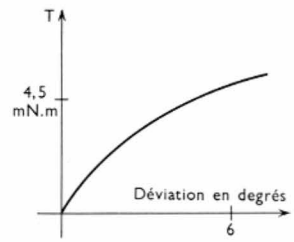


Fig. XX-13

4.3. Applications. — Le domaine d'application de ce moteur est très vaste. On peut classer les applications en trois catégories.

— *Dispositifs à séquence d'impulsions.* — Compteur d'impulsions, chronomètre, commutateur par pas, diviseur de fréquence, mécanismes de commande (avance de bande perforée, de ruban magnétique), commande d'instruments d'optique, d'enregistreurs graphiques.

— *Moteur à vitesse variable.*

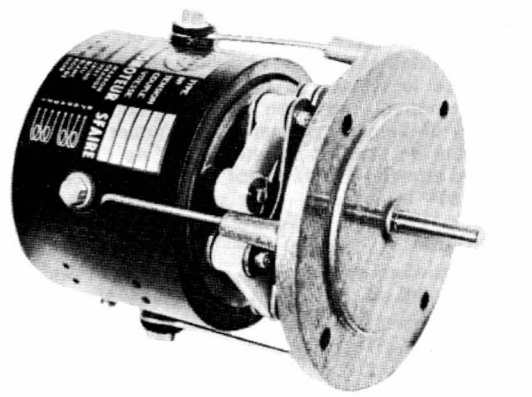
— *Servomoteur.* — Compensateur de tension, synchronisation d'arbres de transmission (avance de cartes perforées), indicateur de position.

5. STÉROMOTEUR

C'est un moteur *très lent*.

5.1. Principe. — Quand un cercle de centre C_1 et de rayon R roule *sans glisser* à l'intérieur d'un cercle de centre C et de rayon R_{st} (fig. XX-14), à chaque tour du cercle-rotor de centre C_1 le point de contact A se déplace d'une longueur $AA' = 2\pi R_{st} - 2\pi R = 2\pi (R_{st} - R)$ (fig. XX-15).

Stéromoteur synchrone utilisable en pas à pas, 50 Hz, 220 V (*S.F.A.I.R.E.*)



Stéromoteur, 50 Hz, 220 V (*S.F.A.I.R.E.*)

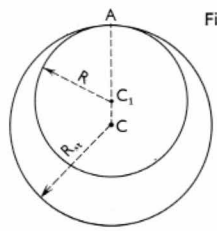


Fig. XX-14

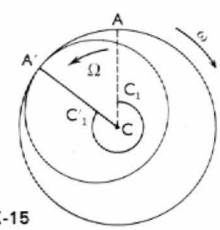


Fig. XX-15

Ce déplacement AA' se fait donc lentement en *sens contraire* de la rotation du cercle-rotor. Le centre C_1 décrit lui-même un cercle de rayon $r = (R_{st} - R)$ et par ailleurs il semble tourner dans le même sens que AA' avec

une vitesse angulaire Ω. Si T est le temps nécessaire pour que le cercle-rotor effectue un tour, on peut écrire :

$$AA' = R_{st}\,\Omega\,T = (R_{st} - R)\,2\,\pi$$

et :
$$\Omega = \frac{R_{st} - R}{R_{st}} \cdot \frac{2\,\pi}{T} = \frac{r}{R_{st}}\,\omega$$

(Si l'on pose : $r = (R_{st} - R)$ et si : $\omega = \dfrac{2\,\pi}{T}$ représente la vitesse réelle du cercle-rotor.)

Cette vitesse Ω est *très faible* et, grâce à une liaison élastique et homocinétique entre le rotor et le bout d'arbre du moteur, elle peut être communiquée à un appareil entraîné.

5.2. Constitution. — Le rotor est un aimant permanent. Le stator comporte deux jeux de bobines (fig. XX-16) :

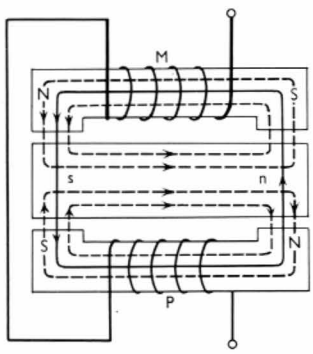


Fig. XX-16

1° Les bobines M et P, électriquement et magnétiquement en série, sont alimentées à la fréquence f.

2° Les bobines M' et P' dans le plan perpendiculaire à la figure, électriquement et magnétiquement en série (non représentées sur la fig. XX-16), sont alimentées par un courant de même amplitude que le courant des bobines M et P mais en *quadrature* avec celui-ci.

Le long de l'entrefer ces bobines engendrent un champ glissant à la vitesse de rotation $\omega = 2\,\pi\,f$. Suivant un plan diamétral, l'induction b due au courant alternatif et celle B_0 de l'aimant permanent s'ajoutent dans l'entrefer d'un côté de l'axe et se retranchent de l'autre côté. Les forces d'attraction entre stator et rotor, proportionnelles à $(B_0 + b)^2$ et à $(B_0 - b)^2$, sont très inégales et cela explique l'inégalité de l'entrefer : même au repos le rotor est excentré.

Les entrefers sont voisins de 0,1 mm. Pour favoriser leur inégalité, le roulement est reporté sur des disques extrêmes (fig. XX-17), garnis de caoutchouc, dont le

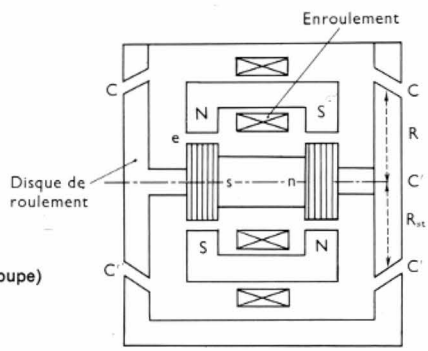


Fig. XX-17

Stéromoteur (Coupe)

contact détermine les rayons R et R_{st} des formules précédentes. Il n'y a pas de paliers.

Ce moteur à mouvement hypocycloïdal se prête bien au fonctionnement en pas à pas. Il existe en trois variétés :

— les *micromoteurs* de très faible couple,

— les *moteurs ordinaires* à grande vitesse,

— les *moteurs intermédiaires* dont la fréquence de rotation maximale est 1 tr/s.

5.3. Qualités. — Les qualités du stéromoteur sont surtout liées à sa simplicité et sa robustesse.

— Il est naturellement lent. Il est autoréducteur et évite l'emploi de réducteurs de tous genres en donnant un rendement très supérieur à ceux-ci.

— Grâce à son inertie très petite, comparable à celle d'un haut-parleur, son temps de réponse est faible (2,5 ms) au démarrage, à l'arrêt et à l'inversion du sens de marche. Il offre donc la possibilité de fonctionner en pas à pas et d'obtenir de très nombreux arrêts précis (de 50 par tour en asynchrone à 1 200 par tour en synchrone).

— Le moment du couple au démarrage est égal à environ 1,5 fois le moment du couple utile à la vitesse de régime.

— Il peut rester longtemps bloqué sans s'échauffer anormalement ; il développe alors un couple de blocage supérieur au couple de travail.

— En cas de surcharge accidentelle, même brutale ou prolongée, aucune détérioration n'est à craindre.

— Il ne réclame aucune protection contre les surintensités.

— Son couple varie avec la tension d'alimentation. Il permet donc d'obtenir un couple variable à vitesse constante.

— Alimenté en courant continu, il développe un couple résistant de freinage.

— Ses organes électriques sont entièrement enrobés d'un isolant pratiquement incassable et inaltérable en présence de la plupart des agents chimiques. Sans détérioration, il peut fonctionner aussi bien à l'air humide qu'en atmosphère très raréfiée ou nuisible aux autres moteurs.

— Ne comportant ni balais ni roulement, il ne demande ni entretien, ni graissage.

— Il peut recevoir une protection spéciale antidéflagrante et antigrisouteuse.

5.4. Applications. — Elles sont très étendues avec les stéromoteurs asynchrones. Leur emploi est plus particulièrement recommandé dans les cas suivants :

— rotation à très faible vitesse,

— obtention de démarrages fréquents ou de nombreuses inversions de marche dans un temps court,

— positionnement sûr et précis par un ordre télécommandé,

— arrêt automatique lorsque le moment du couple atteint une valeur déterminée,

— nécessité d'un fort couple au décollage,

— asservissement numérique ou analogique en fonction d'une variable quelconque (position, température, pression, débit, etc.),

— pour des commandes à faible puissance, obtention de rendements beaucoup plus élevés que ceux des ensembles moteurs-réducteurs classiques.

Exemples d'applications : manœuvre de vannes, d'agitateurs, commande d'avance sur les machines-outils.

Ce moteur est également employé dans les équipements d'appareils de chirurgie et de radiologie, dans l'outillage électrique, dans les appareils de levage, dans les moteurs-couples (moteur utilisé pour exercer un couple) et les moteurs-freins, dans les transmetteurs d'ordres, les machines à calculer et aussi en horlogerie et dans des asservissements (sur machines à reproduire les pesées automatiques par exemple).

6. MOTEUR À ENTREFER AXIAL OU À INDUIT PLAT

C'est un moteur de conception récente (relativement à la plupart des autres moteurs) dont les caractéristiques essentielles sont : *l'induit* plat et les *bobinages imprimés*.

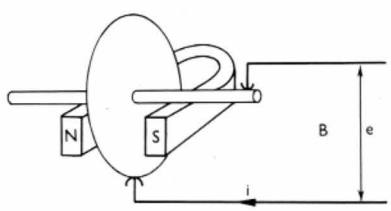
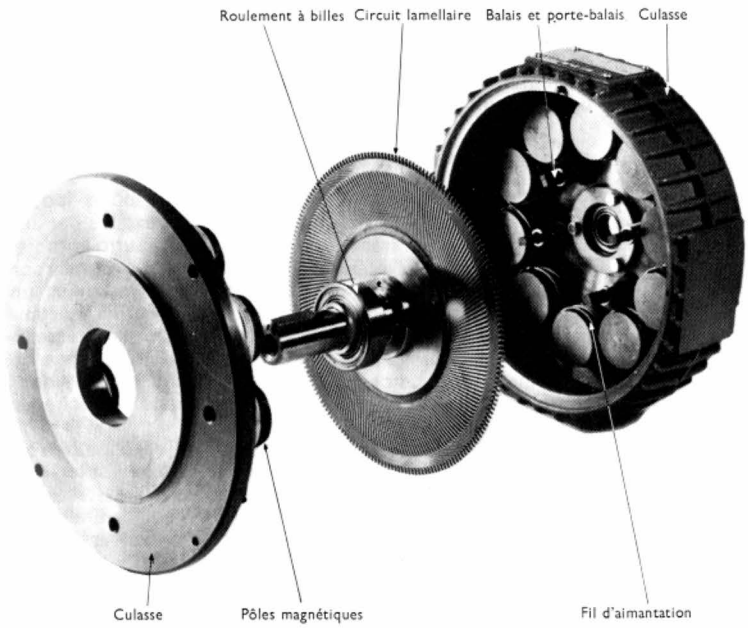


Fig. XX-18



Servomoteur AXEM à réponse instantanée de 15 W à 5 kW (*C.E.M.*)

6.1. Principe. Constitution. — Le principe est celui de la *roue de Barlow* (V. t. 1, Électricité, chap. 24) ; elle tourne lorsqu'un courant la traverse alors qu'elle se trouve dans un champ d'induction normal à son plan (fig. XX-18). Dans un moteur à induit plat, les conducteurs sont placés sur les deux faces d'un disque-support isolant (fig. XX-19).

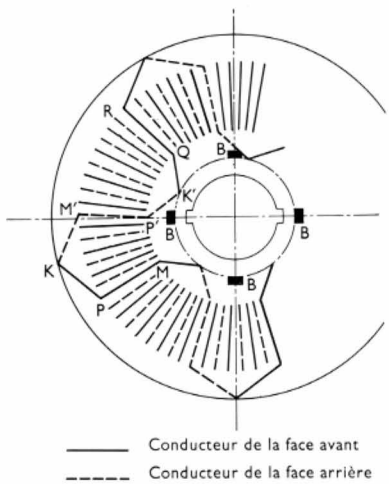


Fig. XX-19

Ce disque tourne entre deux disques fixes en matériau ferromagnétique ; l'un en ferrite dur porte plusieurs pôles (fig. XX-20) tandis que l'autre est plat et sert à fermer le circuit magnétique.

On réalise sur le disque un bobinage *ondulé série* (V. chap. 14). À cet effet on associe un conducteur *aller MP* face avant (par exemple sous un pôle *N*) avec le conducteur *M'P' retour* face arrière (sous le pôle *S* consécutif) par une connexion qui *traverse* le disque isolant en *K* (V. fig. XX-19). De même le conducteur *RQ* est relié à *M'P'* par une connexion qui *traverse* le disque en *K'*, et ainsi de suite. Les balais frottent directement sur les conducteurs plats et nus de l'induit : le *collecteur est supprimé*. Il suffit que les balais soient correctement calés par rapport au bobinage.

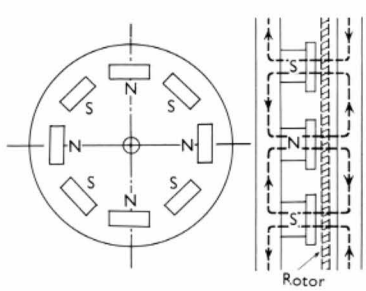


Fig. XX-20

6.2. Caractéristiques. — Les courbes représentatives de l'intensité du *courant absorbé*, de la *puissance utile*, de la *vitesse* et du *rendement* en fonction du moment du couple sont données sur la figure XX-21. Les courbes du courant et de la vitesse sont *linéaires*, ce qui favorise l'asservissement ou la régulation dans les servomécanismes. *Le rendement* (qui passe par un maximum) est *excellent* (pas de pertes par hystérésis ou par excitation, pas de pertes par courants de Foucault, faible chute de tension aux balais).

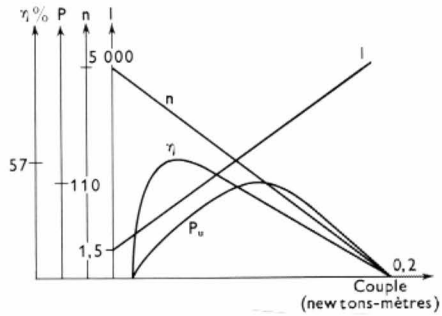
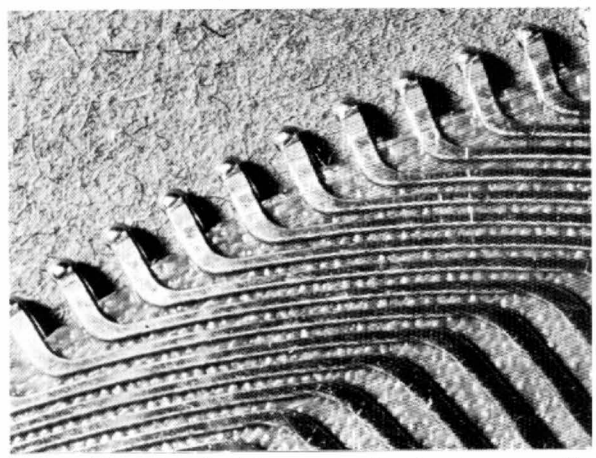


Fig. XX-21



Partie extérieure d'un circuit à quatre couches de cuivre en parallèle (*C.E.M.*)

6.3. Avantages. — Les avantages du moteur à entrefer axial par rapport au moteur classique sont les suivants :

— *Grande puissance massique* en raison des densités de courant très fortes que l'on peut admettre dans les conducteurs plats et nus.

— *Faible inertie du rotor* dépourvu de fer et de masse beaucoup plus faible que dans le moteur classique. Comme l'intensité du courant peut être très grande, le moment du couple peut être très important : ce moteur permet de fortes accélérations.

— *Faible constante de temps de l'induit, absence de réaction d'induit et bonne commutation.* Ces qualités résultant de l'absence de fer dans le rotor et de la répartition du flux.

— *Adaptable à des régimes cycliques,* à des fonctionnements à faibles vitesses en *moteur-couple* (moteur à disques multiples).

6.4. Applications. — Il est surtout destiné à des servomécanismes ou à certaines commandes à inversions rapides et fréquentes. C'est dans le cadre des moteurs à courant continu de faible puissance qu'il a tout d'abord trouvé son emploi, mais ce cadre s'est ensuite élargi jusqu'aux moyennes puissances (30 kW). Parmi les applications les plus courantes on peut citer la commande des climatiseurs, des essuie-glace d'automobiles, des aérothermes, des pompes d'accélération de l'eau (chauffage central), des ventilateurs, des petites machines-outils, etc.

7. MICROMOTEURS À COURANT CONTINU

Ces moteurs de puissance *très faible* (inférieure à 10 W) diffèrent des moteurs classiques sur les points suivants (fig. XX-22) :

1° L'inducteur fixe est un aimant permanent.

2° L'induit, souvent bobiné en cloche, présente une très faible inertie.

3° Le nombre de lames du collecteur est très petit (souvent réduit à 3).

4° Les balais causent peu de frottement et peuvent être facilement remplacés.

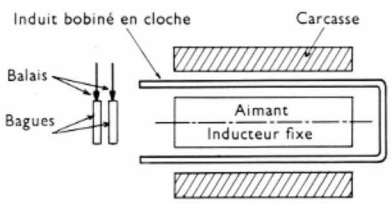


Fig. XX-22 — Les liaisons entre bagues et induit n'ont pas été représentées

collecteur et de balais et aussi de fournir un courant présentant des ondulations. Les fréquences de ces ondulations peuvent être comprises dans la bande passante du système dont fait partie la génératrice tachymétrique et cela constitue un grave inconvénient dans les servomécanismes.

9. ALTERNATEUR DIPHASÉ

9.1. Constitution — Principe. — Des pôles inducteurs *A* extérieurs et fixes (fig. XX-23) sont excités par une source à tension et fréquence constante. Un autre enroulement *B* est placé à l'intérieur ; il est également fixe mais son axe est perpendiculaire à celui de *A*. Entre les deux, un cylindre en cuivre (cloche) peut tourner ; il est lié mécaniquement à la machine dont on veut mesurer la vitesse.

À l'*arrêt, aucune f.é.m.* n'apparaît entre les bornes de l'enroulement *B* parce que le champ dû au courant dans l'enroulement *A* et aux courants induits dans la cloche est normal à l'axe de *B*.

Lorsque la *cloche tourne* (fig. XX-24) ce champ n'est plus normal à l'axe de *B*, car le rotor en cloche est le siège d'une *f.é.m. d'induction* proportionnelle à la vitesse de rotation Ω. Dès lors, aux bornes de *B* on recueille une f.é.m. alternative (comme le champ inducteur), de valeur efficace sensiblement *proportionnelle à cette vitesse* Ω.

9.2. Applications. — Cette génératrice tachymétrique est généralement préférée à la précédente car elle ne comporte ni collecteur, ni balais ; le moment d'inertie du rotor en cloche est faible et la fréquence de la tension délivrée par *B* est constante.

Elle est parfois utilisée (sous le nom de *moteur-cloche*) pour mesurer une accélération angulaire α. Dans ce cas on alimente *A* en courant continu. Lorsque le rotor tourne à vitesse constante les courants induits dans la cloche créent un flux transversal (réaction d'induit) donc dirigé suivant l'axe de la bobine *B*. Tant que ce flux est *constant*, il n'induit aucune f.é.m. dans *B*. Mais si la vitesse de rotation du rotor varie, le flux transversal varie proportionnellement à cette vitesse : une f.é.m. est induite dans *B*. Elle est proportionnelle à la vitesse de variation de ce flux, c'est-à-dire à la vitesse de la variation de la vitesse du rotor et donc à l'accélération angulaire α.

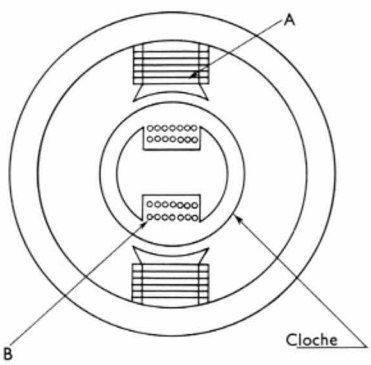


Fig. XX-23

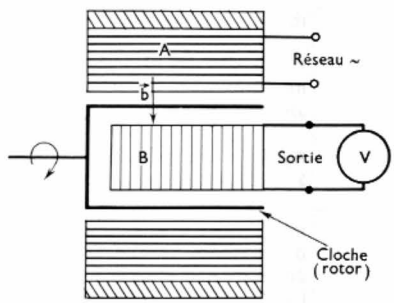


Fig. XX-24

GÉNÉRATEURS TACHYMÉTRIQUES

Ce sont des machines qui fournissent une tension électrique proportionnelle à leur vitesse ; elles s'intègrent le plus souvent dans les servomécanismes.

8. DYNAMO À COURANT CONTINU

Dans cette dynamo le flux inducteur Φ est produit par un aimant permanent ; il est donc constant. La f.é.m. E de la dynamo est alors proportionnelle à la vitesse de rotation n (puisqu'elle est proportionnelle au produit Φn). Il en est de même de la tension $U = E - R_a I$ (R_a : résistance de l'induit) si le courant I débité (V. chap. 14) est très faible. Cette condition peut être facilement réalisée si l'on place un voltmètre de grande résistance interne aux bornes de cette génératrice ; celui-ci peut donc être gradué en fréquences de rotation.

On reproche à ce tachymètre de nécessiter l'emploi d'un

TÉLÉTRANSMETTEURS

Ce sont des systèmes qui permettent de transmettre à distance, *sans autre liaison que des fils électriques,* une position angulaire ou toute autre grandeur pouvant être transformée en position angulaire suivant une loi de correspondance déterminée.

10. SYNCHROMACHINES (OU SELSYNS)

10.1. Principe. Constitution. — Une synchromachine comporte un stator triphasé et un rotor monophasé (fig. XX-25). Pour réaliser une télétransmission on réunit bornes à bornes les stators de deux machines identiques et l'on alimente les rotors monophasés sous la même tension (fig. XX-26). Chaque enroulement rotorique produit un champ magnétique alternatif et des f.é.m. sont induites dans les enroulements statoriques. Pour une synchro-

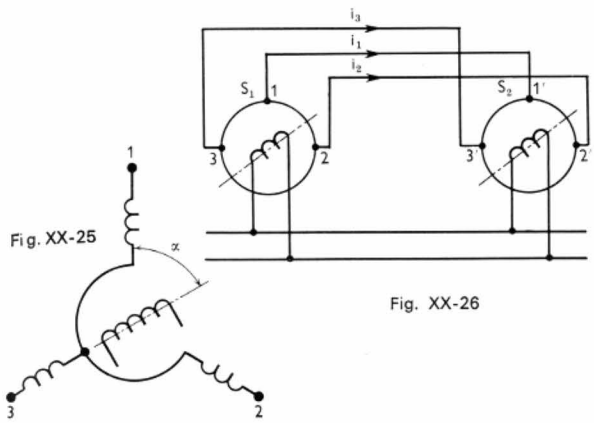


Fig. XX-25

Fig. XX-26

machine les f.é.m. statoriques sont en phase (elles sont dues au même champ alternatif de direction fixe) mais leurs amplitudes sont différentes en général. L'amplitude de la f.é.m. dans une bobine statorique dépend de l'angle que fait l'axe de la bobine de l'enroulement et celui de la bobine rotorique. On démontre que la somme des valeurs instantanées des trois f.é.m. induites dans les trois bobines d'un enroulement statorique sont nulles ; il en est de même de la somme des valeurs instantanées des trois courants i_1, i_2 et i_3. C'est pour cette raison que les bobines statoriques sont montées en étoile (comme dans un récepteur triphasé) et que l'on utilise seulement trois conducteurs.

Si les deux rotors occupent la *même position relative* par rapport aux enroulements statoriques, les f.é.m. induites dans deux bobines statoriques correspondantes (1 et 1′, 2 et 2′, 3 et 3′) ont la même amplitude et aucun courant ne traverse les conducteurs qui relie les stators. S'il n'en est pas ainsi ces conducteurs sont traversés par des courants qui, d'après la loi de Lenz (V. t. 1, Électricité, chap. 25) s'opposent à la cause qui les produit : le rotor de S_2 prend une position identique à celui de S_1 (on suppose que le rotor de ce dernier ne peut pas tourner librement).

10.2 Applications

10.2.1. Indication à distance. — Si l'un des deux rotors reçoit une orientation imposée (S_1 par ex.), l'autre rotor supposé libre suit fidèlement les déplacements angulaires du premier. L'ensemble constitue un *arbre électrique*.

10.2.2. Synchronisation des rotations de deux machines. — Si les rotors sont liés mécaniquement aux arbres de deux moteurs différents, on est assuré du parfait synchronisme des deux moteurs.

10.3. Synchrotransformateur. — Si l'on alimente seulement le rotor de S_1 (fig. XX-27) les f.é.m. induites (e_1, e_2 et e_3) dans les bobines statoriques de cette synchromachine donnent naissance à des courants (i_1, i_2 et i_3) dans les trois conducteurs de liaison.

Les courants i_1, i_2 et i_3 donnent naissance à trois champs alternatifs en phase dont la résultante $\vec{b'_1}$ occupe la même position relative que $\vec{b_1}$. Un f.é.m. est induite dans le rotor de S_2 : ainsi aux bornes de ce second rotor maintenu fixe, la tension u a une amplitude fonction de l'*écart angulaire entre les rotors*.

Il est donc possible de transformer un écart angulaire en tension électrique, propriété précieuse pour les réglages automatiques basés sur la comparaison d'une grandeur de référence.

11. TÉLÉTRANSMETTEURS À COURANT CONTINU

Le plus simple est le *système potentiométrique* (fig. XX-28) comprenant deux potentiomètres identiques entre

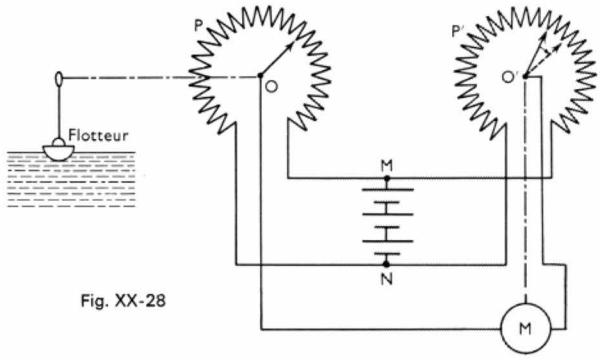


Fig. XX-28

les curseurs desquels est branché un micromoteur alimenté sous la tension OO' (fig. XX-29). C'est seulement lorsque les curseurs occupent la même position qu'aucun courant ne circule dans le micromoteur. Comme la position du curseur du potentiomètre P est liée à une grandeur à régler (ici le niveau dans un réservoir) le micromoteur provoque le déplacement du curseur du potentiomètre P' lorsque ce curseur n'occupe pas la même position que celui de P.

12. TRIGONOMÈTRES (RESOLVERS)

On a parfois besoin de *faire tourner les axes de coordonnées cartésiennes* à partir desquels une grandeur est définie, ou bien de *transformer* les coordonnées *cartésiennes* (x, y) en coordonnées polaires (V. t. 1, Mathématiques). C'est ce que permet un trigonomètre (en anglais *resolver*).

12.1. Principe. Constitution. — Dans le cas le plus fréquent de la transformation de coordonnées polaires en coordonnées cartésiennes, l'appareil comporte un stator

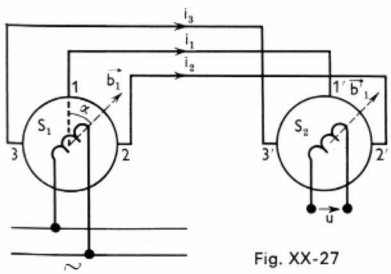


Fig. XX-27

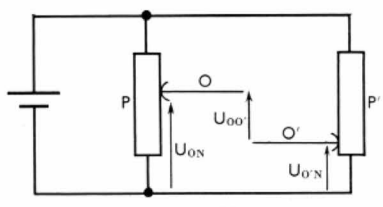


Fig. XX-29

Schéma électrique correspondant au système potentiométrique

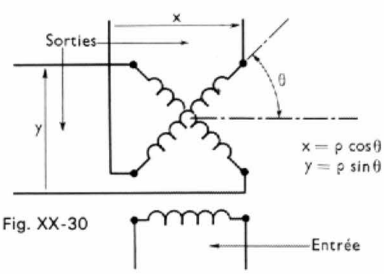
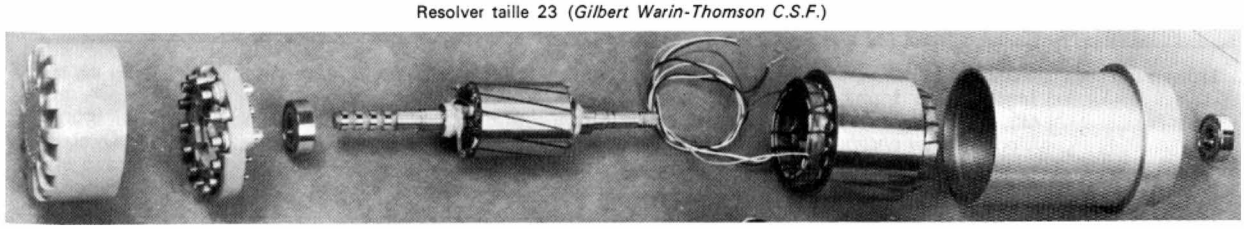


Fig. XX-30

Resolver taille 23 (*Gilbert Warin-Thomson C.S.F.*)



(fig. XX-30) auquel est appliquée une tension alternative dite *d'entrée* et un rotor portant deux enroulements indépendants décalés de $\frac{\pi}{2}$ rad.

Si l'on applique au stator une tension d'amplitude proportionnelle à ρ, entre les extrémités des deux enroulements du rotor on obtient des tensions proportionnelles à $x = \rho \cos \theta$ et $y = \rho \sin \theta$ (θ désigne l'angle de décalage du rotor). On passe ainsi des coordonnées polaires ρ et θ aux coordonnées cartésiennes x et y.

12.2. Applications. — Les trigonomètres ont leur utilisation dans les radars et les calculatrices.

CONVERTISSEURS COURANT ALTERNATIF — COURANT CONTINU

La conversion de courant alternatif en courant continu (et réciproquement) peut être réalisée au moyen :

— de machines tournantes appelées *commutatrices*,

— des *redresseurs à vapeur de mercure* à grilles de commande, de *thyratrons*,

— de *redresseurs au silicium* (diodes et thyristors).

Ce sont ces derniers qui ont supplanté tous les autres (V. t. 1, Électronique, chap. 18) et, ici, on va se borner à rappeler le principe de la commutatrice.

13. COMMUTATRICES

13.1. Constitution et principe. — Sur l'induit d'une dynamo bipolaire à excitation en dérivation (fig. XX-31 ; pour plus de clarté on a représenté l'induit en anneau) on place trois prises *M*, *P*, *Q* à 120° les unes des autres et on les relie à trois bagues.

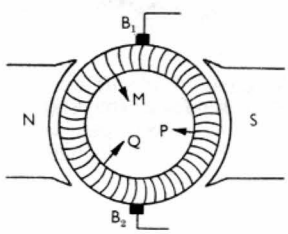


Fig. XX-31

Principe d'une commutatrice

Vue du collecteur la machine est une dynamo ; vue des bagues, c'est un alternateur dont les enroulements sont connectés en triangle.

13.2. Conséquences. — *Si la machine est entraînée par un moteur*, elle peut débiter :

— du courant continu par ses balais,

— des courants triphasés par ses bagues. On l'appelle alors génératrice polymorphique.

On peut aussi l'*alimenter par des courants triphasés* en reliant les bagues aux bornes d'un réseau triphasé. Elle fonctionne alors en *moteur synchrone*. Mais du côté continu c'est encore une dynamo dérivation : elle convertit des courants alternatifs en courant continu. Elle marche en commutatrice.

Elle peut aussi être *alimentée en courant continu :* les balais doivent alors être reliés, à un générateur de courant continu. Elle fonctionne en moteur à courant continu (côté collecteur) et en alternateur (côté bagues) : elle convertit du courant continu en courants alternatifs. On dit alors qu'elle fonctionne en commutatrice inversée. On distingue parfois :

a) les commutatrices dites *directes* qui ne comportent qu'un seul enroulement induit pour lesquelles il existe une *relation rigide* entre les tensions alternative et continue ;

b) les commutatrices à *bobinages indépendants* qui permettent, d'une part, d'isoler le côté continu du côté alternatif, d'autre part, d'obtenir un rapport variable entre les tensions alternative et continue.

13.3. Applications. — Abandonnées peu à peu en tant que *commutatrices* (les redresseurs sont plus intéressants), elles sont couramment utilisées aujourd'hui en commutatrices inversées (mais seulement en petite puissance). Elles sont employées pour *produire du courant alternatif* à partir de sources locales comme des batteries d'accumulateurs (véhicules divers, aéronefs, bateaux, etc.).

CHAPITRE XXI

CHOIX D'UN MOTEUR ÉLECTRIQUE

CARACTÉRISTIQUES TECHNIQUES

Elles sont liées aux conditions de *démarrage* et, en *marche de régime*, aux possibilités de réglage de la vitesse et à l'aptitude à supporter de brusques surcharges.

1. CONDITIONS DE DÉMARRAGE

Il faut que le moteur développe un couple suffisant pour réduire le temps de démarrage. Le tableau suivant donne les éléments du choix d'un moteur convenable, suivant le couple nécessaire au décollage (les petits moteurs où l'on peut admettre un courant très supérieur au courant nominal étant exclus).

2. MARCHE DE RÉGIME

Les caractéristiques dérivation, série, composée correspondent respectivement aux cas de vitesses peu variables, très variables ou assez variables avec la charge. Mais chaque moteur a des possibilités de *réglage de vitesse* (V. chap 12 et 18) et le tableau de la page suivante donne, à cet égard, les éléments du choix d'un moteur.

Sauf pour les petits moteurs (moteurs pas à pas, etc.), lorsqu'il s'agit de réglage de vitesse dans de très larges limites, on peut associer aux procédés mentionnés des combinaisons mécaniques (engrenages, roues, vis sans fin, etc.). Quant à l'effet de *brusques surcharges* il est d'autant moindre que le moteur a un plus grand moment d'inertie.

Moment du couple au décollage	Faible	Inférieur ou égal au couple nominal	Compris entre 1 et 1,5 fois le couple nominal	Supérieur à 1,5 fois le couple nominal
Moteur	*Moteur dérivation* (continu ou triphasé). *Moteur asynchrone* avec démarrage étoile-triangle.	*Moteur dérivation* (continu ou triphasé). *Moteur asynchrone* à double cage, à cage spéciale, ou à rotor bobiné	*Moteur dérivation* (continu ou triphasé). *Moteur asynchrone* à rotor bobiné avec rhéostat rotorique pour le démarrage.	*Moteur à caractéristique série ou composée* (continu et alternatif).

Moteur	Moteurs à caractéristique shunt		Moteurs à caractéristique série	
	À courant continu (à excitation en dérivation)	Asynchrone	À courant continu (à excitation en série)	À courant alternatif (monophasé, triphasé)
Moyens de réglage et observations	**Réglage inférieur à 15 %**		**Avec réglage de la vitesse**	
	Rhéostat de champ	Rhéostat rotorique	Moteurs fonctionnant avec rhéostats d'induit et de champ spéciaux	Moteurs avec rhéostats d'induit (monophasés, triphasés) et de champ (monophasés)
	Réglage dans le rapport 1 à 4			
	Moteur à pôles: — auxiliaires: 1 à 2 — compensés: 1 à 3	Moteurs à plusieurs polarités		
	Réglage dans un rapport supérieur à 4			
	Moteur à deux collecteurs. Moteurs à tension d'alimentation très variable (système Ward-Léonard)	Moteurs précédents combinés avec des transmissions convenables.		

CARACTÉRISTIQUE ÉCONOMIQUE

Ce sont les frais d'achat et d'installation, les frais d'entretien et les dépenses de consommation. Sur les deux premiers éléments on est aisément fixé; mais pour les dépenses de consommation les considérations suivantes ne doivent pas être perdues de vue.

3. VITESSE ÉCONOMIQUE D'UN MOTEUR

On sait que c'est le moment du couple T ($T = \frac{P}{\Omega}$, si P est la puissance mécanique du moteur et si Ω est la vitesse angulaire de rotation) qui fixe le dimensionnement d'un moteur. Donc, d'une façon générale, il y a intérêt à porter son choix sur un moteur qui tourne vite (quitte à utiliser une transmission convenable).

Mais il faut savoir que chaque moteur a une vitesse *économique* pour laquelle son prix est le plus bas et son rendement le meilleur. On est fixé à cet égard, par le catalogue du constructeur.

4. TENSION ÉCONOMIQUE

Ce qui est vrai pour la vitesse l'est également pour la tension. D'une façon générale, alors que pour les moteurs de puissance moyenne la considération de la tension n'a d'influence que sur la section des canalisations, pour les faibles puissances une tension assez faible est avantageuse; c'est l'inverse pour les puissances élevées. Évidemment la tension est généralement imposée par la distribution existante

5. PUISSANCE OPTIMALE

On connaît l'influence de la puissance nominale d'un moteur (eu égard à son utilisation) sur son rendement et sur son facteur de puissance (V. chap. 2). Il ne faut *jamais* choisir un moteur *trop puissant*.

À cet effet, à l'aide d'un moteur *taré* (c'est-à-dire dont on connaît le rendement) on peut déterminer la puissance nominale optimale correspondant à l'utilisation prévue, ou, dans le cas de régimes très variables, adopter pour puissance nominale les trois quarts de celle qui est exigée par la machine-outil en marche normale.

COMMANDES DIVERSES

On se propose de souligner les particularités des moteurs électriques convenant à différentes commandes.

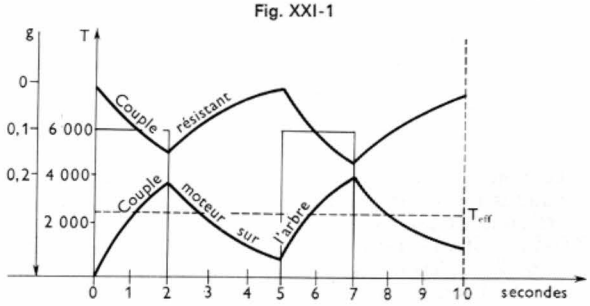
6. COMMANDE DE LAMINOIRS

— *Conditions de marche.* Le moteur doit supporter de brusques et fortes surcharges à l'instant de l'insertion du métal entre les cylindres et être capable de rapides changements de sens de rotation lorsqu'il s'agit de duos réversibles.

Le cycle de fonctionnement d'un laminoir comporte des marches à vide alternant avec des marches à forte charge. Pour réduire la puissance *thermiquement équivalente* du moteur, il faut donc régulariser la puissance demandée au réseau; à cet effet, on utilise un *volant* calé sur l'*arbre du moteur* et non sur l'arbre du train de laminoirs, car son moment d'inertie (et son poids et son prix) est d'autant plus faible qu'il tourne plus vite.

— *Moteurs utilisés.* On utilise, dans cette application, *en courant alternatif*, le moteur asynchrone avec rhéostat ou avec changeur de fréquence (V. chap. 12) ou bien le moteur triphasé à collecteur (V. chap. 19); en courant *continu* le moteur à excitation dérivation avec rhéostat de champ ou le système Ward-Léonard (V. chap. 18). La figure XXI-1 donne les courbes du moment du couple résistant, du moment du couple moteur et du glissement pour un moteur asynchrone de 2000 kW dont la puissance thermiquement équivalente est 1530 kW; la pointe de puissance est égale

Fig. XXI-1



à 2 500 kW alors que le train de laminoirs est équipé d'un volant dont le moment d'inertie est $J = 50\,000$ kg.m².

La tendance actuelle est d'accroître la souplesse des systèmes précédents par l'utilisation de moteurs à courant continu alimentés sous une tension réglable fournie par un redresseur commandé comportant des thyristors.

7. COMMANDE D'ENGINS DE LEVAGE ET DE MANUTENTION

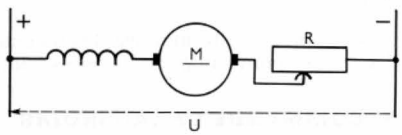
On désigne sous ce nom une très grande diversité d'engins, depuis les monte-charge, ascenseurs, machines d'extraction, treuils, cabestans, crics, vérins, etc, pour lesquels un seul genre de mouvement est prévu jusqu'aux ponts roulants, grues, transporteurs élévateurs de diverses sortes qui doivent exécuter des mouvements variés.

D'une façon générale, après la montée qui ne pose pas de problème particulier, il faut assurer la *descente* qui doit être d'abord assez rapide (descente lancée), puis d'autant plus rapide que la charge est plus faible (tout en restant inférieure à une limite dangereuse), puis ralentie avant l'arrêt définitif. Parfois lorsque l'énergie consommée au cours de la montée est importante et lorsque la descente est assez longue, on s'efforce de *récupérer* de l'énergie durant cette phase de fonctionnement.

Pour cette commande, l'avantage du courant continu réside dans la souplesse d'utilisation des dispositifs. En revanche, le courant alternatif permet le branchement direct du moteur sur le réseau de distribution.

7.1. En courant continu. — Le moteur série s'emploie toutes les fois que l'on ne craint pas l'instabilité de vitesse aux faibles charges et le risque d'emballement. Le réglage de la vitesse s'effectue à l'aide d'un rhéostat (fig. XXI-2) ;

Fig. XXI-2



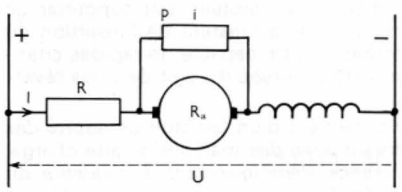
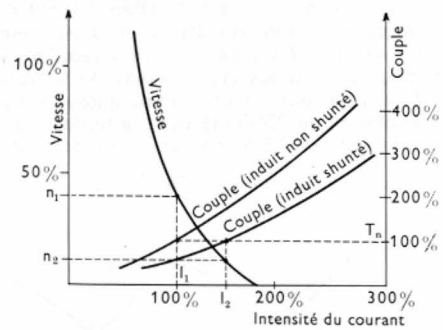


Fig. XXI-3

Moteur à excitation en série à induit shunté

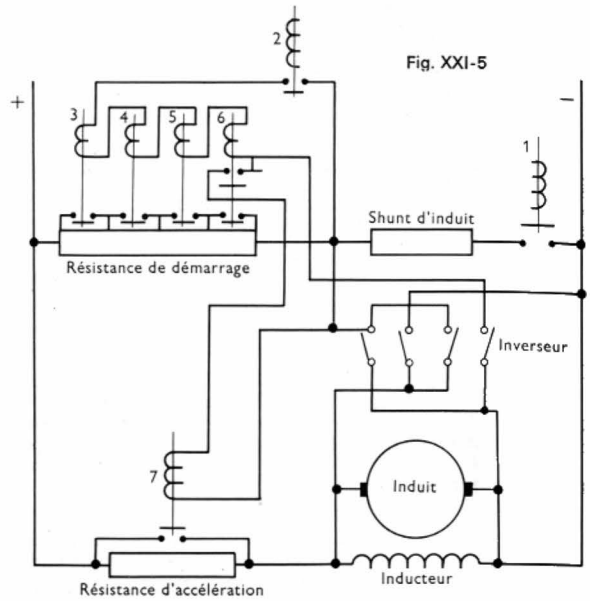
dans le cas où l'on doit assurer des manœuvres lentes et précises on peut utiliser un moteur à *induit shunté* (fig. XXI-3). La figure XXI-4 donne les caractéristiques n (I) et T (I) d'un moteur à excitation série de levage avec induit non shunté, puis avec induit shunté. On voit qu'au couple nominal T_n correspond une vitesse n_2, sensiblement plus faible que la vitesse n_1, si l'induit est shunté.

Fig. XXI-4



Le moteur *dérivation* (moins robuste et plus sensible aux variations de tension) est utilisé surtout dans les ascenseurs où la vitesse ne doit pas dépendre de la charge (fig. XXI-5) ; automatiquement le moteur devient générateur dès qu'il dépasse une certaine vitesse (V. chap. 18). Cependant, lorsque sa vitesse dépasse 1,5 m/s, le ralentissement et la mise à niveau par shuntage de l'induit demandent un temps trop long. C'est alors que l'on a recours au système Ward-Léonard.

Fig. XXI-5



7.2. En courant alternatif. — On utilise soit le moteur asynchrone polyphasé, soit le moteur monophasé, soit le moteur triphasé à collecteur.

Le moteur *asynchrone polyphasé* offre l'avantage d'une grande robustesse. Comme il doit développer un fort couple au démarrage il est soit à rotor bobiné (vitesse réglable par le rhéostat du rotor) soit à démarreur centrifuge, soit à double cage, soit à encoches profondes.

Les conditions de marche à la montée et à la descente ont été étudiées au chapitre 13. Le *moteur monophasé* qui est presque uniquement utilisé dans la commande des ascenseurs et monte-charge est un moteur à répulsion (V. chap. 19) dont on modifie la caractéristique série par le décalage des balais. Le plus souvent, il s'agit d'un moteur Déri ou bien d'un moteur répulsion-induction (V. chap. 19). Ainsi, pour le démarrage, le moteur présente une caractéristique série alors qu'elle est de type shunt pour le fonctionnement normal.

En monophasé on emploie également pour la commande des ascenseurs, le *moteur* à condensateur (V. chap. 13) dont on apprécie le fort couple de démarrage, la robustesse, le bon facteur de puissance et la propriété de ne pas produire de parasites radiophoniques.

Le moteur *triphasé à collecteur* est de plus en plus abandonné parce qu'il est trop fragile et trop coûteux.

7.3. Tendances récentes. — L'alimentation par réseau triphasé se généralise sauf dans les rares usines (sidérurgie) où le réseau principal de distribution est à courant continu. Avec un réseau triphasé on utilise de préférence le moteur asynchrone ordinaire. Très rarement et sur des engins spéciaux (grues desservant des cales de construction de navires) on recourt à l'alimentation par système Ward-Léonard.

Pour les ascenseurs, le choix dépend de la vitesse d'ascension V :

— $V < 0{,}5$ m/s : moteur asynchrone ordinaire ;

— $0{,}5$ m/s $< V < 1$ m/s : moteur asynchrone à deux polarités (V. chap. 12) donnant un rapport de vitesse de 1 à 3 ou 4 ;

— $V > 1$ m/s : système Ward-Léonard.

Dans les réalisations plus élaborées (mais plus coûteuses) la régulation se fait par servomécanismes.

8. COMMANDE DES CABESTANS

Elle exige un fort couple de démarrage et aucun risque d'emballement à vide n'est à craindre.

8.1. En courant continu. — On utilise le moteur à excitation composée additif (avec une résistance de protection en série avec l'induit).

8.2. En courant alternatif. — On emploie *le moteur asynchrone à bagues*. Son rhéostat rotorique provoque une baisse de vitesse et limite le courant de calage.

Les cabestans sont surtout utilisés sur les navires. Le moteur doit caler en développant un couple 1,2 à 1,5 fois supérieur au couple nominal. Pour ramener très vite les aussières, le moteur doit fournir un faible couple en tournant à une vitesse au moins triple de sa vitesse normale (désexcitation en courant continu, changement du nombre de pôles en triphasé).

9. FILATURES-PAPETERIES

Pour ces applications il faut des moteurs d'assez fort couple de démarrage et de vitesse très largement variable ; quand il s'agit de la commande de métiers à filer, il faut en outre que la vitesse soit sous la dépendance des métiers eux-mêmes (équipements en servomécanismes).

9.1. En courant continu. — On emploie des moteurs spéciaux à 2 collecteurs alimentés sous 2 tensions différentes et permettant des réglages de vitesse dans le rapport de 1 à 8.

9.2. En courant alternatif. — On utilise le moteur à répulsion ou le moteur shunt triphasé à collecteur, parfois le moteur asynchrone à carcasse ventilée.

10. CONCLUSION GÉNÉRALE

Il faut souligner que toute condition supplémentaire (silence, appel de courant au décollage limité, variation de la puissance électrique absorbée, etc.) imposée par l'usager au constructeur et non réalisée dans les séries courantes sera obtenue au détriment d'autres qualités de la machine et de son prix. Il est essentiel d'étudier de près cette condition supplémentaire et il faut y renoncer si elle n'est pas indispensable.

Par ailleurs les diodes au silicium et les thyristors prennent une place de plus en plus grande dans les dispositifs employés pour les commandes électromécaniques. Leur mise en œuvre permet la réalisation d'appareils susceptibles de satisfaire les nombreuses exigences des utilisateurs et d'ensembles entièrement automatiques (V. t. 2, Automatismes).

CHAPITRE XXII

LE FACTEUR DE PUISSANCE DANS LES INSTALLATIONS ÉLECTRIQUES

Pour une installation on ne considère pas le facteur de puissance à un instant t (fonction de la charge essentiellement variable de l'installation), mais le facteur de puissance moyen.

Ce facteur $\overline{\cos \varphi}$ peut être déduit du rapport donnant la valeur moyenne de la tangente de l'angle φ (fig. XXII-1) :

$$\overline{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{\text{énergie réactive consommée pendant un temps déterminé}}{\text{énergie active consommée pendant le même temps}}$$

Le facteur de puissance moyen $\overline{\cos \varphi}$ joue un rôle important aussi bien pour la production que pour l'utilisation de l'énergie électrique (V. t.1, Électricité, chap. 33).

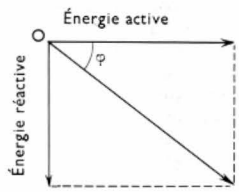


Fig. XXII-1

1. INCONVÉNIENTS D'UN FAIBLE FACTEUR DE PUISSANCE

Un générateur, une ligne, un appareil d'utilisation sont établis pour fonctionner sous une certaine tension U_{eff} avec un courant I_{eff} inférieur à une certaine limite, fixée le plus souvent par des considérations d'échauffement ou de chute de tension. À tout générateur, à toute ligne, à tout appareil d'utilisation, correspond donc un produit $U_{\text{eff}}\, I_{\text{eff}}$ (puissance apparente) à ne pas dépasser. Par ailleurs, la puissance active P absorbée ou fournie par un appareil est donnée par la relation :

$$P = S \cos \varphi$$

(si S désigne sa puissance apparente).

1.1. Pour le producteur. — Le dimensionnement d'un alternateur ou d'un transformateur dépend de sa puissance apparente. Donc à égalité de puissance active (donc d'énergie active payée au producteur) l'alternateur, le transformateur, sont d'autant plus gros et plus coûteux que le facteur de puissance est plus petit $\left(\text{puisque } S = \frac{P}{\cos \varphi}\right)$. De plus le rendement des machines est alors faible et la régulation des tensions est plus difficile.

1.2. Pour le distributeur. — Une installation déjà existante (prévue pour une certaine puissance apparente) peut fournir d'autant moins d'énergie active que le facteur de puissance est plus faible. Elle est mal utilisée. Le capital investi est d'un moindre rapport.

On conçoit dès lors que producteur et distributeur ne tolèrent pas que l'utilisateur ait une installation ayant un facteur de puissance trop faible.

1.3. Pour l'utilisateur. — L'utilisateur lui-même est directement intéressé par le facteur de puissance de son installation : il influe sur la chute de tension du transformateur placé à l'entrée de celle-ci et sur celle des canalisations. De ce fait les moteurs peuvent être sousvoltés. Même s'il supporte les inconvénients dont il est responsable, on conçoit que producteur et distributeur (en l'espèce É.D.F.) ont tout de même de bonnes raisons de le pénaliser. En cas de facteur de puissance trop faible, l'utilisateur doit payer l'énergie réactive consommée.

2. CAUSES D'UN FAIBLE FACTEUR DE PUISSANCE MENSUEL

Elles sont liées soit à la construction des appareils d'utilisation soit aux conditions dans lesquelles ces appareils sont utilisés.

2.1. Causes liées à la construction. — Seuls sont concernés les transformateurs et surtout les moteurs asynchrones puisque ces derniers ont un entrefer assez important (V. chap. 12). En effet, on se rappelle que les machines synchrones et les moteurs à collecteur ont un facteur de puissance excellent et réglable.

En ce qui concerne les moteurs asynchrones, on a vu que le facteur de puissance est d'autant meilleur que le moteur est plus puissant, qu'il tourne plus vite et que la construction est plus soignée ; de plus ce facteur est meilleur pour un moteur à cage que pour un moteur à bagues.

Pour un transformateur, la consommation d'énergie réactive est liée à la présence des joints et à l'induction maximale $\widehat{B}$ adoptée par le constructeur (V. chap. 6).

Pour les *autres appareils électriques* le facteur de puissance est voisin de 1 s'il s'agit d'appareils thermiques à résistances et ramené aux environs de 1 (V. ci-après, § 3) dans le cas où il est directement et nettement inférieur à l'unité (fours à induction, à arc, postes de soudage).

2.2. Causes liées à l'utilisation. — Le facteur de puissance diminue dans le cas de *surtensions d'alimentation* (car cela entraîne un accroissement de $\widehat{B}$ donc de l'énergie réactive consommée) et durant les *marches à vide ou à faible charge* (V. chap. 12).

De tout ce qui précède, il résulte qu'on est souvent contraint d'améliorer le facteur de puissance.

3. AMÉLIORATION DU FACTEUR DE PUISSANCE

3.1. Action directe sur l'installation. — Il faut procéder à une révision approfondie de toute l'installation électrique. Cette révision doit porter :

— sur les *moteurs :* remplacement d'un moteur inutilement trop puissant par un autre moins puissant, généralisation de la marche en étoile pour les moteurs (normalement en triangle) lorsqu'ils fonctionnent à faible charge ;

— sur les *transformateurs :* réduction des marches à vide ou à faible charge, remplacement d'un appareil à pertes normales par un transformateur à pertes réduites (V. chap. 6). À cet égard, pour les marches à faible charge, il y a avantage à installer un petit transformateur suffisant pour le service réduit ou bien à effectuer un branchement direct sur le réseau basse tension.

3.2. Action indirecte. — On ne modifie pas l'installation (elle reste défectueuse) mais on fournit sur place l'énergie réactive nécessaire.

3.2.1. Emploi de machines tournantes. — On remplace des moteurs asynchrones par des moteurs synchrones ou asynchrones synchronisés qui peuvent fournir de l'énergie réactive (V. chap. 11). Évidemment cette substitution doit être réalisée sur des machines de puissance assez grande (eu égard à l'ensemble de l'installation) et fonctionnant assez longtemps chaque jour (exemple : moteur de compresseur ou de ventilateur).

3.2.2. Emploi d'une batterie de condensateurs statiques. — Si l'on désigne par $\overline{\cos \varphi}$ le facteur de puissance *moyen* de l'installation, par $\overline{\cos \varphi'}$ le facteur de puissance moyen que l'on désire atteindre, l'énergie réactive W_r que doit fournir la batterie pendant un temps déterminé (par exemple un mois en restant en service un nombre défini d'heures par jour) est donnée par la formule suivante (fig. XXII-2) :

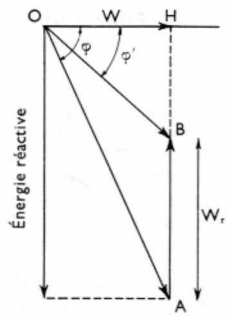


Fig. XXII-2

$$W_r = W(\overline{\operatorname{tg} \varphi} - \overline{\operatorname{tg} \varphi'})$$

W désignant l'énergie active indiquée par le compteur pendant le temps t considéré.

La puissance (réactive ou apparente) de la batterie de condensateurs est donc :

$$Q = \frac{W_r}{t} = \frac{W(\overline{\operatorname{tg} \varphi} - \overline{\operatorname{tg} \varphi'})}{t}$$

Un condensateur de capacité C, placé sous la tension U_{eff}, fournit une puissance réactive égale à $C\omega U^2_{\text{eff}}$ (V. t. 1 Électricité, chap. 33). La batterie est donc parfaitement définie par sa puissance apparente S (égale à la puissance réactive Q qu'elle peut fournir), par sa tension U_{eff} et par sa fréquence f de fonctionnement.

Observation importante. Lorsque l'un des appareils ci-dessus (machine tournante ou condensateur statique) est branché au moment où la charge de l'installation est assez faible, il peut arriver que le courant absorbé au total soit *déphasé en avant de la tension.* À ce moment l'installation fournit au réseau de l'énergie réactive. Le compteur d'énergie réactive tournerait en sens inverse de celui qui correspond à l'absorption d'énergie réactive s'il n'en était empêché par des cliquets. Dès lors, l'énergie réactive fournie n'étant pas enregistrée, le facteur de puissance mensuel calculé d'après les relevés des compteurs d'énergies active et réactive est *plus faible* que celui que l'on avait prévu. Ces conditions de fonctionnement ne sont évidemment pas recherchées.

4. AVANTAGES DE LA BATTERIE DE CONDENSATEURS STATIQUES

Les avantages de la batterie de condensateurs par rapport aux machines tournantes sont importants.

— La batterie est formée *d'éléments* de même puissance et le prix par kilovoltampère reste le même quelle que soit la puissance installée. En revanche, pour la machine tournante ce prix décroît quand la puissance réactive à fournir augmente ; cependant il ne devient intéressant que dans le cas de fortes puissances réactives.

— Un condensateur consomme peu de puissance active ; ce n'est pas le cas pour une machine tournante.

— Marche sans usure, grande durée de fonctionnement, suppression de tous frais d'entretien et de surveillance, montage facile, constituent d'autres avantages du condensateur.

— Le fractionnement de la puissance en service est possible avec une batterie de condensateur. Par suite, si un élément est mis hors circuit, l'arrêt de son fonctionnement n'entraîne pas la mise hors service de toute la batterie.

Ces avantages expliquent pourquoi, jusqu'à des puissances réactives assez importantes (100 kVA et même davantage), la batterie de condensateurs est préférée à toute machine tournante (V. hors-texte).

5. CONDITIONS D'EMPLOI DE LA BATTERIE DE CONDENSATEURS

Au-delà d'un certain gradient de potentiel entre les armatures d'un condensateur (rigidité diélectrique de l'isolant), le diélectrique est *percé* et le condensateur est hors d'usage. Cette rigidité diélectrique diminue lorsque le diélectrique :

— *devient de plus en plus humide :* la batterie doit donc être installée dans un endroit sec ;

— est porté à une *température croissante* ;

— est soumis à un *gradient de potentiel trop élevé,* autrement dit lorsque la batterie est soumise à une surtension ;

— est soumis à une surtension de *longue durée* (fig. XXII-3).

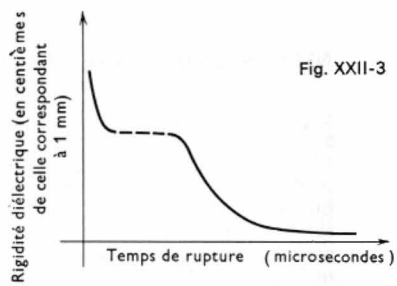


Fig. XXII-3

6. CONSTITUTION ET PRIX D'UNE BATTERIE DE CONDENSATEURS

Chaque élément est formé de feuilles d'aluminium entre lesquelles est inséré un ensemble de 3 ou 4 feuilles d'un papier spécial imprégné d'huile minérale ; le tout est enroulé ou bien plié en accordéon. Dans le premier cas l'élément est cylindrique, dans le second il est parallélipipédique. Les éléments sont associés en série, puis en parallèle et placés souvent dans une cuve métallique remplie d'huile et susceptible d'assurer le meilleur refroidissement par rayonnement. Cela constitue une *unité.* Les unités peuvent elles-mêmes être associées en série ou en parallèle, en triangle ou

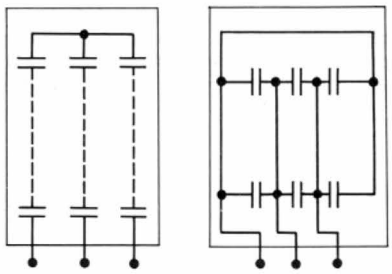


Fig. XXII-4

Couplage des condensateurs d'une batterie pour la compensation du facteur de puissance

en étoile suivant la tension de service et le réseau (fig. XXII-4).

Quant au *prix* de la batterie, l'utilisateur doit savoir qu'il est :

— *proportionnel à la puissance* Q à tension et fréquence égales ;

— *décroissant lorsque la tension d'alimentation* U_{eff} *augmente ;*

— *inversement proportionnel à la fréquence* à tension et puissance constantes. Cela résulte de la formule :

$$Q = C\omega U^2_{eff} = C\ (2\pi f)\ U^2_{eff} \Rightarrow C = \frac{Q}{C\,2\pi U^2_{eff}} \cdot \frac{1}{f}$$

Évidemment, à puissance égale, un gros élément coûte un peu moins cher que plusieurs petits éléments (prix des cuves et de l'huile).

7. PRÉCAUTIONS D'EMPLOI DE LA BATTERIE DE CONDENSATEURS

Une batterie de condensateurs exige d'importantes précautions.

7.1. Tension. — Il faut que sa *tension* soit *bien ajustée* à celle du réseau. Si la tension U_{eff} du réseau est plus faible que celle du fonctionnement normal de la batterie, la puissance réactive $C\omega U^2_{eff}$ qu'elle fournit est *diminuée* (suivant la loi du carré). Si cette tension U_{eff} est trop grande, la batterie risque de s'échauffer dangereusement (pertes diélectriques proportionnelles au carré de la tension).

7.2. Mise sous tension. — Il faut *éviter les surintensités à la mise sous tension*. Ces surintensités résultent de la superposition d'un courant permanent et d'un courant transitoire car la batterie constitue un véritable circuit oscillant.

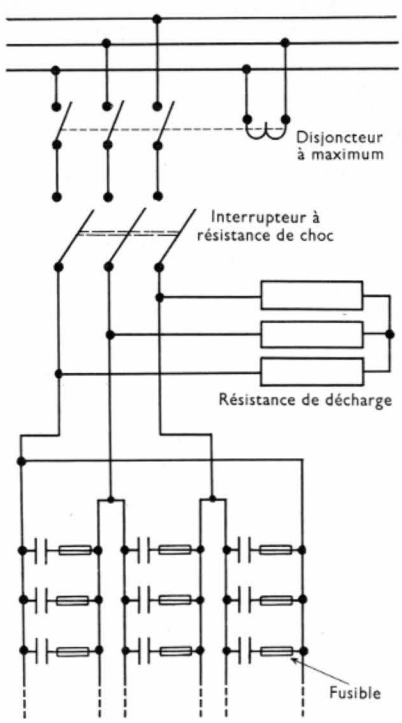
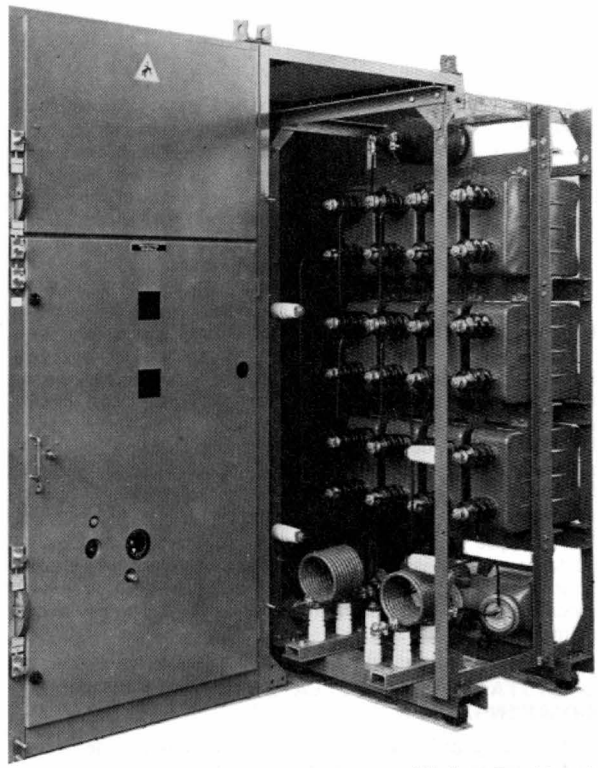


Fig. XXII-5



(*Alsthom-Savoisienne*)

Batterie de condensateurs 1 000 kvar M.T. avec matériel de commande et de protection ; châssis condensateurs sorti

L'intensité du courant peut être intense si la fermeture se fait à l'instant t défavorable : les fusibles peuvent fondre.

Pour se protéger contre cet incident on fractionne la batterie à la mise sous tension, ou bien on emploie des résistances de choc montées sur un interrupteur à deux temps (fig. XXII-5).

7.3. Installation à vide. — Il faut *éviter que la batterie soit seule sous tension* (machines débranchées) parce que le courant, purement capacitif, débité à ce moment-là par le transformateur détermine une élévation de la tension secondaire de celui-ci (V. chap. 6). Par ailleurs, si la batterie est à l'extrémité d'une longue ligne, le circuit oscillant formé (fig. XXII-6) peut se mettre en résonance (V. t. 1, Électricité, chap. 32) sur un harmonique de la tension alternative. Il peut en résulter une surtension par résonance aux bornes de la batterie. Dans le cas de batteries importantes, des disjoncteurs avec bobines à manque de tension provoquent le déclenchement de ces disjoncteurs en cas de panne du secteur.

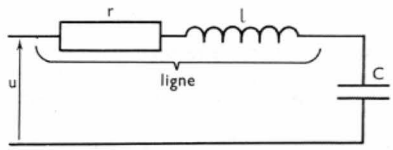


Fig. XXII-6

7.4. Charges résiduelles. — Quand on ouvre l'interrupteur de connexion de la batterie, celle-ci conserve une charge résiduelle dont l'importance dépend de l'instant de rupture. Comme la résistance électrique du diélectrique est très grande, cette charge résiduelle ne se dissipe que peu à peu ; la tension aux bornes de la batterie ne diminue que lentement. Deux risques importants en résultent : d'une part, un danger d'électrocution pour le personnel, d'autre part, un risque supplémentaire de surtension à l'enclenchement, si la tension alternative instantanée s'ajoute à la tension résiduelle lorsque celui-ci est réalisé.

C'est pourquoi on prévoit, entre les bornes de la batterie des *résistances de décharge* (V. fig. XXII-5) qui sont cons-

tamment branchées (faible puissance active consommée) ou sont connectées seulement à l'instant de l'ouverture de l'interrupteur.

7.5. Intérêt des fusibles en série avec les condensateurs. — Il faut éviter le *perçage en cascade des condensateurs :* il peut se produire lorsque des condensateurs étant en série, l'un d'eux est percé. La tension est alors appliquée aux bornes de ceux qui restent en service et alors, chacun d'eux peut se trouver sous une d.d.p. supérieure à sa tension nominale. Pour cette raison on dispose des fusibles en série avec chaque élément.

7.6. Accord préalable de la compagnie de distribution. — Certains réseaux de distribution possèdent un système de commande à distance par des signaux de fréquence musicale (V. t. 2, Relais). À cette fréquence les condensateurs constituent un *véritable court-circuit* et c'est pourquoi la compagnie de distribution impose l'addition d'inductances, dites *antiharmoniques,* en série avec chaque batterie de condensateurs. Le courant de fréquence musicale qui passe dans le circuit de la batterie est alors limité.

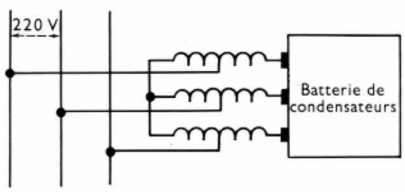
Remarque : On peut réaliser une *régulation automatique* du facteur de puissance (maintien d'une valeur déterminée pour cos φ) au moyen de relais. Un équipement en servomécanisme assure le branchement ou la suppression des éléments de la batterie.

8. INSTALLATION DE LA BATTERIE. MODE DE COMPENSATION

Plusieurs problèmes se posent quand on décide de relever le facteur de puissance par condensateurs.

8.1. Choix de la tension. — Une tension élevée aboutit à un prix moindre, mais si l'on utilise un autotransformateur (fig. XXII-7) ou un transformateur ordinaire pour brancher

Fig. XXII-7



la batterie sur une haute tension, le prix du transformateur s'ajoute à celui de la batterie. De plus le transformateur entraîne des pertes de puissance active. C'est pourquoi la compensation est généralement réalisée directement sur la basse tension.

8.2. Choix de l'emplacement de la batterie. — Son effet ne se produit évidemment qu'*en amont* de son emplacement c'est-à-dire dans la portion du réseau comprise entre la batterie elle-même et le transformateur. Pour la partie *aval* la compensation du facteur de puissance entraîne seulement une réduction de la chute de tension et par suite une élévation de la tension aux bornes des récepteurs.

Le choix de l'emplacement dépend du mode de compensation adopté.

8.2.1. Compensation globale. — Elle est utilisée dans les grandes stations de transformation et dans de petites installations. Elle consiste à brancher la batterie soit sur le primaire (fig. XXII-8) soit sur le secondaire

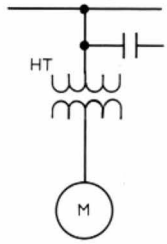


Fig. XXII-8

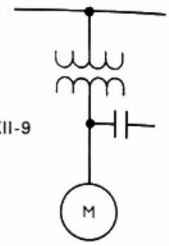


Fig. XXII-9

(fig. XXII-9) du transformateur. La compagnie de distribution peut s'opposer au branchement sur le primaire en raison des oscillations qui peuvent se produire.

8.2.2. Compensation individuelle. — La batterie est répartie entre tous les moteurs proportionnellement au besoin de chacun d'eux (fig. XXII-10). Ce mode de compensation est plus coûteux que le précédent, mais il offre l'avantage de faire bénéficier toute l'installation du relèvement du facteur de puissance. Cependant, toutes choses égales, la compensation pour le réseau H.T. est moindre puisque la batterie associée à un moteur ne fournit pas d'énergie réactive lorsque celui-ci est arrêté.

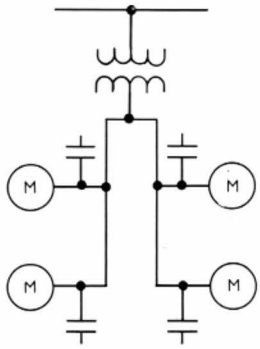


Fig. XXII-10

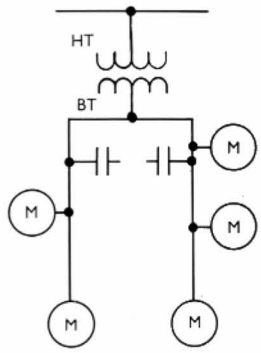


Fig. XXII-11

8.2.3. Compensation par groupes. — C'est un système intermédiaire entre les deux précédents. La batterie est répartie en différents points de l'installation de façon à fournir de l'énergie réactive à des dérivations alimentant des groupes de moteurs (fig. XXII-11).

Remarque : Il ne faut *pas relier directement* une batterie de condensateurs à un moteur si celui-ci peut fonctionner à l'hypersynchronisme (ascenseur à la descente). En effet, à ce moment-là, le moteur séparé du réseau peut fonctionner en générateur excité par la batterie. Le courant de la batterie joue le rôle du courant d'excitation pour une dynamo à excitation en dérivation et la tension aux bornes croît en même temps que la vitesse (la fréquence est supérieure à 50 Hz). Il peut se produire des surtensions entraînant des risques d'électrocution et le fonctionnement intempestif des relais.

OPTIQUE

CHAPITRE PREMIER

GÉNÉRALITÉS ET LOIS FONDAMENTALES DE L'OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

1. LA LUMIÈRE

La lumière, comme le son, est un phénomène vibratoire qui se propage par ondes en transportant de l'énergie. Mais alors que l'énergie sonore a besoin d'un milieu matériel pour se propager, l'énergie lumineuse peut se propager dans le vide. La lumière est en général décelée par son action sur l'œil, mais peut l'être également par ses effets thermiques : piles thermoélectriques (V. t. 1, Électronique, chap. 6) et par ses effets électriques : cellules photoélectriques (V. t. 1, Électronique, chap. 20). De même qu'il existe des ultrasons et des infrasons, non audibles, il existe de la lumière non visible, ultraviolette ou infrarouge. On reviendra en fin de chapitre sur les théories de la lumière.

2. PROPAGATION RECTILIGNE

On obtient une *source lumineuse ponctuelle*, c'est-à-dire, en fait, de très petites dimensions, en plaçant, par exemple, une plaque métallique percée d'un trou de quelques dixièmes de millimètres de diamètre devant un arc électrique (fig. I-1).

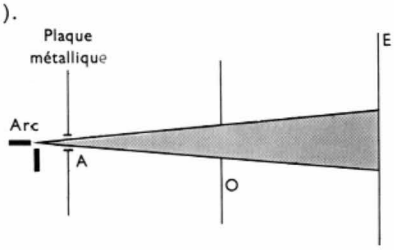


Fig. I-1

On reçoit sur un écran *E* la lumière issue du trou *A*, et qui a traversé une autre ouverture *O* (fig. I-1). La tache lumineuse observée correspond à la section de l'écran *E* et du cône ayant *A* pour sommet et s'appuyant sur le contour de l'ouverture *O*. Cette expérience et beaucoup d'autres (éclipses, phases de la Lune, etc.), conduisent à penser qu'en milieu homogène la lumière se propage suivant des droites issues de la source. Ces droites sont désignées sous le nom de *rayons lumineux*. Un *pinceau lumineux* est un ensemble étroit de rayons lumineux provenant d'une même source, ou se dirigeant vers le même point. Un *faisceau lumineux* est un ensemble plus large de rayons lumineux. Un faisceau peut être convergent (fig. I-2), divergent (fig. I-3), ou formé de rayons parallèles (fig. I-4).

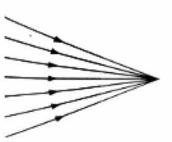


Fig. I-2

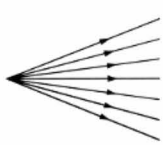


Fig. I-3

Fig. I-4

3. CHAMBRE NOIRE - OBJET - IMAGE

Le dispositif dit de la chambre noire, muni d'une petite ouverture *O*, est une application directe de la propagation rectiligne de la lumière (fig. I-5). La chambre noire permet d'obtenir une image assez grossière d'un objet lumineux.

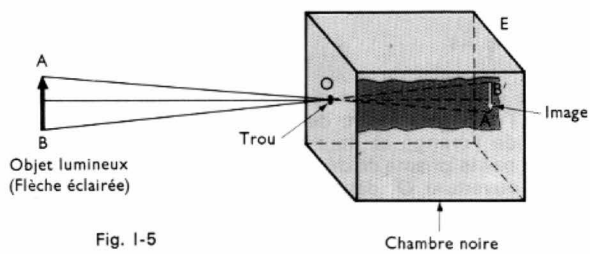


Fig. I-5

L'image est grossière parce que les pinceaux lumineux issus de points voisins de l'objet forment sur l'écran des taches de lumière qui se recouvrent partiellement. Pour y remédier, il faut réduire le diamètre de l'ouverture *O* ; cependant, ce n'est pas sans inconvénient car plus cette ouverture est petite et moins il arrive de lumière sur le fond de la chambre noire ; par ailleurs, quand l'ouverture devient très petite, cette lumière s'étale de plus en plus : il y a diffraction (la théorie de la propagation rectiligne de la lumière ne peut plus expliquer les phénomènes observés).

Des images de meilleure qualité peuvent être obtenues au moyen de miroirs, de lentilles ou de systèmes optiques plus élaborés. Avec ces dispositifs, objet et image sont dits *conjugués l'un de l'autre ;* les positions de l'objet et de l'image sont permutables (loi du retour inverse de la lumière). À la sortie d'un système optique, un faisceau lumineux peut converger réellement en un point *I* : celui-ci est alors l'image réelle d'un point objet *O* (fig. I-6). Parfois

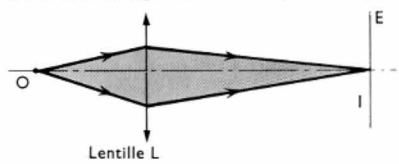


Fig. I-6

Image réelle (I) d'un objet réel (O)

des rayons divergents semblent provenir d'un point I qui serait situé, dans le sens où la lumière se propage, avant la sortie du système optique (fig. I-7) : I est alors l'image virtuelle de O. Dans le premier cas, on peut observer l'image I sur un écran E; dans le second cas, pour voir l'image I il faut placer l'œil dans le faisceau qui émerge du système optique.

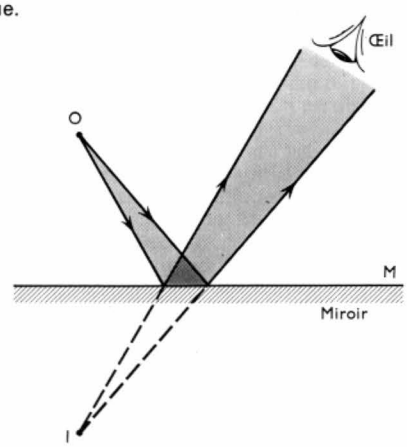


Fig. I-7

Image virtuelle (I) d'un objet réel (O)

4. LUMIÈRE COMPLEXE, LUMIÈRE MONOCHROMATIQUE

Dans l'expérience de Newton (fig. I-8), un pinceau de lumière solaire passe par une petite ouverture O et traverse un prisme de verre. Le faisceau émergent est intercepté par un écran E. Au lieu d'obtenir une tache blanche (comme c'est le cas en l'absence de prisme), on recueille une bande

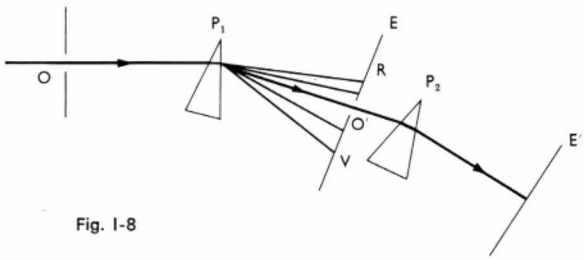


Fig. I-8

colorée dans laquelle on distingue, en allant d'une extrémité à l'autre : du violet, de l'indigo, du bleu, du vert, du jaune, de l'orangé et du rouge. La lumière solaire a été déviée par le prisme et décomposée. Si par une deuxième petite ouverture O' dans l'écran E, on isole des rayons correspondant à une seule couleur, on constate que cette lumière est de nouveau déviée par un prisme mais que sa couleur n'est pas modifiée.

Newton en conclut que la lumière solaire est un mélange de lumières de couleurs différentes que le prisme sépare en les déviant inégalement. On dit que le rayonnement solaire est un *rayonnement complexe*, et qu'il est composé de divers *rayonnements monochromatiques* (chacun d'eux correspondant à une lumière de couleur différente).

5. L'OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

La notion de rayons lumineux, liée à la propagation rectiligne de la lumière, est précieuse pour l'étude simplifiée de la formation des images. Cette théorie de la propagation rectiligne donne naissance à l'optique géométrique, qui est l'objet principal de ce chapitre. Mais il ne faut pas perdre de vue que, dans la pratique, les phénomènes sont beaucoup plus complexes. Une étude complète de la formation des images, ou même plus simplement de phénomènes fondamentaux comme la réflexion ou la réfraction, oblige à recourir à la théorie ondulatoire de la lumière.

6. RÉFLEXION DE LA LUMIÈRE

Un faisceau lumineux qui se propage dans un milieu transparent, et qui rencontre un deuxième milieu transparent ou opaque, est en *partie renvoyé dans le premier milieu*. Si le deuxième milieu est opaque, et si la surface de séparation est polie, il y a *réflexion spéculaire*.

6.1. Lois de la réflexion spéculaire (fig. I-9).

— Première loi : le rayon incident SI, le rayon réfléchi IJ et la normale IN à la surface réfléchissante sont dans un même plan, dit *plan d'incidence*.

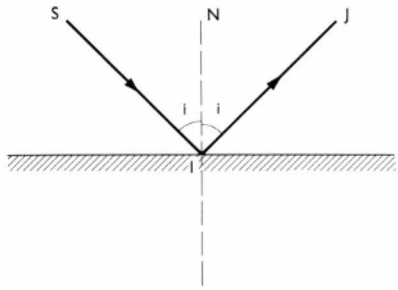


Fig. I-9

Réflexion d'un rayon lumineux

— Deuxième loi : l'angle d'incidence $\widehat{SIN}$ et l'angle de réflexion $\widehat{NIJ}$ sont égaux.

6.2. Conséquences. — Si une surface réfléchissante tourne d'un angle α autour d'un axe perpendiculaire au plan d'incidence, le rayon réfléchi tourne d'un angle 2α (fig. I-10). En effet, puisque les normales IN_1 et IN_2 forment

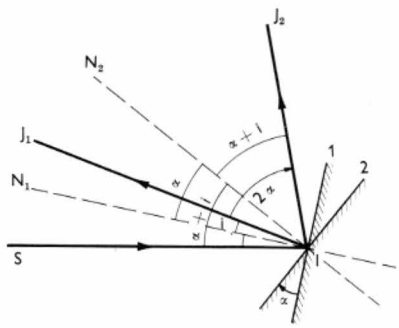


Fig. I-10

Si le miroir pivote autour du point I, il en est de même du rayon réfléchi qui passe de IJ_1 en IJ_2

un angle α, l'angle $\widehat{SIJ_2}$ est égal à $(2i + 2\alpha)$. Comme $\widehat{SIJ_1} = 2i$, l'angle compris entre les rayons IJ_1 et IJ_2 est égal à 2α : le rayon réfléchi a donc tourné de l'angle 2α.

7. RÉFRACTION DE LA LUMIÈRE

Un faisceau lumineux, qui se propage dans un milieu transparent et qui rencontre un deuxième milieu, peut y pénétrer en partie : c'est le *phénomène de réfraction*. La totalité de la lumière ne pénètre pas dans le second milieu : une fraction reste toujours dans le premier milieu, il y a réflexion partielle. Dans certaines conditions, le faisceau peut subir la réflexion totale.

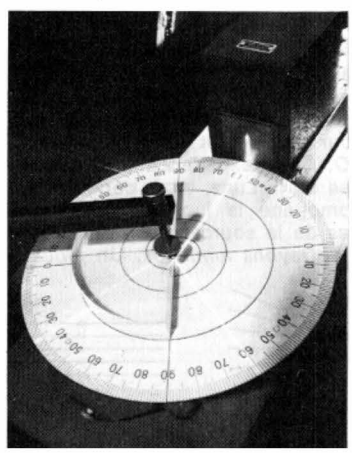


Fig. I-11

Réfraction d'un pinceau lumineux qui passe de l'air dans du plexiglas. Le pinceau incident fait un angle de 60° avec la normale à la face plane du demi-cylindre de plexiglas ; la direction du rayon réfracté est inclinée de 36° environ par rapport à la même normale. Un pinceau dû à une réflexion partielle peut aussi être observé (symétrique du pinceau incident par rapport à la normale)

(*Palais de la Découverte*)

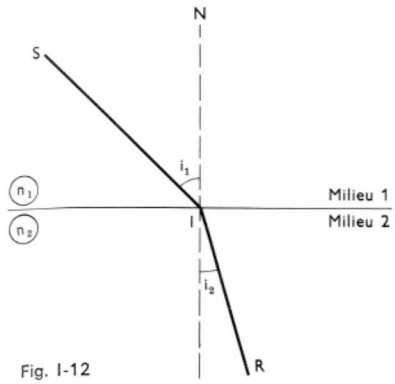


Fig. I-12

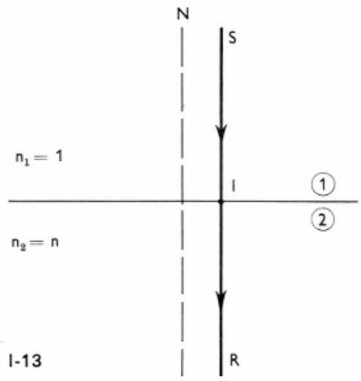


Fig. I-13

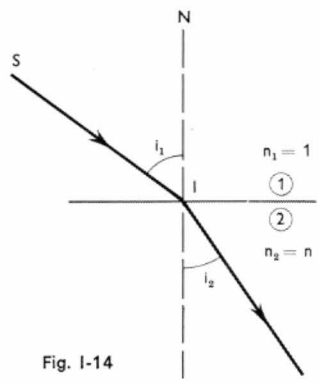


Fig. I-14

7.1. Lois de la réfraction (fig. I-12)

— *Première loi :* le rayon incident *SI*, le rayon réfracté *IR* et la normale *IN* à la surface de séparation des deux milieux sont dans un même plan.

— *Deuxième loi :* le sinus de l'angle d'incidence i_1 et le sinus de l'angle de réfraction i_2 sont dans un rapport constant, c'est-à-dire que l'on a : $\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = n$.

La valeur constante n est appelée *indice de réfraction du second milieu par rapport au premier.* L'indice de réfraction d'un milieu peut être défini par rapport au vide : il est alors appelé *indice de réfraction absolu du milieu.* Si n_1 et n_2 sont les indices de réfraction absolus qui caractérisent chacun des deux milieux considérés dans l'expérience précédente, la deuxième loi de la réfraction s'écrit aussi : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$. L'indice de réfraction du second milieu par rapport au premier est donc égal à : $n = \frac{n_2}{n_1}$.

7.2. Vitesse de la lumière et indice de réfraction.

— La lumière se propage à très grande vitesse, ce qui explique que l'on ait longtemps cru à une propagation instantanée. Cette vitesse est pourtant finie, elle est maximale dans le vide, où elle est égale à : $c_0 = 300\,000$ km/s à 1/1 000 près. Dans tout milieu matériel, la vitesse de la lumière est inférieure à la vitesse c_0 dans le vide. La différence est très faible dans le cas de l'air, aussi confond-on généralement vitesse dans l'air et vitesse dans le vide. Au contraire, dans le verre ou dans l'eau, par exemple, elle est beaucoup plus faible et elle dépend alors de la couleur du rayonnement lumineux.

Vitesse de la lumière dans un milieu et indice de réfraction sont directement liés : l'indice de réfraction d'un second milieu par rapport à un premier est égal *au rapport des vitesses* (v_1 et v_2) *de la lumière dans les milieux 1 et 2,* ou :

$$n = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}$$

L'indice absolu d'un milieu est égal au rapport des vitesses de la lumière dans le vide et dans le milieu ; par exemple :

$$n_1 = \frac{c}{v_1} \text{ et } n_2 = \frac{c}{v_2}$$

Comme dans un milieu quelconque, la vitesse de la lumière est toujours inférieure à la vitesse dans le vide, l'indice absolu d'un milieu est supérieur à l'unité : $n_2 = \frac{c}{v_2} > 1$.

Substance	Indice absolu n
Alcool	1,36
Benzine	1,50
Cristal	1,60
Diamant	2,42
Eau	1,33
Verre ordinaire	1,52
Verre baryté	1,57

7.3. Réflexion totale.

— En pratique, le premier milieu est généralement l'air, et on peut limiter cette étude à ce cas. Comme la vitesse de la lumière a même valeur dans l'air et dans le vide, l'indice absolu du premier milieu est égal à 1 ($n_1 = 1$) et la seconde loi de la réfraction s'écrit : $\sin i_1 = n_2 \sin i_2$.

On va utiliser cette relation pour chercher quel rayon réfracté correspond à un rayon incident déterminé.

• *Incidence normale :* $i_1 = 0$ (fig. I-13). — L'angle i_2 est donné par la relation suivante : $n_2 \sin i_2 = \sin 0 = 0$, d'où : $\sin i_2 = 0$ et $i_2 = 0$; le *rayon incident n'est pas dévié.*

• *L'angle d'incidence est compris entre* 0 *et* 90° (fig. I-14). — L'angle i_2 est défini par l'égalité suivante : $n_2 \sin i_2 = \sin i_1$. Pour les angles d'incidence très petits, on peut confondre la valeur de l'angle exprimée en radians et son sinus, et cela conduit à une relation simplifiée pour traduire la seconde loi de la réfraction : $i_1 = n_2 i_2$.

L'indice absolu n_2 étant supérieur à 1, le sinus de l'angle i_2 est toujours inférieur à celui de l'angle i_1 : le rayon réfracté se rapproche de la normale. Par suite, lorsque i_1 croît de 0 à 90°, i_2 augmente de 0° jusqu'à une limite inférieure à 90° que l'on va déterminer.

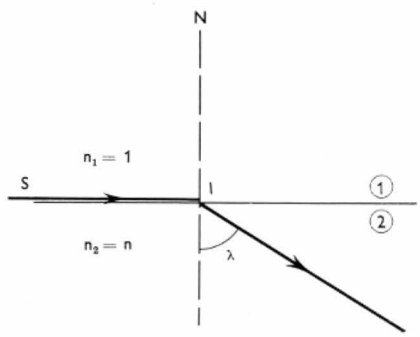


Fig. I-15

• *Incidence rasante :* $i_1 = 90°$ (fig. I-16). — Lorsque $i_1 = 90°$, la valeur de i_2 est λ ($i_2 = \lambda$) et nous avons :

$$\sin \lambda = \frac{\sin 90°}{n} = \frac{1}{n}$$

Exemples : si un rayon pénètre de l'air dans l'eau : $\lambda = 48°30'$; de l'air dans le verre : $\lambda = 41°$.

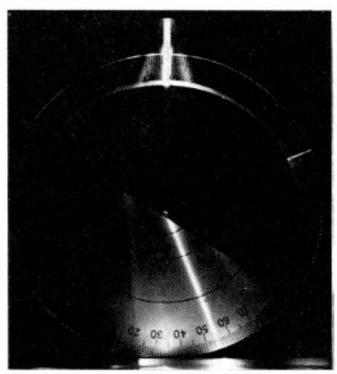


Fig. I-16

Réfraction du pinceau lumineux qui passe du plexiglass dans l'air. Le rayon réfracté s'écarte de la normale en passant du plexiglass dans l'air (le second milieu est moins réfringent que le premier). Une réflexion partielle se produit dans le plexiglas

(*R. Perrin*)

Dans les trois cas précédents, on a supposé que la lumière allait d'un milieu 1 (l'air) dans un milieu 2 plus réfringent que le premier. Maintenant, on va considérer le cas où la lumière va d'un milieu plus réfringent (indice absolu n_1) vers un milieu moins réfringent (indice absolu n_2). Par application du principe du retour inverse de la lumière, on peut déterminer i_2 tant que i_1 est inférieur à λ (fig. I-17).

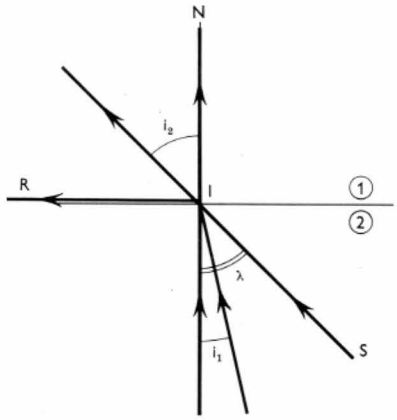


Fig. I-17

Premier milieu : indice absolu $= n_1$	Deuxième milieu (air) : indice absolu $n_2 = 1$
$i_1 = 0$	$i_2 = 0$
$0 < i_1 < 90°$	$0 < i_2 < 90°$
$i_1 = \lambda$	$i_2 = 90°$

Le rayon réfracté s'écarte de la normale. De plus, si l'angle i_1 est supérieur à λ, le rayon incident ne peut plus émerger ($n_1 \sin i_1$ ne peut être plus grand que 1). La surface de séparation se comporte alors comme un miroir, il y a *réflexion totale* (fig. I-18).

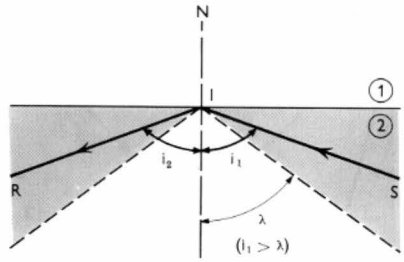


Fig. I-18

D'une façon générale, lorsque la lumière va d'un milieu plus réfringent (indice absolu n_1) vers un autre moins réfringent (indice absolu n_2), il existe un angle d'incidence limite λ tel que pour tout angle d'incidence supérieur à λ, la lumière ne puisse plus émerger. Cet angle λ est défini par la relation $\sin \lambda = \frac{n_2}{n_1}$.

Remarque : Dans les milieux autres que le vide, la vitesse de la lumière dépend de sa couleur, il en est donc de même pour les indices de réfraction. Pour vérifier rigoureusement les lois ci-dessus, il faut travailler en lumière monochromatique. Si l'on utilise de la lumière complexe, il y a dispersion, comme on l'a vu dans le rappel de l'expérience de Newton.

Beaucoup d'expériences peuvent toutefois se faire en lumière solaire : la dispersion se manifeste par l'apparition de liserés colorés.

CHAPITRE II

ÉLÉMENTS ET SYSTÈMES OPTIQUES

1. GÉNÉRALITÉS

1.1. Stigmatisme. — L'étude d'un système optique commence par celle de l'image qu'il permet de former lorsque l'objet est un point lumineux. Le cas des objets étendus se déduit immédiatement de cette étude puisqu'ils peuvent être considérés comme un ensemble de points.

Lorsque les rayons issus d'un point objet A, après avoir traversé un système optique, passent par un point image A', on dit qu'il y a *stigmatisme parfait*. Si, sans passer rigoureusement par un point image A', ils passent tous très près, il y a *stigmatisme approché*.

Du point de vue de l'optique géométrique, seul un miroir plan parfait donnerait d'un objet quelconque une image parfaite. Les miroirs sont parfaitement stigmatiques pour tout point de leur surface : un faisceau de rayons qui converge en un tel point est réfléchi en partant de ce même point, qui est donc sa propre image (fig. II-1). Les autres systèmes optiques ne sont parfaitement stigmatiques que dans des cas exceptionnels.

1.2. Approximation de Gauss. — Les surfaces réfléchissantes planes ou sphériques, les surfaces réfringentes planes ou sphériques sont les plus employées dans les instruments d'optique, parce qu'elles sont les plus faciles à réaliser. Elles permettent un stigmatisme approché sous deux conditions :

— *l'ouverture de ces surfaces doit être faible*, c'est-à-dire que les normales aux divers points d'incidence doivent toutes être peu inclinées sur l'axe optique du système ;

— *les rayons utiles doivent rencontrer ces surfaces sous une incidence assez faible*, les rayons correspondant à des angles d'incidence petits sont alors tous peu inclinés sur l'axe et ils sont dits *paraxiaux*.

Ce sont les conditions d'approximation de Gauss. Dans certains cas, un stigmatisme approché se trouve réalisé pour l'image B' d'un point objet B assez voisin d'un point A pour lequel il y a stigmatisme parfait, même si les rayons utiles ne sont pas tous paraxiaux : on dit qu'il y a *aplanétisme*.

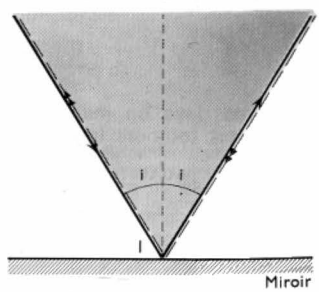


Fig. II-1

Pour l'image d'un objet étendu, en plus du stigmatisme approché, très souvent on souhaite que l'image soit dans toute son étendue localisée dans un plan normal à l'axe optique du système (par exemple, pour les appareils photographiques). Si cette condition est réalisée, on dit qu'il y a *planéité du champ*. Quand les meilleures images de points objet situés dans un même plan se situent sur une surface non plane, on dit qu'il y a *courbure de champ*.

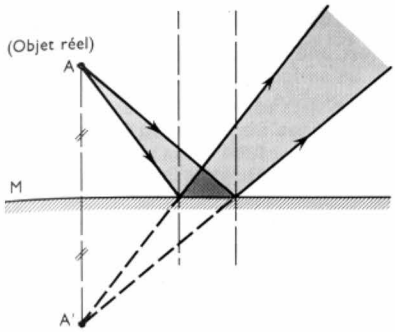


Fig. II-2

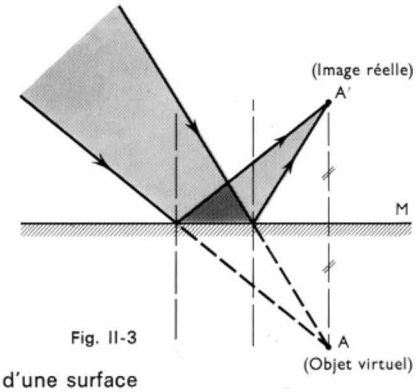


Fig. II-3

1.3. Achromatisme. — Après traversée d'une surface réfringente, le phénomène de dispersion entraîne une superposition imparfaite des images dues aux rayonnements de couleurs différentes. On dit, dans ce cas, que le système optique produit des *aberrations chromatiques*. En général, on peut compenser, approximativement, les effets d'une dispersion par ceux d'une autre de sens inverse. Le système optique est dit *achromatique*.

1.4. Aberrations géométriques. — Les écarts, autres que ceux dus à la dispersion, entre la position réelle des rayons et celle qui correspondrait au stigmatisme, sont appelés *aberrations géométriques*.

Dans certains cas, les conditions de stigmatisme, parfait ou approché, sont incompatibles avec les nécessités pratiques. Par exemple, pour remplir les conditions de l'approximation de Gauss, il faut réduire l'ouverture des faisceaux admissibles, et cela limite le flux lumineux utile. Une combinaison optique ne sera jamais qu'un compromis entre la qualité de l'image reçue et l'usage que l'on veut en faire.

2. LES MIROIRS PLANS

Un miroir plan est une surface plane réfléchissante.

2.1. Image fournie par un miroir

2.1.1. Image d'un point. — Des lois de la réflexion on déduit que si un faisceau de rayons lumineux incidents passe par un point A, le faisceau de rayons réfléchis passe par un point A', *symétrique de A par rapport au plan du miroir :*

— si le point A est *réel*, l'image A' est *virtuelle* (fig. II-2) ;
— si le point A est *virtuel*, l'image A' est *réelle* (fig. II-3).

2.1.2. Image d'un objet. — La construction de l'image d'un objet quelconque dans un miroir plan s'obtient à partir de la construction des points caractéristiques

Fig. II-4

(*Goldner*)

de cet objet (fig. II-5). Il faut prendre le symétrique de chacun de ces points par rapport au plan du miroir. L'image qu'un miroir plan donne d'un objet est semblable

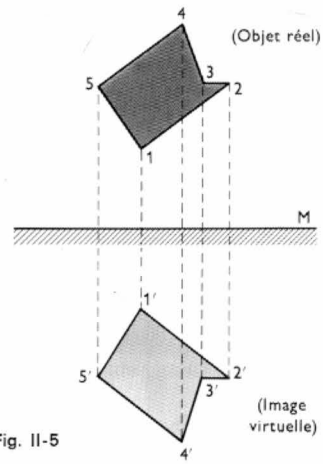


Fig. II-5

et de même grandeur que celui-ci mais, en général, elle n'est pas superposable à l'objet (à moins que celui-ci possède un centre ou certains plans de symétrie). L'image d'une main droite est une main gauche.

2.2. Champ d'un miroir plan. — Un observateur placé devant un miroir voit, par réflexion, des points d'une portion de l'espace : leur ensemble constitue le *champ du miroir*. Le champ d'un miroir plan dépend *des dimensions du miroir et de la position de l'observateur*. Soit O l'œil de l'observateur, O' le symétrique de O par rapport au plan du miroir (fig. II-6) : le champ est le tronc de cône (ou de pyramide) de sommet O', et dont les génératrices s'appuyent sur le contour du miroir.

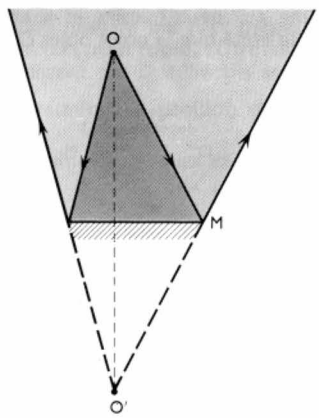


Fig. II-6

2.3. Associations de miroirs plans

2.3.1. Miroirs parallèles (fig. II-7). — Si un point objet A est placé entre deux miroirs parallèles, on obtient

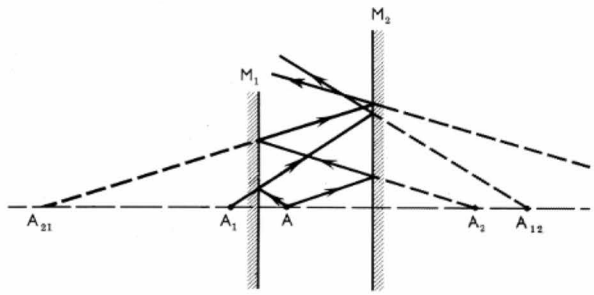


Fig. II-7

une double infinité d'images alignées sur une droite perpendiculaire aux deux miroirs. En effet, chaque image virtuelle donnée par un miroir joue le rôle d'objet réel pour l'autre miroir.

2.3.2. Miroirs perpendiculaires (fig. II-8). — Un point objet O placé dans l'angle formé par deux miroirs perpendiculaires M_1 et M_2 a comme image : 1° le point O'_1 symétrique de O par rapport au miroir M_1 ; 2° le point O'_2 symétrique de O par rapport à M_2 ; 3° l'image O'_{12} du point O'_1 ; en effet, cette image virtuelle de O est un objet réel pour M_2. De même, O'_2 est un objet réel pour M_1 qui en donne une image confondue avec O'_{12}.

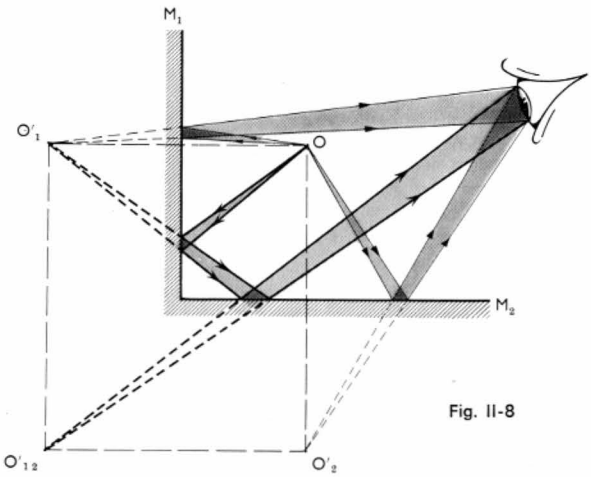


Fig. II-8

Faisceaux lumineux issus du point O et pénétrant dans l'œil de l'observateur (celui-ci voit notamment l'image de O'_1 donnée par M_2)

2.3.3. Cas général. — Si les deux miroirs font entre eux un angle α quelconque, les images d'un point objet O sont situées sur un cercle de centre S (fig. II-9). En effet, elles sont toutes dans un même plan P passant par O, perpendiculaire à l'arête commune aux deux miroirs, et sont toutes à même distance de cette arête que le point objet O.

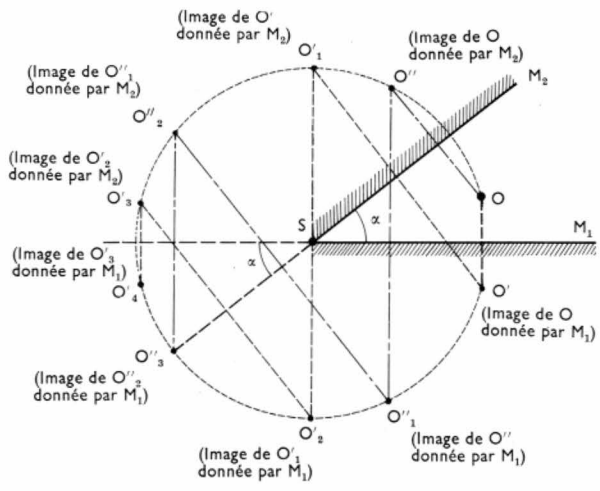


Fig. II-9

Ces images sont en nombre fini, les séries données, d'une part par M_1, d'autre part par M_2 s'arrêtant dès qu'une image arrive dans l'angle opposé par le sommet à l'angle α.

Dans le cas particulier où α est compris un nombre entier de fois dans la circonférence ($n\alpha = 2\pi$), les images de rang $\frac{n}{2}$ coïncident. Il y a $\frac{n}{2}$ images données par M_1, et $\frac{n}{2}$ données par M_2, les deux dernières étant confondues ; soit au total $n - 1$ images différentes. On retrouve le cas des miroirs perpendiculaires en faisant $\alpha = \frac{\pi}{2}$ rad : alors $n = 4$ et il y a trois images. On remarque également qu'il y a d'autant plus d'images que l'angle α est petit, les miroirs parallèles correspondent au cas où $\alpha = 0$, et donnent une double infinité d'images.

3. LES MIROIRS SPHÉRIQUES

Un miroir sphérique est une calotte sphérique dont une face est réfléchissante. La surface réfléchissante peut être concave (fig. II-10) ou convexe (fig. II-11).

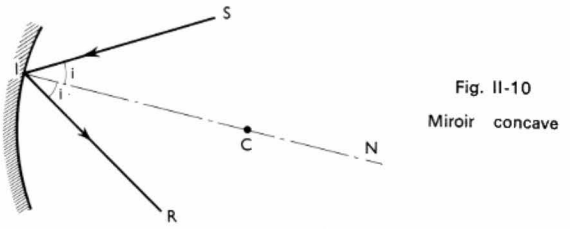


Fig. II-10

Miroir concave

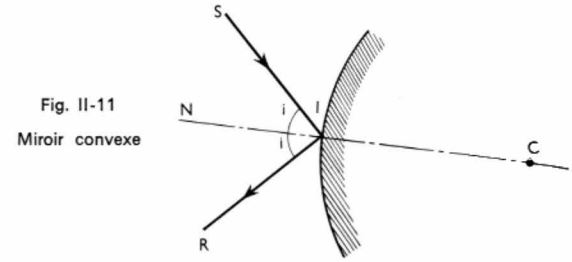


Fig. II-11

Miroir convexe

Notations (fig. II-12). On appelle : r, le rayon de courbure de la surface réfléchissante ; C, le centre de courbure de cette surface et du miroir ; S, le sommet du miroir ; CS, l'axe principal du miroir ; α, l'ouverture du miroir ; F, le foyer du miroir (il sera défini au paragraphe 3.2) ;

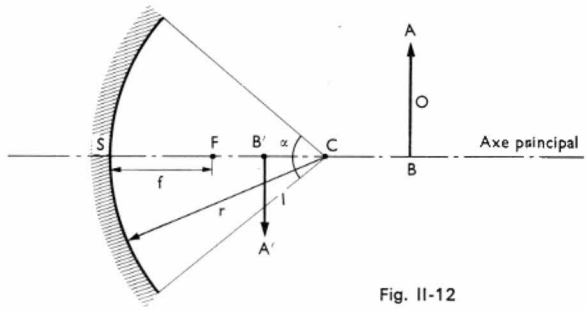


Fig. II-12

$SF = f$, la distance focale du miroir ; $SB = p$, la distance de l'objet au sommet du miroir ; $SB' = p'$, la distance de l'image au sommet du miroir ; O, la longueur de l'objet ; I, la longueur de l'image.

3.1. Marche des rayons et stigmatisme (fig. II-13). — On peut admettre que cette surface sphérique est formée par la juxtaposition de petits miroirs plans élémentaires, et, pour chacun d'eux, les lois de la réflexion sur les miroirs plans sont applicables.

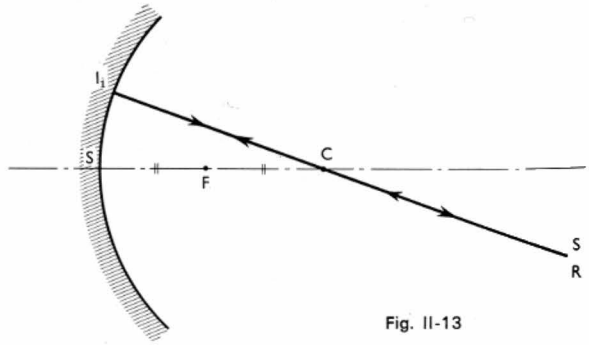


Fig. II-13

En particulier, on remarque que tout rayon incident confondu avec une normale au miroir (c'est-à-dire, passant par C) se réfléchit sur lui-même. Vu les propriétés de la sphère, il en résulte qu'un *miroir sphérique est stigmatique pour son centre C*. Comme toute surface réfléchissante,

quelle que soit sa forme, il est aussi stigmatique pour tous les points de sa surface. Dans les autres cas, il n'y a pas de stigmatisme parfait mais l'on obtient un stigmatisme approché pour des objets éloignés du centre C ou de la surface, si les *rayons utiles sont tous assez voisins de l'axe* (rayons dits *paraxiaux* ou *centraux*), et si, de plus, l'*angle d'ouverture est assez petit* (α ne doit pas dépasser quelques degrés). On est alors dans le cas de l'approximation de Gauss.

Pour la suite on considérera: 1° que l'ouverture est faible; 2° que les objets sont placés au voisinage de l'axe SC. De plus, on admettra les conventions suivantes:

— *pour la distance focale :*

$f > 0$ pour les *miroirs concaves*,
$f < 0$ pour les *miroirs convexes ;*

— *pour la grandeur de l'image :*

$I > 0$ si *objet et image sont de même sens*,
$I < 0$ si *objet et image sont de sens inverse ;*

— *pour la distance :*

p et $p' > 0$ s'ils s'appliquent à des *éléments réels*,
p et $p' < 0$ s'ils s'appliquent à des *éléments virtuels*.

3.2. Miroirs sphériques concaves

3.2.1. Foyer d'un miroir sphérique. — Tout rayon incident parallèle à l'axe principal se réfléchit en passant par un point fixe de cet axe (fig. II-14). On donne le nom

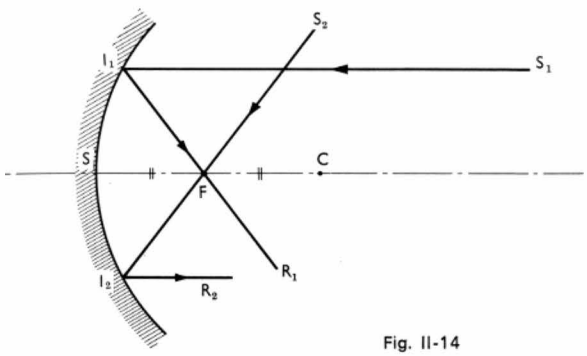


Fig. II-14

de **foyer du miroir** à ce point fixe F, il se trouve placé au milieu de SC. En effet (fig. II-15), soit P, le pied de la perpendiculaire abaissée de F sur IC. Quelle que soit la position du point I, on a : $CF = \dfrac{CP}{\cos i} = \dfrac{r}{2} \cdot \dfrac{1}{\cos i}$.

Dans l'approximation de Gauss, l'angle i est petit et $\cos i$ est voisin de 1. Par suite : $CF \approx \dfrac{r}{2}$. Le foyer peut

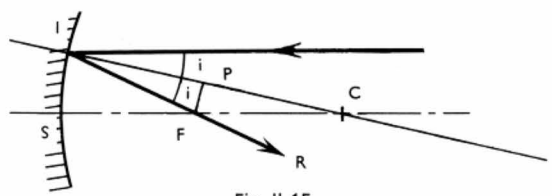


Fig. II-15

donc être considéré comme l'image d'un point situé à l'infini dans la direction de l'axe principal CS. Réciproquement : *tout rayon incident passant par F se réfléchit parallèlement à l'axe principal.*

3.2.2. Exemples de constructions d'images données par un miroir sphérique concave

1° *Image d'un segment AB réel, perpendiculaire à l'axe principal, situé entre le foyer et l'infini* (fig. II-16). — Dans le cas de l'approximation de Gauss, $A'B'$, image de AB, est perpendiculaire à l'axe principal. L'image B' du point B est située sur l'axe principal. Il suffit donc de construire A', image de A, pour connaître la position de $A'B'$. Pour cela, on trace AI_1 parallèle à l'axe CS ; AI_1 représente un rayon qui se réfléchit en passant par le foyer F.

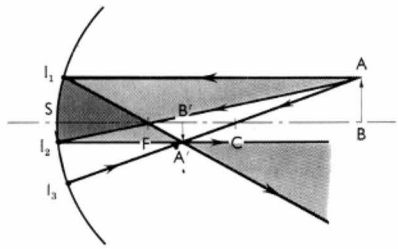


Fig. II-16

On trace ensuite AF qui représente un rayon passant par F ; le rayon réfléchi correspondant est parallèle à l'axe CS. L'intersection de ces deux rayons réfléchis donne le point A'. On peut également utiliser le rayon AC qui se réfléchit sur lui-même. Il est facile de constater que l'image $A'B'$ est réelle.

2° *Image d'un segment AB, perpendiculaire à l'axe principal, mais situé entre le foyer F et le sommet S du miroir.* — Une construction analogue à la précédente montre que l'image obtenue est virtuelle (fig. II-17).

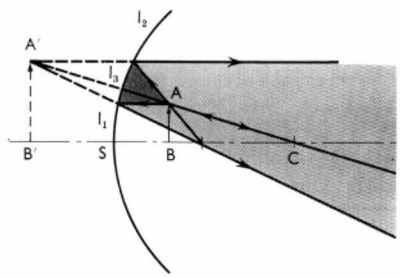


Fig. II-17

3° *Image d'un objet à l'infini.* — L'objet est défini par son diamètre apparent Ω. Son image se forme dans un plan passant par F et perpendiculaire à l'axe principal du miroir **(plan focal).** On construit alors les rayons S_1I_1 et S_2I_2 passant par C, réfléchis sur eux-mêmes (fig. II-18) pour déterminer la position de A' et de B' : $A'B' = 2\dfrac{r}{2}\sin\dfrac{\Omega}{2}$.

Comme l'angle α est très petit : $\sin\dfrac{\Omega}{2} \approx \dfrac{\Omega}{2}$, et $A'B' = \dfrac{r}{2}\Omega = f\Omega$.

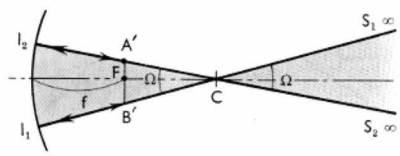


Fig. II-18

3.2.3. Formules des miroirs sphériques concaves

1° *Formule de conjugaison.* — Adopter les conditions de l'approximation de Gauss ($\cos i \approx 1$ ou i très petit ; fig. II-15), revient à assimiler une portion de sphère d'ouverture très faible à un miroir plan (fig. II-19). Les

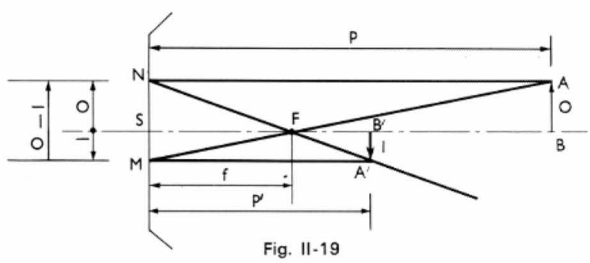


Fig. II-19

triangles rectangles MSF et MNA sont alors semblables et, avec les conventions adoptées, on peut écrire :

$$\frac{\overline{SF}}{\overline{NA}} = \frac{\overline{MS}}{\overline{MN}} \text{ c'est-à-dire : } \frac{f}{p} = \frac{-I}{O-I}$$

(I est négatif puisque image et objet ont des sens opposés).

De même, pour les triangles *NSF* et *NMA'* :

$\frac{\overline{SF}}{\overline{MA'}} = \frac{\overline{SN}}{\overline{MN}}$ c'est-à-dire : $\frac{f}{p'} = \frac{O}{O - I}$. Par addition, il vient : $\frac{f}{p} + \frac{f}{p'} = \frac{O}{O - I} - \frac{I}{O - I} = \frac{O - I}{O - I} = 1$, et en divisant les deux membres par f :

$$\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}} \quad \text{(formule de conjugaison)}$$

2° *Formule de grandissement.* — Les triangles *SAB* et *SA'B'* étant semblables (fig. II-20), on peut écrire :

$$\frac{\overline{B'A'}}{\overline{BA}} = -\frac{\overline{SB'}}{\overline{SB}}$$

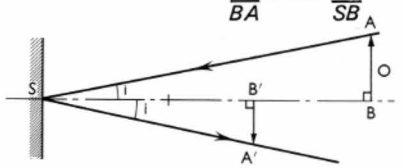


Fig. II-20

soit : $\boxed{\frac{I}{O} = -\frac{p'}{p} = \gamma}$ (formule de grandissement)

3° *Autre formulation.* — On peut prendre le foyer *F* comme origine des positions de l'objet et de l'image (fig. II-21) : $\overline{FB} = \sigma$ et $\overline{FB'} = \sigma'$; σ et σ' sont comptés

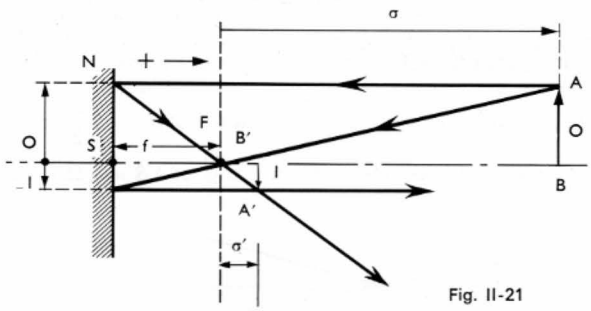


Fig. II-21

positivement si les segments $\overline{FB}$ et $\overline{FB'}$ ont le même sens que la lumière réfléchie.

On a alors :

a) *Formule de conjugaison :* $\boxed{\sigma\,\sigma' = f^2}$

(elle s'obtient à partir de la formule de conjugaison déduite précédemment en posant $p = f + \sigma$ et $p' = f + \sigma'$).

b) *Formule du grandissement :*

$$\gamma = \frac{I}{O} = -\frac{f}{\sigma} = -\frac{\sigma'}{f}$$

(les triangles *SNF* et *FB'A'* sont semblables, et, par ailleurs, $SN = BA$). Ces formules sont dites formules de Newton, les précédentes sont dites formules de Descartes.

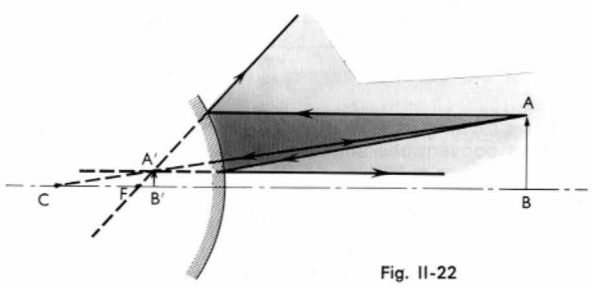


Fig. II-22

3.3. Les miroirs sphériques convexes. — Les formules ci-dessus restent applicables mais il ne faut pas oublier que, dans ce cas, la valeur de la distance focale ($f = SF$) est négative.

On détermine la position des images à l'aide des mêmes procédés que pour les miroirs concaves. Il faut remarquer qu'un miroir convexe donne toujours une image virtuelle d'un objet réel (fig. II-22).

3.4. Problème du stigmatisme parfait à grande ouverture. — On a vu qu'un miroir sphérique quelconque n'était stigmatique que pour son centre et les points de sa surface réfléchissante (objet et image étant, dans ces deux cas, confondus). Pour tout autre point, si l'ouverture est faible et pour les rayons paraxiaux, il n'y a que stigmatisme approché.

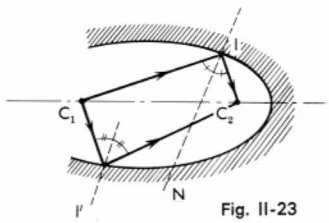


Fig. II-23

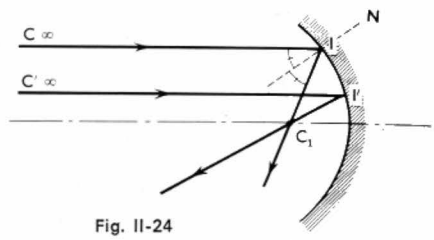


Fig. II-24

D'une façon générale, les surfaces de révolution réfléchissantes appelées *quadriques* (ellipsoïde, paraboloïde, hyperboloïde) sont stigmatiques à toute ouverture pour leurs foyers (le terme foyer étant pris ici au *sens géométrique*). Quelques exemples vont permettre de préciser ces notions.

3.4.1. Ellipsoïde. — Pour une ellipse de foyers C_1 et C_2 (fig. II-23), la normale en un point quelconque I est bissectrice de l'angle $\widehat{C_1IC_2}$. Il en résulte qu'un *ellipsoïde de révolution, d'axe C_1C_2, est stigmatique pour ce couple de points C_1C_2*, quelle que soit l'ouverture. L'objet C_1 et son image C_2 (ou l'objet C_2 et son image C_1) sont réels si le miroir est concave (fig. II-23), ou virtuels si le miroir est convexe.

On retrouve, là, le stigmatisme du miroir sphérique pour son centre *C*, la sphère pouvant être considérée comme un ellipsoïde de révolution particulier dont les deux foyers C_1 et C_2 sont confondus en *C* ; (*C* est le foyer de la sphère, au sens géométrique du terme, mais il ne faut pas le confondre avec le foyer optique *F*, image d'un point objet situé à l'infini dans la direction de l'axe principal).

3.4.2. Paraboloïde. — Dans le cas de la parabole, le second foyer est rejeté à l'infini, et la normale en un point I quelconque est bissectrice de l'angle C_1IC_∞ (fig. II-24).

Un paraboloïde de révolution est donc stigmatique pour le couple de points C_1 (foyer) et C_∞ (point à l'infini dans la direction de l'axe). Les paraboloïdes sont très utilisés pour les télescopes astronomiques ; d'une étoile située à l'infini dans la direction de l'axe, ils donnent une très bonne image au foyer.

3.5. Champ. — Pour déterminer le champ d'un miroir quelconque, on procède comme dans le cas d'un miroir plan, c'est-à-dire qu'on cherche l'image *O'* de l'œil de l'observateur. Les rayons extrêmes issus de *O'* limitent le champ. La figure II-25 correspond au cas d'un miroir sphérique concave.

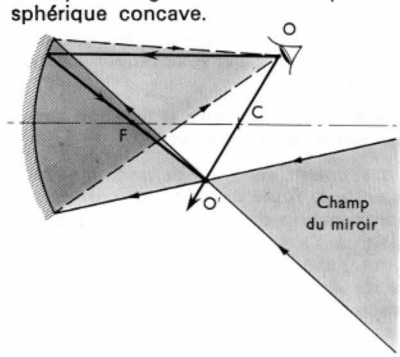


Fig. II-25

4. LAMES À FACES PARALLÈLES

La surface de séparation de deux milieux où les vitesses de la lumière sont différentes est appelée **dioptre.**

Une *lame à faces parallèles* est constituée par l'*association de deux dioptres plans parallèles*, les milieux d'entrée et de sortie étant identiques.

4.1. Marche des rayons (fig. II-26). — On désigne par i l'angle d'incidence sur le dioptre d'entrée et par r l'angle de réfraction correspondant. Si n représente l'indice de réfraction du milieu constituant la lame par rapport à l'air, on peut écrire :

$$\sin i = n \sin r.$$

L'angle d'incidence sur le dioptre de sortie étant aussi égal à r, l'angle de réfraction dans l'air i' sera donné par la relation suivante :

$$n \sin r = \sin i' \text{ ; donc : } \sin i = \sin i' \text{ et : } i = i'.$$

Le rayon sort parallèlement à sa direction initiale mais il y a eu **translation** de ce rayon.

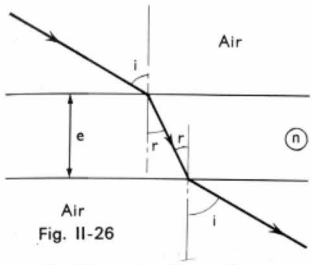


Fig. II-26

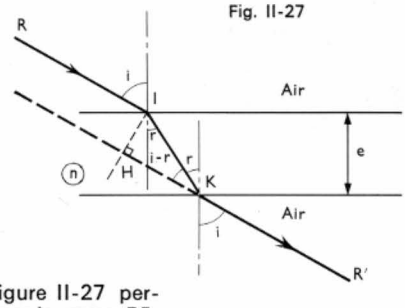


Fig. II-27

4.2. Translation d'un rayon. — La figure II-27 permet de déterminer la translation IH subie par le rayon RI : $IH = IK \sin (i\text{-}r)$ avec : $IK = \dfrac{e}{\cos r}$; donc : $IH = \dfrac{e \sin (i\text{-}r)}{\cos r}$

4.3. Translation apparente d'une image. — Après traversée du dioptre d'entrée, un pinceau de rayons paraxiaux issu du point objet A semble provenir de l'image A_1 de A. Ce point A_1 joue ensuite le rôle d'objet pour le dioptre de sortie qui en donne une image A_2 (fig. II-28).

Les points A_1 et A_2 sont sur la normale à la lame passant par A (le rayon normal aux deux dioptres n'est pas dévié) ; A_2 constitue l'image de A à travers la lame à faces parallèles.

Il est possible de déterminer la distance AA_2, qui représente la translation apparente de l'objet pour un observateur. Dans le parallélogramme AA_2KI, les côtés AA_2 et IK sont égaux ; or, le point K est l'image du point I, fournie par le dioptre de sortie (fig. II-29) :

$$\frac{KL}{IL} = \frac{LJ}{\text{tg } r} \cdot \frac{\text{tg } i}{LJ} = \frac{\text{tg } i}{\text{tg } r}$$

En considérant les angles i et r assez petits pour pouvoir confondre la tangente (et le sinus) et la valeur de l'angle en radians, on peut écrire :

$$\frac{KL}{IL} \approx \frac{i}{r} = \frac{1}{n} \text{ ; d'où } KL = \frac{IL}{n} = \frac{e}{n} \text{ ;}$$

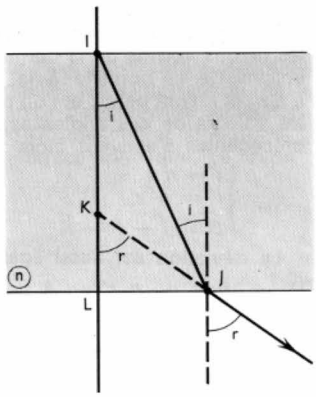


Fig. II-29

Image du point I fournie par le dioptre de sortie

et : $AA_2 = IL - KL = e - \dfrac{e}{n}$;

$$\boxed{AA_2 = e\left(1 - \frac{1}{n}\right)}$$

5. LE PRISME

Un prisme est constitué par l'association de 2 dioptres plans faisant entre eux un angle dièdre. Pour la suite, on considère que le prisme est dans l'air : les milieux d'entrée et de sortie sont identiques.

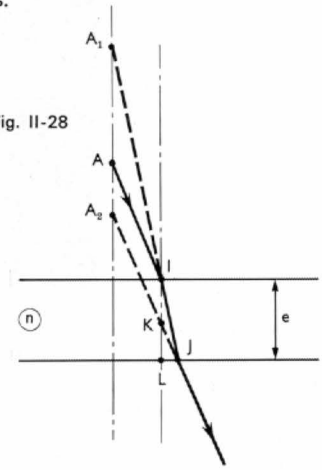


Fig. II-28

5.1. Déviation d'un rayon lumineux. — On appelle n l'indice absolu de réfraction du prisme et $\widehat{A}$ l'angle d'une section principale de l'angle dièdre (fig. II-30). Le rayon réfracté correspondant au rayon incident SI est défini au

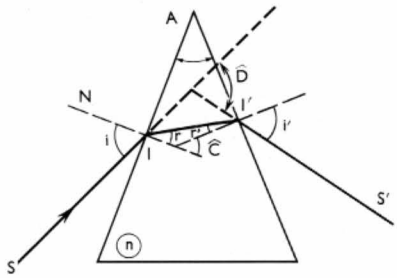


Fig. II-30

moyen de l'angle de réfraction r donné par la loi de Descartes : $\sin i = n \sin r$. Après la traversée du prisme, ce rayon se réfracte dans l'air et sa direction est définie par l'angle i' : $\sin i' = n \sin r'$.

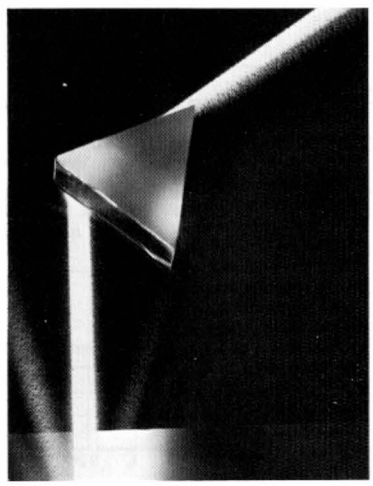


Fig. II-31

Le rayon incident (vertical sur la figure) est fortement dévié par un prisme de verre

(*R. Perrin*)

L'angle $\widehat{D}$ caractérise la déviation subie par le rayon SI.

$$\widehat{D} = (i - r) + (i' - r') = i + i' - \widehat{A}$$

car $\widehat{A} = \widehat{C}$ comme angles à côtés respectivement perpendiculaires et $\widehat{C} = r + r'$, puisque $\widehat{C}$ est angle extérieur au triangle ICI'.

5.2. Condition d'émergence. — Comme le milieu du prisme est plus réfringent que l'air, il y a une condition

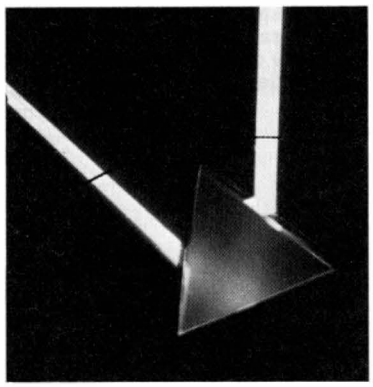


Fig. II-32

Le rayon incident (vertical sur la figure) est totalement réfléchi par le prisme de verre. Condition d'émergence non satisfaite

(*R. Perrin*)

d'émergence à satisfaire : si λ est l'angle limite d'émergence (V. chap. 1, § 7.3). Il faut que r' soit inférieur à λ :

$r' = \widehat{A} - r < \lambda$, puisque r est toujours inférieur à λ ; cette condition s'écrit aussi :

$$\boxed{\widehat{A} < 2\lambda}$$

5.3. Recherche de la déviation minimale. — L'angle $\widehat{D}$ de déviation d'un prisme est fonction de $\widehat{A}$, de n et de

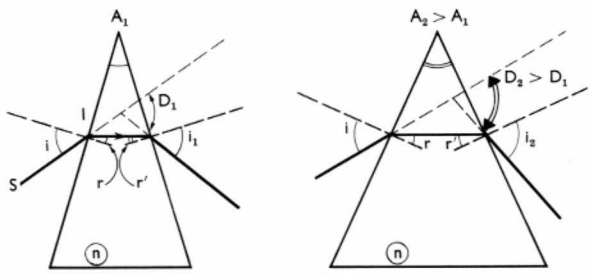


Fig. II-33

l'angle d'incidence i. Cet angle $\widehat{D}$ augmente quand $\widehat{A}$ ou n augmentent (fig. II-33). Pour ce qui est de l'influence de

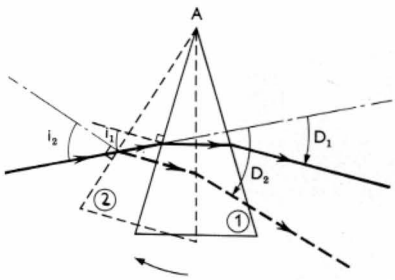


Fig. II-34

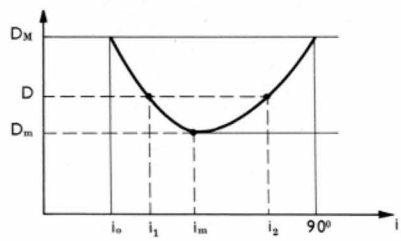


Fig. II-35

l'angle i, en faisant tourner un prisme autour de son arête (fig. II-34), on constate que $\widehat{D}$ varie entre un minimum D_m et un maximum D_M correspondant à la réflexion totale (fig. II-35). La valeur D_m est obtenue lorsque les faisceaux incident et émergent sont disposés symétriquement par rapport au prisme (c'est-à-dire lorsque $i = i' = i_m$, fig. II-36). Lorsque l'angle i est compris entre 0 et i_0, il n'y a pas de déviation mais réflexion totale (fig. II-37). Une valeur de D entre D_m et D_M est obtenue pour deux valeurs de i, situées de part et d'autre de i_m.

Lorsque la déviation est minimale, on peut écrire les relations suivantes :

$$i = i'$$
$$r = r'$$
$$\widehat{A} = r + r' \Rightarrow \widehat{A} = 2r$$
$$\widehat{D} = i + i' - \widehat{A} \Rightarrow \widehat{D}_m = 2i - \widehat{A}$$

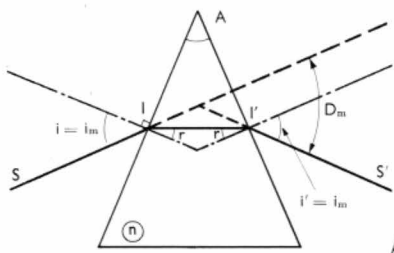


Fig. II-36

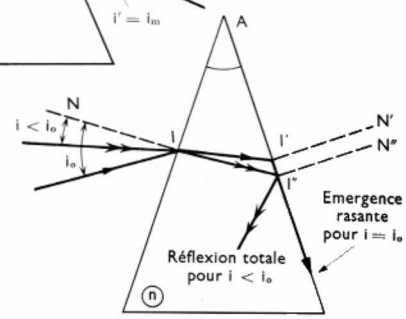


Fig. II-37

Les valeurs de i ($i = i_m$) et de r se déduisent alors facilement :

$$\begin{cases} i = \dfrac{\widehat{A} + \widehat{D_m}}{2} \\ r = \dfrac{\widehat{A}}{2} \end{cases}$$

En appliquant la loi de Descartes, on peut donc calcule l'indice n du prisme :

$$\boxed{n = \frac{\sin \dfrac{\widehat{A} + \widehat{D_m}}{2}}{\sin \dfrac{\widehat{A}}{2}}}$$

Pour déterminer l'indice n d'un prisme, il suffit donc de mesurer les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{D_m}$.

5.4. Prisme de petit angle. — Si l'angle $\widehat{A}$ est petit, les rayons voisins de la normale à la face d'entrée restent voisins de la normale à la face de sortie : les angles i, r, r', et i' sont petits, et l'on peut confondre les sinus avec les valeurs de ces angles exprimées en radians. Les lois précédentes s'écrivent alors :

$$\begin{cases} i = n\, r \\ i' = n\, r' \\ \widehat{D} = i + i' - \widehat{A} \end{cases}$$

La déviation est aussi égale à :

$\widehat{D} = n\, r + n\, r' - \widehat{A} = n\,(r + r') - \widehat{A}$. Comme $r + r' = \widehat{A}$, la déviation est donnée en fonction de l'angle $\widehat{A}$ par l'expression :

$$\widehat{D} = (n - 1)\widehat{A}$$

La déviation est pratiquement constante quand i reste petit. Par ailleurs, l'indice n est alors égal à : $n = 1 + \dfrac{\widehat{D_m}}{\widehat{A}}$

5.5. Prisme à réflexion totale. — La section droite d'un prisme à réflexion totale, en verre, est un triangle rectangle isocèle (fig. II-38). Un rayon incident perpendiculaire à la face d'entrée AB entre dans le prisme sans déviation. L'angle d'incidence i sur la face BC est égal à 45°, il est plus grand que l'angle limite λ pour le verre (41°), il y a donc réflexion totale. Le rayon réfléchi étant perpendiculaire à la face de sortie AC, il n'est pas dévié à la traversée de celle-ci. Rayons incident et émergent forment un angle droit. En utilisant le prisme à réflexion totale, comme l'indique la figure II-39, les rayons incident et émergent sont alors parallèles.

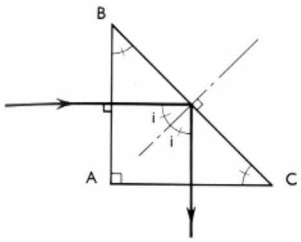


Fig. II-38

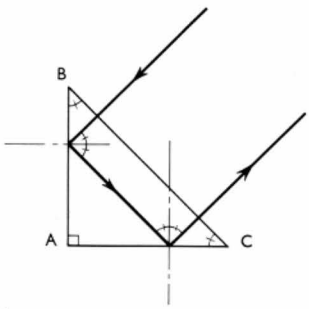


Fig. II-39

6. DIOPTRE SPHÉRIQUE

Un dioptre sphérique est un système optique formé de deux milieux réfringents d'indice différent, séparés par une surface sphérique. Cette étude est limitée aux dioptres sphériques de faible ouverture, utilisés dans les conditions de l'approximation de Gauss (rayons paraxiaux).

6.1. Image d'un point situé sur l'axe. — Soit n_1 et n_2, les indices absolus de réfraction des deux milieux. L'image d'un objet O placé sur l'axe du dioptre sphérique est obtenue en cherchant quelle est l'intersection des rayons réfractés correspondant à deux rayons incidents OS et OJ (fig. II-40). Le rayon OS ne subit aucune déviation puisqu'il est normal à la surface sphérique. Le rayon OJ se réfracte en JI ; ces rayons étant paraxiaux, on peut confondre la valeur des angles d'incidence et de réfraction exprimée en radians avec leurs sinus (et avec leurs tangentes), et la loi de Descartes ($n_1 i = n_2 r$) permet de déterminer l'angle r. L'image I est donc à l'intersection de JI et de OC.

Comme $i = \alpha + \beta$ et $\beta = r + \gamma$ (soit $r = \beta - \gamma$), la relation $n_1 i = n_2 r$ s'écrit : $n_1\alpha + n_2\gamma = (n_2 - n_1)\ \beta$. Pour des rayons paraxiaux et en confondant H et S (faible ouverture), on a : $n_1 \dfrac{JH}{p} + n_2 \dfrac{JH}{p'} = (n_2 - n_1) \dfrac{JH}{SC}$. En divisant par JH et en tenant compte de ce que SC est égal au rayon de courbure R de la surface sphérique de séparation on obtient :

$$\boxed{\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{p'} = \frac{n_2 - n_1}{R}}$$

Pour que cette formule soit toujours vraie, il faut prendre p et p' *positifs quand ils correspondent à des objets ou des images réels*, négatifs si ces éléments sont virtuels.

6.2. Formules. — On appelle *distance focale image*, la valeur de p' lorsque p est infini. Cette distance focale est égale à : $f' = \dfrac{n_2 R}{n_2 - n_1}$ (formule ci-dessus pour $p = \infty$). On appelle *distance focale objet*, la valeur de p lorsque p' est infini ; elle est égale à : $f = \dfrac{n_1 R}{n_2 - n_1}$. On constate que $f' - f = R$ et que : $\dfrac{f'}{f} = \dfrac{n_2}{n_1}$; en portant ces résultats dans a formule du paragraphe précédent on obtient :

$$\boxed{\frac{f}{p} + \frac{f'}{p'} = 1}$$ (formule de conjugaison)

6.3. Image d'un objet situé sur l'axe. — On appelle F et F', les foyers objet et image définis par les distances focales objet et image (fig. II-41). Un rayon parallèle à l'axe se réfracte en passant par F' (ou F suivant qu'il est issu de l'objet ou de l'image). Un rayon passant par le centre C n'est pas dévié. L'image I de l'objet O est donc facile à construire. Avec les conventions faites pour les miroirs, le grandissement est donné par l'expression suivante :

$$\boxed{\frac{I}{O} = -\frac{fp'}{f'p}}$$ (formule du grandissement)

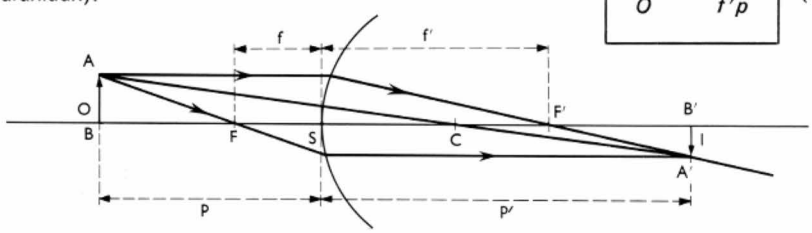
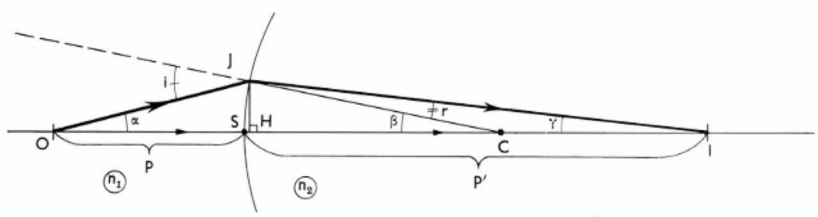


Fig. II-41

Fig. II-40

Image d'un objet O donnée par un dioptre sphérique

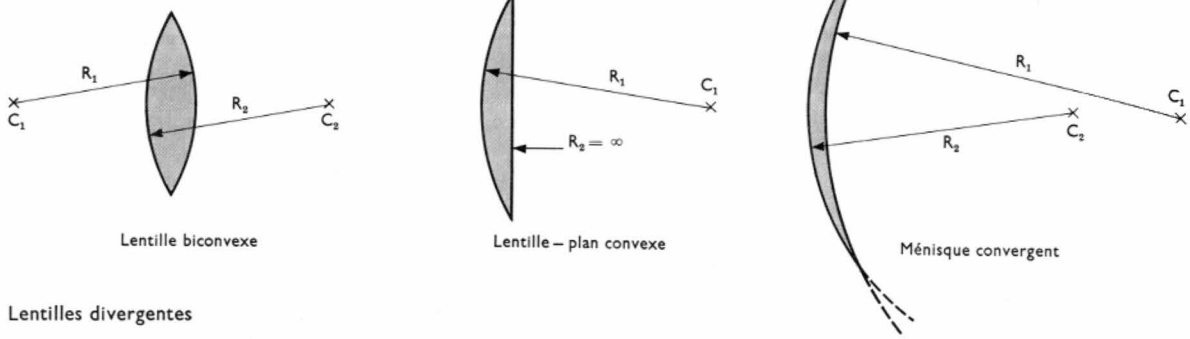


7. LENTILLES SPHÉRIQUES

Une lentille sphérique est un *système optique formé d'un milieu réfringent limité par deux dioptres sphériques ou par un dioptre sphérique et un dioptre plan.* En général, les lentilles sont en verre et placées dans l'air. On ne considérera que des lentilles minces, c'est-à-dire d'épaisseur très

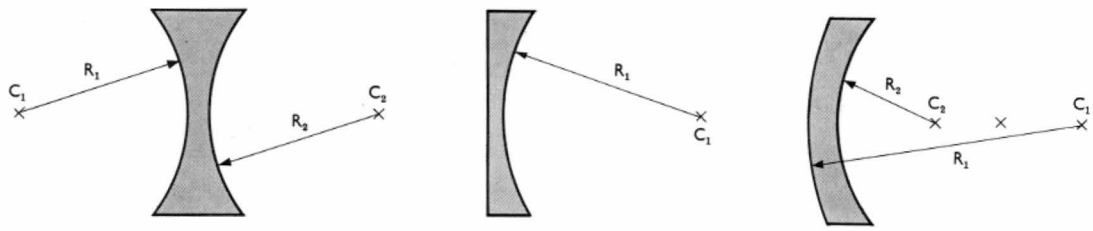
Divers types de lentilles

Lentilles convergentes



Lentille biconvexe — Lentille – plan convexe — Ménisque convergent

Lentilles divergentes



Lentille biconcave — Lentille – plan concave — Ménisque divergent

faible n'intervenant pas dans l'étude de ces lentilles. Six catégories de lentilles sont utilisées (V. tabl. ci-dessus).

7.1. Conventions et notations. — Les conventions sont les mêmes que pour les miroirs : les miroirs concaves correspondent aux lentilles convergentes, et les miroirs convexes aux lentilles divergentes. L'axe principal est la droite joignant les centres des deux dioptres de la lentille.

On appelle : *C, centre optique* (intersection de l'axe principal avec les dioptres sphériques, supposés confondus dans le cas des lentilles minces) ; *F, foyer-objet*, et $CF = f$, *distance focale objet; F' foyer-image*, et $CF' = f'$, *distance focale image*. *F* et *F' foyers principaux* sont situés sur l'axe principal ; de plus, dans le cas des lentilles minces, *F* et *F'* sont symétriques par rapport à *C*, et $f = f'$.

7.2. Lentilles convergentes. — En raisonnant de la même façon que pour les miroirs, on effectue facilement la construction des images. En résumé on applique les règles suivantes : 1° tout rayon, issu d'un objet, parallèle à l'axe passe par le foyer-image *F'* ; 2° tout rayon passant par le foyer-objet *F* émerge de la lentille parallèlement à l'axe ; 3° tout rayon passant par le centre optique *C* n'est pas dévié (c'est-à-dire que le centre optique d'une lentille mince joue le rôle du centre de courbure d'un miroir sphérique). On reste dans le cas de l'*approximation de Gauss*.

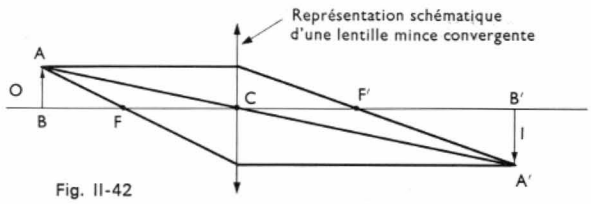


Fig. II-42

Image d'une petite droite perpendiculaire à l'axe principal. — Les règles précédentes sont appliquées à quelques exemples :

— l'objet *O* est situé en avant du foyer-objet *F* (fig. II-42) : l'image est réelle et se trouve au-delà du foyer-image *F'* ;

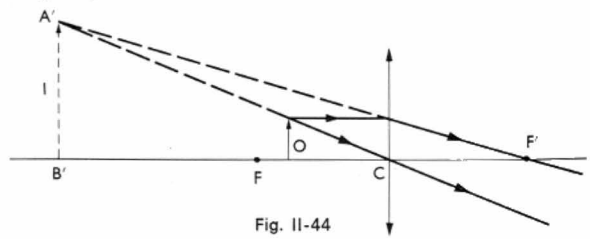


Fig. II-44

— l'objet *O* est situé entre le foyer-objet *F* et le centre optique *C* (fig. II-44) ; l'image est alors virtuelle.

— l'objet *O* est situé à l'infini (par exemple : astre de diamètre apparent α), l'image se forme alors dans le plan

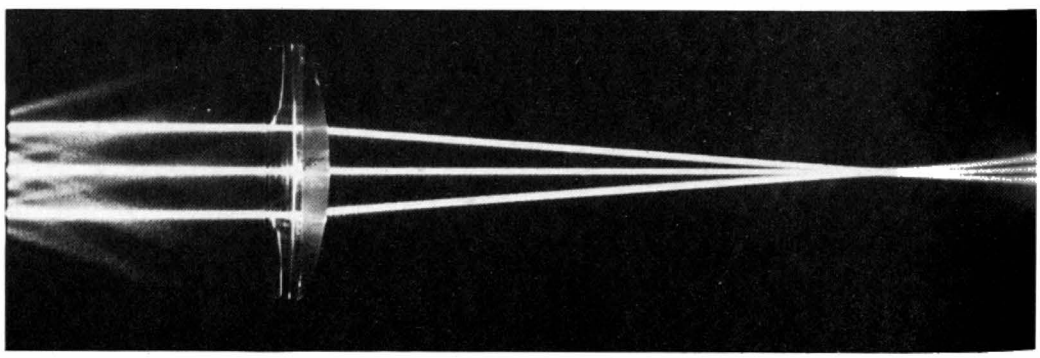


Fig. II-43

Les pinceaux lumineux parallèles convergent au foyer de la lentille-plan convexe

(*R. Perrin*)

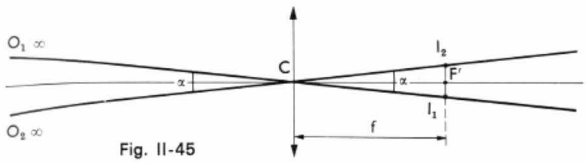


Fig. II-45

focal passant par F' (fig. II-45) ; l'étendue de l'image est déterminée par des rayons passant par C, et qui ne sont pas déviés. Quand α est petit : $I_1 I_2 = f\alpha$ (α étant exprimé en radians).

Formules

Les triangles rectangles CFJ et KAJ (fig. II-46) sont semblables et l'on peut écrire : $\frac{\overline{CF}}{\overline{KA}} = \frac{\overline{JC}}{\overline{JK}}$, c'est-à-dire $\frac{f}{p} = \frac{-I}{O-I}$.

De même, les triangles rectangles $CF'K$ et $JA'K$ sont semblables et l'on aura : $\frac{\overline{CF'}}{\overline{JA'}} = \frac{\overline{CK}}{\overline{JK}}$, c'est-à-dire $\frac{f}{p'} = \frac{O}{O-I}$;

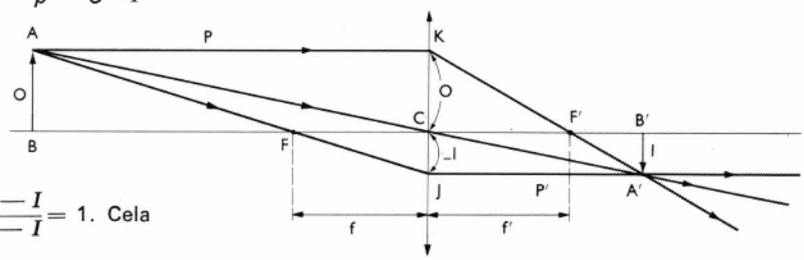


Fig. II-46

d'où, par addition, on déduit, $\frac{f}{p} + \frac{f}{p'} = \frac{O-I}{O-I} = 1$. Cela fournit les formules de Descartes :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$$

(formule de conjugaison)

$$\frac{I}{O} = -\frac{p'}{p}$$

(formule du grandissement)

Comme pour les miroirs, on peut utiliser les formules de Newton. Les positions de l'objet et de l'image sont alors

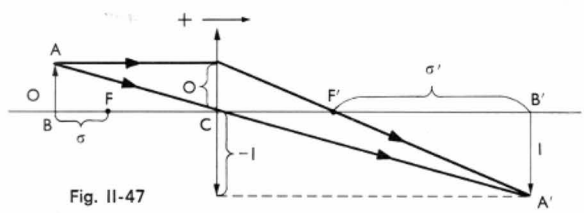


Fig. II-47

repérées par les distances σ (comptées à partir de F) et σ' (comptées à partir de F') et le sens positif est celui de la lumière (fig. II-47). On a alors :

$$\sigma\sigma' = -f^2$$

(formule de conjugaison)

$$\frac{I}{O} = \frac{f}{\sigma} = -\frac{\sigma'}{f}$$

(formule du grandissement)

7.3. Lentilles divergentes. — Les formules établies pour les lentilles convergentes sont appliquables à condition de respecter les conventions adoptées (§ 7.1). À titre d'exemple, on a représenté l'image d'une petite droite virtuelle perpendiculaire à l'axe, située entre le

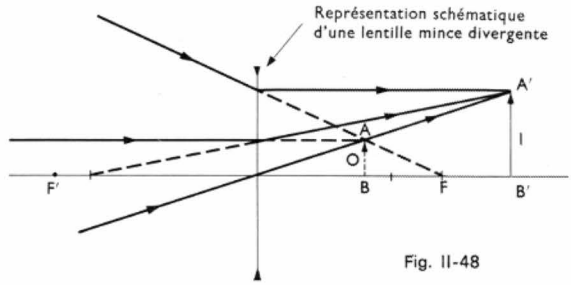


Fig. II-48

centre optique et le foyer-objet (fig. II-48). L'image est réelle, de même sens que l'objet, et plus grande que lui.

7.4. Vergence d'une lentille mince. — La vergence d'une lentille mince est l'inverse de sa distance focale f : $C = \frac{1}{f}$. Si f est exprimée en mètres, C s'exprime en *dioptries;* une dioptrie est donc la vergence d'une lentille d'un mètre de distance focale. Par convention, la vergence est *positive* si la *lentille est convergente*, et *négative* si la *lentille est divergente*.

Exemples. Une lentille convergente de distance focale 40 cm a une vergence de + 2,5 dioptries ; une lentille divergente de distance focale 10 cm a une vergence de — 10 dioptries. La vergence d'une lentille est fonction de son indice et de ses rayons de courbures :

$$C = \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

Cette formule est générale à condition de compter le rayon de courbure *positivement pour une face convexe*, et *négativement pour une face concave;* par exemple, R_1 et R_2 sont positifs pour une lentille biconvexe alors que R_1 est positif et R_2 est négatif pour un ménisque divergent. De plus, pour les *faces planes*, il faut considérer que le *rayon de courbure est infini*.

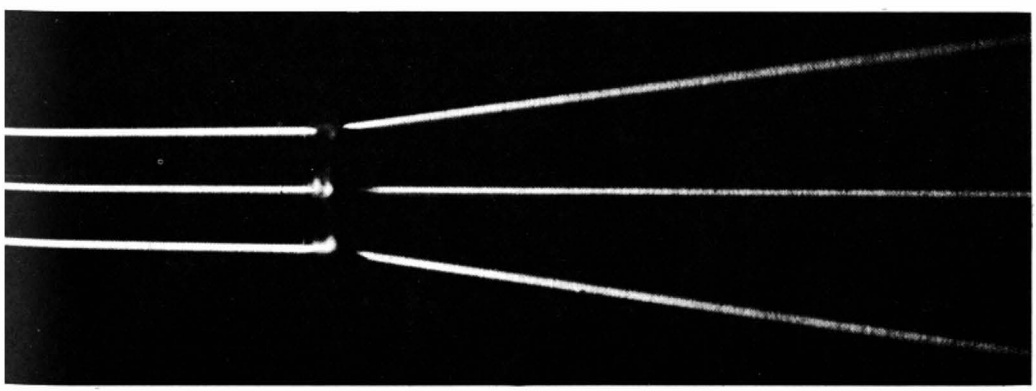


Fig. II-49

Les pinceaux lumineux divergent après la traversée de la lentille-plan concave

(*R. Perrin*)

CHAPITRE III

LES INSTRUMENTS D'OPTIQUE

1. PRÉLIMINAIRES : L'ŒIL

1.1. Description (fig. III-1). — Le globe oculaire comporte trois membranes concentriques :

1° la *sclérotique*, enveloppe extérieure blanche et dure dont la partie en avant de l'œil, plus bombée, constitue la cornée transparente (indice 1,377) : c'est la fenêtre par laquelle la lumière entre dans l'œil ;

2° la *choroïde*, membrane noire, riche en vaisseaux sanguins ;

3° la *rétine*, écran mince, transparent, dont la face arrière est sensible à la lumière. La rétine est formée par l'épanouissement du nerf optique qui relie l'œil au cerveau.

Dans les cavités délimitées par ces membranes se trouvent des substances transparentes caractérisées par des indices de réfraction différents. Derrière la cornée transparente, se trouve l'*humeur aqueuse* (indice 1,336) puis le *cristallin*, sorte de lentille biconvexe en substance non homogène dont l'indice varie de 1,36 à 1,42. Le reste du globe oculaire est rempli d'*humeur vitrée*, sorte de gelée,

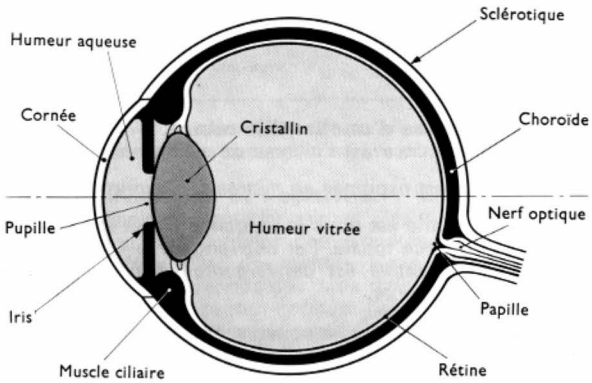


Fig. III-1

dont l'indice est très voisin de l'indice de l'humeur aqueuse (1,336). En avant du cristallin, l'*iris* forme un *diaphragme* dont l'ouverture, la *pupille*, est de diamètre variable (de 2 mm si la lumière est très intense, à 8 mm si la lumière est très faible).

L'œil est un système optique extrêmement compliqué, mais pour une première étude optique, on peut cependant l'assimiler à une lentille mince (fig. III-2). La formule de conjugaison de Descartes : $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$ montre que la distance focale f de cette lentille varie afin que les images se forment sur la rétine (p' = constante), quelle que soit la valeur de p. C'est le cristallin qui permet cette variation de f car sa courbure peut être modifiée. On dit que l'œil *accommode*. Le pouvoir d'accommodation varie avec l'âge ; un enfant peut voir nettement un objet situé à 15 cm de l'œil ; pour un adulte, cette distance, appelée distance du **punctum proximum,** est en moyenne de 25 cm. L'œil perd peu à peu son pouvoir d'accommodation, et il devient

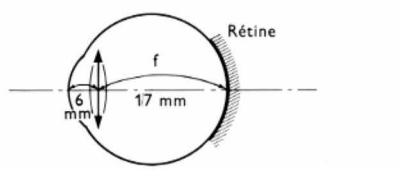
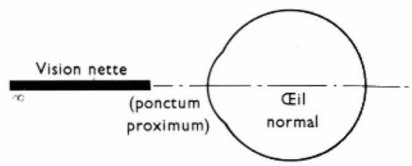


Fig. III-2

Fig. III-3

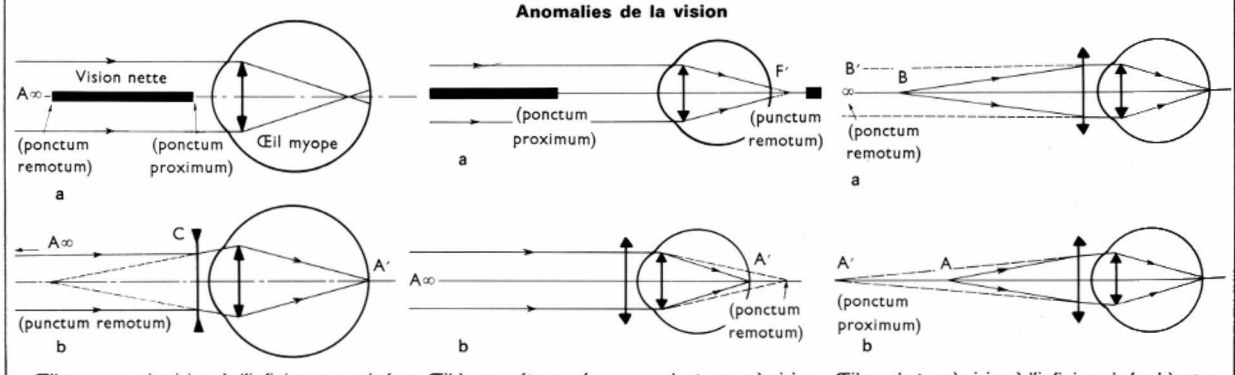


presbyte. La distance p maximale pour une vision nette est normalement infinie (fig. III-3). Dans certaines anomalies de la vision, l'œil ne donne pas d'image nette pour des objets situés au-delà d'un point à distance finie, appelé **punctum remotum** (V. tabl. ci-après).

1.2. Pouvoir séparateur de l'œil. — Cette description extrêmement sommaire de l'œil étant un préliminaire aux paragraphes sur les instruments d'optique, on limite cette étude à la notion de *pouvoir séparateur* de l'œil ; on n'abordera donc pas les notions de *pouvoir stéréoscopique*, de réponse spectrale et les anomalies de la vision.

Le pouvoir séparateur de l'œil est la *distance angulaire minimale de deux points que l'œil permet de séparer*. Ce pouvoir séparateur est lié à la structure de la rétine qui est formée de petites cellules détectrices : les cônes et les bâtonnets. Les cônes sont nécessaires principalement pour la vision diurne tandis que les bâtonnets servent à la vision nocturne. Le diamètre des cônes est d'environ 5 μm, et cette dimension conditionne le pouvoir séparateur de l'œil : les images de deux points peuvent être distinguées si elles se forment sur deux cellules détectrices différentes et si, de plus, ces deux cellules sont séparées par une cellule intermédiaire (qui empêche toute influence mutuelle). Les cônes ayant un diamètre de 5 μm, et p' étant sensiblement égal à 15 mm soit 15 000 μm, le diamètre

Anomalies de la vision



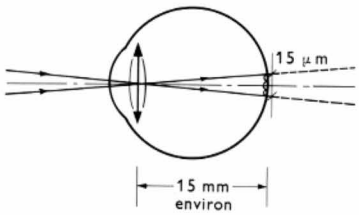
Œil myope : a) vision à l'infini non corrigée ; b) vision à l'infini corrigée

Œil hypermétrope n'accommodant pas : a) vision à l'infini non corrigée ; b) vision à l'infini corrigée

Œil presbyte : a) vision à l'infini corrigée ; b) position du punctum proximum après correction (A)

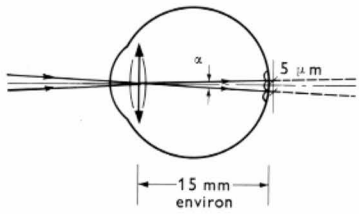
apparent correspondant est : $\frac{3 \times 5\ \mu m}{15\,000} = \frac{1}{1\,000}$: c'est le pouvoir séparateur d'un œil observant sans fatigue (fig. III-4).

Fig. III-4



Par une observation attentive mais rapidement fatigante, on peut utiliser l'œil à la limite de ses possibilités : les images des deux points à séparer peuvent se trouver à l'extrême bord de deux cellules non adjacentes (fig. III-5), et le diamètre apparent correspondant est alors égal à :

Fig. III-5



$\frac{5}{15\,000} = \frac{1}{3\,000}$. L'angle α qui définit la séparation angulaire est égal à 1 minute environ. Ce résultat indique qu'il est possible de séparer deux sources lumineuses à 1 mètre l'une de l'autre, et placées à 3 km d'un observateur.

2. CARACTÉRISTIQUES DES INSTRUMENTS D'OPTIQUE

Les instruments d'optique ont pour fonction soit d'améliorer la perception des images, soit de reproduire ces images de façon durable. Loupes ou microscopes utilisés pour l'étude des petits objets rapprochés, lunettes astronomiques nécessaires à l'observation des astres lointains, objectifs photographiques sont des exemples d'instruments d'optique.

On suppose que ces instruments sont utilisés dans les conditions de l'*approximation de Gauss*. On les caractérise alors au moyen des rapports suivants :

— la *puissance* : c'est le rapport P du diamètre apparent α' de l'image et de la longueur O de l'objet : $P = \frac{\alpha'}{O}$. Si α' est exprimé en radians et O en mètres, la puissance s'exprime en dioptries. La *puissance intrinsèque* correspond à un œil normal observant un objet à l'infini ;

— le *grossissement* : c'est le rapport G des diamètres apparents α' et α de l'image et de l'objet : $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$;

— la *clarté* : c'est le rapport des quantités de lumière reçues par unité de surface de la rétine quand on observe à l'aide d'un instrument et à l'œil nu.

3. LOUPES ET OCULAIRES

Une *loupe simple* est une lentille convergente. La *loupe composée* est constituée de plusieurs lentilles. Les *oculaires* sont des loupes particulières, utilisées en association avec des objectifs. Loupes et oculaires permettent d'observer des images de petits objets sous un diamètre apparent plus grand qu'à l'œil nu : ils augmentent donc le pouvoir séparateur de l'œil.

3.1. Loupes

3.1.1. Utilisation d'une loupe. — Il faut que l'image à observer soit amenée à une distance qui ne nécessite pas d'accommodation, donc théoriquement à l'infini : *l'objet AB réel à observer doit donc se trouver dans le plan focal objet* (fig. III-6). L'image est évidemment virtuelle. Pour une meilleure compréhension, on place l'objet entre C et F, très près de F (fig. III-7), et l'œil reste voisin de F' (de cette façon, la valeur de α' est peu modifiée).

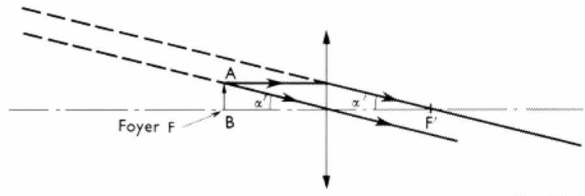


Fig. III-6

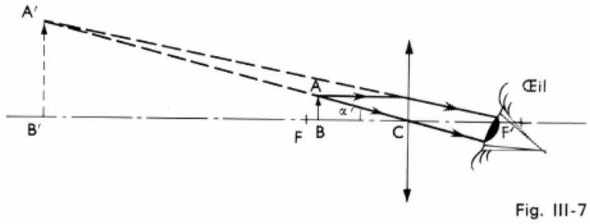


Fig. III-7

3.1.2. Caractéristiques. — Dans ces conditions d'utilisation normale, les caractéristiques de cet instrument ont les valeurs suivantes : *puissance intrinsèque* : $P_i = \frac{\alpha'}{AB}$, avec ici : $\alpha' = \frac{AB}{f}$ (on confond la valeur de l'angle exprimée en radians avec sa tangente) d'où : $P_i = \frac{1}{f}$.

On retrouve l'expression de la vergence d'une lentille exprimée en dioptries ; on peut remarquer que la distance focale doit être d'autant plus courte que l'on cherche à voir des objets plus petits. En général, pour les loupes, f est compris entre 1 et plusieurs centimètres.

Grossissement : $G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\alpha'}{AB} \cdot \frac{AB}{\alpha} = P \frac{AB}{\alpha}$. À l'œil nu, pour avoir le meilleur pouvoir séparateur possible, on placerait l'objet au punctum proximum ; la position de celui-ci variant d'un individu à l'autre ; pour définir le grossissement, on admet que la distance œil-punctum proximum est de $\frac{1}{4}$ de mètre, et l'on a : $G = \frac{P}{4}$.

Ce grossissement, appelé *grossissement commercial*, étant le rapport de 2 angles, est un *nombre abstrait*, et il ne s'exprime pas en dioptries bien qu'il soit égal au quart de la puissance. Par exemple, si la puissance d'une loupe est de 20 dioptries, son grossissement commercial est de 5.

3.2. Les oculaires. — Un oculaire est une loupe utilisée pour examiner une image donnée par un objectif. Les oculaires sont rarement constitués d'une lentille unique, ce sont généralement des *doublets* ou des *triplets* (association de 2 ou de 3 lentilles). Les oculaires se divisent en deux catégories (fig. III-8 et III-9) :

— *Les oculaires positifs*, c'est-à-dire à *foyer-objet réel*. Ils permettent d'utiliser un réticule (fils tendus ou plaque de verre gravée) qu'on place dans le plan de l'image objective. Le plus utilisé des oculaires positifs est le **doublet de Ramsden.**

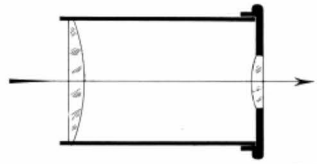


Fig. III-8

Doublet de Ramsden

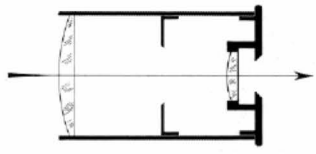


Fig. III-9

Doublet de Huyghens

— *Les oculaires négatifs*, c'est-à-dire à *foyer-objet virtuel*. Leurs champs sont plus étendus que ceux des oculaires positifs mais ils s'utilisent sans réticule. L'oculaire négatif le plus employé est le **doublet de Huyghens.**

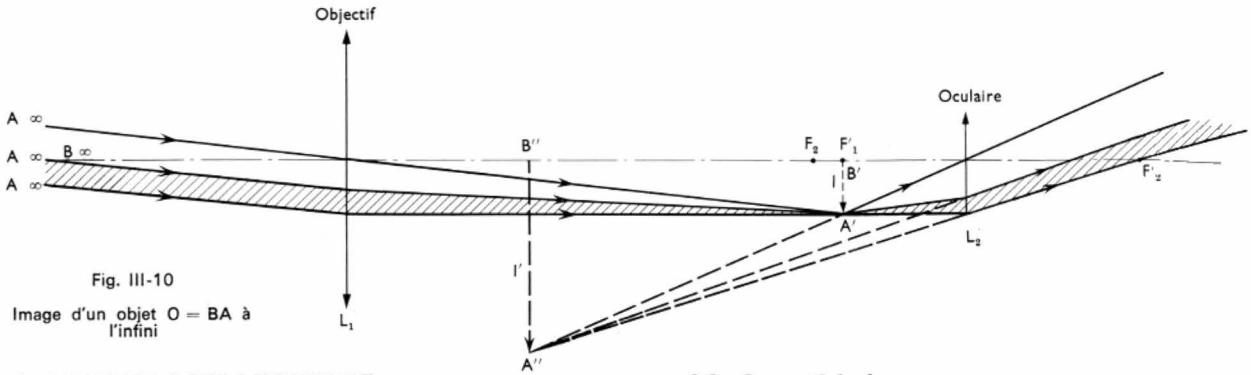


Fig. III-10

Image d'un objet O = BA à l'infini

4. LUNETTE ASTRONOMIQUE

4.1. Conditions d'utilisation. — Les lunettes astronomiques sont constituées d'un objectif convergent, qui forme d'un objet O une image réelle I, et d'un oculaire, de même axe optique, formant de I une image I', généralement virtuelle qui peut être observée à l'œil (fig. III-10).

Dans les observations astronomiques, O peut être considéré comme situé à l'infini sur l'axe; l'image I se trouve donc au foyer-image de l'objectif. Dans les conditions d'observation normale (c'est-à-dire sans accommodation), l'image I' est rejetée à l'infini ou très loin. Donc, l'image I doit être formée au foyer-objet de l'oculaire ou très près de celui-ci : foyer-image F'_1 de l'objectif et foyer-objet F_2 de l'oculaire sont sensiblement confondus. Dans ces conditions, la lunette est un système *afocal* ou *quasi afocal*.

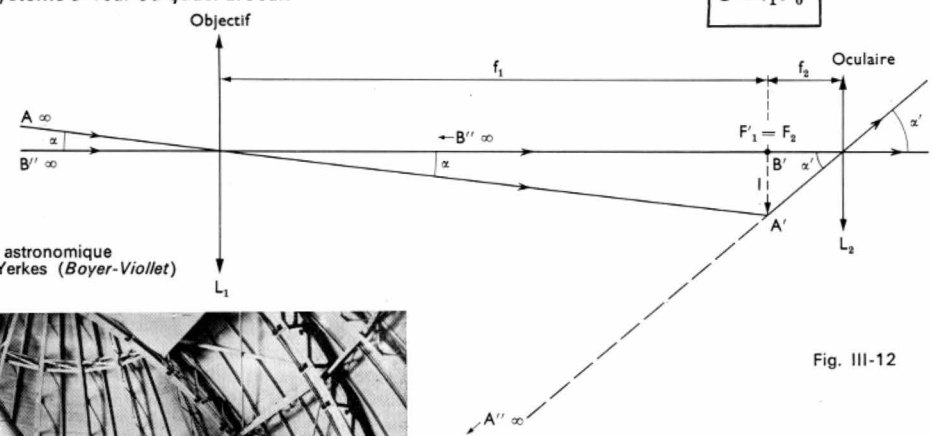


Fig. III-11 — Lunette astronomique de l'observatoire de Yerkes (*Boyer-Viollet*)

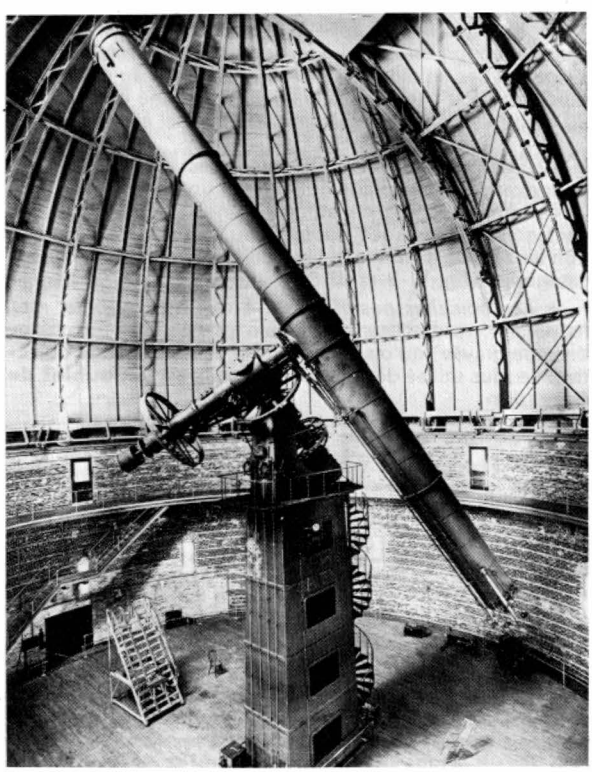


Fig. III-12

4.2. Caractéristiques

1° *Grossissement.* — On considère le cas d'une lunette afocale (fig. III-12). Pour les astres, α est toujours très petit et l'on peut écrire : $I = f_1\alpha$ et $I = f_2\alpha'$; donc :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{f_1}{f_2}$$

Comme la puissance de l'oculaire est $P_0 = \frac{1}{f_2}$ (v. ci-dessus, § 3.1), le grossissement est donc également donné par l'expression suivante :

$$G = f_1 P_0$$

2° *Clarté.* — On doit considérer deux cas :

— *Premier cas :* À travers la lunette, on observe des objets de diamètre apparent visuellement appréciable : la clarté est alors le rapport des éclairements des images rétiniennes perçues à travers l'instrument et à l'œil nu (cet éclairement est égal au rapport du flux lumineux et de la surface de l'image). La clarté C est alors égale à : $C = \frac{r'^2}{r^2}$, si r' est le rayon de la trace du faisceau émergent sur la pupille et si r est le rayon de la pupille de l'œil.

— *Deuxième cas :* On observe un objet de diamètre apparent non perceptible, comme une étoile; on peut alors admettre que l'image rétinienne se forme sur les mêmes cellules réceptrices dans l'examen à l'œil nu et à travers l'instrument.

On ne peut plus introduire la notion de surface et il faut comparer directement les flux reçus par l'œil en vision directe et en vision à travers l'instrument. Dans ce cas, la clarté est donnée par l'expression suivante : $C = \frac{r'^2}{r^2} G^2$; r' et r ayant la même signification que précédemment, et G étant le grossissement. Dans le cas des objets ponctuels, la clarté est donc G^2 fois plus grande que dans le cas des objets étendus.

3° *Pouvoir séparateur. Diffraction.* — Nous avons vu que le pouvoir séparateur de l'œil était à l'extrême limite de

3 dix millièmes de radian, c'est-à-dire 1 minute d'angle. Avec nos conventions d'écriture, si $\alpha' = 1'$, l'angle correspondant, exprimé en minutes, est numériquement égal à : $\alpha = \frac{1}{G}$.

Théoriquement, avec une lunette de grossissement G, deux points peuvent être séparés si leur distance angulaire est G fois plus petite que celle nécessaire pour une observation à l'œil nu. Il semble ainsi que l'on puisse augmenter le pouvoir séparateur de l'œil indéfiniment. En réalité, il n'en est rien car la nature ondulatoire de la lumière limite rapidement cette possibilité, du fait du phénomène de diffraction. Finalement, c'est le diamètre de l'objectif qui limite le pouvoir séparateur d'un instrument.

Si la longueur d'onde moyenne de la lumière est λ et si le diamètre D de l'objectif sont exprimés dans les mêmes unités, la valeur minimale de α, exprimée en radians, est alors donnée par l'expression suivante : $\theta = \frac{1{,}22\,\lambda}{D}$.

Exemple pratique : Pour la lumière solaire, on peut prendre θ moyen $= 0{,}5\ \mu m$ ou $0{,}5\,10^{-6}$ m ; D étant exprimé en mètres et θ en radians, on aura : $\theta = \frac{1{,}22 \times 0{,}5\ 10^{-6}}{D}$.

Si l'on exprime θ en secondes d'angle ($1'' = 0{,}5\,10^{-5}$ rad), cette formule s'écrit :

$$\theta = \frac{1{,}2\,.\,10^{-1}}{D}$$ (θ en secondes, D en mètres).

Le pouvoir séparateur limite d'une grande lunette astronomique de 0,80 m de diamètre est donc :

$$\theta = \frac{1{,}2\ .\ 10^{-1}}{0{,}80} = 0''15$$

Le pouvoir séparateur de l'œil est amélioré d'un facteur 360. Une lunette astronomique est dite parfaite si elle atteint son pouvoir séparateur limite.

Pour les grands instruments (objectif dont le diamètre est de l'ordre du mètre et plus) atteindre cette limite théorique, est technologiquement extrêmement difficile. Par ailleurs, au cours des observations réelles, c'est la turbulence atmosphérique qui limite les possibilités d'utilisation idéale.

5. ABERRATIONS

Dès que l'on s'écarte des conditions de l'approximation de Gauss, les lentilles utilisées comme loupe, oculaire ou objectif, ne donnent pas toujours de bonnes images et il en est de même pour les miroirs : il se produit des déformations dues à des aberrations géométriques. Construire un instrument optiquement parfait, c'est faire en sorte que ces aberrations ne limitent pas ses performances ultimes, liées au phénomène de la diffraction.

5.1. Aberrations de sphéricité. — Quand l'ouverture d'une lentille (ou d'un miroir) devient assez grande, les rayons lumineux marginaux, parallèles à l'axe optique, ne passent pas tous par le foyer F. Plus ils sont loin de l'axe optique, et plus ils convergent près du centre optique (fig. III-13). La valeur de FF' mesure l'*aberration de sphéricité sur l'axe*.

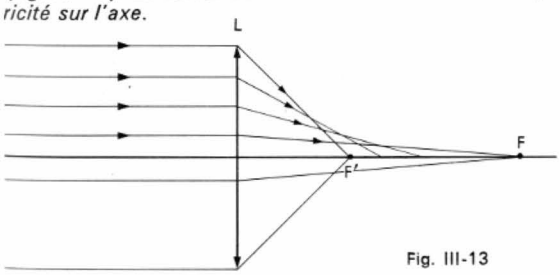


Fig. III-13

De plus, même lorsqu'un système optique de grande ouverture est corrigé de l'aberration de sphéricité sur l'axe, l'image qu'il donne d'un point en dehors de l'axe présente un défaut caractérisé par un aspect en aigrette : c'est l'aberration de sphéricité des rayons obliques ou *coma* (l'image d'un point rappelant un peu la forme d'une comète), fig. III-14.

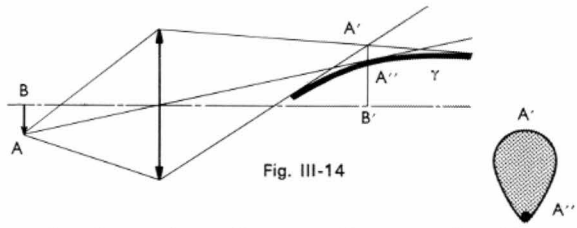


Fig. III-14

5.2. Aberrations d'astigmatisme. — Les faisceaux obliques, même réduits à des pinceaux étroits, donnent souvent des images floues. Un point-objet écarté de l'axe optique peut avoir deux images distinctes. Cette aberration est dite *aberration d'astigmatisme*. Elle se manifeste par l'impossibilité d'obtenir simultanément une image nette d'un cercle et de ses rayons, ou d'une petite droite verticale et d'une petite droite horizontale situées dans un même plan (fig. III-15).

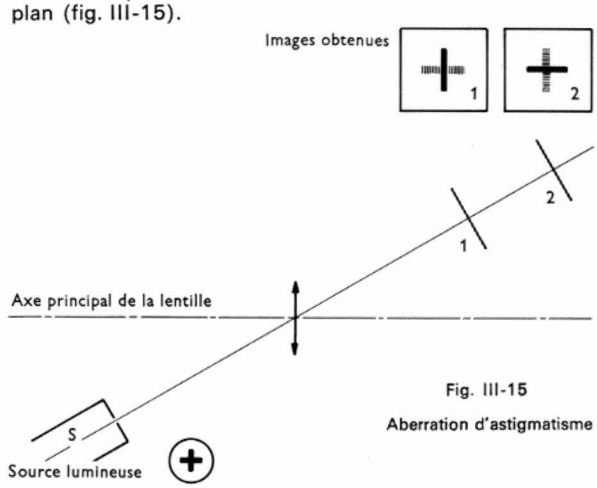


Fig. III-15

Aberration d'astigmatisme

5.3. Aberrations de distorsion. — Cette aberration est due à la variation de grandissement linéaire quand on s'écarte de l'axe. Elle provoque sur les images d'un quadrillage des déformations soit en forme de *barillets*, soit en forme de *coussinets* (fig. III-16).

Fig. III-16

5.4. Aberrations de chromatisme. — Cette catégorie d'aberrations n'intervient que pour les systèmes optiques utilisant des éléments réfringents. Les systèmes à miroirs sont rigoureusement achromatiques. En effet, les aberrations de chromatisme sont liées au fait que le bord d'une lentille peut être assimilé à l'arête d'un prisme, et il se produit une dispersion de la lumière blanche : chaque composante d'une lumière complexe a son propre foyer (fig. III-17). La distance F_vF_r, entre les foyers pour la lumière violette et pour la lumière rouge, mesure cette aberration chromatique.

L'étude et la compensation des aberrations géométriques et chromatiques posent des problèmes extrêmement délicats.

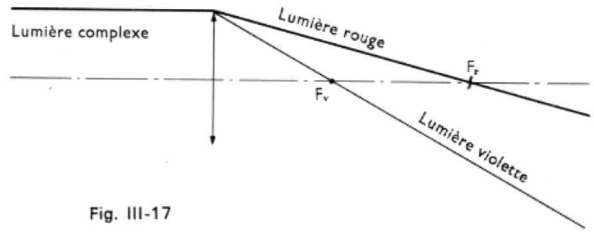


Fig. III-17

CHAPITRE IV

NATURE DE LA LUMIÈRE GRANDEURS PHOTOMÉTRIQUES

1. NATURE DE LA LUMIÈRE

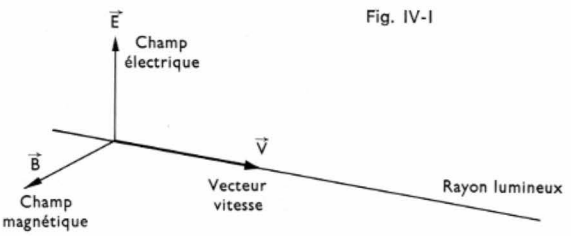
Dès le début de cet exposé, on a utilisé la notion de pinceau lumineux. Le pinceau le plus fin que l'on puisse imaginer se réduit à une droite : c'est un rayon lumineux. Cette situation idéale, impossible à réaliser physiquement, est la base de l'optique géométrique.

Si l'on revient à l'expérience de la chambre noire (V. chap. 1), on peut mettre en évidence l'insuffisance de cette notion de rayons lumineux et les limites d'application de l'optique géométrique. En effet, en diminuant progressivement le diamètre de l'ouverture de la chambre noire à une fraction de dixième de millimètre, on n'observe plus une tache lumineuse X sur l'écran E (géométriquement déterminée par les dimensions de la source, du trou et par les distances), mais une distribution de lumière particulière formant la *tache de diffraction*. C'est ce phénomène qui limite le pouvoir séparateur ultime des instruments d'optique.

Cela a conduit à considérer la lumière comme un phénomène ondulatoire. Par la suite, cette théorie s'est révélée insuffisante, et il a été nécessaire d'admettre qu'une radiation lumineuse pouvait être assimilée à un déplacement de corpuscules. Ce double aspect est déjà présenté par Aristote et Empédocle, et, au début du XVIIIe siècle, il réapparaît avec la *théorie des ondulations* de Huyghens (1690) et la *théorie de l'émission* de Newton (1721). L'autorité de Newton fut telle qu'il fallut attendre les expériences de Fresnel, au début du XIXe siècle, pour que la théorie ondulatoire de la lumière ait vraiment droit de cité chez les physiciens. Fresnel mit en évidence cette nature ondulatoire de la lumière par des expériences montrant les interférences, la diffraction et la polarisation de la lumière. À cette époque, les vibrations mécaniques étaient bien connues, et par analogie Fresnel pensa que les vibrations lumineuses se produisaient dans un fluide hypothétique, l'*éther*. Maxwell montra ensuite que les vibrations lumineuses sont des *vibrations électromagnétiques* dont les propriétés découlent des lois élémentaires de l'électricité (convenablement généralisées), et qui peuvent se propager dans le vide. L'hypothèse de l'éther fut abandonnée.

Ainsi, l'état lumineux en un point dépend d'un champ électrique et d'un champ magnétique dont les directions sont perpendiculaires entre elles et perpendiculaires au rayon lumineux considéré (fig. IV-1). Ces champs varient

Fig. IV-1



sinusoïdalement dans le temps, mais ils sont toujours en phase. L'ensemble constitue une *onde électromagnétique* qui se propage dans le vide à une vitesse finie, égale à $c_0 = (299\,792\,500 \pm 300)$ m/s (pour simplifier c_0 est souvent considérée comme étant égale à 300 000 km/s). La fréquence de la vibration dépend de la couleur de la radiation : cette fréquence est comprise entre 375.10^{12} Hz (radiation rouge) et 750.10^{12} Hz (radiation violette). La vibration peut aussi être caractérisée par sa *longueur d'onde* λ qui représente la distance qui serait parcourue en une période $T = \frac{1}{f}$ à la vitesse c_0 : $\lambda = c_0 T = \frac{c_0}{f}$.

La longueur d'onde des radiations visibles est comprise entre 0,4 μm (violet) et 0,8 μm (rouge).

Cette théorie électromagnétique de la lumière ne permettant pas d'interpréter l'effet photoélectrique (V. t. 1, Électronique, chap. 20), au début de ce siècle, les physiciens admirent que la lumière est constituée d'un ensemble de « grains » d'énergie : les *photons* (V. t. 1, Physique nucléaire, chap. 2 et 4). Cette particule de masse nulle est caractérisée par l'énergie qu'elle transporte ; celle-ci est égale au produit hf de la constante de Planck h ($h = 6,625\,6.10^{-34}$ J.s) et de la fréquence f de la vibration électromagnétique correspondante. La mécanique quantique et la mécanique ondulatoire permirent ensuite l'unification de ces deux théories, travail réalisé en grande partie par le physicien Dirac ; la dualité ondes-corpuscules n'est pas éliminée mais les deux aspects apparaissent plutôt complémentaires que contradictoires : les mêmes équations les décrivent simultanément. Un exposé, même élémentaire, de cette théorie unifiée exige un appareil mathématique assez complexe.

On décrira seulement deux phénomènes mettant en évidence l'un, l'aspect corpusculaire de la lumière, l'autre, l'aspect ondulatoire.

2. EFFET COMPTON

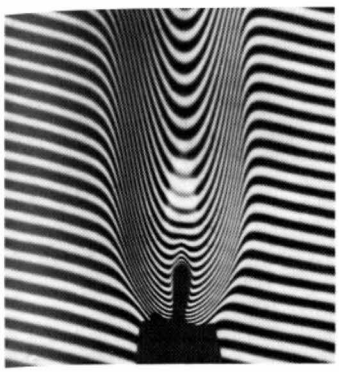
En bombardant de la matière par un faisceau de rayons X monochromatiques (V. t. 1, Physique nucléaire, chap. 2), une partie de ces rayons est diffusée. On appelle θ l'angle entre le faisceau incident et une partie du faisceau diffusé. Quelle que soit la nature de la matière bombardée, la longueur d'onde du rayonnement diffusé change : elle augmente d'une quantité $\triangle\lambda$ d'autant plus importante que θ est plus grand.

$$\triangle\lambda = \alpha\ (1 - \cos\theta)$$

Ce phénomène, appelé *effet Compton*, est totalement expliqué par la théorie corpusculaire. Il y a choc entre deux particules, un photon et un électron, et les lois de la mécanique peuvent être appliquées. Le photon cède de l'énergie au cours du choc et à sa sortie de la matière son énergie (hf) étant plus faible, le rayonnement a une fréquence f plus petite, c'est-à-dire que sa longueur d'onde est plus grande. Les chocs individuels de telles particules peuvent être observés à la chambre à brouillard de Wilson ; les observations confirment toutes les prévisions théoriques.

3. LES FRANGES D'YOUNG

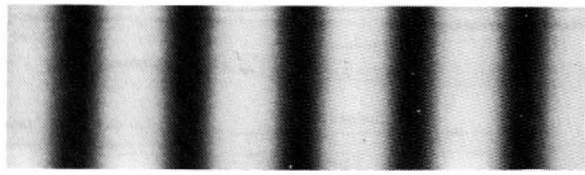
Si l'on regarde une source ponctuelle émettant une radiation monochromatique à travers un écran mince, opaque, percé de deux trous d'aiguille distants de 1 à 2 mm, on constate que cette source apparaît élargie (phénomène de diffraction) et que la tache lumineuse est sillonnée de franges alternativement claires et sombres. L'apparition de franges obscures dans une zone où les faisceaux, provenant des deux trous, se superposent, montre que lorsque de la lumière s'ajoute à de la lumière, il peut se produire de l'obscurité. Ce phénomène est à rapprocher de ce qui peut être observé à la surface d'un liquide, lorsque la superposition de deux mouvements vibratoires se traduit par l'immobilité. Les faisceaux lumineux interfèrent et les franges d'interférences lumineuses résultent de la superposition de deux vibrations de même fréquence, mais de phase différente. En un point d'une frange obscure, les vibrations sont en opposition de phase ; en un point d'une frange claire, elles sont en phase. Les deux trous sont équivalents à deux sources synchrones S_1 et S_2 (sources émettant des *vibrations en phase* ou dont le déphasage est constant) ; les deux ondes qui arrivent en un point M de l'écran ont parcouru des dis-

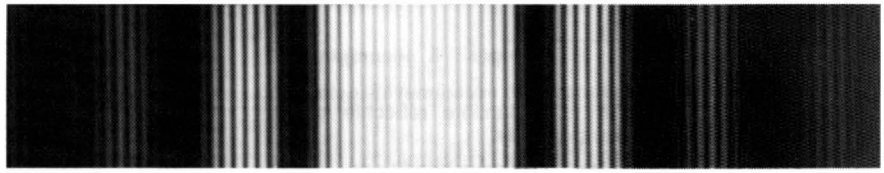


Décalage de franges dû à la variation de l'indice de réfraction de l'air avec la température

Franges d'Young

Franges d'Young modulées par les franges de diffraction





tances d_1 et d_2 différentes et leur déphasage φ dépend de la différence $\frac{d_1 - d_2}{c_0}$ (fig. IV-2).

Si les vibrations dues à S_1 et S_2 sont représentées par les équations : $e_1 = \widehat{E} \sin\left(\omega t - \frac{d_1}{c_0}\right)$

et $e_2 = \widehat{E} \sin\left(\omega t - \frac{d_2}{c_0}\right)$,

le déphasage φ est égal à :

$$\varphi = \omega \frac{d_1 - d_2}{c_0} = 2\pi f \frac{d_1 - d_2}{c_0} = 2\pi \frac{d_1 - d_2}{\lambda}.$$

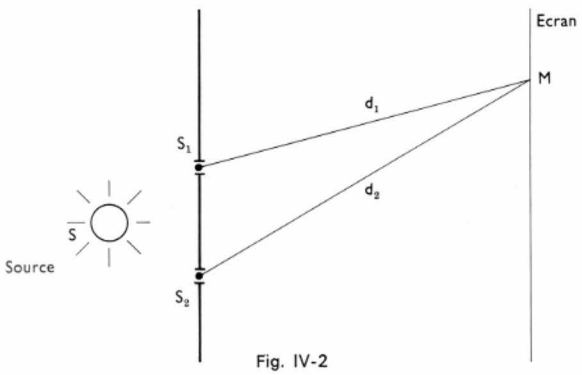


Fig. IV-2

Il est donc égal à un multiple de 2π (vibrations en phase) chaque fois que la différence des distances d_1 et d_2 est un multiple de la longueur d'onde λ. Ces résultats illustrent parfaitement l'intérêt de la théorie ondulatoire de la lumière.

4. POLARISATION DE LA LUMIÈRE

L'expérience des franges d'Young s'interprète bien à l'aide d'une théorie ondulatoire de la lumière, c'est-à-dire en supposant qu'une « grandeur » varie périodiquement en fonction du temps. Cependant, il n'est pas possible de savoir si cette grandeur est scalaire ou vectorielle et c'est l'étude de la polarisation de la lumière qui va permettre de conclure.

4.1. Expérience de Malus. — Elle peut être réalisée au moyen du dispositif de la figure IV-3, formé d'un tube et de deux miroirs M_1 et M_2. Ceux-ci sont fixés sur des colliers mobiles et ils peuvent pivoter, d'une part, autour de l'axe $X'X$ du tube et, d'autre part, autour d'un axe perpendiculaire à $X'X$ (ce qui permet de régler leur inclinaison par rapport à l'axe du tube).

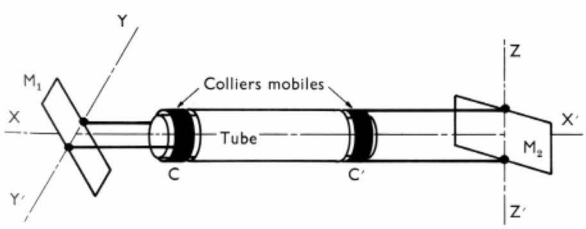


Fig. IV-3

Dans un premier temps, le miroir M_1 est enlevé (fig. IV-4) ;

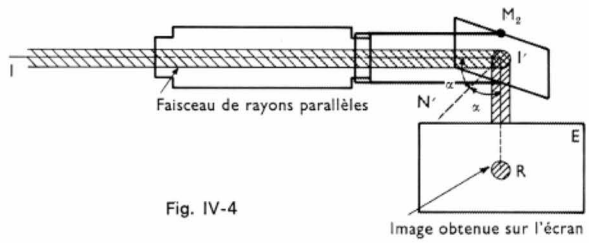


Fig. IV-4

Image obtenue sur l'écran

un pinceau de rayons parallèles, ayant la direction II', se réfléchit sur le miroir M_2 suivant la direction $I'R$. Si l'on fait tourner le miroir M_2 autour de l'axe du tube (ainsi, l'angle d'incidence α reste le même), on obtient une série d'images, d'éclairement constant, sur un écran E maintenu orthogonal à la direction du rayon réfléchi.

Il n'en est pas de même lorsque, dans un second temps, on replace le miroir M_1 et que le rayon II' est alors le rayon réfléchi par ce miroir (fig. IV-5). Si on laisse M_1 fixe et que l'on fait tourner M_2 autour de II', les images obtenues sur

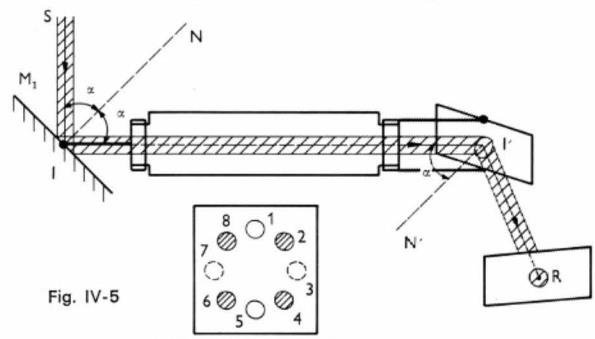


Fig. IV-5

Différentes images obtenues

l'écran E ont un éclairement qui varie avec la position de M_2. Il est maximal lorsque les plans d'incidence SIN et $II'N'$ sont confondus (taches 1 et 5) et il est minimal lorsque ces plans sont orthogonaux (taches 3 et 7).

On peut se demander s'il est possible de trouver un angle α tel qu'en position 3 (ou 7), il y ait extinction totale ? La réponse est affirmative. Par exemple, si les miroirs M_1 et M_2 sont en verre d'indice $n = 1{,}54$, il y a extinction totale lorsque les plans SIN et $II'N'$ sont orthogonaux et que l'angle α est égal à 57°. Le faisceau de lumière réfléchi par M_1 présente deux plans de symétrie : ce rayonnement lumineux est polarisé. On dit que le miroir M_1 a joué le rôle d'un polariseur et que le miroir M_2, qui a permis la mise en évidence de la polarisation de la lumière réfléchie par le miroir M_1, a joué le rôle d'un analyseur. La polarisation de la lumière est *partielle* si l'éclairement de la tache, obtenue sur l'écran E, n'est pas nul lorsque les plans d'incidence SIN et $II'N$ sont orthogonaux ; elle est *totale* dans le cas contraire (ici pour $\alpha = 57°$, appelée incidence de Brewster).

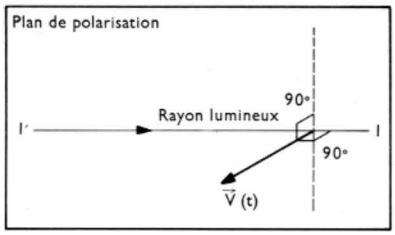


Fig. IV-6

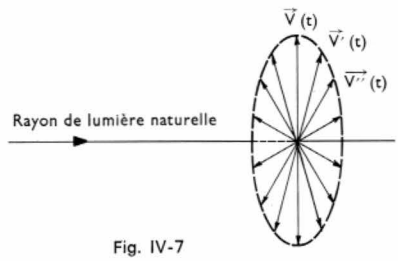


Fig. IV-7

L'expérience montre que toute lumière réfléchie est partiellement (ou totalement) polarisée.

La polarisation peut être totale sous deux conditions :

— la réflexion a lieu sur une surface transparente,

— l'angle d'incidence *i* est lié à l'indice *n* de la substance *transparente* par la relation suivante :

$$\boxed{\text{tg } i = n} \quad \text{(loi de Brewster)}$$

Dans l'expérience précédente, on peut vérifier que tg 57° = 1,54.

4.2. Interprétation de l'expérience de Malus. — C'est le physicien Fresnel qui interpréta les résultats de l'expérience de Malus. Pour cela, il fit les hypothèses suivantes :

— La grandeur qui varie périodiquement en fonction du temps est une grandeur vectorielle. En un point d'un rayon totalement polarisé, elle peut être représentée par un vecteur $\vec{V}(t)$ de direction fixe, perpendiculaire au rayon lumineux, et de module variant périodiquement avec le temps.

— Le plan, contenant le rayon lumineux et perpendiculaire au vecteur $\vec{V}(t)$, est appelé *plan de polarisation* de la lumière (fig. IV-6),

— La lumière « naturelle », non polarisée, est constituée par la superposition d'une infinité de lumières polarisées dans des plans différents (fig. IV-7). C'est le cas d'un pinceau de lumière n'ayant subi ni réflexion, ni réfraction.

— Lorsqu'un rayon de lumière, totalement polarisé, tombe sur un miroir sous l'incidence de Brewster, le vecteur $\vec{V}(t)$ qui le caractérise, peut être décomposé en deux vecteurs, l'un $\vec{V_1}(t)$ perpendiculaire au plan d'incidence, l'autre $\vec{V_2}(t)$ contenu dans ce plan d'incidence (fig. IV-8) et seule la composante $\vec{V_1}(t)$ est transmise par la réflexion.

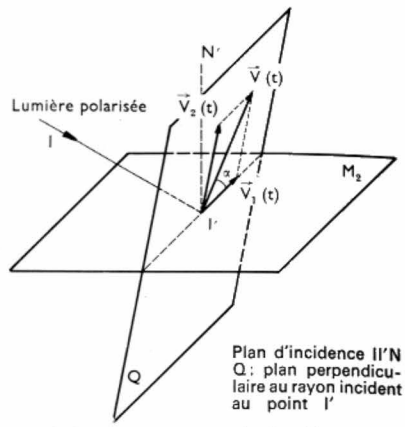


Fig. IV-8

Plan d'incidence II'N
Q : plan perpendiculaire au rayon incident au point I'

Dans l'expérience précédente, le rayon de lumière naturelle *SI* est polarisé par réflexion sur le miroir M_1 (fig. IV-9a). Les vecteurs correspondant aux diverses lumières polarisées, peuvent être décomposés comme on vient de le voir et seules les composantes, perpendiculaires au plan *SIN*, sont réfléchies vers le miroir M_2. La vibration réfléchie résultante constitue le faisceau incident pour le miroir M_2. Du vecteur $\vec{V}(t)$, qu'il est possible d'associer à cette vibration, seule la composante $\vec{V_1}(t)$, perpendiculaire au plan $II'N'$, sera réfléchie :

— si les deux miroirs sont parallèles, $\vec{V_1}(t)$ et $\vec{V}(t)$ sont confondus : le miroir M_2 réfléchit toute la lumière qui lui vient de M_1 (fig. IV-9b),

— si les deux miroirs sont orthogonaux, $\vec{V_1}(t)$ est nul, puisqu'il est perpendiculaire à $\vec{V}(t)$ et aucune lumière n'est réfléchie par M_2 (fig. IV-9c).

Dans les cas intermédiaires (fig. IV-9d), c'est-à-dire lorsque l'angle entre les deux miroirs est égal à θ, on montre que l'intensité du rayonnement transmis I_t est liée à l'intensité du rayonnement incident I_i par la relation suivante :

$$I_t = I_i \cos^2\theta \quad \text{(loi de Malus)}$$

On retrouve bien les résultats précédents :

si $\theta = 0$ rad, les intensités I_t et I_i sont égales ($\cos\theta = 1$),

si $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad l'intensité du rayonnement est nulle ($\cos\theta = 0$).

Pour compléter cette interprétation, on ajoutera que le vecteur lumineux $\vec{V}(t)$ considéré est le vecteur champ électrique de l'onde électromagnétique associé au rayonnement lumineux.

4.3. Applications. — La polarisation rectiligne de la lumière peut être obtenue par réflexion ou par réfraction. Certains cristaux (de quartz, de spath) présentent une anisotropie de structure et un rayon de lumière naturelle se dédouble en passant dans de tels corps (fig. IV-10). Il donne naissance à deux rayons polarisés différemment, appelés *rayon ordinaire* et *rayon extraordinaire;* les plans de polarisation de ces rayonnements sont orthogonaux. Les vibrations lumineuses, correspondant à ces rayons, se propagent à des vitesses différentes dans le corps biré-

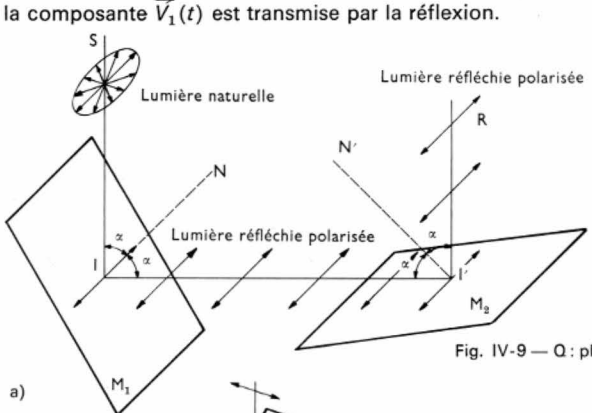
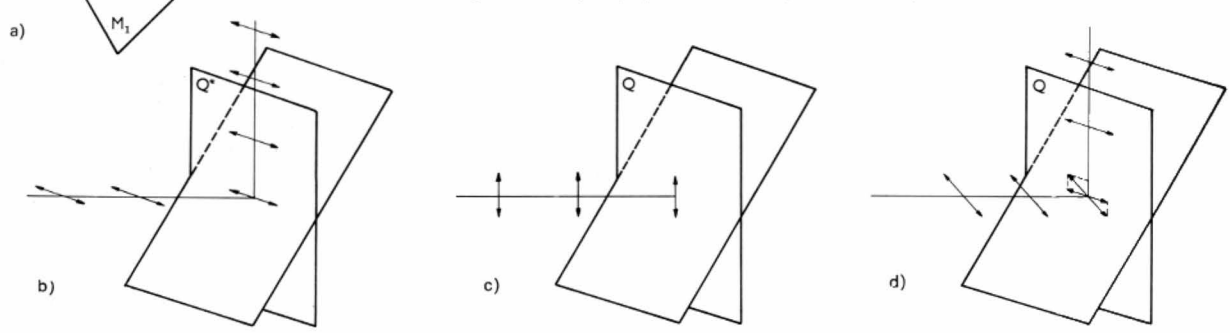


Fig. IV-9 — Q : plan perpendiculaire au rayon incident au point où celui-ci frappe le miroir



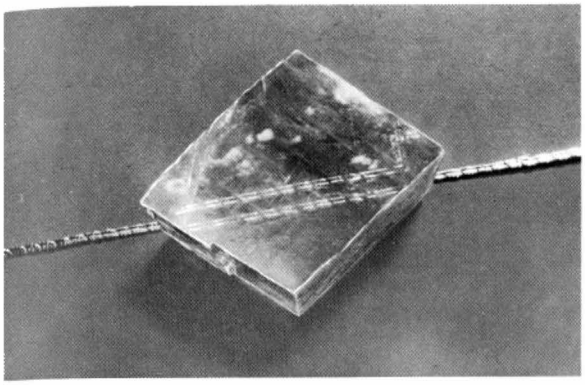


Fig. IV-10 — Biréfringence naturelle du spath d'Islande (dédoublement du rayon et obtention de deux images virtuelles) (*F. Brunel*)

fringent et on définit deux indices de réfraction pour la substance, l'un est dit ordinaire et l'autre extraordinaire. Par un artifice de construction, il est possible de supprimer l'un de ceux-ci et donc d'obtenir un polariseur, appelé *prisme de Nicol* ou *Nicol*. Avec un cristal de tourmaline, il suffit d'utiliser une lame d'épaisseur supérieure à 2 mm pour absorber complètement le rayon ordinaire. D'autres substances présentent la même propriété que la tourmaline (elles sont dites *dichroïques*) et elles sont utilisées pour la fabrication des polaroïdes.

Certains milieux isotropes (verre, celluloïd, plexiglass) deviennent biréfringents lorsqu'ils sont soumis à des efforts de traction ou de compression. Cette biréfringence « accidentelle » est mise en œuvre en *photoélasticimétrie* pour déceler des lignes d'égale contrainte dans des maquettes transparentes (elles apparaissent avec une coloration déterminée si la maquette est éclairée en lumière blanche). Presque tous les liquides deviennent biréfringents lorsqu'ils sont soumis à l'action d'un champ électrique (phénomène de Kerr) ou à celle d'une induction magnétique (phénomène de Cotton-Mouton). La différence des indices extraordinaire n_e et ordinaire n_0 est proportionnelle à la longueur d'onde λ de la radiation et au carré du module du champ électrique E dans le premier cas, de l'induction B dans le second cas

$$n_e - n_0 = K \lambda E^2 \quad (K : \text{cte de Kerr})$$
$$n_e - n_0 = C \lambda B^2 \quad (C : \text{cte de Cotton-Mouton})$$

Parmi les applications de ces biréfringences, on peut citer la *cellule de Kerr* qui constitue un modulateur de l'intensité lumineuse d'un rayonnement (V. t. 2, Électroacoustique, chap. 4).

Polaroïdes. — Les polaroïdes ont la propriété de ne transmettre que des vibrations ayant une direction déterminée. La lumière, transmise par un polaroïde, possède les mêmes propriétés que celle qui est réfléchie par un miroir recevant de la lumière sous l'incidence brewstérienne. Un polaroïde est constitué de très fins cristaux orientés dans la même direction, par exemple, des cristaux d'iodosulfate de quinine ou de tourmaline déposés sur une lame de verre ou de matière plastique transparente.

Une des applications les plus familières de ces polaroïdes est l'élimination des reflets vitraux, en particulier pour la photographie des vitrines. La glace de la vitrine, en réfléchissant la lumière solaire, se comporte comme un polariseur, le polaroïde joue le rôle d'analyseur. On l'oriente de façon que sa direction de transmission privilégiée soit orthogonale à la direction des vibrations réfléchies, polarisées par la vitrine. Il y a alors extinction du reflet.

5. GRANDEURS PHOTOMÉTRIQUES

(V. t. 1, Préliminaires, chap. 3).

5.1. Intensité lumineuse. — On considère une source ponctuelle O et un petit élément de surface dS, situé à une distance d de O (fig. IV-11). Si d est grand vis-à-vis des dimensions de l'élément de surface dS, dans le cône de sommet O et qui s'appuie sur le contour de dS, le rayonnement lumineux transporte une énergie dE proportionnelle à l'angle solide $d\Omega$. Le quotient $\frac{dE}{d\Omega}$ est l'*intensité lumineuse* du rayonnement dans la direction OM :

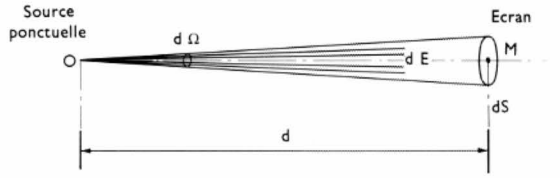


Fig. IV-11

$$I = \frac{dE}{d\Omega}$$

L'unité d'intensité lumineuse est la *candela* (symbole : cd), c'est la soixantième partie de l'intensité du rayonnement dans une direction normale, d'un centimètre carré de corps noir à la température de solidification du platine. Exemple : L'intensité lumineuse d'une lampe de 40 watts est proche de 100 cd.

5.2. Flux lumineux. — Le faisceau de sommet O qui s'appuie sur le contour de dS transporte une certaine énergie par unité de temps : c'est sa puissance dP. Elle peut être exprimée en watts (point de vue énergétique).

D'un *point de vue photométrique*, à ce faisceau correspond un flux lumineux dF qui est exprimé en *lumens* (symbole : lm) et qui est égal au produit de l'intensité I et de l'angle solide $d\Omega$: $dF = I\, d\Omega$.

Le lumen est une *quantité de lumière*. C'est le flux lumineux émis dans un angle solide d'un stéradian par une source ponctuelle placée au sommet de l'angle solide, et émettant un rayonnement d'une intensité lumineuse de 1 candela dans toutes les directions utiles.

Exemple pratique. — L'intensité lumineuse d'une lampe de 40 W étant de 100 cd, cette lampe émet dans tout l'espace (c'est-à-dire dans 4π stéradians) un flux lumineux de $4\pi \times 100 \approx 1\,200$ lumens.

5.3. Éclairement. — Le faisceau de radiations, considéré ci-dessus, transporte une certaine quantité de lumière dF, et ce flux est intercepté par l'élément de surface dS. Le quotient $E = \frac{dF}{dS}$ est l'*éclairement* de la surface dS. Il s'exprime en lux (symbole lx). Le lux est l'éclairement d'une surface de 1 m² qui reçoit, normalement, un flux lumineux de 1 lumen.

Exemple pratique. — À 10 mètres de distance, l'éclairement produit par une lampe de 40 W est de 1 lux. Pour lire sans fatigue, il faut au moins un éclairement de 25 lux (V. t. 2, Éclairage).

5.4. Luminance. — Nous n'avons envisagé, jusqu'ici, que le cas des sources ponctuelles. Dans le cas d'une source étendue, il faut considérer une nouvelle grandeur photométrique : la *luminance*. Soit une source, non plus

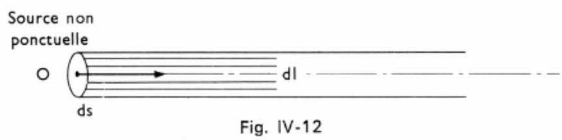


Fig. IV-12

ponctuelle, mais d'aire assez petite ds (fig. IV-12). Si l'intensité lumineuse dans une direction normale à la surface est désignée par dI, la luminance L de cet élément est égale à : $L = \frac{dI}{ds}$. La grandeur L, indépendante de ds si l'aire est petite, est appelée luminance de la source en O. Elle s'exprime en candela par mètre carré (symbole : cd/m²), appelé parfois *nit* (symbole : nt). Le nit est donc la luminance d'une source de 1 m² (surface émissive) émettant un rayonnement dont l'intensité lumineuse est 1 candela.

Exemple pratique. — La luminance du Soleil, après traversée de l'atmosphère terrestre par temps très clair, est d'environ $1{,}5\ 10^9$ cd/m².

ÉNERGIE ÉLECTRIQUE

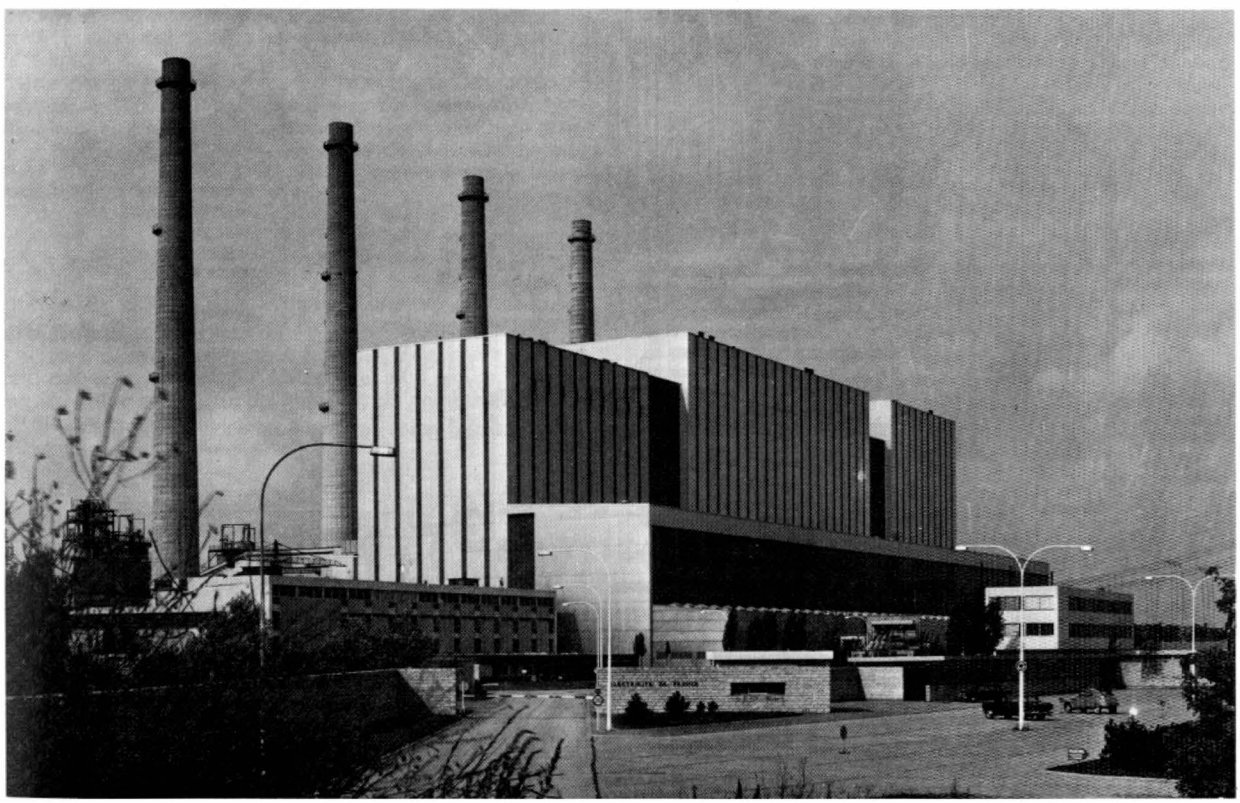
CENTRALES THERMIQUES

Pour vivre, le monde moderne a besoin de plus en plus d'énergie et une partie importante de celle-ci est utilisée sous forme d'*énergie électrique*. L'accroissement continu de la consommation de cette forme d'énergie est d'ailleurs une caractéristique du développement de notre société. Pour certains statisticiens, la consommation globale d'un pays, répartie par tête d'habitant, sert d'ailleurs d'étalon pour estimer le degré d'évolution et de bien-être des citoyens de ce pays. On peut être plus ou moins d'accord sur la valeur réelle de cette interprétation, cependant elle permet d'avoir une idée assez exacte du développement industriel de chaque pays.

Pour satisfaire la demande en énergie électrique, qui ne se trouve pas dans la nature sous une forme directement exploitable à l'échelle des besoins industriels, il est nécessaire de partir d'une autre forme d'énergie que l'on appelle *énergie primaire* et de la transformer. Cette énergie primaire peut être l'énergie *mécanique* produite par la chute d'une masse d'eau (utilisée dans une *usine hydraulique*) ou par le mouvement des marées (transformée dans une *usine marémotrice*). Elle peut aussi se présenter sous la forme d'un dégagement de chaleur causé par la combustion de *produits fossiles* ou par des réactions nucléaires de *produits fissiles*.

Actuellement, en France, presque tous les grands *sites hydrauliques* ont été équipés et sont insuffisants pour satisfaire la demande. Plus de la moitié de la production d'électricité est maintenant fournie par des usines utilisant, soit des **combustibles fossiles** (la houille, le lignite, les hydrocarbures : pétrole et gaz), soit des **combustibles fissiles** (uranium naturel, uranium enrichi, plutonium), et cette part augmentera rapidement dans les années à venir. Les usines brûlant les produits fossiles sont généralement appelées **centrales thermiques.** Les usines consommant les produits fissiles sont appelées **centrales nucléaires.** Ce sont ces deux types de centrales qui vont faire l'objet des chapitres qui suivent.

Centrale thermique de Blénod (*Hochard*)



CHAPITRE PREMIER

PRÉSENTATION GÉNÉRALE CHOIX DU SITE

1. DESCRIPTION GÉNÉRALE

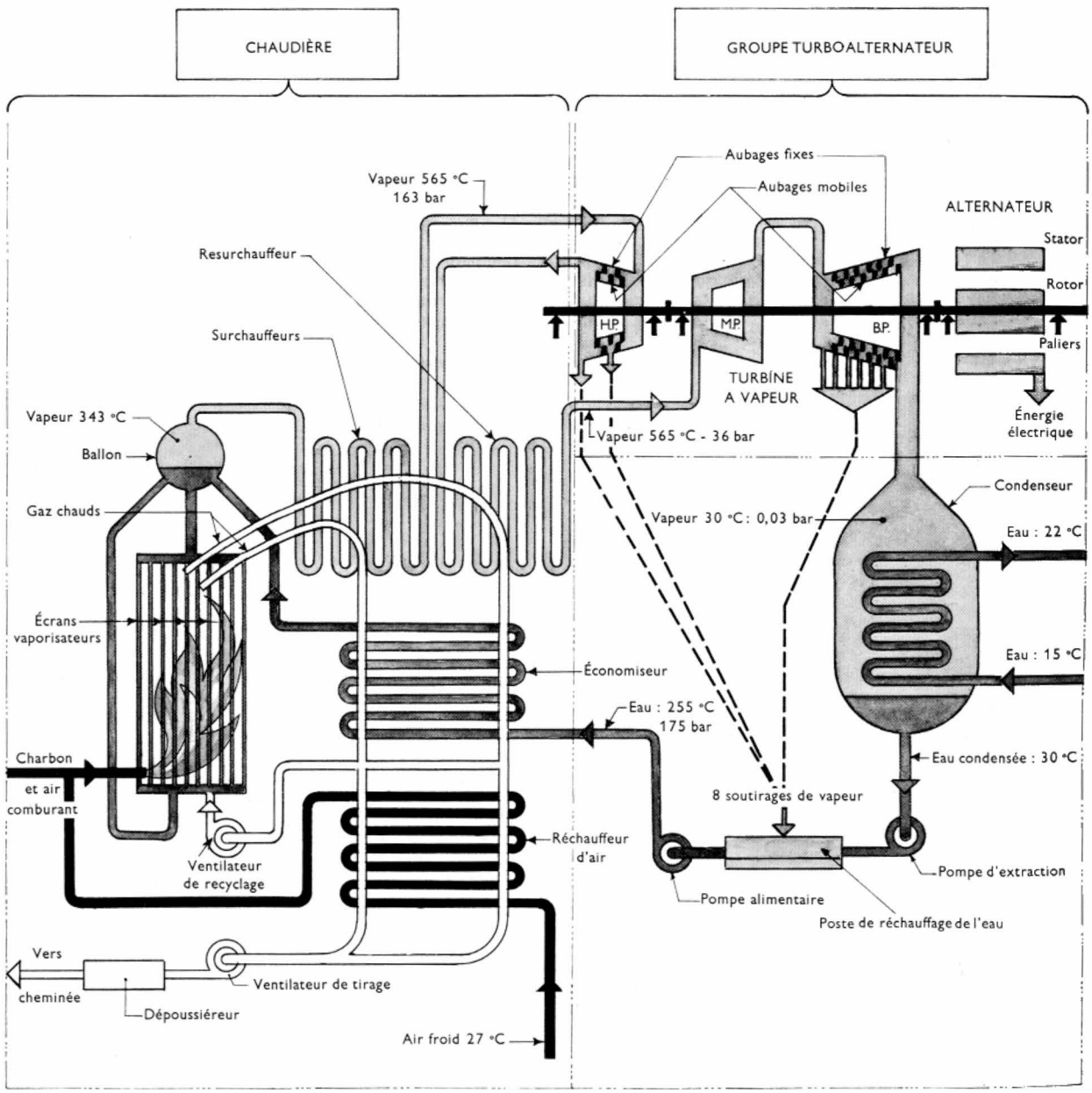
Les centrales thermiques ont pour rôle de produire de l'énergie électrique à partir de l'énergie calorifique dégagée par une combustion. Celle-ci est réalisée par un **générateur de vapeur** ou **chaudière ;** elle permet de transformer l'eau en vapeur et de la surchauffer pour qu'elle atteigne une haute température et une haute pression (fig. I-1).

Cette vapeur surchauffée se détend ensuite dans le **corps haute pression** (H.P.) de la turbine. Elle revient dans la chaudière pour être surchauffée et est renvoyée pour se détendre dans les **corps moyenne pression** (M.P.) et **basse pression** (B.P.) de la turbine. Pendant ses détentes successives, l'énergie calorifique est transformée en énergie mécanique. À la sortie des corps basse pression, la vapeur passe dans le condenseur qui est refroidi, et l'eau retourne à l'état liquide.

Un poste de réchauffage de l'eau condensée, le **poste d'eau** (composé d'un certain nombre d'*échangeurs*, ou *réchauffeurs*), alimenté en énergie calorifique de réchauffage par de la vapeur prélevée par *soutirage* sur la turbine, permet de réchauffer l'eau avant de la renvoyer dans la chaudière à l'aide de *pompes alimentaires*.

Le cycle se reproduit indéfiniment puisque la vapeur et l'eau circulent dans un circuit fermé. L'énergie mécanique disponible sur l'arbre de la turbine est transmise à un **alternateur** qui la transforme en énergie électrique

Fig. I-1 — Principe de fonctionnement d'une centrale thermique



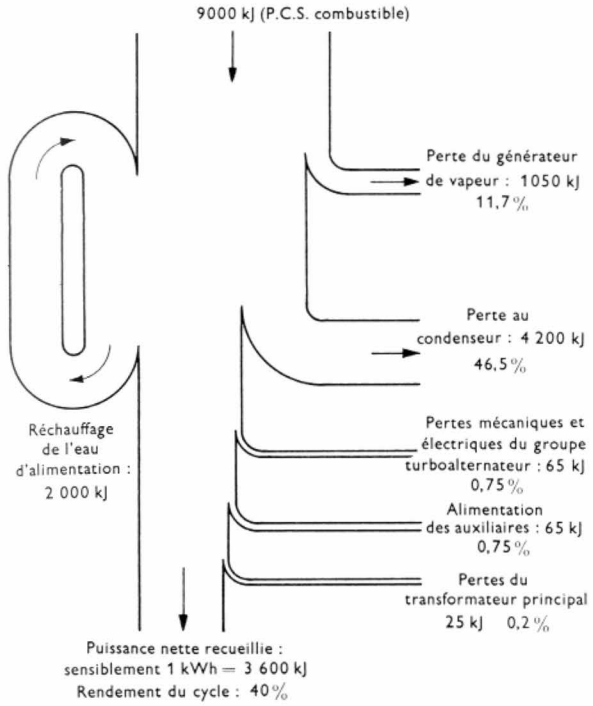


Fig. I-2 — Schéma du bilan simplifié d'un cycle thermique (diagramme de Sankey)

(V. t. 1, Électrotechnique, chap. 9). Cet alternateur alimente un transformateur de puissance qui est raccordé au réseau de transport.

Pendant ce temps, la chaleur sensible des fumées est en grande partie récupérée à la sortie de la chaudière grâce à un **réchauffeur d'air** qui permet de réchauffer l'air comburant nécessaire à la combustion. Dans le cas d'une centrale à charbon, après être passées dans le réchauffeur d'air, les fumées traversent des *dépoussiéreurs électrostatiques,* qui retiennent les *cendres volantes* qu'elles contiennent, et elles sont ensuite rejetées par la cheminée. La circulation des fumées est assurée par des *ventilateurs de tirage*.

Une des caractéristiques principales d'une centrale, sur les plans technique et économique, est sa **consommation spécifique,** c'est-à-dire la quantité de chaleur qu'il faut pour produire une énergie électrique d'un kilowattheure. Cette consommation spécifique est indiquée sur le bilan simplifié du cycle thermique (fig. I-2).

2. LE SITE

Le choix du site pour l'implantation d'une centrale thermique résulte de plusieurs considérations.

— La *proximité de la source d'énergie primaire* (mine, port, raffinerie, complexe sidérurgique, etc.) est importante car elle influe sur le prix du transport du combustible.

— Les *moyens de communication* (voies ferrées, voies navigables, routes) influent également sur l'acheminement du matériel pour la construction de la centrale.

— La *possibilité d'un raccordement au réseau général de transport d'électricité* est étudiée, car l'installation d'une nouvelle centrale pose le problème de l'évacuation de l'énergie. Elle peut rendre nécessaire la création de nouvelles lignes ou de nouveaux postes d'interconnexion si le réseau est localement saturé.

— La *présence de la source froide* est la considération principale. En effet, l'examen du bilan du cycle thermique montre que 4 200 à 4 400 kilojoules doivent être cédés pour chaque kilowattheure produit. Lorsqu'on met en œuvre la **réfrigération par l'eau,** cela exige un fort débit dans les tubes des condenseurs sur lesquels la vapeur vient se condenser.

Le problème de l'eau de réfrigération, plus souvent nommée *eau de circulation*, est un des plus difficiles à résoudre du fait de la croissance des unités. De plus en plus, on construit les centrales de forte puissance en bordure de mer. C'est le cas de la centrale du Havre.

Si l'on prend cette **eau en rivière,** au *rejet* elle ne doit pas être réchauffée exagérément; en général, on tolère une augmentation de température de 7 à 10 °C entre l'entrée et la sortie du condenseur. Par exemple, il faut en moyenne un débit de 8,5 m^3/s pour un groupe de 250 MW et de 22 m^3/s pour un groupe de 600 MW; on voit pourquoi les centrales de fortes puissances, comme celles que l'on construit maintenant, doivent être installées sur les bords de rivières de forts débits.

Il convient donc d'étudier les débits des fleuves et des rivières ainsi que les températures des eaux aux différentes périodes de l'année, et cela sur plusieurs années. En particulier, la période d'*étiage* du cours d'eau est très importante à connaître car il ne faut pas qu'elle coïncide avec une période normale de forte demande de production. Bien que l'élévation de la température de l'eau ne soit pas réglementée, elle est limitée en fonction des températures naturelles les plus fortes enregistrées, afin de ne pas nuire à la faune et à la flore aquatiques. D'ailleurs, il existe à É.D.F., à la centrale de Montereau, un service qui étudie le comportement et l'évolution des poissons et de leur nourriture dans les eaux « chaudes » de rejet de la centrale. La composition chimique de l'eau doit également être connue pour résoudre d'éventuels problèmes de corrosion des tubes des condenseurs.

Dans le Nord de la France où l'eau est rare, on a fait appel à la **réfrigération atmosphérique :** l'eau chaude ruisselle dans une enceinte où il y a une très forte circulation d'air, généralement par tirage naturel, mais cela oblige à construire des tours, ou *réfrigérants atmosphériques*, de très grands diamètres et de grandes hauteurs. Ces installations coûteuses occupent une très grande surface au sol. Il existe aussi des réfrigérants atmosphériques composés d'échangeurs air-eau où des ventilateurs produisent une circulation forcée de l'air à grand débit. L'encombrement de ces réfrigérants est faible mais ils imposent une grande dépense d'énergie. Seul, un bilan économique peut permettre de choisir entre ces deux solutions de réfrigération par circulation d'air.

Bien qu'on ne l'ait pas signalé plus haut, il est évident que le prix du terrain, surtout dans les zones urbaines, entre aussi en ligne de compte dans le choix de l'implantation d'une centrale.

CHAPITRE II

LES COMBUSTIBLES FOSSILES

1. CLASSIFICATION

Certains corps, appelés *combustibles*, brûlent lorsqu'ils sont mis en présence d'un **comburant.** Ce phénomène de *combustion* est le résultat d'une *oxydation* de ces corps par l'oxygène (généralement l'oxygène de l'air) ; cette réaction chimique est appelée *combustion vive* si le dégagement de chaleur est accompagné de flammes et *combustion lente* dans le cas contraire. Ce sont les combustibles à combustion vive qui nous intéressent ici.

Les combustibles industriels utilisés dans les centrales thermiques doivent pouvoir produire une grande quantité de chaleur à haute température, être d'un allumage facile et entretenir eux-mêmes leur inflammation. En outre, on doit pouvoir les trouver en abondance dans la nature et leur prix de revient doit être faible. Ils se présentent, soit sous leur *forme naturelle,* soit sous une *forme artificielle*.

Dans la première catégorie, on trouve :

1° Les **lignites,** composés de végétaux fossiles ne contenant plus de cellulose et dont la carbonification est intermédiaire entre celle de la tourbe et celle du charbon (on brûle du lignite dans la centrale É.D.F. d'Arjuzanx).

2° Les **houilles,** combustibles végétaux fossiles dont la carbonification est presque totalement achevée et dont les caractères végétaux initiaux ont disparu.
On distingue les *flénus* ou *flambants secs*, les *flambants gras*, les *gras* proprement dit, les *demi-gras*, les *maigres*, les *anthracites*.

3° Le **gaz naturel,** la plus grande partie du gaz naturel utilisée en France actuellement vient de Lacq. Après épuration, il a la composition suivante : 95 % de méthane, 3,4 % d'éthane, 0,7 % de propane, 0,2 % de butane, 0,000 7 % de soufre et 0,4 % d'impuretés diverses. Plusieurs centrales É.D.F. utilisent du gaz de Lacq : Nantes-Chevire, Ambes, Artix, Montereau. Actuellement, la centrale de Saint-Ouen consomme du gaz des Pays-Bas.

Dans la deuxième catégorie, on doit placer :

1° Le **gaz de hauts fourneaux,** c'est un oxyde de carbone (CO) qui est obtenu par passage d'air (insufflé à la base du haut fourneau) sur le carbone du coke.

2° Les **mazouts,** plus couramment appelés *fuels* (abréviation de l'appellation anglaise *fuel-oil*) qui sont des carbures d'hydrogène liquides à la température ordinaire. Ils proviennent du pétrole et contiennent de 86 à 87 % de carbone, de 11 à 12 % d'hydrogène et moins de 4 % de soufre. Ils sont classés en :

— *fuel domestique*, qui sert à l'allumage de la chaudière ;
— *fuel léger*, qui sert au soutien des feux lorsque la puissance est réduite ;
— *fuel numéro 2* utilisé comme combustible principal.

Pour la production de l'énergie thermique, le charbon a été pendant longtemps le combustible principal. Cependant, les conditions économiques ont été profondément modifiées ces dernières années et le fuel tend à le supplanter. On citera aussi, pour mémoire, un combustible très particulier, d'origine non fossile : les ordures ménagères brûlées dans les usines de la T.I.R.U. (Traitement Industriel des Résidus Urbains).

2. CARACTÉRISTIQUES PHYSICO-CHIMIQUES DES COMBUSTIBLES

2.1. Pouvoir comburivore. — C'est la quantité d'air comburant juste nécessaire pour brûler 1 kg de combustible solide ou liquide ou 1 m^3 *N* de gaz (le symbole *N* indique que le gaz se trouve dans les conditions normales de température et de pression : 0 °C et 760 mm de mercure).

2.2. Pouvoir fumigène. — C'est la quantité de fumée produite par 1 kg de combustible solide ou liquide ou 1 m^3 *N* de gaz.

2.3. Pouvoir calorifique. — C'est la quantité de chaleur exprimée en kilojoules obtenue par la combustion complète de 1 kg de combustible solide ou liquide ou 1 m^3 de gaz dans les conditions normales de température et de pression.

On distingue :

— Le *pouvoir calorifique supérieur* ou P.C.S. pour la détermination duquel le combustible étant pris à 0 °C, les éléments de combustion sont finalement ramenés à 0 °C, l'eau étant à l'*état liquide*.
— Le *pouvoir calorifique inférieur* ou P.C.I. : le combustible étant pris à 0 °C, à la fin de l'expérience les éléments de combustion sont ramenés à 0 °C, l'eau étant à l'*état gazeux*.

Leur différence (de l'ordre de 6 % pour les fuels) indique quelle est la quantité de chaleur dégagée par la condensation de l'eau contenue dans le combustible.

Les pouvoirs calorifiques des combustibles solides et liquides sont déterminés dans une bombe Mahler. Celui des combustibles gazeux est mesuré à l'aide d'un calorimètre Junker.

2.4. Température de combustion. — C'est la température à laquelle s'effectue la combustion. Dans une chaudière la température atteint 1 500 °C environ.

2.5. Inflammabilité. — C'est l'aptitude du combustible à s'enflammer spontanément, ou en présence d'une flamme. Elle est caractérisée par le *point d'inflammation*.

3. CARACTÉRISTIQUES PROPRES AUX COMBUSTIBLES SOLIDES

À côté des éléments combustibles tels que le carbone, l'hydrogène, l'oxygène, le soufre, se trouvent des corps inertes comme les cendres, l'eau et l'azote.

Pour un combustible on détermine donc :
— La teneur en humidité et en cendres.
— L'indice des matières volatiles (inflammabilité).
— La teneur en carbone.
— La fusibilité des cendres.
— L'oxydabilité.

3.1. La fusibilité des cendres. — Le bon état de propreté des tubes de la chaudière en dépend. L'encrassement des tubes a une forte influence sur le coefficient d'échange thermique entre la chambre de combustion et la vapeur. De plus, le comportement des cendres est très important vis-à-vis du choix du cendrier et par conséquent de leur extraction.

3.2. L'oxydabilité des houilles. — L'oxygène de l'air oxyde la houille, et à la suite d'un échauffement progressif dû à cette oxydation, il peut y avoir inflammation spontanée du charbon stocké. On empêche ce phénomène de se produire en compactant le charbon en tas. À la longue, cette oxydation est cause de la dégradation des qualités de la houille.

4. CARACTÉRISTIQUES PROPRES AUX COMBUSTIBLES LIQUIDES

4.1. Viscosité. — C'est la manifestation du frottement des molécules du liquide entre elles : le liquide coule plus ou moins facilement. La viscosité, cause des pertes de charge dans les tuyauteries, se mesure au viscosimètre d'Engler. Elle a une grande influence sur l'énergie de pompage et sur la pulvérisation du mazout dans les brûleurs. On diminue la viscosité du mazout (ou on augmente sa fluidité) en le chauffant jusqu'à 50 °C environ.

4.2. Inflammabilité. — À l'aide de l'appareil de Luchaire on détermine le **point d'éclair** qui permet de connaître la température minimale pour laquelle le mazout chauffé produit des vapeurs, pouvant créer avec l'oxygène de l'air un mélange détonant au contact d'un point incandescent (100 à 150 °C). La connaissance du point d'éclair est importante du point de vue de la sécurité : elle permet d'effectuer un préchauffage convenable du mazout sans qu'il y ait de risque en cas de fuite.
Le **point de combustion** définit la température la plus basse qui permet à l'inflammation de s'entretenir d'elle-même.

4.3. Teneur en impuretés. — Les fuels contiennent du soufre qui donne de l'anhydride sulfureux et de l'anhydride sulfurique en brûlant. Ce dernier réagissant avec l'eau dégagée pendant la combustion ou au contact de l'humidité de l'air produit de l'acide sulfurique (H_2SO_4) qui attaque les gaines des fumées et les bétons des cheminées. On y trouve aussi du chlorure de sodium, provenant souvent du nettoyage des réservoirs des bateaux pétroliers avec l'eau de mer, et du *vanadium*. Ces produits interviennent dans les phénomènes de corrosion des ailettes des turbines à gaz.

CHAPITRE III

INSTALLATION POUR LA PRODUCTION DE LA VAPEUR D'EAU

1. ALIMENTATION EN COMBUSTIBLE

Les installations pour l'alimentation en combustible sont évidemment différentes suivant la nature de celui-ci.

1.1. Alimentation par le mazout. — Les installations pour la manutention du combustible liquide, le mazout, sont généralement très simples. Celui-ci est stocké dans des réservoirs métalliques de forme cylindrique, d'un nombre variable avec la puissance de la centrale mais dont la capacité unitaire est voisine de 30 000 ou 40 000 m³. Le plus souvent, la centrale est installée près d'une raffinerie ou du parc de stockage d'une société pétrolière.

Par exemple, la centrale de Porcheville B (quatre tranches de 600 MW), comporte quatre réservoirs de 30 000 m³. Un de ces réservoirs contient du mazout à basse teneur en soufre (B.T.S.) ; il est utilisé lorsque les conditions météorologiques ne permettent pas une dispersion convenable de l'anhydride sulfureux des fumées dans l'atmosphère et qu'une trop forte concentration locale risque de polluer l'air. Ces réservoirs sont approvisionnés par un oléoduc à partir de la raffinerie de Gargenville.

Extrait des réservoirs, le mazout passe dans une *boucle de réchauffage* pour être porté à une température de 50 °C sous pression de 6 à 9 bars (1 bar = 10^5 N/m²). Ensuite, dans la boucle de réchauffage haute pression, il acquiert les caractéristiques qui permettent une pulvérisation mécanique correcte dans les brûleurs : pression de 36 bars et température de 110 °C. Cette température est obtenue à l'aide de deux chaudières auxiliaires dont le débit unitaire de vapeur est de 40 t/h. Toutes les canalisations de mazout sont réchauffées par un circuit d'eau chaude sous pression. Le débit des pompes permet d'alimenter les trente-six brûleurs de la chaudière pouvant brûler chacun 3,5 tonnes de fuel n° 2 à l'heure.

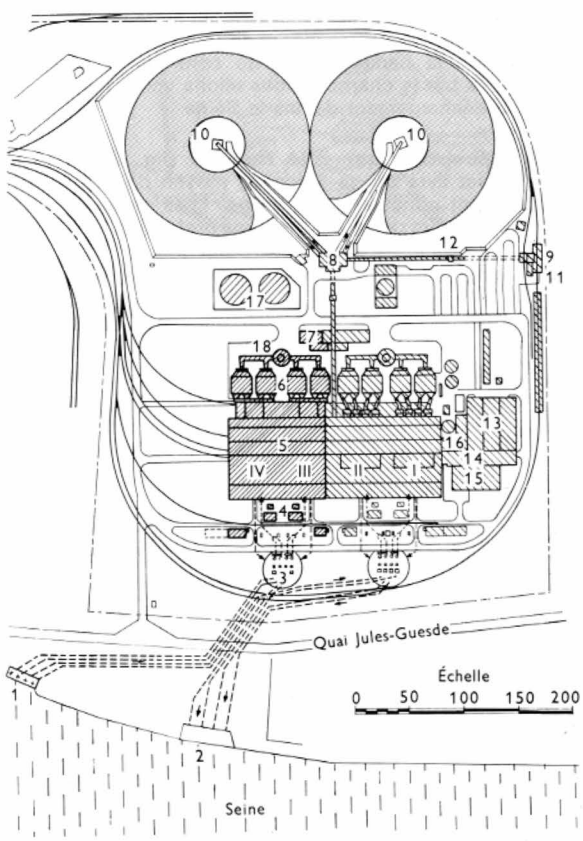


Fig. III-1 — Implantation générale de Vitry-sur-Seine, réseau des voies ferrées

1. Prise d'eau - 2. Rejet d'eau - 3. Station de pompage - 4. Poste électrique - 5. Bloc usine - 6. Dépoussiéreurs - 7. Bâtiment des suies - 8. Poste central - 9. Estacade - 10. Pôles de mise et reprise au parc - 11. Extracteur - 12. Convoyeur - 13. Ateliers-magasins - 14. Bureaux - 15. Services sociaux - 16. Épuration - 17. Stockage fuel - 18. Cheminée

1.2. Alimentation par le gaz. — Les installations sont extrêmement réduites. Par exemple, à la centrale de Saint-Ouen, le gaz naturel (dont le débit peut être de 58 000 m³*N*/h par tranche de 250 MW) arrive à un poste de détente à la pression de 20 bars où il est filtré, réchauffé et ramené à une pression de 5 bars. Une conduite d'un diamètre de 300 mm pénètre dans la chaufferie et alimente un circuit de forte section pour les brûleurs principaux, et un circuit de faible section pour les brûleurs d'allumage. Chaque circuit dispose d'un poste de sécurité, qui arrête l'arrivée du gaz en cas d'incident, et d'un poste de régulation. Ce dernier comporte, pour le circuit d'allumage, un détendeur et deux vannes de réglage de sections différentes en parallèle afin d'assurer une bonne régulation, indépendante de la consommation de la chaudière. Le circuit d'alimentation est bouclé pour obtenir une pression du gaz indépendante de la position des brûleurs.

1.3. Alimentation par le charbon. — Pour une alimentation en charbon, l'ensemble des installations est beaucoup plus important et spectaculaire que pour le gaz ou le mazout. Ces installations doivent permettre la réception du charbon, le déchargement, le stockage, la manutention du charbon sur parc, la reprise sur parc et l'alimentation de la chaudière.

La *réception du charbon* se fait par voie ferrée, par voie fluviale ou maritime. Certaines centrales utilisent conjointement ces différents moyens de transport. La centrale du Havre, dont la consommation s'élève à deux millions de tonnes par an, et qui utilise des charbons en provenance des États-Unis et de Pologne, possède un parc de stockage de 450 000 t, directement alimenté par tapis transbordeur depuis le port minéralier du Havre où les bateaux sont déchargés par des grues portiques.

2. UN EXEMPLE D'ALIMENTATION EN CHARBON

Pour bien mettre en évidence la complexité des installations d'une alimentation en charbon on décrira, à titre d'exemple, la centrale de Vitry-sur-Seine qui est approvisionnée par voie ferrée et par voie fluviale.

2.1. Réception par voie ferrée (fig. III-1). — La voie ferrée, d'une longueur de 1 800 m, ceinture la totalité du terrain de la centrale et comprend trois parties :

— Un premier tronçon reçoit les trains en attente de déchargement ; il est doublé par une deuxième voie qui permet d'y garer un autre train en attente. Cette partie est électrifiée.

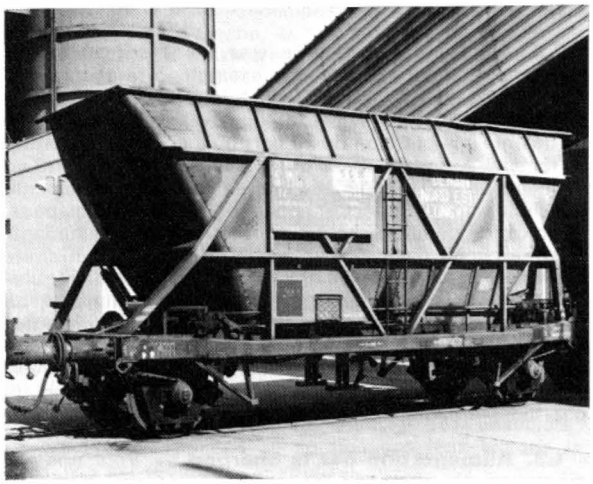
— Le deuxième tronçon passe par l'*estacade de déchargement* du charbon.

— Enfin, le troisième tronçon, où peut stationner un train déchargé, ferme la boucle ; il n'est électrifié que dans sa partie terminale.

La centrale peut recevoir de 4 à 6 trains de 1 300 t, composés d'une quarantaine de wagons de 30 t. La consommation journalière peut atteindre 4 300 t pour les deux premières tranches de 250 MW. Ces trains sont amenés par des locomotrices de la S.N.C.F., puis chacun d'eux est pris en charge, après le premier tronçon, par un locotracteur Diesel d'une puissance de 295 kW. Ces locotracteurs sont télécommandés à partir du poste

de commande qui surplombe l'estacade de déchargement, et dans lequel est situé le *tableau synoptique* qui permet de surveiller et de diriger l'ensemble de la manutention du charbon de la centrale.

2.2. Déchargement du charbon. — L'estacade de déchargement, située en plein air, a une longueur utile de 15 m, ce qui en fait la plus petite estacade réalisée pour une centrale de cette puissance (1 000 MW prévus au charbon). Formée de deux trémies en béton dont les parois, inclinées de 60° par rapport à la verticale, sont recouvertes d'un ciment anti-abrasif, elle a un volume de 70 m^3.

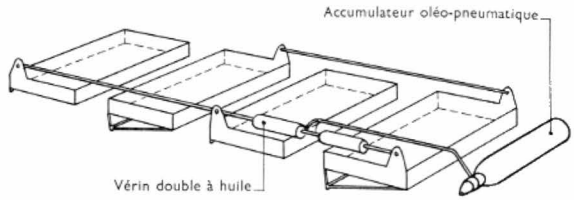


Wagon Arbel (*Morceau-É.D.F.*)

Le déchargement du charbon s'opère automatiquement d'une façon continue lors du passage des wagons au-dessus de l'estacade. Ce déchargement est rendu possible par l'emploi de wagons Arbel « type É.D.F. ». Ces wagons, d'un poids total de 40 t et de 29,5 t de charge utile, ont une longueur totale de 7,95 m pour une hauteur de 3,80 m. Un dispositif hydraulique permet de récupérer une partie de l'énergie libérée par la chute du charbon après l'ouverture des quatre portes formant le plancher du wagon. Cette énergie, emmagasinée dans un accumulateur oléo-pneumatique, est récupérée pour la fermeture des trappes.

Des doigts escamotables placés sur le côté de la voie, à l'entrée de l'estacade, permettent de déclencher l'ouverture des portes ; à la sortie, une rampe située entre les deux rails commande leur fermeture. C'est cette automatisation qui permet *le déchargement sans interrompre le mouvement du train*. Par temps très froid, l'eau contenue dans le charbon peut avoir gelé et bloqué les gonds des portes. C'est pourquoi, avant l'arrivée à l'estacade, la voie passe entre deux rampes d'arrosage qui pulvérisent de l'eau chaude sur les trappes pour les dégeler.

Les wagons pairs sont vidés dans la première trémie et les wagons impairs dans la seconde. L'extraction du charbon est faite, à la base des trémies, par deux extracteurs à bandes de caoutchouc qui, par l'intermédiaire d'une goulotte, alimentent un convoyeur qui monte le charbon au *poste central*. Le débit maximal d'extraction est de 1 500 t/h.

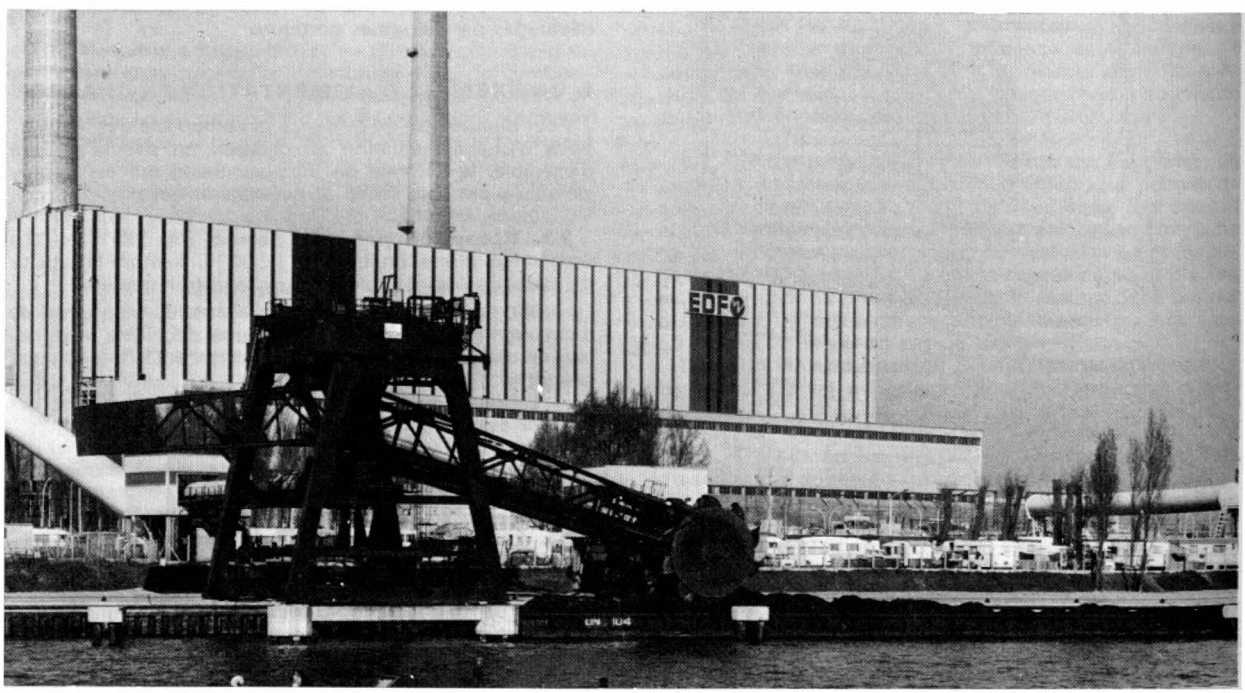


Dispositif de manœuvre des trappes *(La Technique moderne)*

Le débit effectif est mesuré par une **bascule intégratrice électronique** placée sous la bande du convoyeur. À l'extrémité supérieure du convoyeur se trouve un *séparateur magnétique* très puissant qui attire les morceaux de fer qui peuvent se trouver dans la couche de charbon déposée sur la bande. Avant de continuer à suivre le chemin pris par le charbon, nous allons voir comment est réalisé le déchargement depuis la Seine.

2.3. Réception par voie fluviale (fig. III-2). — Le charbon est livré par la Seine au moyen de sept *barges* spécialement conçues à cet usage. Elles mesurent 69 m de long, 11,40 m de large et ont une profondeur de 3,30 m.

Fig. III-2 — Roue-pelle pour le déchargement des péniches de charbon à Vitry-sur-Seine (*Morceau-É.D.F.*)



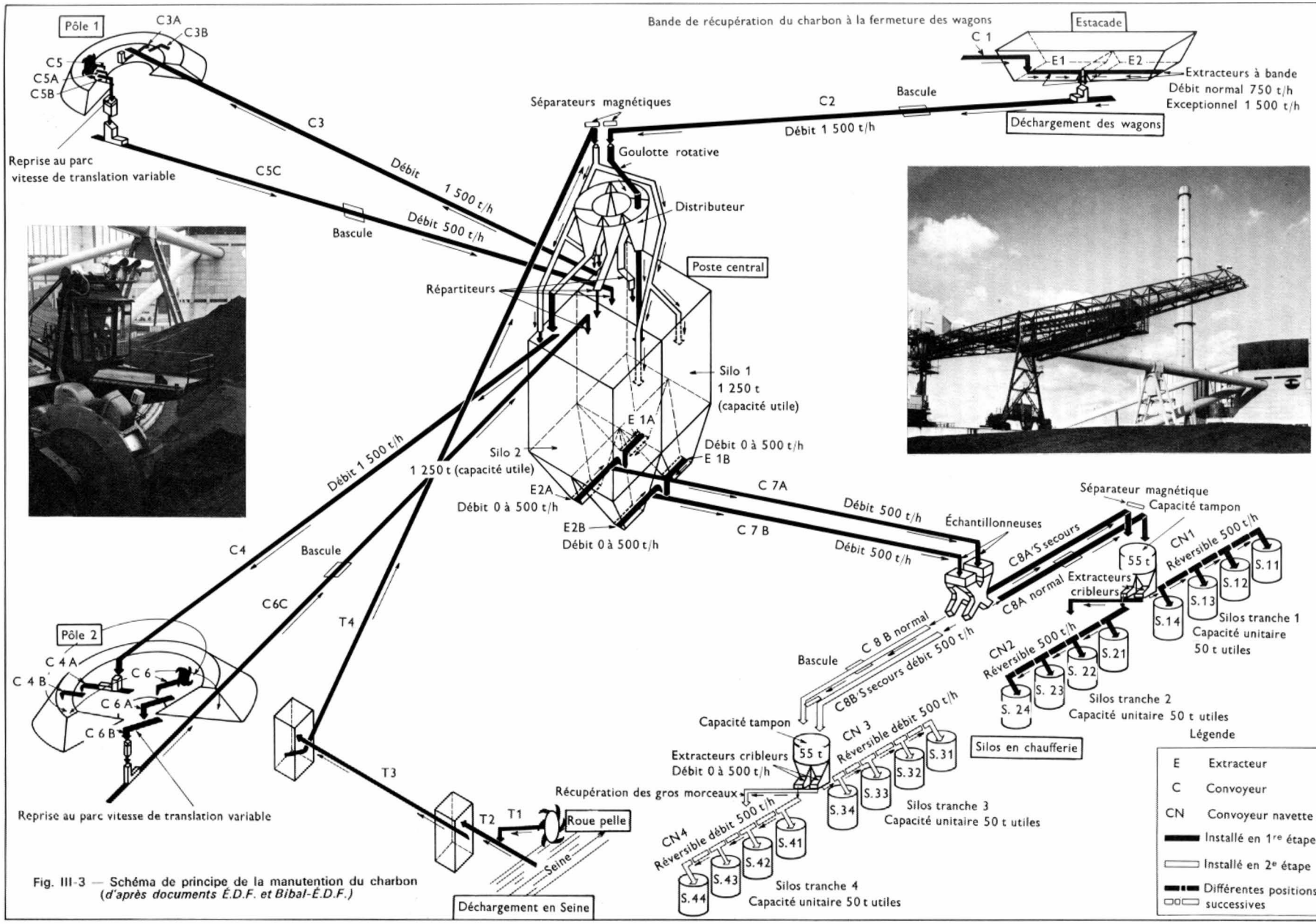


Fig. III-3 — Schéma de principe de la manutention du charbon
(d'après documents É.D.F. et Bibal-É.D.F.)

Avec un enfoncement de 3 m, elles transportent 1 980 t de charbon. Elles viennent se placer le long d'un quai de 145 m sous un portique fixe de 16 m de haut qui prend appui d'un côté, sur le quai, et de l'autre côté, sur une palée placée en Seine. Ce portique comprend un chariot automoteur qui porte le bras support de la double *roue-pelle* et permet à celle-ci de couvrir toute la largeur de la barge par un déplacement latéral à la vitesse de 0,30 m/s. Le bras support s'incline de 0° à 30° par rapport à l'horizontale. Les deux roues pelleteuses ont un diamètre de 7,20 m et sont équipées de 10 godets de 400 dm^3. La vitesse de coupe à l'arête des godets est de 2,20 m/s. L'avancement de la barge le long du quai permet d'obtenir le déplacement relatif de la roue-pelle et du charbon. Il s'effectue à l'aide de deux treuils qui assurent, l'un un effort de traction, l'autre un effort de freinage de façon à obtenir un déplacement parallèle au quai. Le déplacement de la barge s'effectue vers l'amont. La vitesse peut varier de 0,4 à 4 m/mn. Deux passes de 1,50 m des roues-pelles suffisent pour le déchargement de la barge. Pendant la deuxième passe, les deux roues pelleteuses reposent sur les deux bords de la barge grâce à un chariot (ces bords sont munis de rails). De cette façon, indépendamment du niveau de l'eau, la distance entre les godets et le fond de la barge reste constante (5 mm environ).

2.4. Le poste central (fig. III-3). — C'est une sorte de poste d'aiguillage où le charbon venant des estacades peut être dirigé, soit sur les pôles du parc, soit dans les silos de stockage, par une goulotte rotative qui alimente un distributeur. Le poste central, qui, dans d'autres installations, constitue bien souvent un ouvrage isolé, a pu ici être placé sur le dessus des silos de stockage ; cela a permis un gain appréciable de place et une diminution importante de longueur de convoyeur.

2.5. Les pôles de manutention. — Par rapport au parc de *type linéaire* que l'on trouve dans d'autres centrales, le parc de *type polaire*, adopté ici, présente l'avantage de permettre le stockage d'un important volume de charbon dans un minimum de place. Cela est très appréciable dans un site urbain où le terrain est très limité et cher. Le parc, d'une superficie de 7 ha, est équipé de deux pôles. L'aire est bétonnée et légèrement en pente pour assurer le drainage naturel de l'eau du produit stocké.

2.5.1. Mise en place. — Le convoyeur C3 amène le charbon de la tour centrale au centre du pôle. Il s'appuie sur une couronne à billes permettant la rotation du portique de jetée sur lequel cette couronne est posée. Ce portique de jetée est lui-même porté sur une autre couronne à billes placée sur le pivot central en béton. Le convoyeur rotatif C3A repose, à son autre extrémité, sur une palée qui roule sur une voie circulaire de 52 m de diamètre.

Le convoyeur C3A permet de jeter directement le charbon sur le parc lorsque le C3B, qui est une sorte de convoyeur télescopique, est dans sa position la plus reculée. À l'aide de ces deux convoyeurs le volume de mise en parc est de 150 000 m^3 avec un débit de 1 500 t/h. Ce stock est complété par une zone morte obtenue à l'aide d'engins mobiles du type bulldozer comme, par exemple, le Michigan 280 III. D'une longueur de 8,153 m et d'une largeur de 3,130 m, d'un poids de 30 t, celui-ci est monté sur pneumatiques gonflés à l'eau ; il a été spécialement étudié pour le compactage du charbon. Ainsi le stock est augmenté de 100 000 m^3 (pour un pôle).

2.5.2. Reprise en parc. — La reprise se fait à l'aide d'une roue-pelle télescopique montée à l'extrémité d'une flèche relevable. Cette roue de 5 m de diamètre est composée de 9 godets de 150 dm^3, tournant à la vitesse de 8 tr/mn ; sa vitesse de coupe atteint 2,1 m/s. Elle est animée d'un mouvement circulaire autour du pivot central et roule sur la même voie circulaire que le convoyeur de jetée. Grâce à cette disposition, on peut effectuer simultanément les opérations de mise en parc et de reprise.

Le bras rotatif supporte les convoyeurs C5, C5A et C5B. Le convoyeur C5C assure la liaison entre le pôle et le silo 1. En cas de panne de la roue-pelle, une trémie ménagée au-dessus du convoyeur C5C permet de l'alimenter en poussant le charbon avec un bulldozer.

Ces installations permettent une reprise de 115 000 m^3 de combustible sans intervention d'engins mobiles ; leur débit est de 500 t/h (et par pôle) et elles peuvent être commandées manuellement ou automatiquement. Le fonctionnement de la roue-pelle est surveillé depuis le poste de commande de la manutention, au moyen d'une caméra de télévision, fixée au bout du bras de reprise. L'agent de service peut ainsi observer le tas de charbon et la position relative de la roue-pelle.

2.6. Les silos de stockage. — Au nombre de deux, ces silos en béton armé ont une capacité unitaire de 1 250 t, représentant environ huit heures de fonctionnement d'une chaudière. De forme parallélépipédique, chacun d'eux possède à sa base deux trémies dont les sections décroissent, vers le bas, suivant une loi exponentielle. De cette façon, le frottement du charbon sur le béton des parois est maintenu constant sur toute la hauteur de la trémie et on évite le bourrage du charbon et la formation de voûtes empêchant tout écoulement. Néanmoins, les parois des silos sont munies de regards permettant d'éliminer d'éventuels accrochages. Les niveaux haut et bas de remplissage sont détectés à l'aide de sources radioactives.

Chacune des deux trémies de chaque silo est équipée d'extracteurs à bande (E1A, E1B, E2A, E2B sur la fig. III-3) d'un débit variable de 0 à 500 t/h ; elles permettent d'alimenter les deux convoyeurs parallèles C7A et C7B. Ces deux transporteurs arrivent en chaufferie dans le plan de symétrie des quatre tranches. Des *échantillonneurs* à charbon brut sont utilisés pour prélever à intervalles réguliers des échantillons de charbon. Parallèlement C7A et C7B alimentent les convoyeurs C8A et C8B qui leur sont perpendiculaires ; ceux-ci desservent chacun un groupe de deux tranches. Ils passent sur une bascule et sont munis à leur extrémité terminale d'un séparateur magnétique. Par mesure de sécurité, chacun d'eux est doublé par un autre transporteur de secours en parallèle (C8A'S et C8B'S).

2.7. Les silos de chaufferie. — Dans l'axe de symétrie d'un groupe de deux tranches se trouve un silo métallique de forme cylindrique d'une capacité de 55 t. Sa base est terminée par deux trémies exponentielles équipées chacune de deux *extracteurs-cribleurs*. Ces extracteurs alimentent deux convoyeurs-navettes à double sens de marche ; chacun d'eux peut déverser le charbon dans les quatre silos de stockage des broyeurs de l'une ou de l'autre tranche, ou dans l'ensemble des huit silos des deux tranches. Ces silos, d'une capacité unitaire de 50 t, sont portés par des *pesons à jauges de contraintes* (V. t. 2, Mesures et appareils de mesure, chap. 20) afin de régler leur contenance en fonction de la consommation de la chaudière. Ils sont également de forme cylindrique, et leur extrémité inférieure se termine par une trémie de forme exponentielle. Ces silos servent de capacité tampon et ils permettent de maintenir une certaine charge de charbon afin d'éviter la mise à l'air libre des broyeurs pressurisés et les projections de charbon pulvérisé. Tous ces silos métalliques ont été fabriqués avec des tôles d'un acier spécial, le Corten, qui possède une résistance élevée à la corrosion et à l'abrasion.

La commande des installations de montée en chaufferie peut être soit manuelle, soit automatique. L'automatisation de ces installations a permis de réduire d'une façon importante les réserves intermédiaires. Le parc alimente presque directement la chaufferie grâce à la roue-pelle à débit variable, proportionnel à la consommation de la chaudière. Ce gain est très important du point de vue économique : indépendamment de la répercussion de cet allégement sur la fourniture des silos eux-mêmes, il a amené une réduction très importante de leurs structures porteuses. En revanche, l'automatisation nécessite une marche sans défaillance grave. La fiabilité du matériel doit être grande.

Après cette description d'un ensemble de manutention d'une centrale, et avant d'aborder celle de la préparation du charbon pour qu'il soit brûlé dans les meilleures conditions, on va apporter quelques compléments concernant la manutention dans les centrales utilisant le charbon comme combustible.

2.8. Compléments sur la manutention. — Généralement, les bandes transporteuses sont supportées par des passerelles métalliques formées de poutres en treillis. Dans certains cas, ces passerelles peuvent être entièrement revêtues d'un *bardage* pour maintenir à l'abri des intempéries les bandes transporteuses et les passages pour la circulation du personnel ; lorsque le climat est clément, on peut envisager seulement de capoter les bandes.

Les convoyeurs de la centrale de Vitry-sur-Seine ont l'originalité d'être de gros tuyaux cylindriques formés de tôles roulées et soudées qui servent à la fois de système porteur et de bardage. Cette solution s'est avérée être à la fois élégante et économique. L'extrémité supérieure des passerelles repose sur des appuis glissants pour absorber les dilatations dues aux variations de température.

— Dans les installations de manutention, un câble d'arrêt d'urgence court de part et d'autre des bandes transporteuses et les goulottes sont équipées de détecteurs de bourrage à membrane. Les bandes sont équipées de racleurs, constitués de bandes de caoutchouc et de brosses de nettoyage.

— Les séparateurs magnétiques permettent d'éliminer les objets magnétiques (ferrailles, rivets, boulons, clous, etc.) qui peuvent se trouver mélangés au charbon. Ils sont constitués d'un électroaimant, alimenté sous une tension continue de 220 V délivrée par un redresseur (V. t. 1, Électronique, chap. 18) ; une bande transporteuse défile devant l'électroaimant et entraîne les ferrailles vers une goulotte d'évacuation.

— Un prélèvement cyclique de charbon est réalisé à l'aide de l'échantillonneur à charbon. Le charbon est reçu dans un tube cylindrique à la périphérie duquel est ménagée une fente réglable qui passe régulièrement dans le jet de charbon. Il est ensuite récupéré au moyen d'une palette liée au tube et il est amené par une vis sans fin tournant à faible vitesse jusqu'à un broyeur à engrenage (fig. III-4). Une partie du charbon broyé sert à l'échantillonnage, le reste est renvoyé dans le circuit. L'échantillon final (une quinzaine de kilogrammes par 24 heures) est représentatif du charbon utilisé, sauf pour ce qui est de sa teneur en eau.

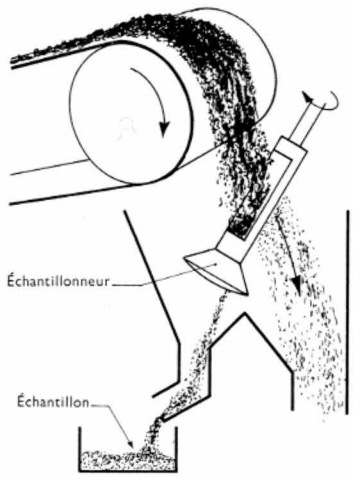


Fig. III-4

Schéma de principe du prélèvement du charbon

— Télécommande des locotracteurs. Les rails sont normalement isolés électriquement par les traverses en bois sur lesquelles ils reposent ; la continuité aux joints est faite par des connexions brasées. Ils servent de conducteur, pour le retour du courant dans le cas de la traction électrique, et pour les courants commandant la signalisation des voies dans tous les cas. Il est donc facile d'y faire circuler un courant supplémentaire pour la télécommande. Ce courant porteur de 2 950 Hz, modulé par le courant de commande (V. t. 2, Radioélectricité, chap. 2), est injecté dans le circuit formé par les deux files de rails et bouclé par les essieux de la machine. Des capteurs électromagnétiques (fig. III-5) ayant la forme d'un segment de tore et situés à l'avant et à l'arrière du locotracteur, se déplacent dans le champ magnétique du courant passant dans les rails. Ces capteurs sont montés en série, de façon à éliminer les effets des courants de retour de la traction électrique (dans le

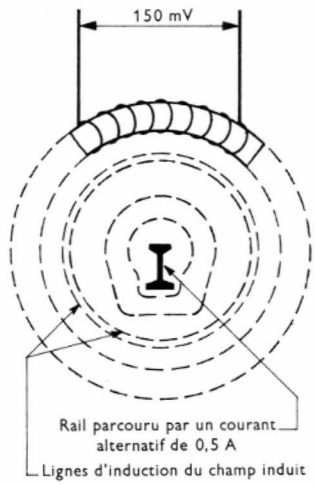


Fig. III-5

Capteur électromagnétique et champ induit autour du rail

circuit de commande, les signaux dus à ce courant sont en opposition de phase) et délivrent une tension de 300 mV (fig. III-6). Après amplification, cette tension est appliquée à des résonateurs électromécaniques accordés chacun sur une fréquence d'émission. Les signaux sélectionnés sont

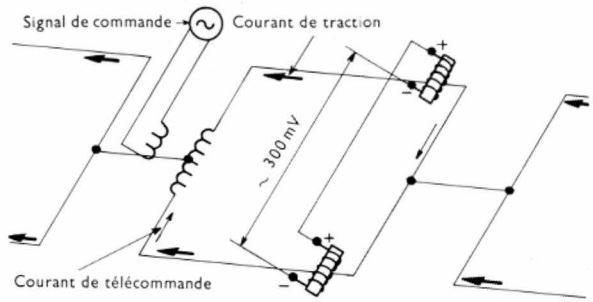


Fig. III-6 — Principe de la télécommande des locotracteurs

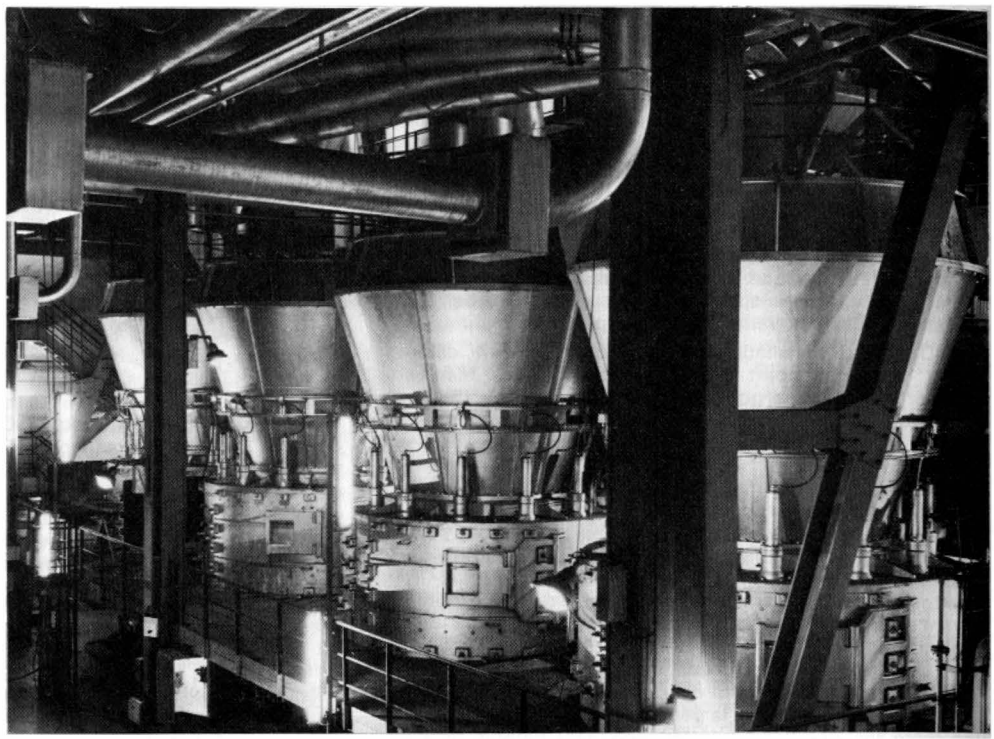
ensuite envoyés sur des relais électromécaniques qui assurent la commande d'une fonction bien définie du locotracteur.

L'utilisation d'un circuit à basse impédance permet d'éliminer facilement les courants parasites par filtrage, ce qui est un avantage de ce genre de transmission. De plus, on peut envoyer dans le circuit plusieurs courants porteurs, adaptés chacun à un locotracteur différent. En cas de rupture de rail, la machine s'arrête automatiquement, ce qui est intéressant du point de vue sécurité.

— Le déchargement des trains et la mise sur parc constitue une opération discontinue, différente de la reprise du charbon sur le parc et de l'alimentation de la chaudière qui est une opération continue. C'est pourquoi les rôles ont été nettement séparés.

La première opération est commandée à partir du poste de commande de la manutention. Trois agents sont nécessaires pour accomplir ce travail. Un agent, installé au pupitre de cette salle, télécommande les locotracteurs, prépare à distance les aiguillages pour la circulation des trains, dirige le charbon vers les pôles ou vers les silos de stockage. Un deuxième agent manœuvre la sécurité manuelle de verrouillage des trappes des wagons et surveille leur ouverture et leur fermeture automatique. Un *rondier* inspecte l'ensemble des installations. Un ou deux accrocheurs, lors de la réception et de la restitution des trains, peuvent s'ajouter temporairement à ces trois agents.

La deuxième opération est commandée depuis la salle de contrôle de la centrale par l'équipe de quart de l'exploitation qui dispose du synoptique de commande de la montée en chaufferie. En dehors des heures de travail du personnel de la manutention, la mise en marche de la reprise sur parc (pour alimenter les silos de stockage) est également effectuée depuis cette salle de contrôle.



Centrale de Vitry-sur-Seine : salle des broyeurs (*Bibal-É.D.F.*)

3. LA PRÉPARATION DU CHARBON

La centrale de Vitry-sur-Seine continuera à servir d'exemple.

3.1. Les broyeurs (fig. III-7). — Chaque chaudière est alimentée par l'intermédiaire de quatre broyeurs qui sont placés sous les quatre silos tampons de 50 t. Le charbon brut est extrait d'un silo par un *doseur à chaîne* qui le pousse dans le broyeur ; le débit, réglé par un variateur de vitesse, est de 6 à 35 t/h. Les broyeurs sont constitués par un ensemble de dix boulets creux (de 780 mm de diamètre extérieur et de 140 mm de diamètre intérieur), placés suivant un cercle de 2,540 m de diamètre moyen et pris entre deux couronnes horizontales en fonte spéciale ayant subi un traitement pour résister à l'usure. La couronne supérieure ne peut pas tourner mais elle est appuyée sur les boulets par douze ressorts, eux-mêmes soumis à la pression de douze vérins hydrauliques. La couronne inférieure est mise en rotation par un moteur par l'intermédiaire d'un réducteur de vitesse à vis sans fin et à roue tangente. Le charbon brut, envoyé dans le broyeur par une goulotte latérale, est déversé sur un cône central qui le dirige sous les boulets. Le charbon pulvérisé sort vers l'extérieur de la couronne inférieure, et il est entraîné *par de l'air sous pression* vers le *sélecteur* à volets orientables. Ce sélecteur est situé dans la partie supérieure du broyeur. C'est par l'orientation de ces volets que la finesse du charbon pulvérisé est réglée ; ce réglage peut être effectué en marche.

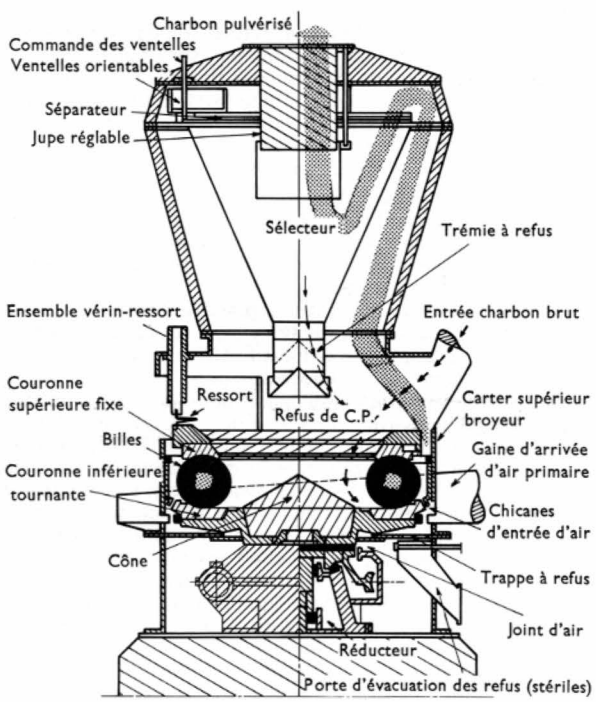


Fig. III-7 — Coupe d'un broyeur à charbon *(É.D.F.)*

Le mélange air-charbon est dosé de la façon suivante :

— *l'air primaire*, propulsant le charbon pulvérisé, est injecté par un ventilateur centrifuge à diffuseur rotorique ; le débit est réglé au moyen de directrices inclinables placées dans le caisson d'aspiration du ventilateur ;

— *l'air chaud* est pris à la sortie du réchauffeur d'air et *l'air froid*, nécessaire pour la régulation de température du mélange, est capté au refoulement des ventilateurs de soufflage.

La partie supérieure du broyeur est divisée en trois départs, eux-mêmes subdivisés en deux tuyauteries de 386 mm de diamètre alimentant chacune un brûleur. Chaque broyeur débite sur une rangée horizontale de six brûleurs. Il y a quatre rangées de ce type afin que la chambre de combustion du générateur de vapeur n'ait pas son alimentation déséquilibrée en cas de mauvais fonctionnement d'un des broyeurs.

Les caractéristiques principales de l'installation de broyage sont les suivantes :

— débit maximal du charbon : 29,7 t/h ;
— dureté du charbon : 65 °Hargrove ;
— granulométrie du charbon pulvérisé : 80 % du passage au tamis Tyler 200 ;
— teneur en cendres sur sec du charbon : 20 % ;
— puissance du moteur d'entraînement du broyeur : 330 kW ;
— tension d'alimentation du moteur : 5,5 kV ;
— vitesse de rotation du moteur : 1 000 tr/mn ;
— vitesse de rotation du broyeur ; 40 tr/mn ;

— puissance du moteur d'entraînement du ventilateur : 380 kW ;
— tension d'alimentation du moteur de ventilation : 5,5 kV ;
— vitesse du moteur et du ventilateur : 2 950 tr/mn ;
— débit d'air primaire à l'aspiration à 290 °C : 92 000 m³/h.

Exemple de caractéristiques de charbon à pulvériser

	Nord	Lorraine
Granulométrie	0-20 mm	0-20 mm
Teneur en eau	12 %	12-15 %
Teneur en cendres (sur sec)	20 %	10 %
Teneur en matières volatiles (sur sec)	22 %	35 %

3.2. Les brûleurs. — Ils ont pour rôle de réaliser le mieux possible le mélange d'air (comburant) et de combustible pour que la combustion soit complète. Ils sont adaptés au type de combustible qu'ils brûlent et à la position qu'ils occupent dans la chambre de combustion. Il existe une grande variété de brûleurs pour chaque catégorie de combustible. On se limitera à la description d'un brûleur utilisé avec le charbon pulvérisé (fig. III-8).

C'est un ensemble combiné qui comprend :

1° *Un allumeur à propane*, formé d'un tube, dans lequel circule de l'air surpressé, où se trouvent :

a) le conduit d'amenée du propane (pression de 1,7 bar, débit de 10 à 20 m³*N*/h) ;

b) Une électrode d'allumage alimentée par un transformateur 127/10 000 V ;

c) une électrode à ionisation qui sert à la détection de la flamme de propane.

2° *Un brûleur à fuel-oil n° 2*, placé au centre de l'ensemble. Il sert à la montée en puissance et au *soutien* (fonctionnement du générateur de vapeur à puissance réduite). Pouvant débiter entre 150 et 900 kg/h de fuel n° 2, il est du type à *pulvérisation mixte* c'est-à-dire :

— Pulvérisation mécanique qui met en rotation le fuel sous pression dans une chambre alimentée tangentiellement ; le contact avec l'air comburant et la détente brusque à la sortie de la chambre vaporise le fuel.
— Pulvérisation à vapeur qui conditionne l'air ; cette vapeur est prélevée sur le réseau de vapeur auxiliaire.

Il est équipé d'une cellule sensible aux rayons ultraviolets pour détecter la flamme de la combustion du mazout.

3° *Le brûleur à charbon proprement dit*, réparti sur la périphérie de l'ensemble. Il est du type à *turbulence :* la dispersion du charbon pulvérisé s'opère sur un déflecteur circulaire réglable manuellement, et un mouvement circulaire de turbulence est impulsé à l'air *secondaire* par des ventelles orientables à partir de la salle de contrôle. Ces ventelles sont dans les positions suivantes :

a) Fermées, pour l'allumage du propane.

b) Ouvertes à 30 % pour la marche au fuel n° 2.

c) Ouvertes à 60 % pour la marche au charbon seul.

L'air secondaire, provenant des réchauffeurs d'air, alimente généralement une enceinte unique dans laquelle sont placées les prises d'air de tous les brûleurs d'un même générateur de vapeur, afin d'éviter un déséquilibre de l'alimentation par des pertes de charge différentes.

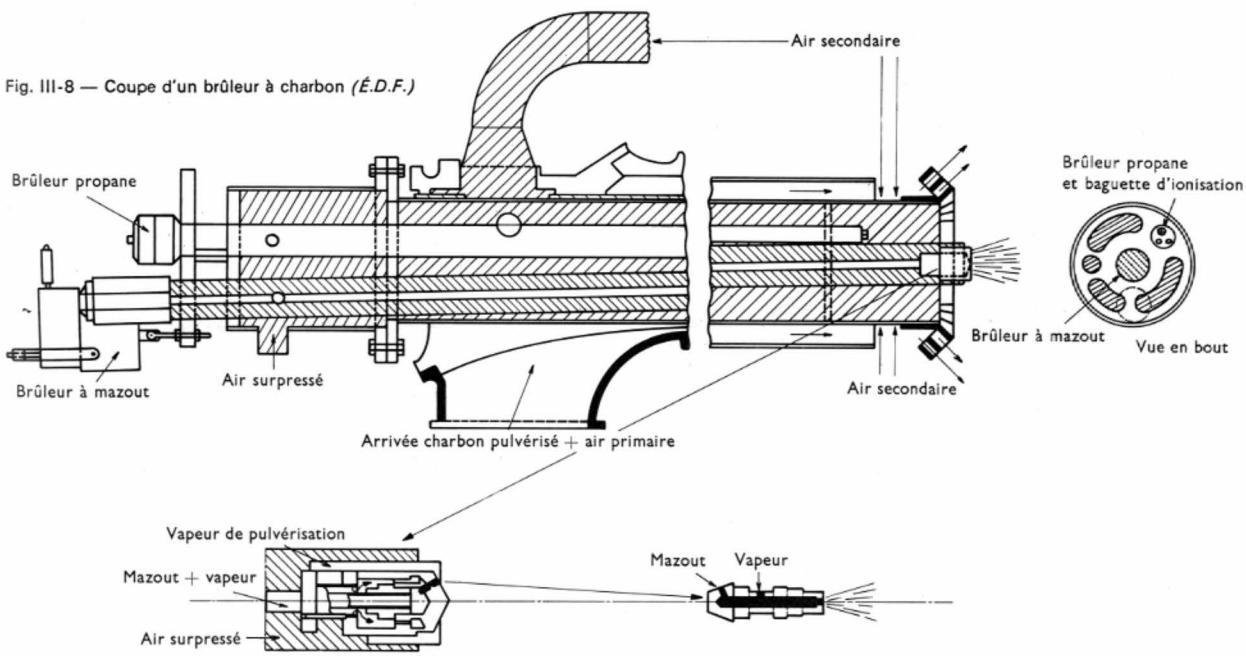
4. LA VAPEUR. RAPPEL DE QUELQUES NOTIONS THÉORIQUES

Avant d'aborder la description détaillée d'un générateur de vapeur, il est nécessaire de rappeler certaines définitions concernant la chaleur, les propriétés de l'eau en phases liquide et gazeuse et la thermodynamique (V. t. 1, Thermodynamique).

4.1. La chaleur. — La chaleur est une forme d'énergie ; elle se manifeste de différentes façons : dilatation des corps, accroissement de leur température, changement de leur état (solide → liquide → gaz). La notion de chaleur est différente de la *notion de température*. Si l'on chauffe un mélange d'eau et de glace, on lui fournit de la chaleur, la glace fond, mais tant qu'il y a de la glace, la température reste constante.

La *quantité de chaleur* est une grandeur mesurable. La quantité de chaleur absorbée par un corps est proportionnelle à l'élévation de température et à la masse du corps. Elle est indépendante de la notion de temps. L'unité légale de la quantité de chaleur est le *joule* (symbole : J). En pratique, et plus particulièrement pour exprimer le pouvoir calorifique d'un combustible, on utilise encore la millithermie (symbole : mth) ou kilocalorie (symbole : kcal) qui correspondent à la quantité de chaleur qu'il faut pour porter une masse de 1 dm³ d'eau de 14,5 °C à 15,5 °C ; 1 mth = 4185 J.

Fig. III-8 — Coupe d'un brûleur à charbon *(É.D.F.)*



Un kilogramme de charbon brûlé dans les centrales peut fournir 7 000 mth (29,26 MJ), ce qui permet d'élever de 70 °C la température de 100 kg d'eau (en supposant nulles toutes les pertes). Le P.C.S. du fuel est de 10 300 mth (43,06 MJ).

4.2. Équivalence quantité de chaleur - travail. — Le principe de la conservation de l'énergie exprime que si un système matériel échange un travail W et une quantité de chaleur Q avec le milieu extérieur, et revient à son état initial :

— Il fournit du travail s'il reçoit de la chaleur.
— Il fournit de la chaleur s'il reçoit du travail.

Donc, on aura : $W = Q$

Dans le système SI travail et quantité de chaleur sont exprimés par la même unité : le joule. Avec les anciennes unités (dont l'emploi est toujours autorisé par le décret du 31 mars 1961) on exprime la quantité de chaleur en millithermies ou kilocalories et le travail en joules ; la relation précédente s'écrit alors :

$$W = JQ$$

le coefficient J étant égal à 4 185 J/mth.

4.3. Transmission de la chaleur

4.3.1. La conduction. — La *conductibilité calorifique* d'un corps est la propriété qu'il possède de transmettre, à travers lui-même, une certaine quantité de chaleur dans l'unité de temps. La quantité de chaleur Q échangée en une heure par conduction à travers une plaque est donnée par l'expression suivante :

$$Q = C \frac{S}{e} . \Delta\theta$$

où l'on désigne par C, la conductibilité calorifique ; par S, la surface de la plaque ; par e, l'épaisseur de la plaque ; et par $\Delta\theta$, l'écart de température entre les deux faces de la plaque.

Dans le système SI on exprime : Q en joules, C en joules par heure-mètre-kelvin (ou degré Celsius), S en mètres carrés, e en mètres et $\triangle\theta$ en kelvins (ou en degrés Celsius).

4.3.2. La convection. — C'est la transmission de chaleur entre un liquide ou un gaz en mouvement et une paroi. Suivant que le mouvement est naturel ou forcé, la convection est naturelle ou forcée.

Le principe du *thermosiphon* (fig. III-9), qui est couramment utilisé dans les chaudières des centrales thermiques est une application de la convection naturelle. La différence de température de l'eau contenue dans les tubes A et B est la cause d'une différence de densité : par gravité, l'eau se met en mouvement provoquant une circulation naturelle dans le sens indiqué par les flèches. Si la quantité de chaleur fournie est réduite, la circulation se ralentit, et peut même s'arrêter (rupture de circulation). Cela est dangereux car les tubes mal refroidis peuvent alors se déformer et même éclater par surchauffe locale. C'est pour éviter cet incident que l'on définit, pour chaque chaudière, le débit minimal de vapeur, ou *minimum technique*, au-dessous duquel il est dangereux de maintenir la vaporisation.

Ce mode de circulation est limité aux pressions inférieures à 190 bars. Avec la *circulation assistée*, le mouvement dû au phénomène de thermosiphon est accéléré au moyen de pompes de circulation ; cela permet d'avoir une surface d'échange eau-chaleur plus faible : le réservoir en pression ou ballon, et la chaudière peuvent avoir des dimensions plus petites. La *circulation forcée* permet la suppression du ballon dans les chaudières, et les coefficients d'échange sont améliorés. Elle est utilisée pour la circulation des fumées et pour la circulation de l'eau dans les réchauffeurs du poste d'eau.

Il est difficile de déterminer par le calcul les coefficients d'échange par convection. Le plus souvent, on fait appel à des formules empiriques et à des résultats d'expériences passées. Cependant, on peut représenter la quantité de chaleur Q transmise en une heure par la formule :

$$Q = K S \Delta\theta$$

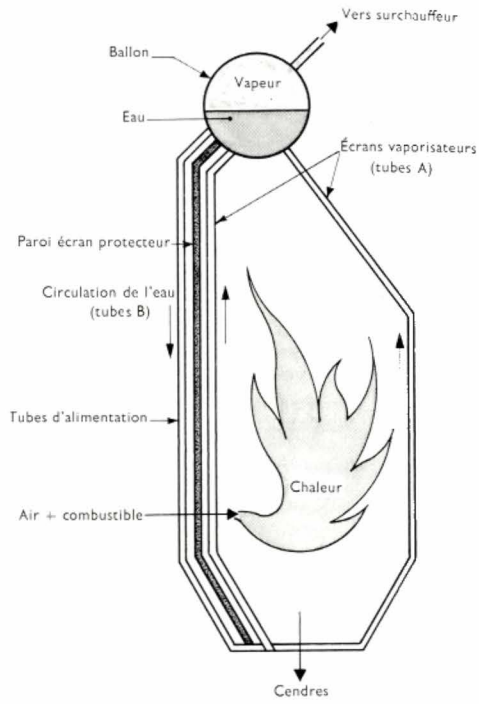


Fig. III-9 — Principe de fonctionnement d'une chaudière à circulation naturelle (thermosiphon)

où l'on désigne par K, le coefficient de convection (il dépend notamment de la nature du fluide, de sa vitesse moyenne, de sa turbulence, de la forme de la surface d'échange) ; par S, l'aire de la surface d'échange ; par $\Delta\theta$, l'écart de température entre la température moyenne du fluide et la température de la paroi.

On exprime Q en joules, K en joules par heure-mètre carré-kelvin (ou degré Celsius), S en mètres carrés et $\triangle\theta$ en kelvins (ou en degrés Celsius).

4.3.3. Le rayonnement. — L'émission de *photons* (V. t. 1, Optique, chap. 4) par un corps chauffé fournit de l'énergie rayonnante ; suivant leurs longueurs d'ondes, les radiations peuvent être visibles (elles sont alors lumineuses) ou invisibles (rayonnement des corps noirs). La transmission de la chaleur dépend à la fois de la source et du corps récepteur (surfaces, distance, natures). Un corps noir et mat est très absorbant ; en revanche, une surface polie et claire réfléchit l'énergie incidente (pertes par réflexion).

Entre deux corps chauffés, il y a échange d'énergie rayonnante ; la quantité de chaleur échangée est donnée par l'expression suivante :

$$Q = k R_1 R_2 (T_1^4 - T_2^4)$$

On désigne par : k, une constante dépendant de la position relative des corps ; par R_1 et R_2, les coefficients respectifs de rayonnement ; par T_1 et T_2, les températures absolues des deux corps.

Les corps rencontrés dans les foyers industriels sont gris, ils ont un facteur d'absorption proche de 0,9. En admettant, par exemple, une température de flamme de 1 250 °C et une température de tube de 300 °C, la quantité de chaleur échangée dans un foyer de chaudière peut atteindre 820 000 kJ/m²-h.

4.4. La vapeur d'eau

La *vaporisation* est le passage de l'état liquide à l'état de vapeur. L'*ébullition* est une vaporisation rapide au sein du liquide avec dégagement de bulles de vapeur saturée. La température d'ébullition, variable avec la pression, demeure constante pendant toute la durée de l'ébullition si la pression est maintenue constante.

4.4.1. Vapeur saturée. — Pendant la vaporisation, le fluide surmontant l'eau est composé de vapeur sèche et de fines gouttelettes d'eau : c'est de la *vapeur saturée*. Le *titre* de la vapeur est le rapport de la masse de la vapeur sè-

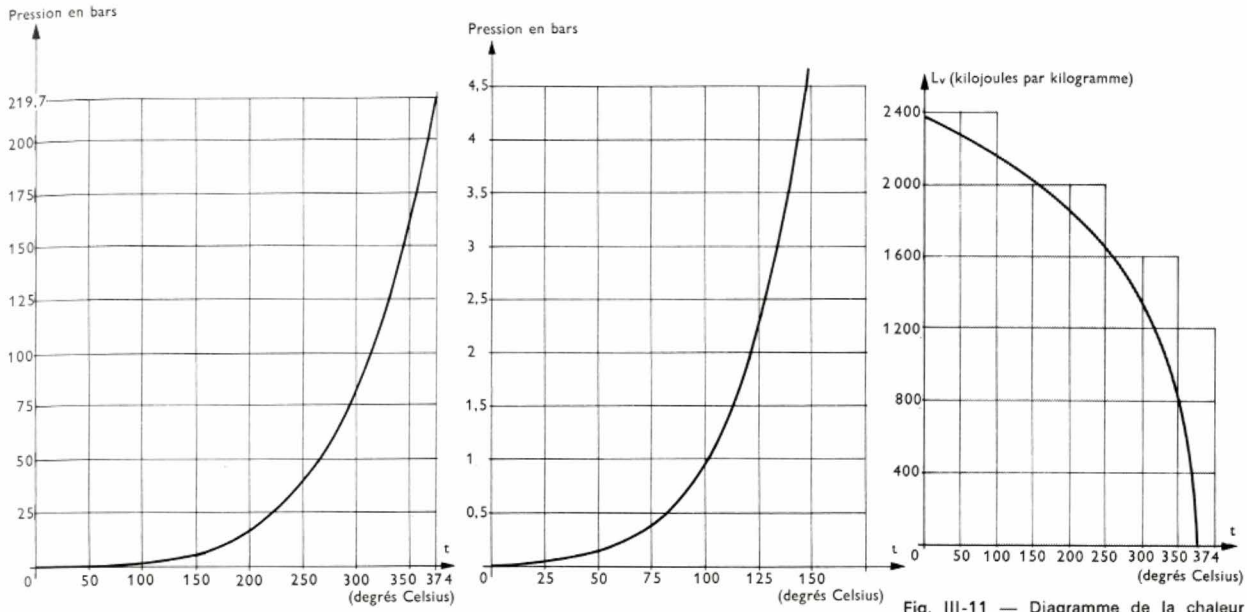


Fig. III-10 — Diagramme de la pression de la vapeur d'eau saturée en fonction de la température

Fig. III-11 — Diagramme de la chaleur latente de vaporisation de l'eau

che à la masse totale de la vapeur saturée. La vaporisation terminée, il n'y a plus de gouttelettes d'eau : la vapeur est dite *vapeur saturée sèche* et son titre est 1.

1° *Courbe pression de vapeur saturée — température.* (fig. III-10). — À chaque température, correspond une pression de vapeur saturée ; la courbe correspondante est la courbe de vaporisation. C'est une courbe expérimentale. Toutefois, la formule empirique de Duperray :

$$P(\text{bars}) = \frac{t^4}{100} \text{ (avec } t \text{ en degrés Celsius)}$$

permet de la tracer avec une bonne précision entre 100 °C et 200 °C.

2° *Chaleur latente de vaporisation à pression constante* (fig. III-11). — C'est la quantité de chaleur qu'il faut fournir à une masse d'eau de 1 kg à la température t pour la transformer en vapeur saturée à la même température. Elle est donnée approximativement par la formule de Regnault :

$$L_v = 2\,538{,}5 - 2{,}909\,t$$

L_v : chaleur latente exprimée en kilojoules par kilogramme ; t : température en degrés Celsius.

3° *Diagramme pression-volume de l'eau* (fig. III-12). — Si l'on réduit le volume occupé par une masse déterminée de vapeur d'eau, à une température t définie et constante, la pression de la vapeur augmente. Les différents états de la vapeur vont être représentés par la courbe *CD* (si $t = 334$ °C). Si l'on réduit encore le volume à partir de *C*, on voit apparaître de l'eau : on a alors de la vapeur saturée. Toujours à température constante, si l'on diminue encore le volume, la proportion de vapeur qui se condense croît jusqu'en *B*. Après le point *B* il y a uniquement de l'eau ; celle-ci étant pratiquement incompressible, on pourra augmenter la pression mais le volume restera alors à peu près constant (la courbe *BA* est pratiquement verticale). La courbe obtenue est dite *isotherme*. On peut tracer des courbes *isothermes* pour diverses températures. Lorsque $t \approx 374$ °C, les points *B* et *C* sont confondus en un même point *F*, appelé *point critique*, par où passe l'*isotherme critique*.

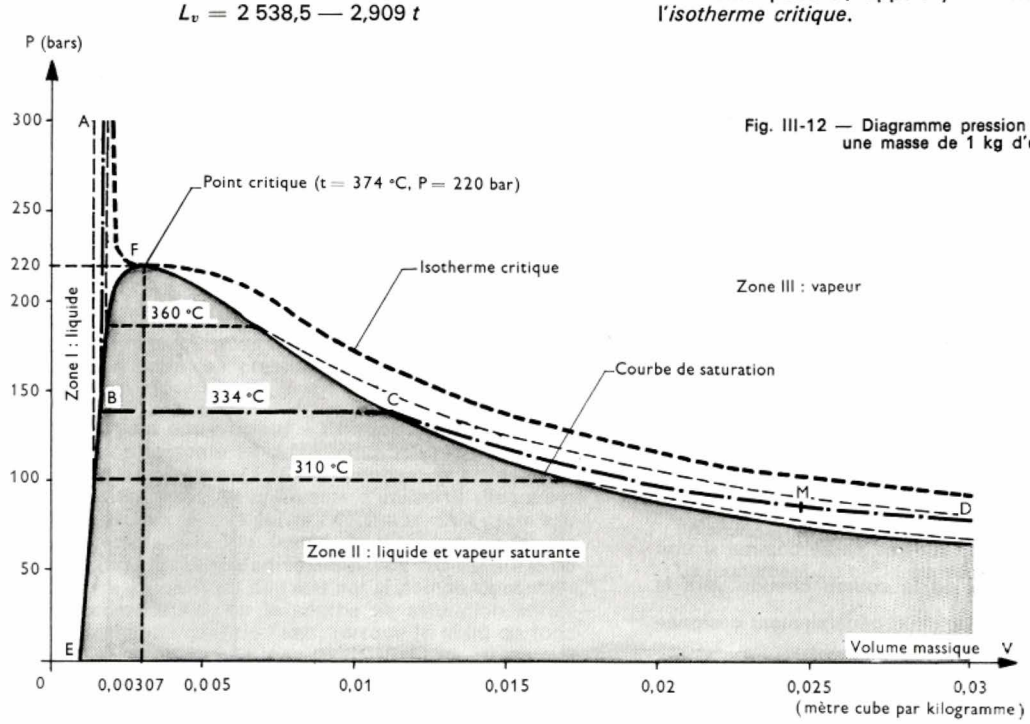


Fig. III-12 — Diagramme pression - volume pour une masse de 1 kg d'eau

La *courbe de saturation* délimite les phases: liquide, vapeur saturée et vapeur sèche. Au-delà de la température critique (374,15 °C), l'eau ne peut plus exister à l'état liquide quelle que soit la pression appliquée.

4.4.2. Vapeur surchauffée. — Si l'on continue à chauffer de la vapeur sèche, sa température augmente, mais la pression n'est plus fonction de la seule température comme dans le cas de la vapeur saturée (comme pour un gaz elle est fonction de la température et du volume massique). En première approximation, la vapeur sèche se comporte comme un gaz parfait et on peut lui appliquer l'équation des gaz parfaits.

$$pV = RT$$

On exprime p en newtons par mètre carré, V en mètres cubes, et T en kelvins. La constante des gaz parfaits est égale à: $R = 4{,}8042$ J/K.

4.4.3. Vapeur resurchauffée. — Les propriétés physico-chimiques de métaux utilisés dans la construction des chaudières et des turbines limitent la température de surchauffe. Pour les paliers techniques 250 MW et 600 MW réalisés en France, la température maximale est 565 °C. Pour pouvoir augmenter le travail fourni par la vapeur en cours de détente et améliorer le rendement du cycle, après une première détente dans une partie de la turbine, la vapeur est repassée dans la chaudière pour être *resurchauffée* à pression constante.

4.4.4. Enthalpie. — Cette grandeur représente la quantité de chaleur fournie à 1 kg de vapeur. Elle est définie à une constante près. On a choisi l'enthalpie de l'eau à 0 °C comme enthalpie de référence.

L'enthalpie est la somme de trois quantités de chaleur:

— la quantité de chaleur nécessaire à l'échauffement de l'eau de 0 °C jusqu'à la température de vaporisation (sous une pression p constante);

— la quantité de chaleur de vaporisation à pression constante;

— la quantité de chaleur nécessaire pour surchauffer la vapeur depuis la température de vaporisation jusqu'à la température t désirée (la pression restant toujours constante et égale à p). Cette dernière quantité de chaleur est la somme de:

- la quantité de chaleur correspondant à la variation d'énergie interne pendant la transformation;
- la quantité de chaleur correspondant au travail fourni, du fait de l'augmentation ΔV de volume massique lors du passage de la phase liquide à la phase vapeur.

4.4.5. Entropie. — Comme la température, la pression et l'enthalpie, *l'entropie* est une caractéristique de l'état physique d'une masse d'eau ou de vapeur.

Le principe de Carnot exprime que si un système thermique subit une transformation à cycle fermé, il ne peut produire du travail que s'il reçoit une quantité de chaleur Q_1 d'une source chaude, et en cède une quantité Q_2 à une source froide. Le rendement théorique est alors donné par l'expression suivante:

$$R = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

D'autre part, le rendement théorique maximal ne dépend que des températures absolues des deux sources (théorème de Carnot) et est égal à:

$$R_m = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

En égalant ces deux expression on tire:

$$\frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_1}{T_1}$$

Pendant la transformation tout se passe comme si une quantité $\frac{Q}{T}$ était déplacée de la source chaude vers la source froide. C'est cette grandeur, généralement désignée par S, qu'on appelle entropie.

$$S = \frac{Q}{T}$$

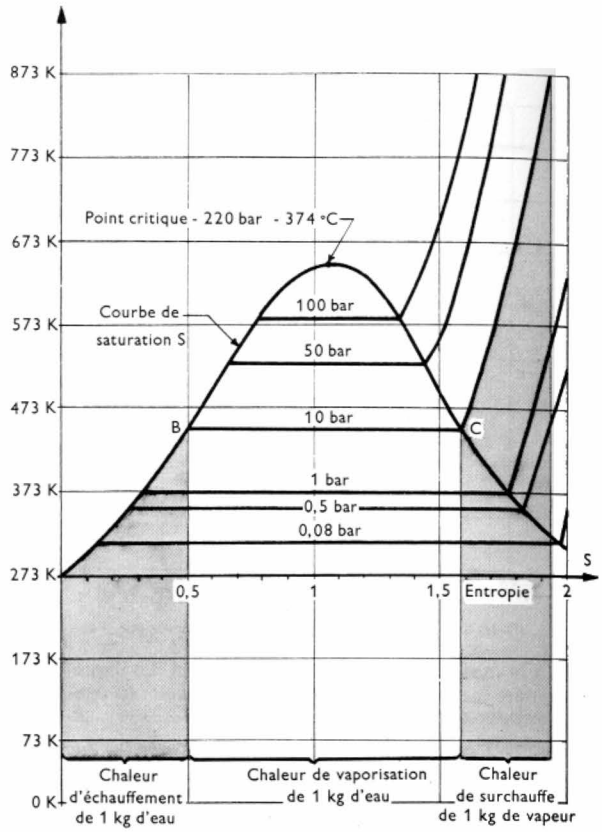


Fig. III-13 — Diagramme entropique

1° *Diagramme entropique* (fig. III-13). — Il permet de déterminer l'enthalpie Q de la vapeur connaissant sa température et sa pression: $Q = ST$. Il est tracé en portant l'entropie S en abscisses et la température absolue T en ordonnées.

Une transformation *isotherme* y est représentée par une droite horizontale. Une transformation *isobare* suit la courbe de la pression donnée. Dans la zone de saturation, où chaque température correspond à une pression déterminée, isotherme et isobare correspondantes sont confondues. Dans une transformation *adiabatique* (sans échange de température avec l'extérieur: $\Delta Q = 0$), l'entropie reste constante; cette transformation dite *isentropique* est représentée par une verticale (fig. III-14). La surface hachurée $M'MNN'$ représente la chaleur transformée en travail pendant une transformation isobare ($M \rightarrow N$).

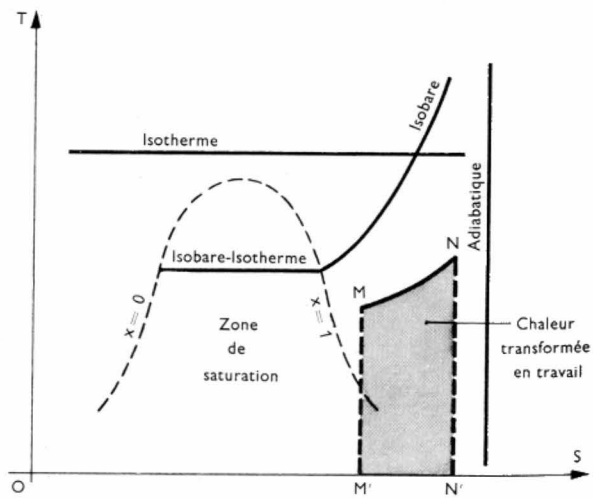


Fig. III-14 — Utilisation du diagramme entropique

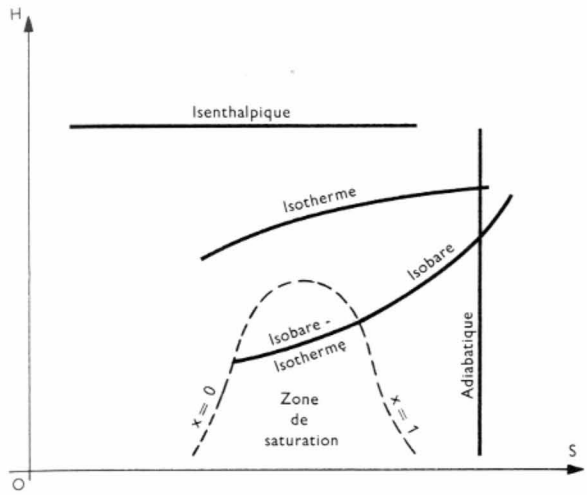


Fig. III-15 — Diagramme de Mollier

2° *Diagramme de Mollier.* — C'est également un diagramme entropique mais l'axe des ordonnées est gradué en enthalpie (*H*) (fig. III-15). L'intérêt du diagramme de Mollier est de représenter la chaleur transformée en travail (ou le travail transformé en chaleur) par la mesure d'une longueur et non plus par celle d'une surface comme dans le diagramme précédent. Par exemple, si au cours d'une transformation, la vapeur passe de la pression p_1 à la pression p_2 (fig. III-16), la détente est représentée par le segment *AC*. Si cette détente était adiabatique, elle serait représentée par *AB*. On voit que l'on a donc seulement utilisé

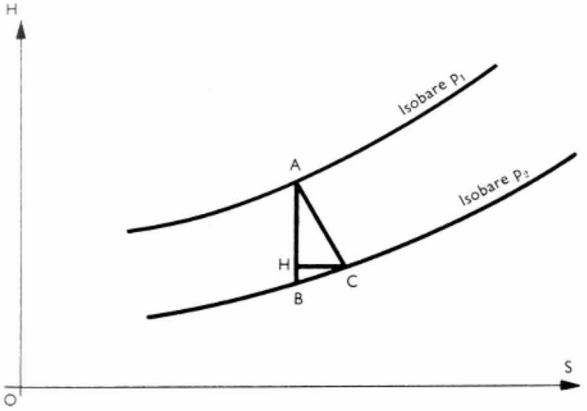


Fig. III-16 — Utilisation du diagramme de Mollier

la quantité de chaleur *AH*; ainsi *BH* représente la perte de chaleur et le rapport $\frac{AH}{AB}$ est égal au rendement de la transformation.

Remarque importante : En général, les pressions sont indiquées en *valeurs absolues* et non en valeurs effectives (différences entre les pressions absolues et la pression atmosphérique).

4.4.6. Cycle eau-vapeur - Rendement. — Habituellement, on représente le cycle fermé eau-vapeur sur un diagramme entropique (*T, S*); cependant pour les applications pratiques, il est préférable d'utiliser le diagramme (*H, S*) de Mollier. On va suivre l'évolution d'un cycle eau-vapeur avec resurchauffe (cycle de Hirn) sur un tel diagramme (fig. III-17). L'adiabatique *AA'* représente le travail de mise en pression de l'eau par la pompe alimentaire. Le déplacement *A'B* sur la courbe de saturation correspond à l'échauffement de l'eau; lorsque le point de fonctionnement se déplace le long de *BC* (isobare-isotherme), il y a vaporisation. Le segment d'isobare *CD* correspond à la surchauffe. La vapeur subit ensuite une première détente *DE* dans les premiers étages de la turbine puis une resurchauffe à pression constante *EF*. *GF* représente la détente finale dans les corps « basse pression » de la turbine. Après condensation, le cycle recommence au point *A*.

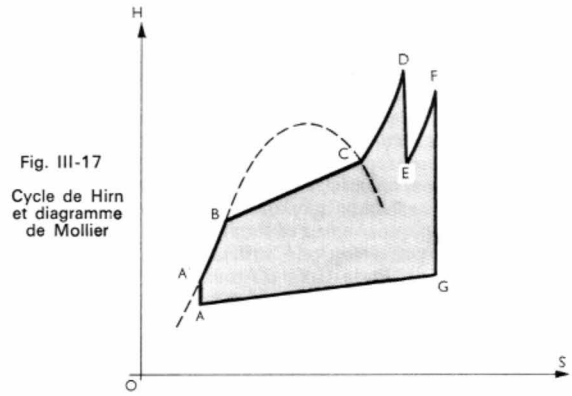


Fig. III-17

Cycle de Hirn et diagramme de Mollier

Le rendement du cycle est égal à :

$$\eta = \frac{(H_D - H_E) + (H_F - H_E)}{(H_D - H_A) + (H_F - H_E)}$$

Ce rendement est supérieur à celui du cycle sans resurchauffe qui est égal à :

$$\eta = \frac{H_D - H_E}{H_D - H_A}$$

— *Cycle à surchauffe et soutirage de vapeur* (fig. III-18). — Pendant la détente, une fraction *m* de vapeur est prélevée au moyen d'un soutirage; elle sert à réchauffer la masse d'eau, produite dans le condenseur. S'il arrive une masse de 1 kg de vapeur dans le condenseur, il a été prélevé une masse *m* de vapeur. La quantité de chaleur utilisée pour le réchauffage est égale à :

$$H_R - H_A = m\ (H_S - H_E)$$

(On appelle H_R l'enthalpie de l'eau dans le condenseur et H_S celle de la vapeur soutirée; on admet que toute la chaleur soutirée est cédée à l'eau réchauffée).

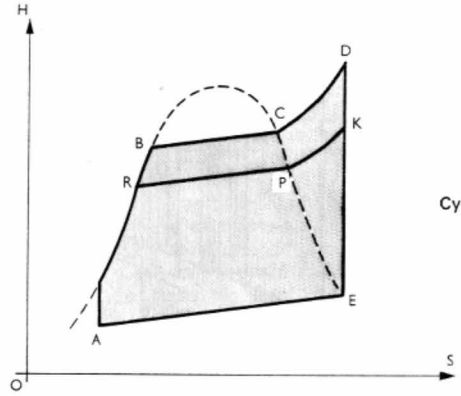


Fig. III-18

Cycle à surchauffe et soutirage

La quantité de chaleur nécessaire à la vaporisation et à la surchauffe de $(1 + m)$ kilogrammes de vapeur est donnée par le produit $(H_D - H_R)\ (1 + m)$. D'autre part, le travail de détente fourni par la masse de 1 kg de vapeur arrivant au condenseur est égal à : $(H_D - H_E) \times 1$ tandis que le travail de détente effectué par la vapeur soutirée est égal à : $(H_D - H_S)\,.m$. Le travail total est obtenu en faisant la somme de ces deux résultats :

$$(H_D - H_E) + m\ (H_D - H_S)$$

Le rendement du cycle est donc représenté par le rapport suivant :

$$\eta = \frac{(H_D - H_E) + m(H_D - H_S)}{(H_D - H_R)\ (1 + m)}$$

Ce rendement peut être exprimé sous une autre forme en explicitant H_R et en faisant apparaître dans le dénomina-

teur les enthalpies de la vapeur surchauffée H_D et de la vapeur soutirée H_S :

$$\eta_i = \frac{(H_D - H_E) + m\,(H_D - H_S)}{(H_D - H_A) + m\,(H_D - H_S)}$$

On en conclut que le cycle à soutirage a un rendement supérieur à celui d'un même cycle sans soutirage. Dans les centrales thermiques il est courant de trouver des cycles à une resurchauffe et sept soutirages.

4.4.7. Cycle hypercritique. — Lorsque la pression de la vapeur est supérieure à la pression critique (220 bars), on ne peut plus obtenir un mélange d'eau et de vapeur ; la phase isotherme-isobare n'apparaît plus sur le diagramme. La tenue des matériaux dans un tel cycle pose des problèmes technologiques assez délicats et, en France, cette technique n'a pas été jugée suffisamment sûre pour être développée. Aux États-Unis d'Amérique, quelques chaudières à cycle hypercritique sont utilisées.

4.4.8. Exemples des cycles thermodynamiques

Cycle hypocritique (retenu pour le palier 600 MW des centrales d'É.D.F.) :

— Pression de vapeur à l'admission de la turbine : 163 bars.
— Pression de vapeur à la réadmission : 34 bars.
— Température de vapeur à l'admission et à la réadmission : 565 °C.
— Température de l'eau d'alimentation : 274 °C.
— Nombre de soutirages : 7.

Cycle hypercritique. — Avant de lancer le palier 600 MW avec le cycle défini ci-dessus, une comparaison avait été effectuée avec le cycle hypercritique suivant :

— Pression de vapeur à l'admission de la turbine ; 245 bars.
— Nombre de resurchauffes : 2.
— Pression de vapeur de réadmission : 78 et 24,5 bars.
— Températures de vapeur admission : 540 °C ; première et seconde réadmission : 565 °C.
— Nombre de soutirages : 7.
— Température de l'eau d'alimentation : 265 °C.

Cette solution hypercritique à double resurchauffe présentait un caractère trop nettement expérimental ; elle nécessitait des matériels de mise au point difficile, et le risque d'indisponibilité était assez grand. Elle a été abandonnée au profit du cycle hypocritique qui présente un coût d'investissement moindre (de 6 % environ), d'autant plus que la réduction de la consommation spécifique du cycle hypercritique est trop aléatoire.

4.4.9. Critère économique du choix du cycle. — On cherche à améliorer le rendement pour diminuer la consommation spécifique afin que le prix du combustible ne représente qu'une très petite part du prix de revient du kilowattheure. Cette amélioration est obtenue au prix d'une complication des installations (grand nombre de soutirages d'où complication des corps des turbines et diminution de la puissance disponible sur l'arbre, poste d'eau plus complexe, etc.) qui entraîne une augmentation du coût des investissements.

La tendance actuelle est la recherche d'un cycle moins élaboré : la perte sur la consommation est compensée par le gain sur les investissements (surtout lorsque les capitaux sont rares et le loyer de l'argent très élevé). Cependant, en cette matière, rien n'est définitif car les conclusions favorables à une solution peuvent vite être inversées.

5. DESCRIPTION DU GÉNÉRATEUR DE VAPEUR D'UNE TRANCHE DE 600 MW (CENTRALE DE PORCHEVILLE B)

On rappelle tout d'abord que le *timbre d'une chaudière* est la pression limite autorisée pour laquelle les soupapes de sécurité sont réglées ; leur rôle est d'éviter l'explosion de la chaudière en cas de surpression accidentelle.

5.1. Le générateur de vapeur (fig. III-19). — Le générateur de la première tranche de 600 MW de la centrale de Porcheville B est du type à circulation naturelle et à chambre de combustion pressurisée. La pressurisation est obtenue à l'aide de deux ventilateurs de soufflage qui assurent à eux seuls la circulation des gaz à travers les différents faisceaux tubulaires ; cela permet d'éviter l'utilisation du ventilateur de tirage comme pour les chaudières à dépression. La pressurisation a l'avantage d'éviter les entrées d'air parasites, elle permet donc un meilleur rendement ; en revanche, il est nécessaire d'avoir un *casing*, paroi extérieure, parfaitement étanche. Le combustible utilisé est le fuel-oil n° 2.

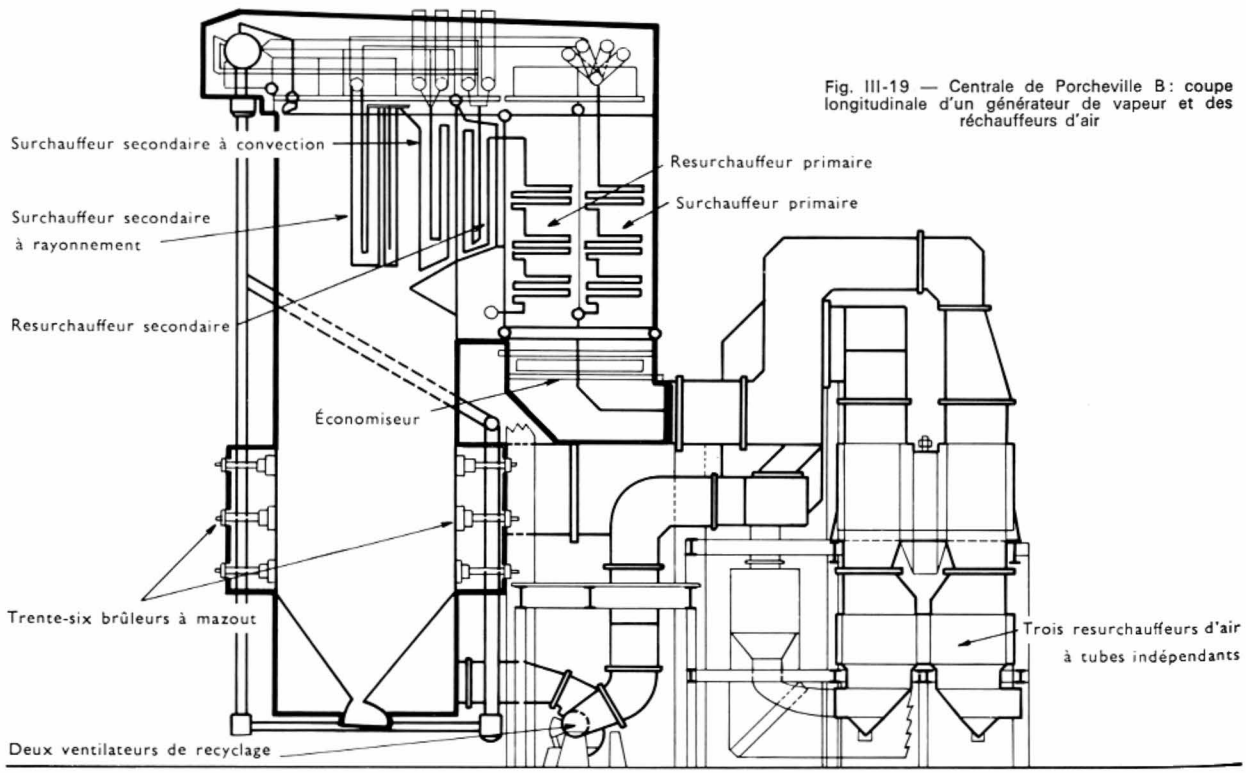


Fig. III-19 — Centrale de Porcheville B : coupe longitudinale d'un générateur de vapeur et des réchauffeurs d'air

Les caractéristiques principales de la chaudière sont les suivantes :

— Débit de vapeur : 1 810 t/h.
— Timbre du surchauffeur : 190 bars (valeur absolue).
— Timbre du resurchauffeur : 43 bars (valeur absolue).
— Masse totale : 10 000 t.
— Longueur totale des tubes de vaporisation : 260 km.

Les caractéristiques du cycle ont déjà été données plus haut.

L'eau à vaporiser parcourt successivement :

1° Un *économiseur* de 6 820 m² en tubes d'acier doux (A-42), dans lequel elle est envoyée par les pompes alimentaires. Cet ensemble de tubes est un échangeur de chaleur à contre-courant croisé, c'est-à-dire à circuit vertical descendant pour les fumées et à circuit horizontal ascendant pour l'eau. Son but est de réchauffer l'eau d'alimentation en récupérant une partie de la chaleur restant dans les fumées. Il permet d'augmenter le rendement du cycle en diminuant la quantité de chaleur à fournir à l'eau pour la vaporiser, et en réduisant les pertes dans la cheminée. Il évite aussi les chocs thermiques que provoquerait l'arrivée d'une eau froide dans le ballon chaud.

2° Deux *tuyauteries* de 329,3 mm de diamètre extérieur et de 36 mm d'épaisseur réunissent le collecteur de sortie de l'économiseur et le réservoir. Deux autres tuyauteries de 102 mm de diamètre extérieur et de 10 mm d'épaisseur servent pendant les démarrages à assurer une recirculation de l'eau entre l'entrée de l'économiseur et deux colonnes d'alimentation afin d'homogénéiser les températures du réservoir.

3° Un *réservoir* ou *ballon* dont le rôle est de séparer la phase vapeur de la phase liquide (pour faciliter la circulation naturelle dans les tubes du vaporisateur) et d'assécher la vapeur saturée au moyen d'épurateurs formés de tôles ondulées. Ce réservoir, à fonds hémisphériques de 1 952 mm de diamètre extérieur et de 138 mm d'épaisseur a 40 m de long ; il est réalisé en tôles cintrées à chaud et soudées L'acier spécial utilisé est de l'A.M.M.O. (Mn : 1,3 % Mo : 0,6 %). Équipé, sa masse est de 262 t. Il est réuni à neuf soupapes de sûreté à quatre indicateurs de niveaux et à deux manomètres.

4° Six *colonnes d'alimentation :* elles partent du réservoir et aboutissent aux collecteurs inférieurs des faisceaux vaporisateurs qui forment les parois de la chambre de combustion. Quatre de ces colonnes, d'un diamètre extérieur de 744 mm et d'une épaisseur de 57 mm, sont piquées sur les viroles du réservoir et deux colonnes, de 520 mm de diamètre extérieur et d'une épaisseur de 40 mm, partent des fonds. Les départs des colonnes sont équipés de dispositifs antitourbillons.

5° Les *faisceaux vaporisateurs*, constitués de tubes jointifs en acier doux (A-42), qui forment une chambre de 32 m de haut, 22 m de large et profonde de 11 m, ont une surface de 6 350 m².

L'eau étant vaporisée, la vapeur passe ensuite par les éléments suivants :

6° Les *écrans de vapeur saturée*, précédant les surchauffeurs ; ils constituent le plafond de la chambre et la cage arrière où sont placés les surchauffeurs et resurchauffeurs primaires. Constitués de tubes en chromesco I (0,5 % Cr - 0,5 % Mo), ils présentent une surface d'échange de 2 370 m².

7° Un *surchauffeur primaire vidangeable, à échange de chaleur par conduction*, formé de tubes en A-42 et présentant une surface de 9 250 m². Le surchauffeur permet d'élever la température de la vapeur sans élever sa pression.

8° Un *surchauffeur secondaire à échange de chaleur par rayonnement*. Il est formé par quarante-huit panneaux de quarante nappes ; dans chaque panneau, les vingt premières nappes sont en chromesco I, les autres en chromesco III (2,25 % Cr - 1 % Mo).

9° Un *surchauffeur secondaire à échange de chaleur par convection* de 4 120 m², constitué de 96 panneaux de 24 nappes de tubes en acier austénitique 18/8 stabilisé au titane.

10° Une *tuyauterie de 700 mm de diamètre extérieur et de 125 mm d'épaisseur* en chromesco III conduit la vapeur surchauffée jusqu'à la partie haute pression de la turbine.

11° Après détente dans la partie haute pression de la turbine, une autre tuyauterie de 810 mm de diamètre extérieur et de 26 mm d'épaisseur, en A-42, ramène la vapeur dans :

— un *resurchauffeur secondaire* de 13 360 m² lui-même divisé en deux parties :

— un *resurchauffeur primaire* de cent quatre-vingt-dix panneaux de quarante-huit nappes, dont les trente premières sont en A-42, les quinze suivantes en chromesco I et les trois dernières en chromesco III. Les nappes sont à double enroulement à circulation méthodique croisée ;

— un *resurchauffeur secondaire* formé de cent quarante-trois panneaux de seize nappes dont les huit premières sont en chromesco III et les huit dernières sont en acier austénitique.

Suivant la position des tubes, les nappes sont à circulation croisée méthodique ou antiméthodique.

12° À partir d'un *collecteur de sortie* de vapeur resurchauffée, en chromesco III, une tuyauterie en chromesco III de 1 055 mm de diamètre extérieur et de 57 mm d'épaisseur conduit la vapeur à l'admission de la partie moyenne pression de la turbine.

Remarque : Les différentes nuances d'acier que l'on trouve dans un générateur de vapeur sont liées aux problèmes de la corrosion des aciers en fonction de la température.

5.2. Les tuyauteries de vapeur. — Les différentes tuyauteries de vapeur, dont on a donné les caractéristiques dans la description précédente, sont soumises à de grandes variations de température entre l'arrêt et le fonctionnement de la chaudière et elles subissent des allongements importants. Ceux-ci sont d'ailleurs d'autant plus grands que les tuyauteries sont plus longues (par exemple, à Porcheville B, la colonne de vapeur surchauffée mesure 40,5 m, celle de la vapeur resurchauffée 49,7 m). Si l'on s'opposait à cet allongement, des poussées très intenses s'exerceraient à leurs extrémités. Or, les corps de turbine et les collecteurs, auxquels elles sont raccordées, ne peuvent admettre que des efforts limités bien déterminés. On a donc étudié avec précision le tracé de ces tuyauteries afin qu'elles puissent se déformer sans engendrer d'efforts nuisibles. Elles forment de grandes boucles qui absorbent ces déplacements et l'on a cependant veillé à ce que les moments de flexion ainsi créés ne produisent pas des contraintes élevées dans la tuyauterie elle-même. En effet, le métal ne peut accepter que de faibles taux de travail à cause des hautes températures qu'il supporte et des chocs thermiques qu'il subit à tous les démarrages pendant la vie de la centrale.

Les contraintes admissibles ne sont pas seulement fixées en fonction de la charge de rupture du métal mais aussi en fonction de la durée de vie (par exemple, 200 000 heures). Toutes ces considérations font que les points d'accrochage, fixes ou semi-fixes, sont déterminés avec précision et réalisés au moyen de système de suspension à force variable tarée. Toutes les tuyauteries, conduisant la vapeur du générateur à la turbine, et les colonnes d'alimentation du ballon sont calorifugées avec de la laine de roche pour éviter les pertes de chaleur. Dans certaines centrales, un conducteur électrique est enroulé en spirale autour de la tuyauterie ; parcouru par un courant électrique, il chauffe par induction (V. t. 2, Électrothermie) la masse métallique de la tuyauterie. Cela permet de compenser les pertes et, en cas d'arrêt très court de la tranche, de réchauffer la vapeur « froide » pour limiter les chocs thermiques sur les organes de la turbine.

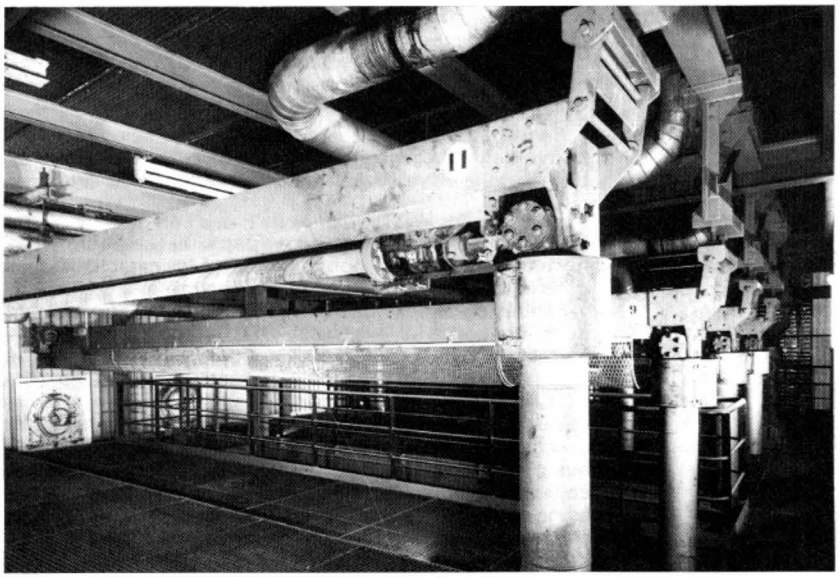
5.3. Les brûleurs. — Le générateur de vapeur de Porcheville B est équipé de 36 brûleurs à mazout, répartis sur les faces avant et arrière de la chambre de combustion. Ils brûlent 3 000 tonnes de fuel par jour, ce qui représente approximativement une consommation annuelle d'un million de tonnes. Ces brûleurs à pulvérisation mécanique fonctionnent avec un excès d'air inférieur à 5 % pour éviter la formation d'anhydride sulfurique dans les fumées.

5.4. Les ramoneurs. — L'encrassement des tubes par les produits de combustion entraîne une réduction des coefficients de transmission de la chaleur, et par suite une diminution du rendement. Il est donc nécessaire d'utiliser des ramoneurs qui ont pour fonction de faire évacuer ces dépôts. Le ramonage consiste généralement à souffler de la vapeur sur les écrans ; les dépôts sont alors décrochés et entraînés par les gaz de combustion.

Les ramoneurs sont composés d'une lance rétractile en acier nickel-chrome ou chrome-molybdène. L'installation de ramonage d'une chaudière de Porcheville B utilise la vapeur à resurchauffer à la pression de 40 bars. Elle comprend :

— Pour le nettoyage du surchauffeur secondaire à rayonnement et la partie amont du surchauffeur secondaire à convection, 12 souffleurs de 11,30 m de longueur utile.

— Pour le nettoyage de la partie aval du surchauffeur secondaire à convection et la partie productive du réchauffeur, 18 souffleurs de 11,30 m de longueur utile.



Ramoneurs
(*Morceau-É.D.F.*)

— Pour le nettoyage des éléments horizontaux du résurchauffeur et du surchauffeur primaire, 12 souffleurs de 11,30 m.

— Pour le nettoyage de l'économiseur, 6 souffleurs de 4,57 m.

Remarques : Les générateurs de vapeur des centrales modernes sont entièrement suspendus à *un plancher de suspension de chaudière*. Le bâtiment dans lequel est situé le générateur de vapeur est appelé *chaufferie*.

La chaufferie et la salle de machines forment le *bloc-usine*. Suivant les conditions climatiques de la région où est construite la centrale, la chaufferie peut être entièrement fermée par un bardage formant des *murs-rideaux*, ou bien elle peut ne pas comporter de murs : la chaudière est visible de l'extérieur, et elle est dite *out-door*. Bien que la plupart des chaufferies des centrales françaises soient closes, il existe des chaufferies out-door à Bordeaux, à Albi et à Saint-Ouen. Mais dans ce cas, le casing des chaudières doit pouvoir résister à la corrosion atmosphérique. Celle de Porcheville est *semi-in-door*.

5.5. Les ventilateurs

5.5.1. Ventilateurs de soufflage. — Ils provoquent la circulation de l'air comburant à travers le réchauffeur d'air jusqu'à la chambre de combustion, et assurent le refoulement des fumées à la cheminée. Ils sont au nombre de deux. Leur débit d'air est de 1 130 t/h à la pression de 9 800 N/m². Ils ont une puissance de 2 635 kW et une vitesse de rotation de 1 500 tr/mn.

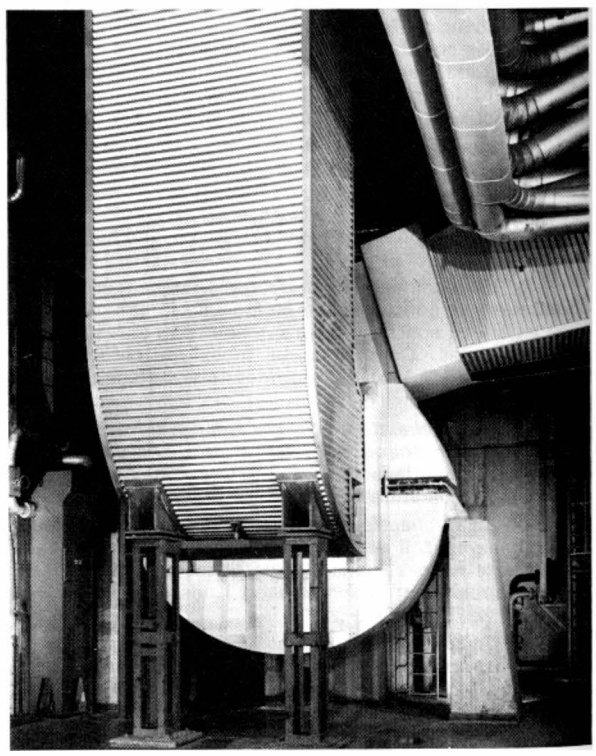
5.5.2. Ventilateurs de recyclage des fumées. — Les ventilateurs de *recyclage* des fumées servent à maintenir la température de résurchauffe pendant la marche à faible charge. En effet, en réinjectant à la base de la chambre de combustion une partie des gaz pris à l'économiseur, on augmente la quantité de gaz qui traverse la chaudière, améliorant ainsi les échanges par convection. Les ventilateurs de recyclage sont au nombre de deux, et ont un débit de 382 t/h à la pression de 2 800 N/m². Leur puissance est de 921 kW. La température maximale des gaz à recycler est de 450 °C.

5.6. Régulation du générateur de vapeur. — Le bon fonctionnement d'une chaudière est lié à deux notions essentielles : le rendement et la sécurité. Il dépend d'un certain nombre de paramètres qu'il convient de maintenir à des valeurs déterminées. Chaque paramètre est contrôlé par une ou plusieurs *chaînes de régulation*.

Les principaux paramètres sont :

— *L'alimentation en eau du générateur.* — Pour les chaudières à circulation naturelle ou assistée le niveau du

Ventilateur de recyclage
(*Morceau-É.D.F.*)



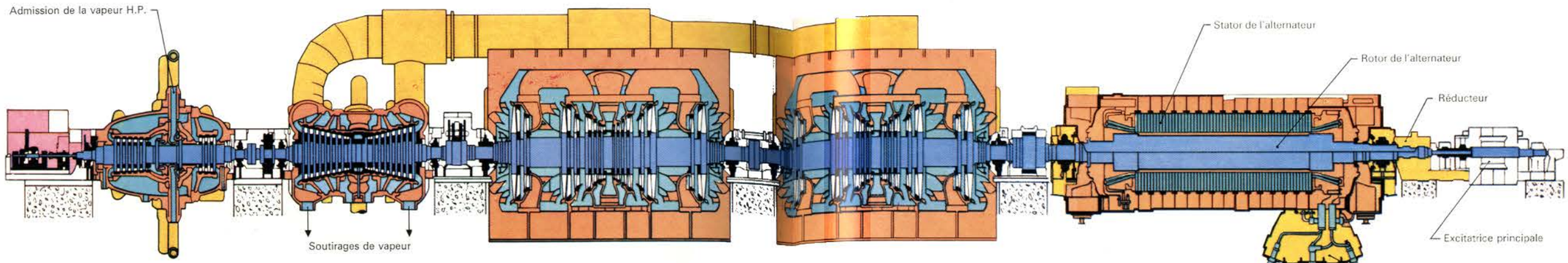
Centrales thermiques

Ci-dessus, centrales thermiques de **Porcheville A** (4 fois 125 MW - charbon) à droite, **Porcheville B** (prévue à 4 fois 600 MW - fuel) à gauche.

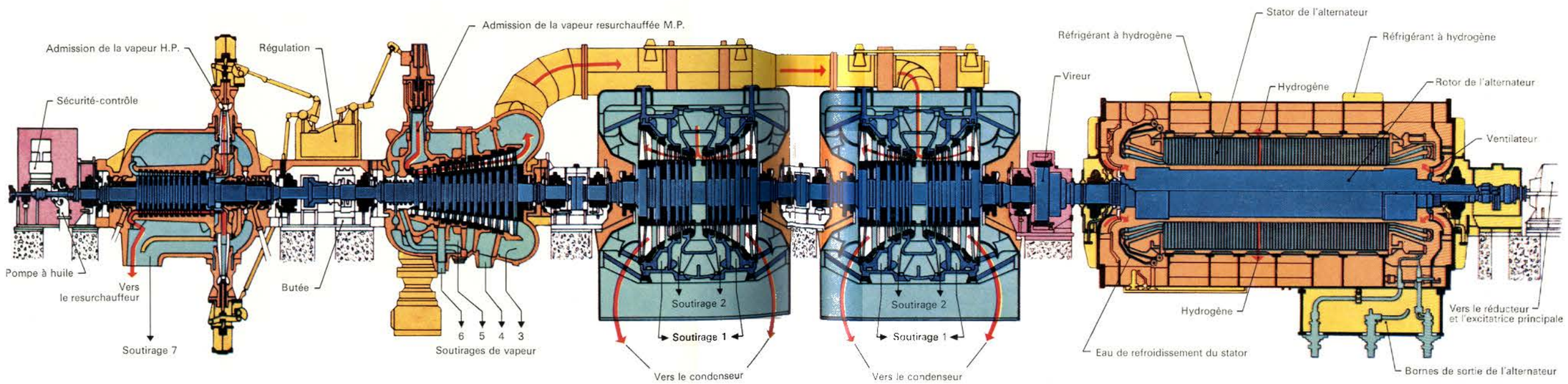
A gauche, salle des machines de la centrale thermique de **Champagne - sur - Oise** (Val - d'Oise). Deux tranches de 250 MW (charbon).

Photothèque E.D.F., photos : L. Coirier, M. Morceau.

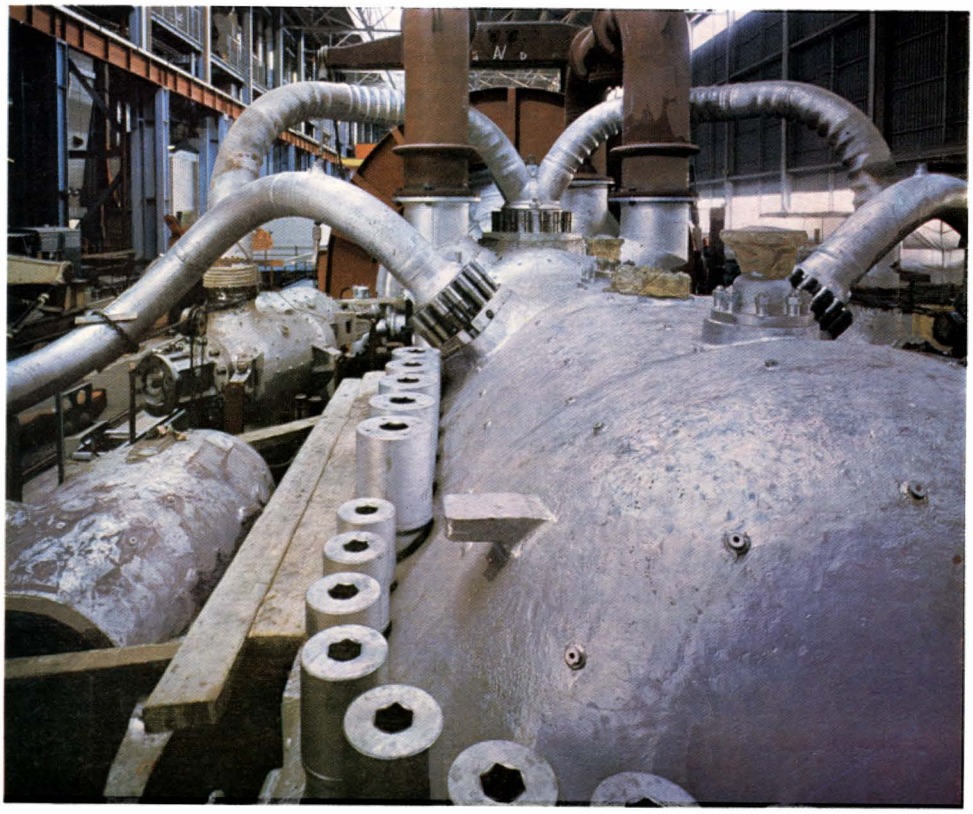
Coupe d'un goupe de 600 MW



Coupe d'un goupe de 250 MW



Documents : Alsthom.



Ci-dessus, centrale thermique de **Vitry-sur-Seine** (Val-de-Marne). Deux tranches de 250 MW (cycle thermique classique) et deux tranches de 325 MW (dont 50 MW par turbine à gaz-cycle mixte).

A gauche, corps H. P. d'une turbine C. E. M. de 250 MW avant la pose du calorifuge (centrale de **Vitry-sur-Seine**).

Photothèque E.D.F., photos : M. Brigaud, E. Serda.

ballon est maintenu constant en agissant sur la vitesse des pompes alimentaires. Pour cela, on fait la comparaison entre le débit d'eau et le débit-vapeur.

— *Le débit du combustible.* — Pour le gaz ou le mazout on utilise un *débitmètre* et pour le charbon on opère par pesée.

— *Le rapport air-combustible.* — La mesure est généralement réalisée à l'aide d'un *chaudimètre* qui permet de comparer le « débit-vapeur » et le « débit-fumée » ; parfois, on compare directement le débit du combustible au débit des fumées.

— *La température de la vapeur surchauffée.* — Elle est mesurée à l'aide de sondes thermoélectriques (V. t. 1, Thermodynamique). La régulation se fait soit en agissant sur des registres de répartition entre surchauffeur et resurchauffeur primaires, soit par injection d'*eau de désurchauffe*.

— *La température de la vapeur resurchauffée.* — Elle est réglée soit en agissant sur la vitesse des ventilateurs de recyclage, soit sur des soupapes d'injection d'eau de désurchauffe.

— *La régulation du poste d'eau.* — La description d'un poste d'eau fait l'objet d'un paragraphe spécial (V. ci-après).

6. LA PARTIE OUT-DOOR

Généralement, on appelle partie out-door ce qui est placé derrière la chaufferie et qui comprend les réchauffeurs d'air et éventuellement les dépoussiéreurs et les ventilateurs de tirage.

6.1. Les réchauffeurs d'air. — Leur rôle est de réchauffer l'air comburant, avant son mélange avec le combustible, en récupérant une partie de la chaleur des fumées avant évacuation à l'atmosphère. Cela permet donc d'augmenter le rendement.

Il existe plusieurs types de réchauffeur d'air, le plus couramment utilisé est le *réchauffeur tubulaire*. Les gaz circulent dans des tubes parallèles et l'air à réchauffer passe autour de ces tubes ou vice versa. Le sens de circulation de l'air et celui des gaz sont perpendiculaires (système croisé). Par exemple, le réchauffeur d'air d'une tranche de 250 MW de la centrale de Vitry-sur-Seine est constitué par quatre ensembles identiques disposés en parallèle sur le circuit des gaz de combustion. Chaque ensemble est formé de quatre étages : les trois premiers en tubes en acier et le dernier en fonte. Chaque étage correspond à un passage de l'air, horizontalement, à l'intérieur des éléments. Les gaz de combustion ont un mouvement descendant à l'extérieur des éléments.

Ces ensembles sont suspendus à une charpente indépendante, extérieure au bloc-usine. Pendant les démarrages, les deux premiers étages de chacun des quatre ensembles sont contournés à l'aide de quatre gaines munies de *registres* d'isolement (vannes).

Au niveau des réchauffeurs d'air se posent des problèmes de corrosion. En effet, c'est dans les derniers étages du réchauffeur que la température des fumées est minimale et qu'il y a des risques d'atteindre un *point de rosée* (condensation) de l'acide sulfurique. Lorsque le combustible contient une quantité importante de soufre (ce qui est le cas du fuel lourd et aussi celui de certains charbons), la combustion produit de l'anhydride sulfureux (SO_2) et de l'anhydride sulfurique (SO_3) qui se combine à l'eau et forme de l'acide sulfurique. C'est pour éviter la corrosion, que l'on trouve de la fonte dans les derniers éléments du réchauffeur. Lorsque la condensation d'acide sulfurique est importante, on inhibe son action en injectant dans le circuit des produits neutralisants (ammoniac).

Un autre type de réchauffeur, le réchauffeur Ljungström, est constitué d'un empilage cylindrique de tôles qui tourne lentement (à 1,5 tr/mn) autour de son axe à l'intérieur d'une enceinte formant deux compartiments (fig. III-20). Dans le premier compartiment, les gaz chauds passent à travers les tôles du rotor qui sont ainsi chauffées ; lorsqu'en tournant ces tôles arrivent dans le deuxième compartiment où circule de l'air froid, elles cèdent la chaleur qu'elles avaient emmagasinée. Bien que l'étanchéité entre les deux compartiments soit assez délicate, ce type de

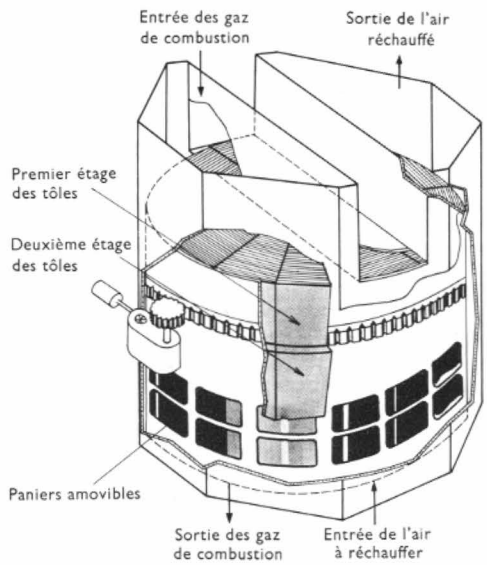


Fig. III-20 — Schéma du réchauffeur Ljungström (*É.D.F.*)

réchauffeur présente un meilleur rendement que le réchauffeur tubulaire.

À Porcheville B, le réchauffeur d'air comprend trois ensembles en parallèle. Chaque ensemble comprend :

— Un réchauffeur d'air Ljungström de 48 300 m² à axe vertical et entraînement périphérique par un moteur de 18 kW pour la marche normale à 1,5 tr/mn, ou par un moteur de 5,5 kW pour la marche à 0,25 tr/mn pendant le lavage.

— Un réchauffeur d'air formé d'un ensemble de tubes indépendants ; chaque tube est plié de façon à présenter une partie horizontale et une partie inclinée ascendante. Ce tube, rempli sous vide d'eau déminéralisée, est fermé à ses extrémités. La partie horizontale, placée dans le flux des fumées, est protégée par une gaine ailetée, en fonte, pour augmenter la surface d'échange. La partie inclinée est placée côté air à réchauffer et possède des ailettes en acier. Le principe de fonctionnement est le suivant : l'eau se vaporise dans la partie horizontale et se condense dans la partie inclinée, cédant sa chaleur à l'air froid ; par gravité, l'eau condensée redescend dans la partie horizontale. Chaque tube est donc un échangeur autonome, dont la perte éventuelle par corrosion n'entraîne pas l'arrêt de la tranche.

Cette disposition permet de réserver cette partie de réchauffeur aux températures de fumées les plus basses (110 °C), et d'avoir sur le réchauffeur rotatif une température de fumée minimale supérieure à 170 °C ; ainsi les dangers dus à la corrosion de la partie la plus délicate du réchauffeur d'air se trouvent éliminés.

À la sortie des réchauffeurs, la température de l'air comburant est voisine de 340 °C alors qu'elle est de 60 °C à l'entrée. Corrélativement, la température des gaz de combustion est abaissée de 390 °C à 110 °C.

6.2. Les dépoussiéreurs. — Dans les centrales thermiques consommant du charbon pulvérisé dans un foyer à cendres pulvérulentes, on peut estimer que 85 % des cendres contenues dans le charbon sont entraînés par les gaz de combustion. La loi sur la pollution atmosphérique et les différents arrêtés préfectoraux qui réglementent les émissions de gaz toxiques ou corrosifs, les émissions de suies ou de poussières, imposent, en particulier, que la quantité totale de poussières émises par une installation (une tranche est considérée comme une installation indépendante) ne dépasse pas 0,35 g/m³*N* pour les centrales de plus de 250 MW. On conçoit donc aisément qu'il faille des dépoussiéreurs d'un très haut rendement (99 %). Il existe plusieurs types de dépoussiéreurs ; on en décrira deux à titre d'exemples.

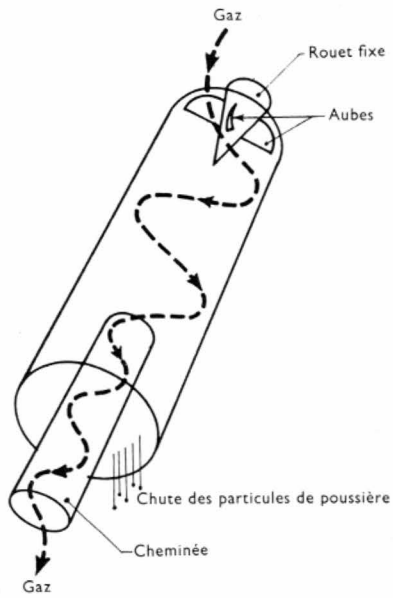


Fig. III-21

Dépoussiéreur du type cyclone à entrée axiale du gaz

6.2.1. Le dépoussiéreur mécanique (ou cyclone). — Il met en œuvre la séparation centrifuge (fig. III-21). Les fumées entrent tangentiellement dans une enceinte cylindrique où elles prennent un mouvement descendant hélicoïdal ; les particules solides sont ainsi soumises à des forces centrifuges et rejetées vers les parois. L'efficacité du système dépend de la masse de la particule.

6.2.2. Le dépoussiéreur électrostatique. — C'est l'appareil le plus employé dans les circuits d'épuration des fumées des grandes centrales actuelles (fig. III-22 a et b). Son fonctionnement constitue une application des propriétés d'un champ électrique agissant sur des particules préalablement électrisées.

À l'intérieur d'un caisson métallique, dans lequel les gaz de combustion circulent horizontalement, sont disposées deux séries d'électrodes :

— les électrodes *émissives*, formant une trame de fils verticaux,

— les électrodes *réceptrices*, qui sont des plaques parallèles à la direction des gaz.

Une tension électrique continue proche de 60 kV est appliquée entre ces deux électrodes (les électrodes émissives sont négatives). Autour des conducteurs des électrodes émissives, le champ électrique a une valeur élevée et les molécules du gaz chaud s'*ionisent* (*effet couronne* et *ionisation par chocs*) ; les particules, qui sont en suspension dans ce gaz, acquièrent à leur tour une certaine charge électrique négative. Les électrodes réceptrices positives attirent ensuite les particules chargées négativement.

L'efficacité des électrofiltres est liée à l'élimination quasi continue des poussières qui y sont déposées. Le principe d'élimination est celui du *secouage* qui consiste à provoquer un ébranlement suffisant pour faire tomber les poussières ; il est obtenu par un choc (compatible avec la tenue du matériel) produit sur les électrodes par des marteaux ou des cames entraînés par un motoréducteur.

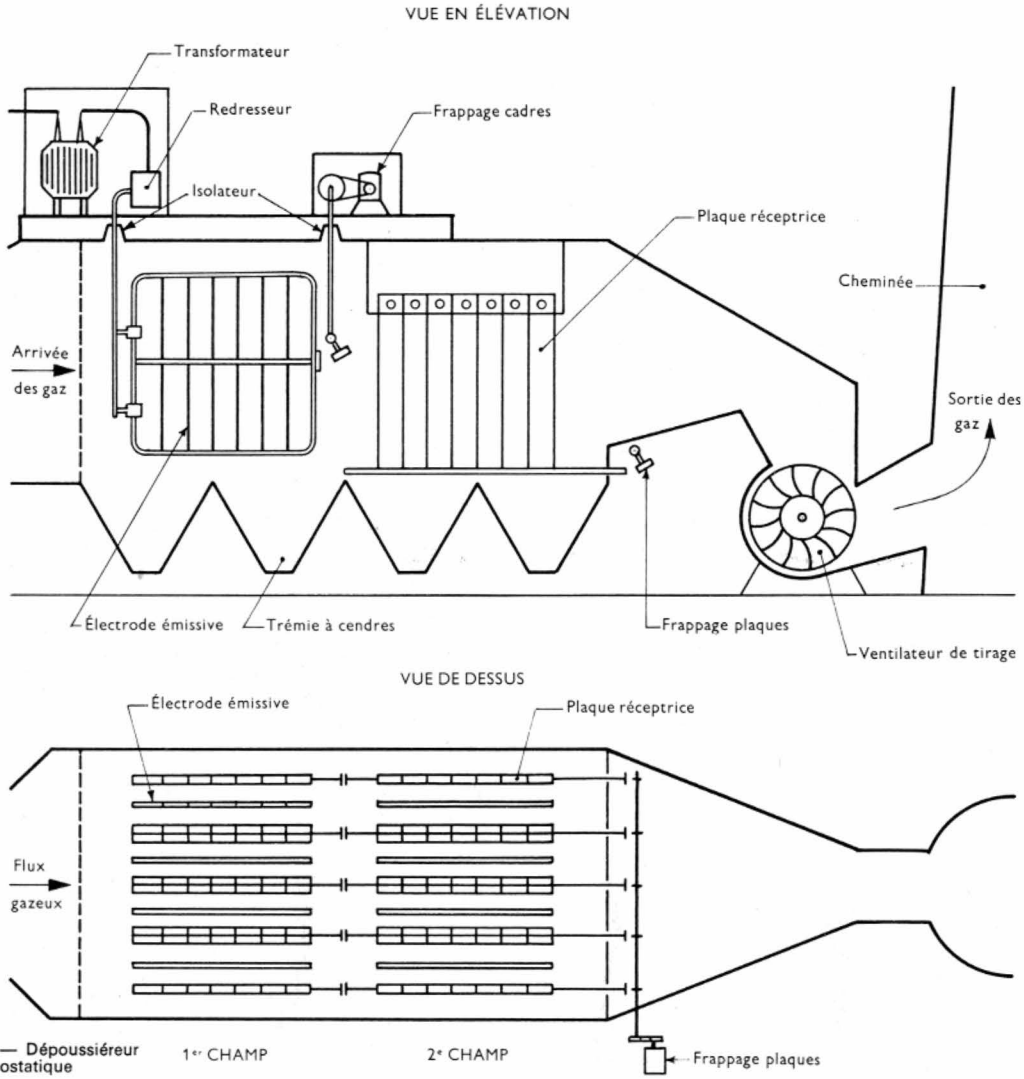


Fig. III-22 a — Dépoussiéreur électrostatique

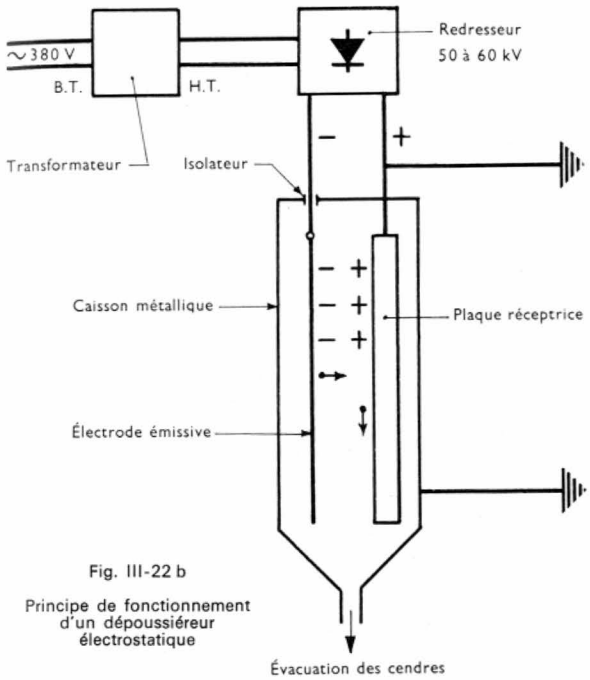


Fig. III-22 b
Principe de fonctionnement d'un dépoussiéreur électrostatique

Celui-ci peut être commandé par un relais qui permet de régler la cadence de secouage.

6.2.3. Description des dépoussiéreurs de Vitry-sur-Seine. — Pour une tranche de 250 MW, il y a deux dépoussiéreurs électrostatiques montés en parallèle. Ils sont situés dans la partie out-door en aval des réchauffeurs d'air.

Chaque dépoussiéreur est constitué par un caisson étanche, en tôle d'acier soudée de 5 mm d'épaisseur, reposant sur une charpente métallique par l'intermédiaire de rouleaux qui permettent la libre dilatation. À l'extérieur, ce caisson est revêtu d'un calorifuge en laine de roche de 100 mm, lui-même protégé par une tôle galvanisée. Sous le caisson se trouvent douze trémies à *cendres volantes* ayant une capacité de stockage correspondant à une marche continue de 10 heures sans évacuation. Le dépoussiéreur comprend trois éléments ou *champs*, chacun d'eux étant constitué de 76 cadres verticaux, de 7,6 m de hauteur et de 4,26 m de largeur, suspendus par des isolateurs en quartz, et formant les électrodes émissives.

Les plaques réceptrices sont disposées en 78 rangées verticales de 8 m de haut et 4,3 m de large. Chaque rangée comprend 13 plaques spécialement étudiées pour faciliter la chute des poussières, et éviter qu'elles repartent dans les gaz au moment du secouage.

L'alimentation électrique est effectuée à partir du réseau 380 V triphasé, par l'intermédiaire de transformateurs 380/76 000 V et de redresseurs au sélénium fournissant un courant d'une intensité de 500 mA en haute tension. La puissance totale installée est de 360 kVA et la consommation normale est de 220 kWh. La tension est maintenue à sa valeur optimale de fontionnement, compte tenu des amorçages, par une régulation automatique.

Caractéristiques principales de l'installation :

— Volume des fumées à épurer : 370 m^3/s.
— Teneur en cendres à l'entrée : 13,5 g/m^3N.
— Teneur en cendres à la sortie : 0,133 g/m^3N.
— Vitesse des fumées : 1,25 m/s.
— Temps de traversée : 7,2 s.
— Perte de charge maximale : 250 N/m^2.
— Température des fumées : 130 °C.

Ces quantités correspondent à une chaudière ayant un débit de vapeur de 770 t/h.

6.3. Les ventilateurs de tirage. — La plupart des générateurs de vapeur utilisant le charbon sont en légère dépression (quelques millimètres d'eau), et ils sont équipés de ventilateurs de tirage. Leur action est coordonnée avec celle de ventilateurs de soufflage. Les ventilateurs de soufflage, en amont du réchauffeur d'air, poussent l'air à travers celui-ci, et fournissent une certaine pression au caisson des brûleurs. Les ventilateurs de tirage aspirent les fumées à travers la chaudière, le réchauffeur d'air et les dépoussiéreurs en aval desquels ils sont installés. Cette position permet de limiter l'usure des pales due à l'action abrasive des poussières. Ces pales sont orientables ; cela pose des problèmes mécaniques délicats d'autant plus que les températures de fonctionnement sont voisines de 130 °C. Ils servent à vaincre les pertes de charge dans le circuit des fumées.

Des essais de pressurisation de chambre de combustion de générateurs de vapeur, pour des tranches de 250 et de 600 MW fonctionnant au charbon (Montereau, Le Havre), ont été réalisés afin de supprimer les ventilateurs de tirage (on augmente en conséquence la puissance de ventilateurs de soufflage). Cela avait pour but de réduire les dépenses d'investissement et les ennuis de fonctionnement. Cependant, dans le cas du charbon, la pressurisation pose des problèmes d'étanchéité du casing, nécessite des dispositions d'isolement des brûleurs, oblige à pressuriser les broyeurs, et à prendre des précautions spéciales pour le cendrier situé à la base de la chambre de combustion.

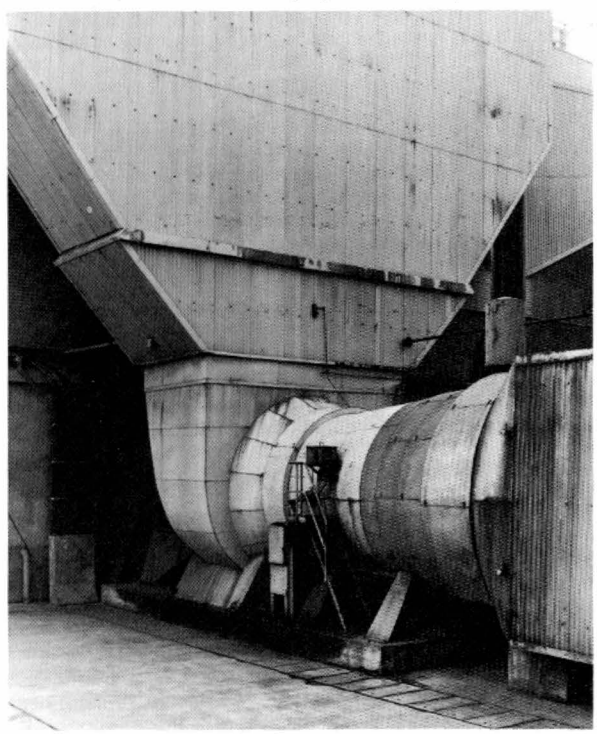
Caractéristiques d'un ventilateur de tirage d'une tranche 250 MW :

— Débit : volume des fumées : 191 m^3/s.
— Masse des fumées : 580 t/h.
— Température des fumées : 127 °C.
— Pression totale : 4 911 N/m^2.
— Vitesse de rotation : 1 470 tr/mn.
— Puissance du moteur d'entraînement : 1 800 kW.
— Tension d'alimentation du moteur : 5,5 kV.

7. LA CHEMINÉE

Un certain nombre de normes fixe les taux limites des rejets solides ou gazeux admissibles pour qu'il n'y ait pas de pollution dangereuse de l'atmosphère pour l'homme et pour la conservation de la nature. Les principaux produits nuisibles contenus dans les gaz de combustion des centrales thermiques sont essentiellement les poussières, l'anhydride sulfureux et des produits corrosifs comme

Ventilateur de tirage (*Morceau-É.D.F.*)



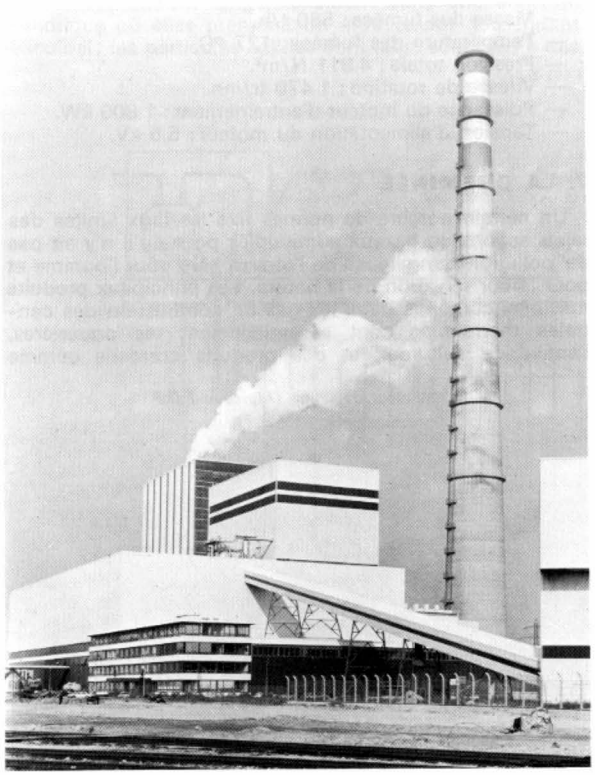
l'acide sulfurique, dus à la présence de soufre dans les combustibles. Les teneurs moyennes en soufre sont les suivantes :

— Charbon : 0,5 à 1 %.
— Fuel n° 2 : 2 à 4 %.
— Gaz de Lacq épuré : 0,000 7 %.

Par 24 heures, la quantité moyenne de gaz sulfureux dans l'air ne doit pas dépasser 1 mg/m³. La seule façon d'obtenir une dispersion et une dilution de ces produits nocifs est de les rejeter le plus haut possible au moyen d'une cheminée. Plusieurs facteurs sont pris en compte pour déterminer la hauteur de cette cheminée ; ce sont :

— La direction des vents dominants.
— La configuration du relief local.
— Les considérations atmosphériques locales (brouillard).
— La hauteur de la *couche d'inversion des températures* qui fait obstacle à l'ascension des fumées, et perturbe la dispersion.
— Les dépenses d'investissement pour la construction de la cheminée.

Les cheminées des centrales du Havre et de Porcheville. — La cheminée de la centrale du Havre est celle qui détient actuellement le record de hauteur en France : elle lève son couronnement à 240 m au-dessus du sol. Elle dépasse de plus de 100 m les immeubles les plus hauts bâtis sur les collines environnantes. Le choix du



Cheminée de la centrale du Havre (*Brigaud-É.D.F.*)

diamètre de sortie de la cheminée résulte d'une comparaison entre le coût de l'énergie fournie aux ventilateurs pour vaincre les pertes de charge dans la cheminée et la vitesse de sortie des gaz dont dépend la hauteur du panache qui accroît l'efficacité de la dispersion. La cheminée du Havre a un diamètre de base de 25 m et de 11 m au sommet. Le fût est constitué par un voile de béton armé de 80 cm d'épaisseur à la base et de 15 cm au sommet. Afin de protéger ce voile contre les contraintes thermiques, dues au gradient de température existant entre l'intérieur de la cheminée et l'extérieur et contre l'action corrosive des fumées, on a disposé à l'intérieur un revêtement en briques anti-acide, scellées avec un mortier anti-acide, formant des cylindres de 9 m de haut reposant sur des consoles réparties sur toute la circonférence. Chaque cylindre de brique est libre de se dilater vers le haut mais l'étanchéité devant être préservée, il y a un joint souple à base de silicone qui empêche les fumées de pénétrer dans l'espace annulaire de 0,60 m, visitable, existant entre les briques et le béton. Cette cheminée a nécessité l'emploi de 10 500 m³ de béton, y compris la fondation et de 750 000 briques. La masse totale de l'ensemble est supérieure à 25 000 t.

La cheminée de Porcheville B, construite pour deux tranches de 600 MW, mesure 220 m car elle se trouve dans une vallée relativement encaissée. Elle a un diamètre de 22,20 m à la base et de 11 m au sommet. Cette centrale brûlant du fuel, l'attaque des bétons par l'acide sulfurique est encore plus à craindre qu'au Havre ; c'est pourquoi des précautions spéciales ont été prises pour protéger le fût. Le système de briquetage, identique à celui du Havre, a été effectué avec des briques spéciales anti-acide, scellées avec un mortier anti-acide. L'étanchéité entre chaque tranche de 6 m est assurée par un joint composé d'une feuille de plomb, maintenue en place par la pression d'une plaque en résine polyester armée de fibres de verre. L'espace annulaire est aussi visitable pour détecter d'éventuelles fissures ; la paroi interne du fût en béton ainsi que les consoles supports des briques sont enduites d'une peinture anti-acide.

En plus des problèmes physico-chimiques posés par la corrosion des bétons, ces cheminées de très grandes hauteurs posent de nombreux problèmes en ce qui concerne les hypothèses de calcul. Par exemple, la prise en compte des effets du vent est complexe ; on doit, en effet, tenir compte de la pression dynamique du vent et des phénomènes tourbillonnaires (tourbillons de Benard-Karman) qui peuvent engendrer des vibrations dangereuses de la cheminée (phénomènes de résonance). Ces phénomènes font l'objet de nombreuses recherches en soufflerie.

De telles cheminées représentent un investissement élevé ; le prix du briquetage intérieur est particulièrement cher surtout dans le cas d'utilisation du fuel. Dans un but d'économie et par souci de réaliser une protection efficace du béton, on étudie en France la possibilité de placer à l'intérieur du fût une gaine en acier suspendue au sommet. Cette solution déjà utilisée à l'étranger, en particulier aux États-Unis, permet de résoudre le problème de l'étanchéité des joints et de la fissuration. Si la corrosion de l'acier par l'acide sulfurique n'est pas évitée, du fait de la masse relativement faible de cette gaine d'acier, il est possible d'envisager son remplacement éventuel.

On étudie aussi la possibilité d'utiliser des gaines de produits synthétiques, mais le problème posé par les températures à supporter est difficilement soluble.

Pour limiter cette pollution atmosphérique, É.D.F. a aussi engagé des recherches pour l'épuration chimique des fumées de fuel.

8. LA TURBINE

Il ne s'agit pas de donner ici une théorie et une description détaillée de la turbine (V. t. 3, Turbines à vapeur), mais simplement d'étudier les caractéristiques d'une turbine d'une tranche de 600 MW actuellement en service, comme celle qui équipe la centrale de Porcheville B (V. hors-texte).

C'est une turbine à une seule ligne d'arbre, tournant à 3 000 tr/mn ; sa conception est proche de celle des turbines des tranches de 250 MW. Elle est à action et à degré de réaction variable. Elle comporte (fig. III-23) :

— Un corps haute pression (H.P.) alimenté en vapeur surchauffée (163 bars, valeur absolue, 565 °C). Ce corps à double enveloppe et à simple flux comporte douze étages de détente et deux soutirages pris au niveau de la neuvième roue et de l'échappement.

— Un corps moyenne pression (M.P.) alimenté en vapeur resurchauffée (36 bars, valeur absolue, 565 °C). Il est à double enveloppe et à simple flux. Il comporte dix étages de détente et trois soutirages pris au niveau des quatrième et septième roues et de l'échappement.

— Trois corps basse pression (B.P.) à double corps et à double flux. Ces trois corps, alimentés en parallèle à partir de l'échappement du corps moyenne pression, comportent chacun deux groupes de six étages de détente

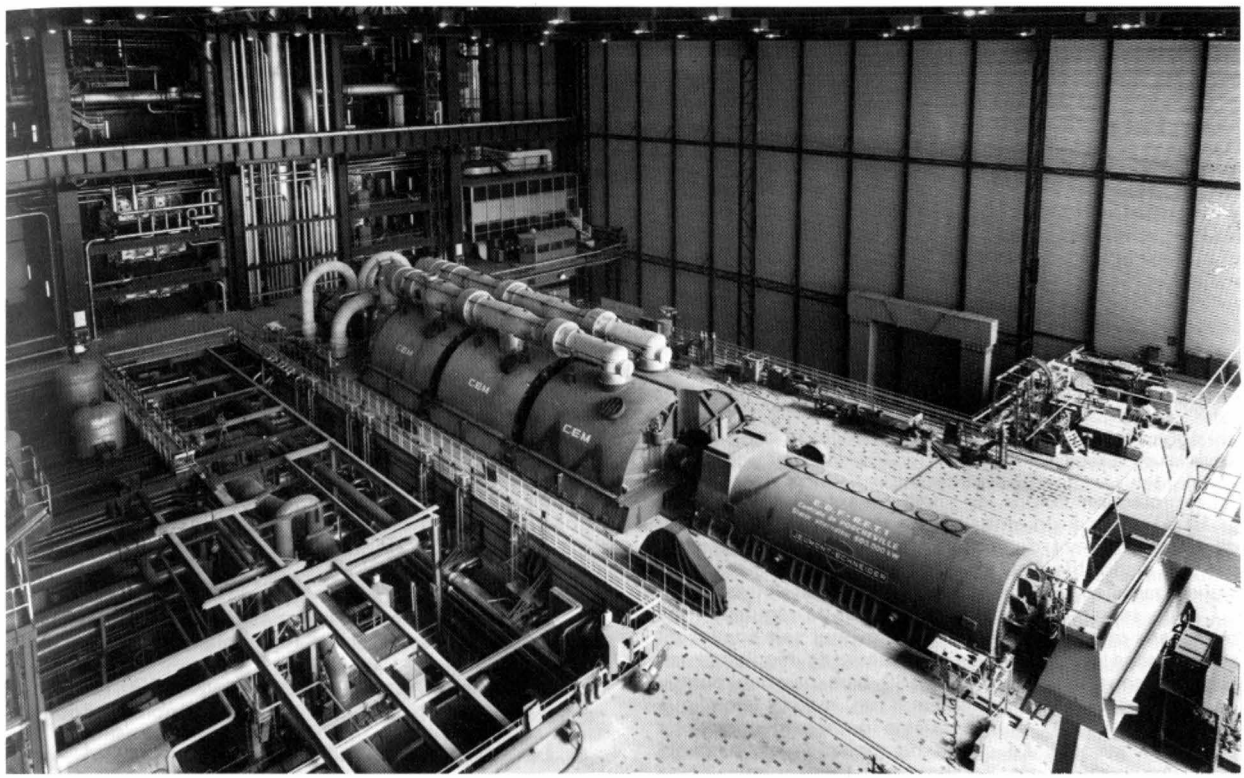


Fig. III-23 — Turbine de la centrale de Porcheville B (*Brigaud-É.D.F.*)

et deux soutirages au niveau des deuxième et quatrième roues. Ces trois corps ont une surface totale d'échappement au condenseur de 50 m².

— Les rotors des corps haute et moyenne pressions sont du type monobloc.

— Les rotors des corps basse pression, de 1,70 m de diamètre, sont constitués chacun de quatre tronçons soudés.

Les ailes mobiles du dernier étage basse pression mesurent 1 m et ne comportent pas de fil de liaisonnement. Leur bord d'attaque résiste à l'érosion due à la vapeur humide, grâce au trempage. La vitesse périphérique de ces ailettes est supérieure à la vitesse du son dans la vapeur.

Chaque extrémité de rotor est supportée par un palier par l'intermédiaire d'un coussinet. La ligne d'arbre de la turbine mesure 33 m, aussi a-t-il été prévu des dispositifs spéciaux pour qu'elle puisse se dilater librement.

Les corps haute pression et moyenne pression forment un ensemble solidaire, vis-à-vis de la dilatation; il peut se déplacer de 50 mm vers l'avant de la turbine (côté H.P.).

Entre ces corps et les corps B.P. se trouve un point fixe par rapport auquel les corps internes basse pression, rendus solidaires par des barres climatisées, peuvent se déplacer vers l'arrière (côté alternateur).

Les corps externes basse pression forment un troisième ensemble se dilatant à partir d'un point fixe placé entre le premier et le deuxième corps B.P.

L'utilisation de corps à double enveloppe permet une bonne tenue de l'ensemble en régime transitoire de température. De plus, les étages et les roues de tête des corps haute et moyenne pressions sont climatisés par injection de vapeur à température relativement basse. Les *labyrinthes d'étanchéité* à la sortie des arbres des différents corps sont aussi alimentés en vapeur.

En ce qui concerne la vapeur, les turbines à resurchauffe sont formées de deux turbines distinctes:

— La partie haute pression qui doit isoler le réservoir du générateur de vapeur du resurchauffeur.

— La partie moyenne pression et basse pression qu'il convient d'isoler du resurchauffeur qui représente une capacité importante de vapeur.

En tête de chacune des parties, se trouvent des *vannes d'arrêt* (H.P.) ou des *vannes d'interception* (M.P.-B.P.), dont le servomoteur de commande est relié aux « sécurités-turbine ». Leur ouverture continue et progressive est réalisée pendant la montée en vitesse de la machine lors des démarrages. Ces vannes ayant principalement un rôle de sécurité, le réglage est donc réalisé par des soupapes de réglage situées sur le trajet de la vapeur.

Côté haute pression, ces organes d'admission de vapeur sont situés sur des bâtis indépendants des corps: il y a quatre vannes d'arrêt et six *soupapes régulatrices*. Ces soupapes permettent un réglage de l'admission de vapeur par *laminage*; en combinant leur action, il est aussi possible d'effectuer un réglage séquentiel par injection partielle de vapeur.

Côté moyenne et basse pressions, il y a quatre vannes de sécurité, appelées *vannes d'interception*, suivies de quatre *soupapes modératrices* fixées directement sur le corps moyenne pression. Ces soupapes servent à limiter le débit de vapeur resurchauffée; en cas de décharge brusque de la turbine, elles permettent de vider lentement le resurchauffeur sans risquer d'emballer la machine. Pendant les démarrages, ces soupapes modératrices sont utilisées comme organe de laminage et fonctionnent indépendamment des organes de réglage haute pression.

La régulation de la vitesse de la turbine est réalisée à l'aide de circuits électromagnétiques dont on va donner très schématiquement le principe (fig. III-24).

Un alternateur pilote, rigidement accouplé à l'arbre de la turbine, délivre une tension sinusoïdale variable avec la vitesse (220 V, 400 Hz à 3 000 tr/mn). Cette tension est transformée en une tension continue proportionnelle à la vitesse. Elle est comparée à une tension continue de référence émise par un consignateur de vitesse. La différence entre ces deux tensions (signal d'erreur) est envoyée dans un *sommateur* puis amplifiée au moyen d'un amplificateur magnétique; un transducteur commande ensuite le servomoteur hydraulique de la soupape de réglage. Un signal, traduisant le mouvement de la soupape, est également transmis en retour au sommateur par deux transducteurs d'asservissement (un statique et un dynamique).

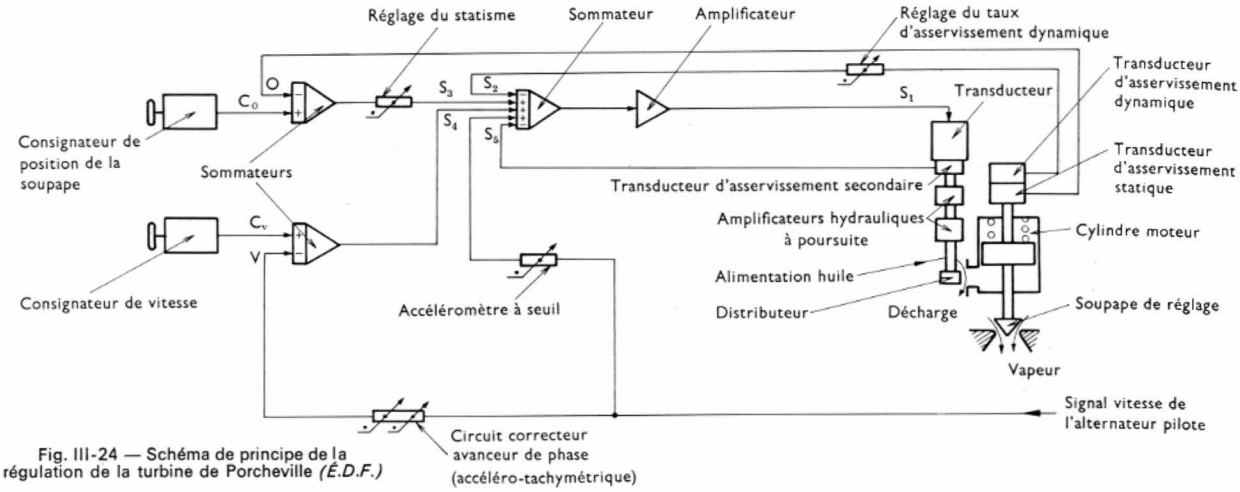


Fig. III-24 — Schéma de principe de la régulation de la turbine de Porcheville *(É.D.F.)*

La protection contre les survitesses (vitesse nominale + 10 %), dues à un emballement de la machine (du fait du déclenchement du réseau, par exemple), est assurée par des dispositifs électriques et par des dispositifs classiques basés sur l'inertie centrifuge de masselottes.

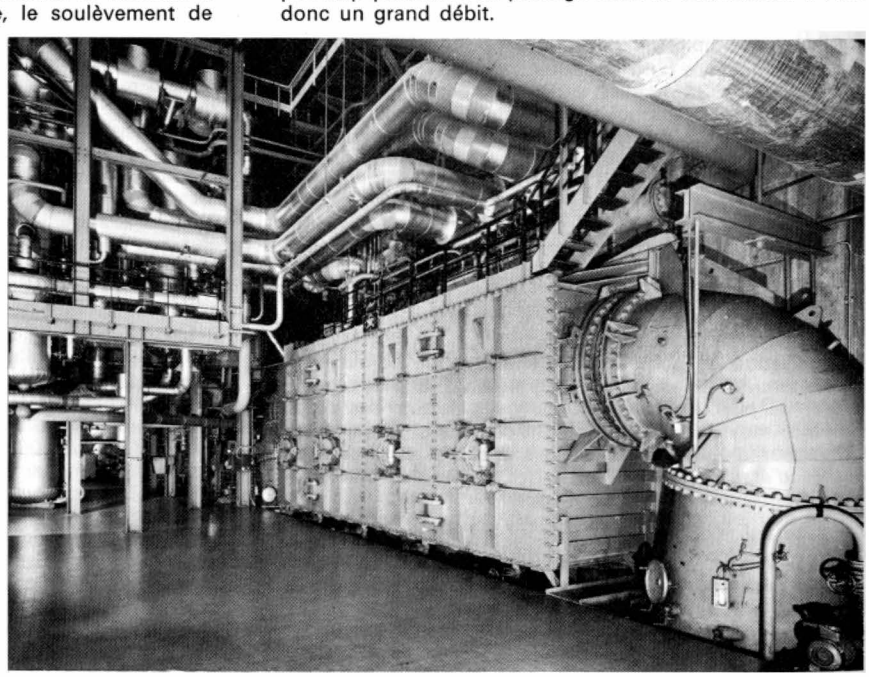
L'huile servant au fonctionnement de la régulation est prise dans une *cuve à huile* de 75 m³ qui sert également au graissage de la machine. Le circuit de régulation est alimenté sous une pression de 30 bars par une pompe de marche normale accouplée à un moteur électrique (380 V, 170 kW). Une deuxième pompe identique est placée en secours. Le circuit de graissage est alimenté sous une pression de 3,5 bars par trois pompes. Une pompe, entraînée par un moteur de 110 kW branché sur le circuit 380 V des auxiliaires de tranche, sert au démarrage et à la marche normale. En cas de défaillance de cette pompe, l'arrêt de la machine est assuré automatiquement et le graissage est alors effectué, soit par une deuxième pompe identique branchée sous la tension de 380 V du réseau secouru, soit par une pompe accouplée avec un moteur à courant continu, de 41 kW, branché sur une batterie 230 V de la tranche. Le démarrage des pompes de secours est lié au niveau d'un bac-tampon de 3 m³ installé en charge au refoulement de la pompe principale.

Lors de l'arrêt de la turbine ou avant son démarrage (il faut obtenir une température homogène du rotor), un dispositif de *virage* permet de faire tourner la machine à 40 tr/mn. Pendant cette manœuvre, le soulèvement de l'arbre dans les paliers est réalisé à l'aide d'un circuit spécial d'huile à haute pression. La masse de la turbine est voisine de 1 250 t et elle est répartie de la façon suivante :

— Corps haute pression : stator 180 t, rotor 15 t.
— Corps moyenne pression : stator 210 t, rotor 29 t.
— Corps basse pression (pour chacun) : stator 157 t, rotor 58 t.
— Matériel divers, vannes, tuyauteries : 170 t.

9. LE CONDENSEUR

De l'eau et de la vapeur en contact dans un réservoir sont à la même température, celle de la vapeur saturée et cette température et la pression sont liées d'une façon bien définie (V. ci-dessus § 4.4.1). C'est donc la température de l'eau dans le puits du condenseur qui fixe la pression régnant dans le condenseur. La vapeur en se condensant produit une dépression atmosphérique, ou vide, qui est d'autant plus importante que l'eau du condenseur est froide. Cette température est supérieure de quelques degrés à la température de sortie de l'eau de circulation. Par conséquent, la pression restante est d'autant plus basse que la température de l'eau de circulation à la sortie est elle-même plus basse. Pour que cette eau ne se réchauffe pas trop pendant son passage dans le condenseur il faut donc un grand débit.



Condenseur-tranche 1 d'un groupe de 250 MW à la centrale de Champagne-sur-Oise (*Morceau-É.D.F.*)

On sait que le rendement thermodynamique dépend de l'écart des températures absolues des sources chaude et froide. Ayant intérêt à avoir la température de source froide la plus basse possible, il faut maintenir le vide si l'on veut préserver le rendement. Or, cette pression interne au condenseur peut être modifiée par des entrées d'air. En effet, elle dépend :

— de la pression de l'air, contenu dans le condenseur, considéré comme s'il occupait à lui seul le volume total du condenseur (*pression partielle de l'air*) ;

— de la pression de la vapeur saturée à la température de l'eau condensée.

En cas d'entrée d'air au condenseur, on constate donc une augmentation de la pression au condenseur et une augmentation de la température de la vapeur. Cette croissance de la température est d'autant plus rapide que la présence de l'air modifie aussi la capacité de transmission de la chaleur. Il est donc nécessaire d'enlever l'air aussi bien en marche normale qu'au démarrage de la turbine.

La mise sous vide du condenseur et son maintien à une pression partielle la plus faible possible est faite à l'aide de *pompes d'extraction d'air* ou d'*éjecteurs d'air*. Le choix de la pression de condensation est le résultat d'un compromis entre l'augmentation du travail de détente de la vapeur et l'accroissement de la perte par énergie cinétique qui en résulte. Cette perte par énergie cinétique est proportionnelle au cube du débit massique de la vapeur, et inversement proportionnelle au carré du produit de la pression d'échappement par la section d'échappement. Or, la quantité de vapeur qui sort de la turbine est proche de 1 030 t/h pour une turbine de 600 MW, la pression de condensation est voisine de 33 mbar ; cela conduit à des volumes massiques élevés (32 m^3/kg), et la section totale d'échappement est limitée pour des raisons d'ordre technologique. Toutes ces conditions font que la vitesse de la vapeur à l'échappement est grande (233 m/s), et qu'il y a une perte par énergie cinétique importante : environ 8 MW pour une turbine de 600 MW (1,33 %).

Le condenseur comprend :

1° *Une gaine de raccordement* ou *manchette* qui réunit l'échappement de la turbine au corps du condenseur. La forme de la manchette est étudiée pour éviter les mouvements tourbillonnaires de la vapeur afin de limiter les pertes de charge.

2° *Le corps du condenseur* qui est un caisson en tôle d'acier renforcée par des raidisseurs pour supporter la pression atmosphérique.

3° *Le faisceau tubulaire* est placé dans ce caisson. Il est composé de plusieurs milliers de tubes. Ces tubes sont réalisés avec des matériaux différents suivant l'eau qui y circule.

Pour l'eau de rivière on utilise :

— Le laiton à l'arsenic : 70 % Cu, 30 % Zn.

— Le laiton Amiraute à l'étain : 70 % Cu, 20 % Zn.

Pour l'eau de mer on emploie :

— Le laiton à l'aluminium : 76 % Cu, 22 % Zn.

En Méditerranée où la salinité est très forte, on utilise :

— Des cupro-nickels : 90 % Cu, 10 % Ni.

— Des cupro-nickels au fer et au manganèse : 60 % Cu, 30 % Ni, 2 % Fe, ou, 68 % Cu, 30 % Ni, 1 % Fe, 1 % Mn.

À cause de son prix fort élevé, on n'envisage pas d'utiliser de l'acier inoxydable pour les condenseurs des centrales thermiques.

Ces tubes sont *dudgeonnés* à leurs extrémités dans les plaques tubulaires de support. C'est dans ces tubes que passe l'eau de circulation, et c'est sur leur surface extérieure que se condense la vapeur. Les extrémités de tubes débouchent dans les *boîtes à eau*. La circulation de l'eau dans les tubes peut être à parcours direct, ou à deux et même trois parcours. La vitesse de l'eau est généralement de 1,5 m/s.

4° *Le puits de l'eau condensée*. — Le niveau de l'eau est maintenue à une hauteur constante.

Le condenseur de Porcheville B est à parcours direct ; il comprend 59 200 tubes de laiton de 9,70 m de long et d'un diamètre extérieur de 19 mm. Ils représentent une surface d'échange de 34 000 m^2. Le condenseur pèse 810 t.

La mise sous vide est obtenue par un éjecteur, alimenté en vapeur auxiliaire, et par quatre pompes à air, ayant chacune un débit de 27,5 kg/h d'air sec.

Le nettoyage est réalisé en marche à l'aide de petites boules en caoutchouc mousse d'un diamètre légèrement supérieur au diamètre interne des tubes (dispositif de Taprogge). Elles sont introduites dans le circuit par une pompe et entraînées dans la boîte à eau d'entrée ; elles se répartissent au hasard dans les tubes et poussées par l'eau de circulation, elles les nettoyent. À la sortie, elles sont arrêtées par une grille et reprises par la pompe qui les réinjecte dans le circuit jusqu'au nettoyage complet.

Les condenseurs sont généralement posés sur un certain nombre de ressorts qui sont réglés pour équilibrer le poids propre du condenseur, le poids de l'eau de circulation et de l'eau condensée. Suivant que le condenseur est plein ou vide d'eau, la turbine est tirée ou poussée par l'intermédiaire de la manchette. De plus, pendant le fonctionnement de la machine, les dilatations verticales de la manchette et du condenseur sont absorbées par la déformation en compression des ressorts.

En réaction, cette compression donne des efforts et des moments sur le corps de la turbine ; ils tendent à la soulever et il faut veiller à ce qu'ils restent dans des limites données pour ne pas entraîner de déformations du corps de la turbine, ce qui serait préjudiciable à une bonne marche. Dans cette disposition, lorsqu'on fait le vide au condenseur, la résultante verticale de la pression atmosphérique sur les enveloppes externes des corps B.P. est équilibrée par la résultante verticale de la pression atmosphérique sous le fond du condenseur, les efforts « se refermant » par les parois du condenseur et de la manchette. Ce système d'efforts n'a aucune influence sur le massif support du groupe.

Dans certaines installations, en particulier aux États-Unis, pour éviter d'avoir des efforts sur les corps de turbine (ils risquent d'introduire des déformations pouvant avoir une action sur le bon équilibrage de la ligne d'arbre), le condenseur est ancré au sol et la manchette lui est raccordée par un joint souple. Dans ce cas, la pression atmosphérique sur la partie B.P. de la turbine est entièrement équilibrée par les poutres supportant la machine. Cette disposition entraîne donc un renforcement très important de la structure porteuse dont l'encombrement devient une gêne pour l'installation du matériel, indépendamment du supplément d'investissement qu'on doit alors consentir.

10. LE POSTE D'EAU

Le rendement est amélioré en réchauffant l'eau d'alimentation de la chaudière. C'est dans le poste d'eau que s'opère le réchauffage de cette eau, après sa reprise dans le puits du condenseur au moyen des *pompes d'extraction* et avant son injection dans l'économiseur.

La conception du poste d'eau est souvent différente d'une centrale à une autre car elle est le reflet des options ou des préférences de l'équipe réalisatrice du projet. Le poste d'eau est formé principalement d'un ensemble d'échangeurs de chaleur vapeur-eau ; la source de chaleur est de la vapeur soutirée dans les différents étages de la turbine à différents niveaux de pression et de température. Ces échangeurs de vapeur, sauf le dégazeur, sont des *échangeurs par surface ;* ils sont constitués de tubes placés dans une enceinte métallique cloisonnée de façon à guider la vapeur suivant un certain chemin. L'eau à réchauffer passe à l'intérieur des tubes qui sont disposés dans des compartiments formés par des cloisonnements qui, d'ailleurs, comportent des chicanes pour augmenter le trajet de la vapeur. L'extérieur des tubes baigne dans la vapeur. La disposition des tubes est telle que la sortie de l'eau réchauffée se trouve du côté de l'entrée de la vapeur, et que l'entrée de l'eau (plus froide) est située en fin du circuit de la vapeur (où elle se condense). Parfois la condensation de la vapeur ne se fait pas dans le réchauffeur lui-même mais dans un autre échangeur placé en aval du circuit de la vapeur (ou en amont du

circuit de l'eau). Dans ce cas, ce réchauffeur est appelé *désurchauffeur*.

Les condensats, résultant de la condensation de la vapeur, sont collectés et réintroduits dans le circuit d'eau à un niveau convenable de température. Les gaz incondensables qui pourraient s'accumuler dans les réchauffeurs sont généralement renvoyés au dégazeur ou au condenseur d'où ils sont extraits. Ces circuits de ventilation sont équipés de diaphragmes pour provoquer une perte de charge, et rendre minimal le débit de vapeur qui pourrait se produire.

Suivant que les réchauffeurs sont alimentés à partir des soutirages dont la pression de vapeur est inférieure ou supérieure à la pression de vapeur affectée au chauffage du dégazeur, ils sont dits, respectivement, réchauffeurs B.P. ou réchauffeurs H.P.

Ces réchauffeurs, montés horizontalement ou verticalement, sont placés en série ; l'eau entre d'abord dans les réchauffeurs B.P., puis circule dans les réchauffeurs H.P. Sur ce circuit se trouve également un dégazeur.

Le *dégazeur* est aussi un réchauffeur d'eau. L'eau est finement pulvérisée dans la vapeur soutirée et cette vapeur se condense au contact des gouttelettes qui se réchauffent. Dans ce cas, la température de l'eau est voisine de celle de la vapeur saturée (à la pression de la vapeur saturée) et non pas de la température de la vapeur soutirée. Toutefois, le but principal de cet appareil n'est pas de réchauffer l'eau mais de permettre à l'oxygène dissous dans l'eau de se dégager ; sa présence dans l'eau d'alimentation entraînerait des corrosions graves dans le générateur de vapeur.

Le dégagement des gaz dissous dans l'eau est dû au fait que la température de l'eau dans le dégazeur est très proche de la température de saturation de la vapeur chauffante, puisqu'il y a eu mélange et donc très voisine de sa température d'ébullition. L'atmosphère étant saturante, la pression de vapeur est alors égale à la pression totale, et la pression partielle des gaz ne peut qu'être nulle. C'est pourquoi l'eau à l'ébullition ne peut pas retenir de gaz dissous.

En plus des réchauffeurs, le poste d'eau comprend également un certain nombre de pompes pour la circulation de l'eau et des condensats.

On se sert aussi de l'eau froide à la sortie du condenseur pour alimenter des échangeurs tels que :

— les *réfrigérants de l'hydrogène* qui assure le refroidissement des barres du stator et du rotor de l'alternateur ;
— les *réfrigérants de l'huile de graissage* du groupe ;
— le *condenseur des buées* venant des labyrinthes.

À titre d'exemple, on va décrire le poste d'eau de la première tranche de 600 MW de la centrale de Porcheville B (fig. III-25).

Le poste d'eau est alimenté en vapeur par sept soutirages, trois soutirages B.P. et quatre soutirages H.P. L'eau du condenseur principal est puisée à l'aide de deux pompes d'extraction d'une puissance unitaire de 315 kW, pouvant débiter chacune 1 250 t/h. L'eau est refoulée, à travers le réfrigérant d'huile, le condenseur des buées des boîtes étanches de la turbine et les réfrigérants d'hydrogène de l'alternateur, jusque dans une bâche-tampon maintenue sous vide. À partir de celle-ci, l'eau est envoyée dans les réchauffeurs B.P. au moyen de deux pompes de reprise. Chaque pompe a une puissance de 496 kW et un débit de 1 210 t/h sous une pression correspondant à une hauteur de 125 m. L'eau traverse les réchauffeurs B.P. 1 et B.P. 2 installés à l'intérieur de la manchette du condensateur ; en réalité le réchauffeur B.P.1 est composé de deux réchauffeurs 1 A et 1 B montés en parallèle. Ces trois échangeurs sont placés de façon à permettre à leurs condensats de s'écouler par gravité dans des *ballons de purge* d'où ils sont repris par des pompes et réinjectés dans le circuit.

À la sortie du ballon de purge 3, l'eau est pulvérisée dans le dégazeur et recueillie dans la *bâche alimentaire*. Elle est ensuite reprise par la pompe alimentaire principale. Cette pompe d'un débit de 2150 m³/h a une hauteur manométrique de 2 090 m et une vitesse maximale de 4 000 tr/mn. Elle est entraînée par une turbine auxiliaire dont l'alimentation en vapeur se fait à partir du soutirage n° 3. Cette turbine à action et à condensation a une puissance de 12 500 kW. Par l'intermédiaire d'un réducteur (1 000 tr/mn max.), elle entraîne également la pompe nourricière qui est placée sur l'aspiration de la turbopompe alimentaire principale.

Pendant les démarrages ou les marches à faible charge, l'alimentation se fait à l'aide de motopompes. Au nombre de deux, montées en parallèle, ces motopompes ont chacune un débit de 444 t/h, une hauteur manométrique de 2 040 m et chacune d'elles est entraînée par un moteur électrique de 3 150 kW à l'aide d'un multiplicateur de vitesse et d'un coupleur hydraulique. Une *pompe nourricière*, montée en série avec la pompe et entraînée par le même moteur, assure des conditions d'aspiration convenables.

L'eau de désurchauffe de la vapeur surchauffée et de la vapeur resurchauffée est prise à partir de soutirages placés sur ces trois pompes alimentaires.

Au refoulement de ces pompes, l'eau d'alimentation est envoyée dans les réchauffeurs, H.P. 5, H.P. 6, H.P. 7, H.P. 5 bis. Ces réchauffeurs, verticaux, sont dédoublés en deux files montées en parallèle. L'alimentation du réchauffeur H.P. 5 est réalisée à partir de la vapeur désurchauffée dans le réchauffeur H.P. 5 bis alimenté par le soutirage S 5. Les condensats récupérés, par gravité, s'écoulent dans le dégazeur.

À la sortie du poste d'eau, l'eau d'alimentation ayant une température de 275 °C entre dans l'économiseur.

Pendant l'arrêt de la tranche et afin d'assurer une bonne conservation du poste H.P., la bâche alimentaire est maintenue à une pression de 1,8 bar, à l'aide de résistances chauffantes de 40 kW. Environ 40 % du débit total de la vapeur sortant de la chaudière sont captés dans les soutirages pour le réchauffage de l'eau.

CHAPITRE IV

LES INSTALLATIONS POUR LA PRODUCTION DE L'ÉLECTRICITÉ

1. L'ALTERNATEUR

Pendant la détente dans la turbine, l'énergie calorifique de la vapeur est transformée en énergie mécanique. Cette énergie disponible sur l'arbre est communiquée à un alternateur qui réalise l'ultime transformation sous forme d'énergie électrique. La théorie de l'alternateur triphasé et sa constitution ont été exposées par ailleurs (V. t. 1, Électrotechnique, chap. 9) ; on donnera ici les caractéristiques principales d'un alternateur de 600 MW, la plus grosse puissance unitaire actuellement en service en France, et on étudiera particulièrement les problèmes posés par le refroidissement de cette machine.

C'est l'évolution des techniques de l'isolement électrique et du refroidissement ainsi que de celles de la coulée sous vide et du contrôle non destructif (par ultrasons) des pièces de forge de très grandes dimensions qui a permis l'utilisation de rotors d'une seule pièce et a rendu possible la fabrication de machines de plus en plus puissantes.

Le rendement d'un alternateur de 600 MW est bon (proche de 98,8 %) mais ce générateur est cependant le siège de pertes importantes (en valeur absolue) puisqu'elles peuvent atteindre 7 à 7,5 MW. Cela impose la mise en œuvre d'un refroidissement efficace afin de limiter l'échauffement des matériaux qui sans cela seraient détruits.

Les pertes d'énergie dans un alternateur sont variées. On peut distinguer :

— Les pertes par effet Joule.
— Les pertes par courants de Foucault.
— Les pertes par hystérésis.
— Les pertes par frottement de l'arbre dans ses paliers.

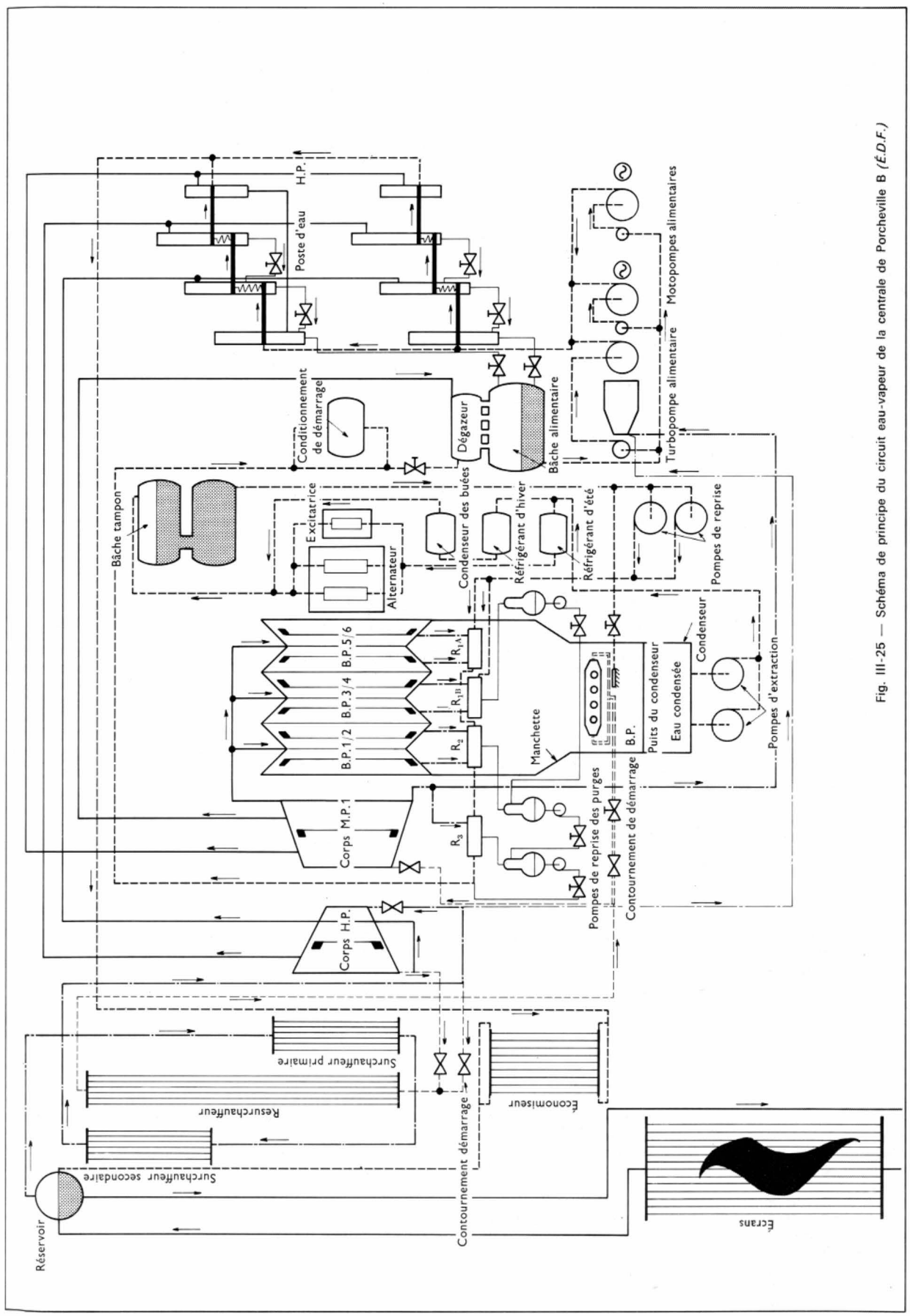


Fig. III-25 — Schéma de principe du circuit eau-vapeur de la centrale de Porcheville B *(É.D.F.)*

— Les pertes par frottements du fluide de refroidissement dans le circuit de refroidissement.

Autrefois, les alternateurs étaient refroidis par de l'air qui circulait en cycle fermé ; après s'être échauffé dans les masses métalliques de l'alternateur, l'air passait dans un réfrigérant, la circulation étant assurée par les ventilateurs de l'alternateur. Ce mode de refroidissement est encore utilisé pour les unités de faibles puissances mais lorsque les quantités de chaleur à évacuer sont devenues très grandes, les constructeurs d'alternateurs ont été amenés à utiliser l'hydrogène comme fluide de refroidissement. En effet, les échanges thermiques sont facilités car l'hydrogène possède une chaleur massique supérieure à celle de l'air. De plus, la masse volumique de l'hydrogène étant plus faible que celle de l'air (quatorze fois), les pertes dues au frottement du fluide dans les conduits (*pertes de ventilation*) sont donc fortement diminuées (elles sont proportionnelles à cette masse volumique).

Dans les alternateurs de moyenne puissance, et même dans les premiers des tranches de 250 MW, la circulation du fluide de refroidissement ne se faisait que dans les empilements des tôles magnétiques, les barres conductrices étaient surdimensionnées de façon à présenter une grande surface d'échange avec les tôles de l'empilement. On arrivait de cette façon à limiter la température de la barre au contact avec son isolant à moins de 110 °C. En construisant des conducteurs creux dans lesquels circule, soit de l'hydrogène, soit de l'eau déminéralisée (pour ne pas être conductrice), on a réussi à obtenir des températures des barres beaucoup plus basses, ce qui permet une meilleure tenue des isolants (fig. IV-1).

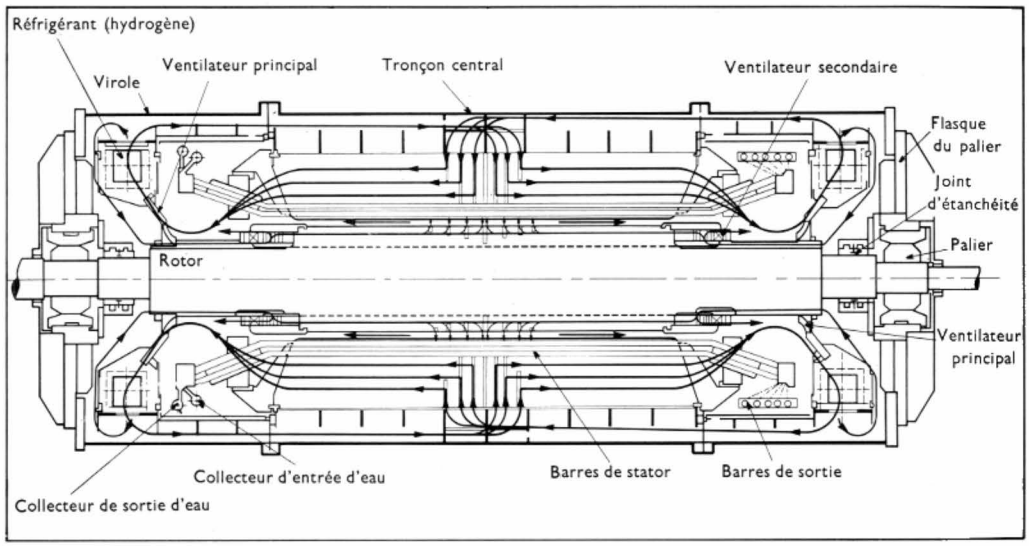


Fig. IV-1

Centrale de Vitry-sur-Seine : coupe longitudinale d'un alternateur de 250 MW, schéma des circuits de refroidissement par l'hydrogène (*É.D.F.*)

De plus, la dilatation des barres (due aux variations de température) et le mouvement de *reptation* qu'elle entraînait (mouvement relatif des barres entre elles), très préjudiciable à la tenue des isolants, sont ainsi limités.

Dans certains pays (U.R.S.S., États-Unis d'Amérique, Allemagne, Grande-Bretagne), on a réalisé aussi le refroidissement des conducteurs des rotors avec l'eau ; cette technique pose de délicats problèmes d'étanchéité du circuit et d'équilibrage du rotor.

En France, on utilise seulement l'hydrogène pour le refroidissement des conducteurs du rotor. Ce gaz est refroidi dans des réfrigérants à circulation d'eau, disposés à chaque extrémité de la carcasse de l'alternateur. L'eau de refroidissement utilisée provient du condenseur principal, si bien que les pertes internes sont récupérées dans le circuit d'eau d'alimentation de la chaudière. L'utilisation de l'hydrogène impose de prendre des précautions spéciales. En effet, en plus de sa grande facilité de diffusion, l'hydrogène forme avec l'air un mélange explosif. Le circuit doit donc être maintenu en pression (quelques millibars à quelques bars au-dessus de la pression atmosphérique) pour éviter les entrées d'air. De plus, il faut que l'étanchéité du circuit soit parfaite, plus particulièrement à la traversée de l'enveloppe de l'alternateur par l'arbre du rotor à ses deux extrémités (pression d'huile de graissage et systèmes d'*anneaux flottants*). Pour assurer la sécurité du personnel d'exploitation, l'enveloppe de l'alternateur est calculée afin de résister à une explosion accidentelle. Le stator est d'ailleurs conçu comme une poutre autoporteuse pour pouvoir être transporté par voie ferrée ; chacune des extrémités de cette poutre est prise dans le bec d'un wagon spécial (le wagon pour le transport d'un alternateur de 600 MW comporte 32 essieux).

2. L'EXCITATRICE

L'excitation la plus classique se fait à l'aide d'une génératrice à courant continu d'une puissance égale aux trois millièmes (3 $^{0}/_{00}$) de la puissance de l'alternateur. Cette excitatrice est placée au bout de l'arbre de l'alternateur, et est reliée à celui-ci par l'intermédiaire d'un réducteur de vitesse ; suivant les constructeurs sa fréquence de rotation est comprise entre 1 000 et 1 500 tr/mn.

Dans certaines centrales, la pompe alimentaire principale est couplée en bout d'arbre, côté H.P. ; pour ne pas allonger démesurément la salle des machines on emploie alors une *excitation séparée*. Le générateur de courant continu est entraîné par un moteur asynchrone, et pour éviter l'influence des fluctuations éventuelles du réseau il est accouplé à un volant cinétique qui maintient la vitesse constante.

Les courants de fortes intensités, nécessaires à l'excitation, posent de délicats problèmes de commutation et c'est pourquoi, compte tenu des progrès de la technique des redresseurs au silicium, on réalise maintenant des excitations statiques (fig. IV-2). On place, en bout de l'arbre de l'alternateur, un alternateur d'excitation à inducteur fixe et à induit tournant. On redresse le courant à l'aide de redresseurs au silicium montés en *pont* et tournant avec l'arbre (V. t. 1, Électronique, chap. 18). Le rotor de l'alternateur est alors directement alimenté en courant continu sans qu'il y ait besoin de contact glissant.

3. CARACTÉRISTIQUES PRINCIPALES DE L'ALTERNATEUR DE 600 MW DE PORCHEVILLE B

— Puissance apparente : 665 MVA.
— Facteur de puissance (cos φ) : 0,9.
— Tension nominale : 20 kV.
— Intensité nominale : 19 200 A.
— Puissance absorbée pour l'excitation : 1 600 kW.
— Longueur de l'alternateur : 12 m.
— Diamètre extérieur du stator : 3,95 m.
— Diamètre du rotor : 1,15 m.
— Masse du stator : 380 t.
— Masse du rotor : 73 t.

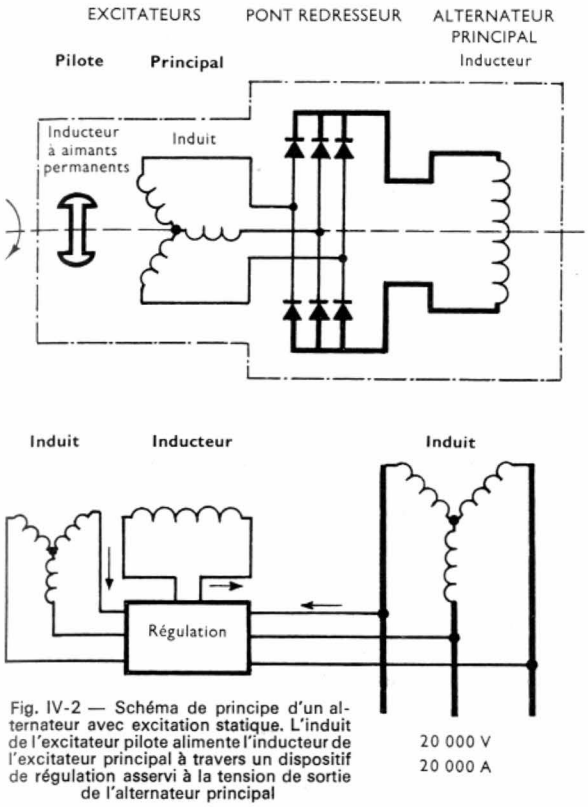


Fig. IV-2 — Schéma de principe d'un alternateur avec excitation statique. L'induit de l'excitateur pilote alimente l'inducteur de l'excitateur principal à travers un dispositif de régulation asservi à la tension de sortie de l'alternateur principal

Il est refroidi à l'hydrogène circulant sous une pression de 5 bars (5.10^5 N/m²) à l'intérieur des conducteurs creux du stator et du rotor, ainsi que dans les masses métalliques. L'empilement des tôles magnétiques est relié à la carcasse extérieure par des lames flexibles qui ont pour rôle d'amortir les vibrations d'origine électromagnétique (la fréquence de ces vibrations est de 100 Hz). Pour des questions d'équilibrage, le rotor possède la même flexibilité dans le plan des pôles et dans le plan des encoches; il est du type souple.

L'excitation de l'alternateur est statique; elle comprend:

— Un alternateur d'excitation à induit tournant, situé en bout d'arbre de l'alternateur principal. Sa fréquence de rotation est de 3 000 tr/mn.

— Un alternateur pilote à aimant permanent tournant à la même vitesse, et qui a pour but d'alimenter la régulation de tension.

— Les redresseurs statiques au silicium montés sur deux roues solidaires de l'arbre de l'alternateur. Ces redresseurs sont protégés par des fusibles à haut pouvoir de rupture.

L'ensemble de la turbine, de l'alternateur et de l'excitatrice forme ce que l'on nomme le *groupe turbo-alternateur* qui, à Porcheville, atteint une longueur de 53 mètres.

4. IMPLANTATION DU GROUPE TURBO-ALTERNATEUR

4.1. Le massif support du groupe. — On conçoit aisément que pour supporter des machines de taille et de masse aussi imposantes, il faille réaliser une ossature porteuse très solide et en même temps très étudiée. Le groupe repose sur un plancher, composé de *longerons* et de *traverses*, qui est supporté par des poteaux. Cet ensemble forme la *table du groupe*. Les poteaux sont encastrés à leur base inférieure dans la semelle de fondation. Cette semelle, suivant la qualité du terrain, peut reposer directement sur le sol ou bien prendre appui sur des pieux. Bien que de tels ouvrages soient relativement légers et élancés, on a gardé l'habitude de les appeler *massifs de groupe*.

Le massif de groupe est un ouvrage important car il doit être conçu pour que l'intégrité du réglage de la *ligne d'arbre* de toute la machine soit préservée. De plus, il doit avoir un comportement dynamique exempt de toute *résonance* lorsqu'il est soumis à l'action de forces dynamiques sinusoïdales (éventuellement causées par un déséquilibrage accidentel des parties tournantes). Ce massif doit bien souvent concilier des exigences contradictoires et, en particulier, il doit aussi présenter l'encombrement le plus réduit possible pour dégager la plus grande place pour l'installation du groupe et de ces auxiliaires (condenseur, tuyauteries, vannes, etc.).

Pour des groupes de 125 MW, on a réalisé des tables entièrement métalliques (Strasbourg, Montereau); cette technique, excellente théoriquement, présente le désavantage d'être très coûteuse. Tous les massifs réalisés actuellement en France sont en béton armé. Certaines tables reposent sur des poteaux en béton évidés intérieurement de façon à obtenir les *fréquences propres* les plus basses possibles; de cette façon, on obtient un très bon *découplage* avec le sol et on évite la transmission des vibrations et le tassement du sol sous la fondation: l'influence des forces excitatrices est aussi réduite car le *coefficient d'amplification dynamique* est très inférieur à 1.

À titre d'exemple, voici les principales caractéristiques du massif du groupe n° 3 de 600 MW de la centrale du Havre:

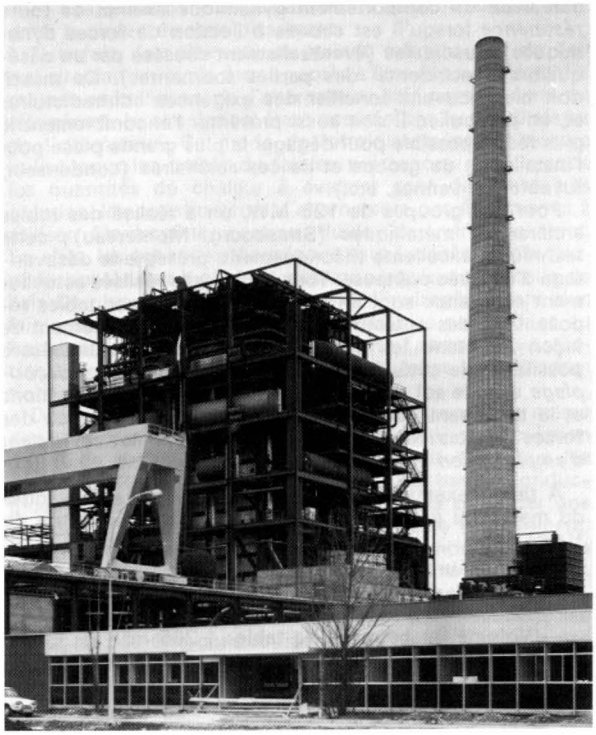
— Longueur: 53,40 m.
— Largeur: 13,70 m.
— Hauteur: 16 m au-dessus du niveau zéro.
— Volume du béton de la table: 1 265 m³.
— Volume du béton de la semelle: 2 440 m³.

4.2. La salle des machines. — Le groupe turbo-alternateur et ses auxiliaires, le poste d'eau et des pompes (comme les pompes alimentaires et les pompes d'extraction), ainsi que la salle de commande de la centrale, sont placés le plus souvent dans la *salle des machines*. Dans cette salle, au niveau zéro, pénètre une voie ferrée de manutention permettant d'amener le matériel lourd tel que l'alternateur et la turbine. La surface de la salle des machines doit être prévue avec des *aires de démontages* (planchers à 4 t/m² de surcharge) sur lesquelles on dépose les pièces lourdes et encombrantes (par exemple, les enveloppes extérieures des corps B.P.) pendant le montage du groupe ou pendant ses révisions techniques au cours de la vie de la centrale. Ces aires de manutention peuvent être, soit au niveau zéro, soit sur le plancher de service au niveau supérieur de la table de massif de groupe (niveaux 10 ou 12 m).

Pour la manutention des pièces lourdes, on dispose d'un ou deux ponts roulants ou d'un ou deux semi-portiques (suivant le nombre de tranches de la centrale); leur capacité de levage est adaptée à la pièce la plus lourde à manutentionner lors de l'entretien du groupe (généralement les enveloppes des corps B.P.). Bien qu'au montage, la pièce la plus lourde soit le stator de l'alternateur, on ne dimensionne généralement pas les engins de levage pour cette charge exceptionnelle (elle n'est levée qu'une fois dans la vie de la centrale). Cependant, comme il est tentant de se servir des ponts pour la mise en place du stator, pour limiter les investissements dans ces matériels, on opère de la façon suivante: soit on couple deux ponts roulants pouvant porter chacun la moitié de la charge statorique, soit on limite la portée du pont avec une béquille amovible qui repose sur le massif de groupe; la manœuvre s'effectue à poste fixe et seul le chariot élévateur se déplace. Par la suite, on enlève la béquille et on utilise un chariot élévateur moins puissant, le pont disposant alors de sa portée totale.

On utilise parfois une autre méthode de levage. On soulève le stator à l'aide de vérins hydrauliques puis on le cale. Ensuite, on descend les vérins et on les monte sur des cales; on soulève une nouvelle fois le stator et on le cale à nouveau, et ainsi de suite. Arrivé au niveau supérieur de la table du massif de groupe, on le fait glisser sur des rouleaux pour le mettre en place (méthode utilisée à Saint-Ouen et à Albi, par exemple).

Certaines centrales, comme Albi (1 groupe de 250 MW au charbon), n'ont pas de salle des machines. Le groupe turbo-alternateur est du type out-door comme d'ailleurs



Albi : chaufferie type out-door (*Baranger*)

la chaudière. Dans ce cas, on prévoit des capotages spéciaux pour le groupe et pour certains matériels afin de les protéger des intempéries.

5. LIAISON ALTERNATEUR-TRANSFORMATEUR

La transmission de l'énergie entre l'alternateur et le transformateur se fait à l'aide d'*un jeu de barres*. Ces barres, une par phase, sont constituées de profilés d'aluminium et sont maintenues par des supports isolants au centre d'une gaine de protection, réalisée en tôle d'aluminium roulée et soudée bord à bord. Tous les éléments d'une *gaine coaxiale* sont soudés bout à bout afin d'obtenir la continuité électrique de l'ensemble, et les extrémités de la gaine sont reliées à la terre. Les éléments, dont la longueur est limitée par les possibilités de transport, sont fabriqués en atelier et sont autoporteurs, ce qui permet d'alléger la charpente d'appui. Cette gaine, en métal amagnétique, a pour rôle d'annuler les pertes dans les parties métalliques placées dans le voisinage du jeu de barres. En effet, sans ce dispositif, un champ électromagnétique très intense prendrait naissance lors du passage d'un courant d'intensité très élevée dans les barres. De plus, en cas de court-circuit sur le réseau, il évite que les barres soient soumises à des efforts électrodynamiques trop grands.

En service normal, pour limiter les courants induits dans les gaines (donc la section des gaines), on a parfois inséré des bobines d'inductance saturables sur les liaisons les reliant à la terre (Vaires-sur-Marne). La saturation de ces inductances permet la circulation des forts courants induits en cas de court-circuit.

Le raccordement des barres aux bornes de l'alternateur et à celles du transformateur est fait à l'aide de connexions souples.

6. LE TRANSFORMATEUR PRINCIPAL

Le transformateur principal de la tranche, branché à l'extrémité des barres coaxiales, est toujours installé à l'extérieur de la centrale. Son rôle est d'élever la tension de sortie de l'alternateur au niveau de la tension de la ligne de transport de départ. À partir des groupes de 600 MW, la tension entre les lignes de départ est 380 kV.

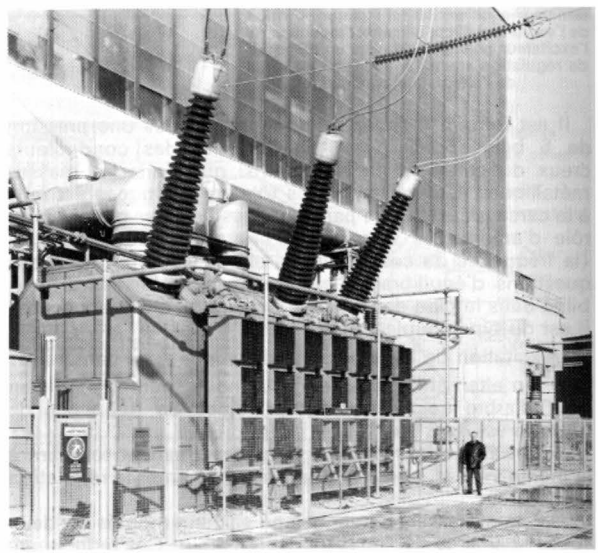
Le transformateur est amené à la centrale soit par route, en *convoi exceptionnel*, soit par voie ferrée à l'aide du wagon spécial (comme l'alternateur). Dans sa *cellule*, par l'intermédiaire de lorries, il repose sur des rails à l'écartement standard de 1,44 m ; étant interchangeable, il peut être déplacé d'une cellule à une autre en roulant sur la *voie lourde*. Il est placé au-dessus d'une fosse, remplie de gros galets roulés, pouvant recevoir l'huile du transformateur en cas de fuite de la cuve ; les galets ont pour rôle de refroidir l'huile, et d'éviter qu'elle brûle.

La cellule du transformateur est séparée de la centrale et du transformateur de soutirage par un *mur pare-feu*. La cellule est équipée d'une protection contre l'incendie par eau pulvérisée sous pression.

Pour fixer les idées, voici les caractéristiques principales du transformateur de Porcheville B :

— Puissance nominale : 660 MVA.
— Tension primaire (entre phases) : 20 kV.
— Couplage primaire : triangle.
— Tension secondaire (entre phases) : 405 kV avec prises à $\pm$ 3,5 %.
— Couplage secondaire : étoile.
— Masse totale : 455 t.
— Le neutre est muni d'un court-circuiteur à commande par air comprimé.

La réfrigération du transformateur se fait à l'aide de 14 motopompes qui font circuler l'huile en circuit fermé à travers les bobinages et de 14 aéroréfrigérants dont le refroidissement est assuré par 42 ventilateurs.



Transformateur triphasé à refroidissement par aéroréfrigérants de la centrale de Porcheville (*Alsthom-Savoisienne*)

7. LE POSTE ÉLECTRIQUE

Le poste électrique d'une centrale de grande puissance sert uniquement à évacuer l'énergie produite vers un poste d'interconnexion du réseau général. Ce poste d'interconnexion peut d'ailleurs se trouver à côté de la centrale mais, dans ce cas, il en est complètement séparé car les exploitations sont indépendantes l'une de l'autre.

Le poste électrique d'une centrale ne comprend donc que des départs de lignes ; ce sont généralement des lignes aériennes. Cependant, lorsque le poste d'interconnexion est très proche de la centrale et que son implantation rend la jonction aérienne difficile, les liaisons sont réalisées par câbles souterrains.

Le plus souvent, le transformateur est placé devant la salle des machines, et entre lui et le départ de ligne se trouve la voie de manutention du transformateur. Le *gabarit* de manutention de cette voie est toujours soigneusement prévu : c'est la *distance à la masse* qu'il faut réserver entre le matériel le plus encombrant pouvant circuler sur cette voie et les connexions sous tension. Pour laisser

ce passage libre, la disposition la plus classique consiste à tendre entre la façade de la salle des machines et le *portique de départ*, situé à l'autre extrémité du poste électrique, des conducteurs aériens en intercalant évidemment à leurs extrémités des chaînes d'isolateurs. Les bornes de sortie haute tension du transformateur principal y sont reliées par des connexions souples ou *bretelles*. La voie étant franchie, des bretelles sont encore utilisées pour établir la liaison avec le *disjoncteur* qui est relié au *sectionneur de ligne*. Celui-ci est aussi relié à la ligne de départ qui est également ancrée, par l'intermédiaire de chaîne d'isolateurs, au portique de départ. De part et d'autre du disjoncteur, sont branchés des *diviseurs capacitifs ;* ils servent à comparer la tension de la ligne à celle du groupe lorsqu'il faut effectuer le couplage (V. t. 2, Transport et distribution de l'énergie électrique, chap. 12).

La totalité du poste est surplombée par deux *câbles de garde* (par départ) tendus entre la salle des machines et le portique de départ. Ces câbles, mis à la terre, servent de paratonnerre.

À titre d'exemple, un départ de Porcheville B est équipé de :

— Un disjoncteur 420 kV, 2 000 A à commande pneumatique. Son pouvoir de coupure est de 25 000 MVA ; au moment de la coupure, l'arc est soufflé par de l'air comprimé. Un groupe autonome commun à deux tranches fournit de l'air comprimé à 25 bars.

— Un sectionneur 420 kV-2 000 A du type tripolaire horizontal extérieur. Il est commandé électriquement et dispose d'une commande manuelle de secours.

— Un portique métallique d'une hauteur de 26 m pour l'ancrage de la ligne 380 kV. Chaque phase de cette ligne est composée d'un *faisceau* de deux conducteurs aluminium-acier de 617 mm² de section. Les câbles de garde sont en almelec-acier de 182 mm² de section.

CHAPITRE V

INSTALLATIONS AUXILIAIRES BÂTIMENTS ANNEXES

1. LE CIRCUIT D'EAU DE CIRCULATION

Le rendement du cycle thermique dépend de la différence de température entre la source chaude (générateur de vapeur) et la source froide (condenseur). Pour accroître

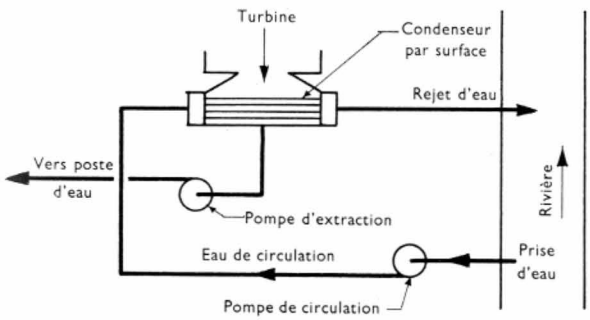


Fig. V-1 — Principe de la réfrigération en circuit ouvert

ce rendement, on essaie le plus possible de récupérer toute chaleur (par exemple : récupération de la chaleur correspondant aux pertes de l'alternateur). Cependant, l'énergie calorifique non transformée en travail reste encore de loin supérieure à celle qui est utile (46,5 %), et à la sortie de la turbine, lorsque la vapeur se condense, elle cède une importante quantité de chaleur. Les différentes sources froides que l'on trouve dans la nature et qui sont couramment utilisées sont :

— L'eau des fleuves et des rivières.
— L'eau des lacs.
— L'eau des mers.
— L'air ambiant.

Les trois premières sources permettent généralement d'établir une réfrigération en circuit ouvert, avec *condenseur à surface :* dans ce cas, l'eau de circulation n'est pas recyclée (fig. V-1).

Pour mettre en évidence les problèmes posés par le refroidissement, on va prendre comme exemple la tranche de 600 MW de la centrale du Havre ; la consommation brute du cycle vapeur est de 7 618 kJ/kWh ; et il faut évacuer 4 018 kJ/kWh au condenseur (1 kWh = 3 600 kJ). Pour une puissance de 612,5 MW (12,5 MW de la turbopompe alimentaire dont l'échappement se fait dans le condenseur principal), la quantité de chaleur à céder en une heure à la source froide est égale à 2 461 MJ. Si on limite l'augmentation de température entre la prise et le rejet de l'eau à 7 °C, il faut un débit de :

$$\frac{2\,461 \times 10^6}{4{,}1855 \times 10^3 \times 3\,600 \times 7} = 23{,}3 \text{ m}^3/\text{s}$$

(la masse volumique de l'eau est égale à 1 000 kg/m³).

Pour une centrale à quatre tranches de 600 MW, il faut donc un débit de 95 m³/s ; ce qui est très supérieur au débit d'étiage de bien des cours d'eau français ainsi que le montre le tableau ci-après :

Cours d'eau	Stations	Q_{min} (mètres cubes par seconde)	Q_{moy} (mètres cubes par seconde)
Seine	Montereau	19	180
	Paris	35	320
	Mantes	55	425
	Rouen	70	500
Marne	Confluent	10	104
Oise	Compiègne	15	80
	Pontoise	15	90
Loire	Orléans	8	345
	Avoine (Chinon)	50	500
	Montjean	75	840
Garonne	Malauze	74	450
	Mas d'Agenais	46	600
Rhône	Lyon	120	640
	Donzère	470	1 450
Saône	Chalon	20	300
Durance	Pont-Mirabeau	26	185
Moselle	Thionville	22	160
Meuse	Givet (Chooz)	21	100
Rhin	Strasbourg	360	1 080

Q_{min} : débit d'étiage minimal connu à la station.
Q_{moy} : débit moyen annuel à la station.

On conçoit donc que le problème du choix du site d'implantation d'une centrale soit de plus en plus difficile, d'autant plus que les centrales thermiques ne sont pas les seules à contribuer au réchauffage des eaux des rivières.

Il est aussi possible d'implanter une centrale thermique en bordure de lac, mais celui-ci doit être de grande surface ; on estime qu'il faut une superficie de plan d'eau voisine de 0,5 ha/kWh installé, si l'on veut avoir une réfrigération sans recirculation d'eau chaude.

Pour ces raisons, on installe de plus en plus les centrales électriques en bordure de mer. Cependant l'utilisation de l'eau de mer pose de graves problèmes tels que ceux résultant de la corrosion des tubes du condenseur. Un autre inconvénient peut se présenter : la prolifération des moules et autres coquillages qui viennent tapisser les parois des conduites d'amenée d'eau allant jusqu'à les obturer. Pour empêcher ce phénomène il faut que l'eau circule à une vitesse supérieure à 2 m/s, et périodiquement, on envoie du chlore dans le circuit d'eau de réfrigération pour détruire les coquillages (à la centrale de Dunkerque qui comporte quatre tranches de 125 MW, on a installé une station d'essai pour réaliser la chloration de l'eau par électrolyse de l'eau de mer). On envisage également de les éliminer en bouclant le rejet sur la prise d'eau et en faisant circuler l'eau en cycle fermé pour que la température augmente jusqu'à une valeur qu'ils ne peuvent supporter, et cela de façon périodique.

Un circuit ouvert de circulation d'eau de réfrigération d'un condenseur à échange par surface comprend essentiellement :

1.1. Un ouvrage de prise d'eau en rivière ou en mer. — Il possède une grille de dégrossissage à barreaux verticaux ou légèrement inclinés. En général, l'eau est prise en profondeur car c'est là qu'elle est la plus froide. Suivant la géographie du lieu, cet ouvrage peut faire directement partie de la station de pompage ou bien y être relié par des conduites préfabriquées par tronçons ou coulées sur place, ou par un canal à ciel ouvert.

1.2. Une station de pompage

Une grille fine retient toutes les matières de petites dimensions, brindilles, feuilles, papiers, etc., susceptibles d'obstruer les tubes du condenseur. Cette grille peut se présenter sous forme d'un tambour tournant ou d'une grille rotative à panneaux filtrants. Les dimensions des mailles de cette grille sont de 4 à 5 mm. Elle est lavée continuellement par de l'eau sous pression et les saletés sont recueillies dans un caniveau d'évacuation. En cas de colmatage et pour éviter que la pression de l'eau ne provoque des avaries, ces grilles sont munies d'un clapet qui s'ouvre sous une certaine pression, et qui laisse passer l'eau directement sans filtrage.

Une ou plusieurs pompes de circulation aspirent l'eau derrière la grille et la refoulent dans le condenseur par l'intermédiaire d'une conduite. Ces pompes d'un gros débit ont une faible pression de refoulement.

Une conduite de détournement (by-pass), généralement fermée, sert par grands froids à renvoyer l'eau réchauffée du rejet vers l'ouvrage de prise d'eau ; cela permet d'éviter la formation de glace sur les grilles.

1.3. Une conduite ou un canal de rejet. — Sa longueur varie en fonction de l'éloignement nécessaire entre l'ouvrage de prise d'eau et l'ouvrage de rejet d'eau pour éviter la recirculation de l'eau chaude. Il est terminé par un ouvrage de rejet d'eau, conçu de manière à ne pas perturber le cours de la rivière (affouillement, navigation).

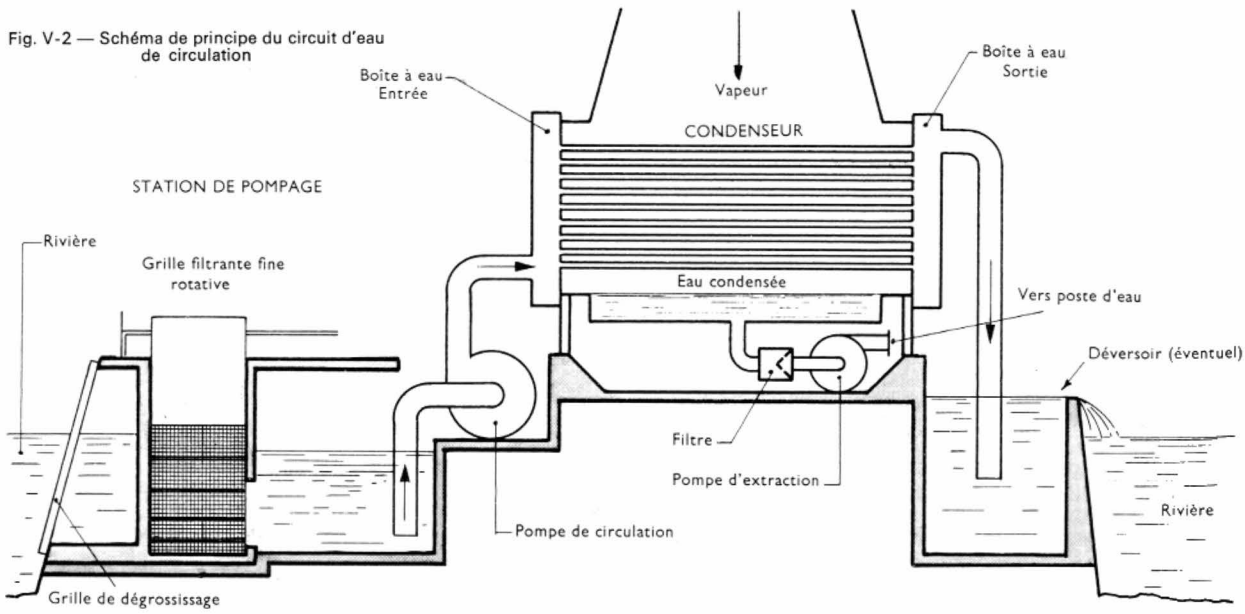
1.4. Principe de fonctionnement (fig. V-2). — Le niveau d'implantation du condenseur a une grande influence sur la conception de la salle des machines, et particulièrement sur le niveau supérieur de la table du groupe. Le niveau général de la plate-forme de la centrale, ou niveau zéro, est généralement fixé à 25 cm au-dessus du niveau atteint par l'eau lors des plus fortes inondations enregistrées. L'eau entre dans la partie basse de la boîte à eau et sort dans la partie haute de l'autre boîte à eau afin de faciliter l'évacuation de l'air lors de l'amorçage du siphon, car pour limiter la hauteur de refoulement des pompes, on fait fonctionner le circuit en siphon. La hauteur théorique que l'eau peut atteindre dans un siphon du fait de la pression atmosphérique est de 10,33 m mais en pratique, on est limité à une hauteur de 9 m ; on cale donc le niveau supérieur de la veine d'eau circulant dans le condenseur à 9 m. Compte tenu du niveau zéro de la centrale, le condenseur sera plus ou moins enfoncé, ce qui a des conséquences importantes sur le coût du génie civil.

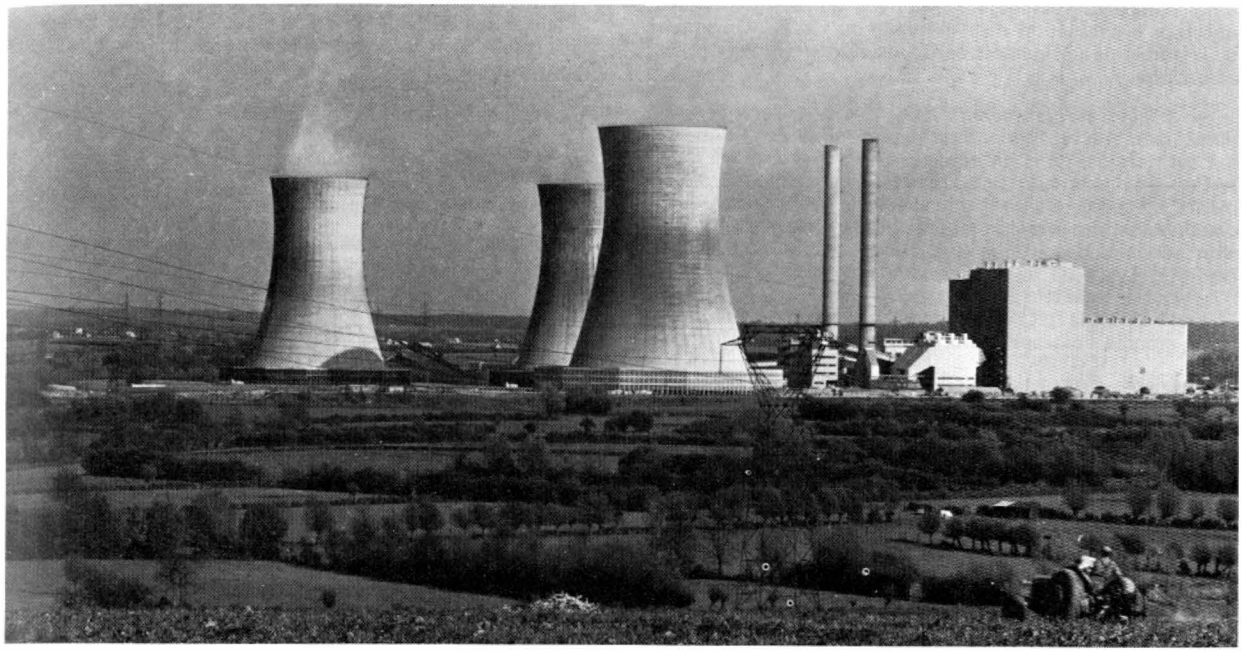
On amorce le siphon en faisant le vide dans le circuit à l'aide de pompes à vide ou d'éjecteurs. Pour assurer le débit, les pompes de circulation doivent simplement vaincre les pertes de charges suivantes :

— Pertes de charge à travers la grille fine.
— Pertes de charge dans la conduite d'amenée éventuelle.
— Pertes de charge dans le refoulement au condenseur.
— Pertes de charge (les plus importantes) dans le condenseur.
— Pertes de charge dans la conduite de rejet.

et compenser la charge due à la différence des niveaux amont et aval du siphon (causée par les pertes de charge en amont des pompes).

Fig. V-2 — Schéma de principe du circuit d'eau de circulation





Pont-sur-Sambre : réfrigérants atmosphériques (*Bérenger-É.D.F.*)

En ce qui concerne le rejet il faut bien voir que le niveau du bassin de rejet doit se trouver à moins de 9 m du niveau supérieur du condenseur. En effet, s'il en était autrement, le siphon fonctionnerait en déversoir pendant un certain temps, en laissant un vide entre le niveau supérieur du siphon et le haut de la colonne de 9 m (sensiblement équilibrée par la pression atmosphérique dans le rejet). Mais dans ce vide, il y a un dégagement de l'air dissous dans l'eau et la pression partielle de l'air augmente dans le haut du siphon jusqu'au désamorçage. Si le niveau du bassin de rejet est supérieur à 9 m, il faut donc prévoir un bassin intermédiaire à l'air libre avec déversoir.

1.5. Les réfrigérants atmosphériques. — Les réfrigérants atmosphériques peuvent se classer en deux catégories : les réfrigérants humides et les réfrigérants secs.

1.5.1. Les réfrigérants humides (fig. V-3). — L'eau chaude de circulation venant du condenseur est mise directement en contact avec l'air ambiant. Les échanges thermiques, refroidissement de l'eau et réchauffement de l'air, se font par convection et par évaporation.

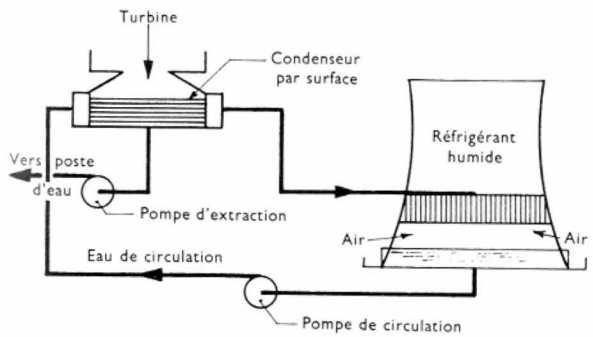


Fig. V-3 — Circuit d'eau de circulation avec réfrigérant atmosphérique

1° *Les réfrigérants à tirage naturel.* — La circulation de l'air est assurée par le tirage naturel d'une tour de grande hauteur et de grand diamètre, ayant généralement la forme d'un hyperboloïde de révolution. Le groupe 250 MW de la centrale de Pont-sur-Sambre est équipé d'une tour de réfrigération de 110 m de haut, de 102 m de diamètre à la base et de 81,80 m au sommet. L'eau de réfrigération est dispersée dans cette tour :

— Soit à l'aide d'un système de plaques (en bois traité ou en fibrociment) disposées verticalement et sur les deux faces desquelles ruisselle un film d'eau chaude le plus régulier possible.

— Soit par un ensemble de lattes (en bois traité ou en fibrociment), placées en quinconce et sur lesquelles l'eau rebondit en gouttelettes pendant sa chute.

Ces réfrigérants ont l'avantage de permettre l'implantation d'une centrale en un lieu où l'eau est rare. Les buées dues à l'évaporation sont émises à grande hauteur, et elles ne gênent pas trop le voisinage. Avec de telles installations on évite les ouvrages de prise et de rejet d'eau mais la construction de la tour et l'adjonction d'un circuit d'eau traitée, pour compenser les pertes d'eau par évaporation, nécessitent des investissements très importants. Par exemple, il faut environ 500 m³ d'eau d'appoint par heure pour la réfrigération d'un groupe de 250 MW, ce qui représente 1,5 % du débit nominal du réfrigérant.

2° *Les réfrigérants à tirage forcé.* — La circulation de l'air est assurée par des ventilateurs, ce qui permet de s'affranchir des conditions atmosphériques. Dans ce cas, les investissements de génie civil sont beaucoup plus petits. En revanche, cette installation nécessite une dépense d'énergie supplémentaire pour l'alimentation des motoventilateurs et ceux-ci présentent l'inconvénient d'être une source de bruit. Par ailleurs, les buées sont émises à une altitude relativement basse, et cela peut être gênant pour le voisinage (brouillards givrants, pollution des isolateurs).

Le choix entre ces deux types de réfrigérant est surtout un choix économique résultant d'une comparaison entre les frais d'investissement d'une part, et les dépenses supplémentaires en énergie, d'autre part. En France, la tendance actuelle est favorable aux réfrigérants à tirage naturel. Bien qu'aux États-Unis d'Amérique on prévoie des tours de réfrigération pour des puissances de 1 000 MW, l'utilisation de réfrigérants atmosphériques humides est limitée en France aux groupes de 250 MW (environ 31 000 m³/h), pour des raisons économiques.

1.5.2. Les réfrigérants secs. — Pour éviter d'avoir à compenser la perte d'eau par évaporation (il faut apporter une certaine quantité d'eau traitée), on a réalisé des réfrigérants atmosphériques où l'eau à refroidir n'est plus en contact avec l'air. Le système de dispersion est alors

remplacé par un échangeur à surface qui est placé dans une tour à circulation d'air naturelle ou forcée. On utilise deux sortes de réfrigérants secs : les *aéroréfrigérants* et les *aérocondenseurs*.

1° *Les aéroréfrigérants* (fig. V-4). — Dans ce système, inventé en Hongrie, c'est l'eau condensée elle-même qui est refroidie dans un échangeur à surface, placé dans le flux d'air extérieur. Cet échangeur est composé d'éléments de tubes d'aluminium ailetés. L'eau condensée y circule sous une pression légèrement supérieure à la pression atmosphérique pour éviter toute entrée d'air en cas de fuite. Avant de revenir au condenseur, la pression de l'eau est ramenée à la pression de condensation.

Pour cela on la fait travailler dans une turbine de récupération montée sur le même arbre que la pompe de circulation.

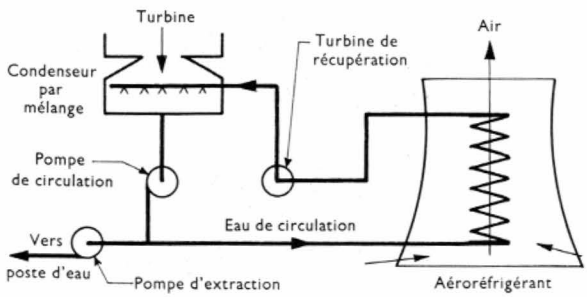


Fig. V-4 — Circuit d'eau de circulation avec aéroréfrigérant

Comme on utilise directement l'eau condensée en circuit séparé à la place d'eau brute, comme dans les autres systèmes, on peut se servir alors d'un condenseur à mélange (le fonctionnement de ce type de condenseur a été décrit dans le paragraphe consacré au dégazeur du poste d'eau).

Ce système présente l'avantage de permettre une forte réduction de l'encombrement du condenseur, ce qui a une incidence sur le prix du génie civil de la salle des machines. De même, le diamètre des tuyauteries de circulation est réduit. En revanche, ce condenseur à mélange est assez délicat à réaliser.

2° *Les aérocondenseurs* (fig. V-5). — Le condenseur principal est mis directement dans la tour de réfrigération. Il est composé d'éléments ou tubes ailetés. Avec cette disposition on gagne donc un échangeur et l'énergie de pompage du fluide de réfrigération. En revanche, l'aérocondenseur a un encombrement très important, et il pose des problèmes délicats pour la réalisation des tuyauteries.

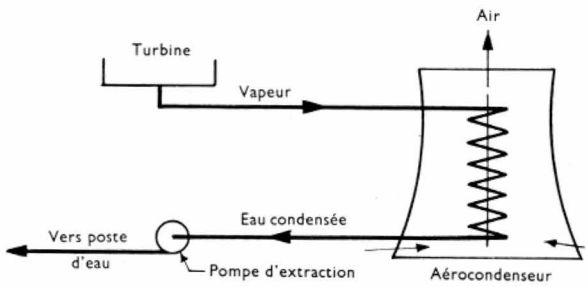


Fig. V-5 — Circuit d'eau de circulation avec aérocondenseur

En effet, la vapeur basse pression a un grand volume massique : cela oblige à avoir des tuyauteries de grand diamètre, qui doivent être très étanches à cause du vide. En France, il n'y a pas de centrale thermique en service qui utilise des aérocondenseurs. On en trouve pour des unités de puissance moyenne en Italie et en Allemagne.

Dans une centrale espagnole, un groupe de 160 MW comporte une batterie de 48 aérocondenseurs, disposés sur la toiture de la salle des machines. Cela semble être la limite actuelle pour l'utilisation de ce type de réfrigérant.

1.6. Réfrigération mixte. — Pendant les périodes d'étiage où le débit d'eau du fleuve ou de la rivière est insuffisant pour assurer un refroidissement dans des conditions normales, donnant une température de l'eau de rejet acceptable, on peut associer un réfrigérant atmosphérique monté, soit en série, soit en parallèle sur un circuit ouvert. La durée annuelle d'utilisation de ce réfrigérant étant en général faible, on installe un réfrigérant à tirage forcé dont l'investissement est le plus faible, et pour lequel le coût de l'énergie de ventilation joue un rôle peu important.

1.7. Traitement des eaux de circulation en circuit fermé. — Pour éviter l'entartrage des tubes des condenseurs par des carbonates insolubles (dus à la transformation des bicarbonates à la suite de l'échauffement de l'eau dans ces tubes et du dégagement du gaz carbonique), les eaux d'appoint sont traitées dans un décanteur à l'aide de chaux. Cette chaux transforme les bicarbonates en carbonates insolubles qui se déposent dans le décanteur, et on ajoute une faible quantité d'acide pour rendre soluble les carbonates qui peuvent rester dans l'eau.

2. LE CIRCUIT D'EAU DE RÉFRIGÉRATION

Pour chaque tranche est prévu un circuit d'eau de réfrigération appelé *circuit noria*. Alimenté en eau déminéralisée, il assure le refroidissement des différents réfrigérants suivants :

— Réfrigérants d'eau de refroidissement du stator de l'alternateur.
— Réfrigérants de l'hydrogène de l'alternateur.
— Réfrigérants de l'huile d'étanchéité de l'alternateur.
— Condenseurs des buées des étanchéités de la turbine.
— Réfrigérants de l'huile de graissage de la turbine.
— Réfrigérants de l'huile de régulation de la turbine.
— Réfrigérants de l'huile de graissage centralisé.
— Réfrigérants de l'huile de graissage des compresseurs.
— Réfrigérants des compresseurs.
— Réfrigérants des caméras de télévision du foyer.

Ce circuit est mis en charge par une bâche située en élévation, et la circulation est assurée par des pompes qui doivent simplement vaincre les pertes de charge dans le circuit.

3. LES CIRCUITS D'EAU BRUTE ET D'INCENDIE

Dans une centrale, on a besoin d'avoir de l'eau pour différents usages tels que : l'alimentation des presse-étoupes des pompes, le lavage de grilles rotatives et l'alimentation du poste de distillation. Cette eau est généralement prise en rivière au moyen de pompes, situées dans la station de pompage du circuit d'eau de circulation ; elle est filtrée à l'aide de filtres rotatifs à nettoyage automatique. On se sert aussi d'eau non filtrée pour l'évacuation des cendres dans le cas de cendriers hydrauliques. Il existe également une bouche d'eau brute pour la lutte contre l'incendie. Ces circuits d'eau brute sont généralement mis en charge par une bâche importante (200 m^3) placée dans le haut de la chaufferie.

4. LES AUXILIAIRES ÉLECTRIQUES

4.1. Schémas d'alimentation haute tension des transformateurs auxiliaires. — Il y a généralement dans une centrale thermique deux transformateurs pour l'alimentation des auxiliaires électriques d'une tranche de production. L'un est branché en soutirage à la sortie de l'unité de production, l'autre est branché sur un réseau extérieur différent de celui qui part de la centrale, cela pour avoir des sources d'énergie indépendantes. Ce dernier transformateur alimente les auxiliaires généraux communs à deux tranches. Lorsque les tableaux des auxiliaires de la tranche et ceux des auxiliaires généraux sont couplés, il n'y a qu'un seul transformateur qui les alimente. Le passage d'un transformateur sur l'autre est appelé *basculement de source*.

Pendant le changement, les deux transformateurs ne doivent pas être mis en parallèle (limitation du pouvoir de coupure du disjoncteur de couplage).

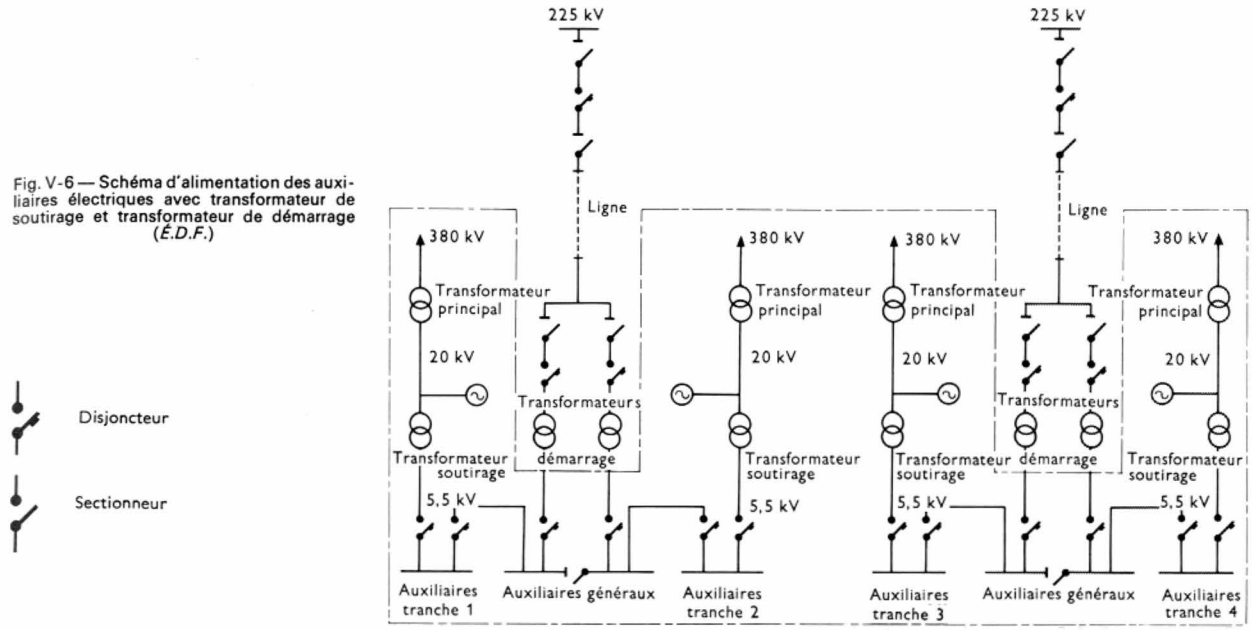


Fig. V-6 — Schéma d'alimentation des auxiliaires électriques avec transformateur de soutirage et transformateur de démarrage (*É.D.F.*)

Pour l'alimentation des auxiliaires, les primaires des transformateurs sont branchés :

— l'un, sur le réseau électrique extérieur (90 kV, 63 kV ou même 15 kV) ;

— l'autre, par soutirage sur les gaines coaxiales à la sortie de l'alternateur, c'est-à-dire sous une tension de 20 kV.

Le *transformateur auxiliaire de soutirage* ou de *tranche* peut être branché sous la tension de 20 kV de deux façons différentes :

1° Il forme un ensemble inséparable avec l'alternateur et le transformateur principal : il peut donc alimenter les auxiliaires de tranches et les auxiliaires généraux uniquement lorsque le groupe est en fonctionnement. Lorsque le groupe est à l'arrêt, il est lui-même hors tension : il ne peut pas alimenter les auxiliaires généraux ni les auxiliaires de la tranche au cours du démarrage (fig. V-6).

Dans ce montage, le transformateur branché sur la source extérieure doit alimenter les auxiliaires généraux et doit pouvoir assurer le démarrage de la tranche. On l'appelle alors *transformateur de démarrage* et il a la même puissance que le transformateur de tranche.

2° On intercale entre l'alternateur et le transformateur des auxiliaires un *interrupteur-enclencheur* ou *coupleur* (fig. V-7). Lorsque le groupe est à l'arrêt, le transformateur des auxiliaires est alimenté par le transformateur principal, lui-même alimenté par la ligne de départ. Il peut donc assurer l'alimentation des auxiliaires généraux et la fonction de démarrage de la tranche. Dans ce cas, le transformateur branché sur le réseau extérieur est alors *un transformateur de réserve* de bien plus faible puissance (10 à 15 %) qui est utilisé uniquement pour l'alimentation des auxiliaires généraux pendant un arrêt du transformateur de soutirage pour entretien, par exemple. Cette disposition est évidemment plus économique, mais le coupleur est un appareil d'un fonctionnement assez délicat.

Le secondaire de ces transformateurs alimente un jeu de barres sous une tension de 5,5 kV.

4.2. Décomposition des auxiliaires électriques (fig. V-8). — Le principe de la séparation en tranches

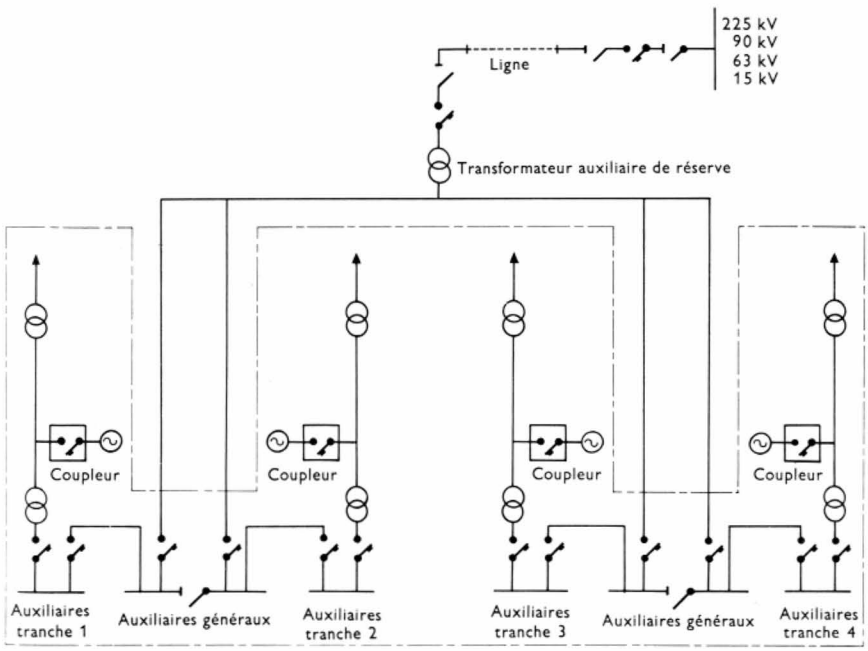


Fig. V-7 — Schéma d'alimentation des auxiliaires électriques avec coupleur et transformateur de réserve (*É.D.F.*)

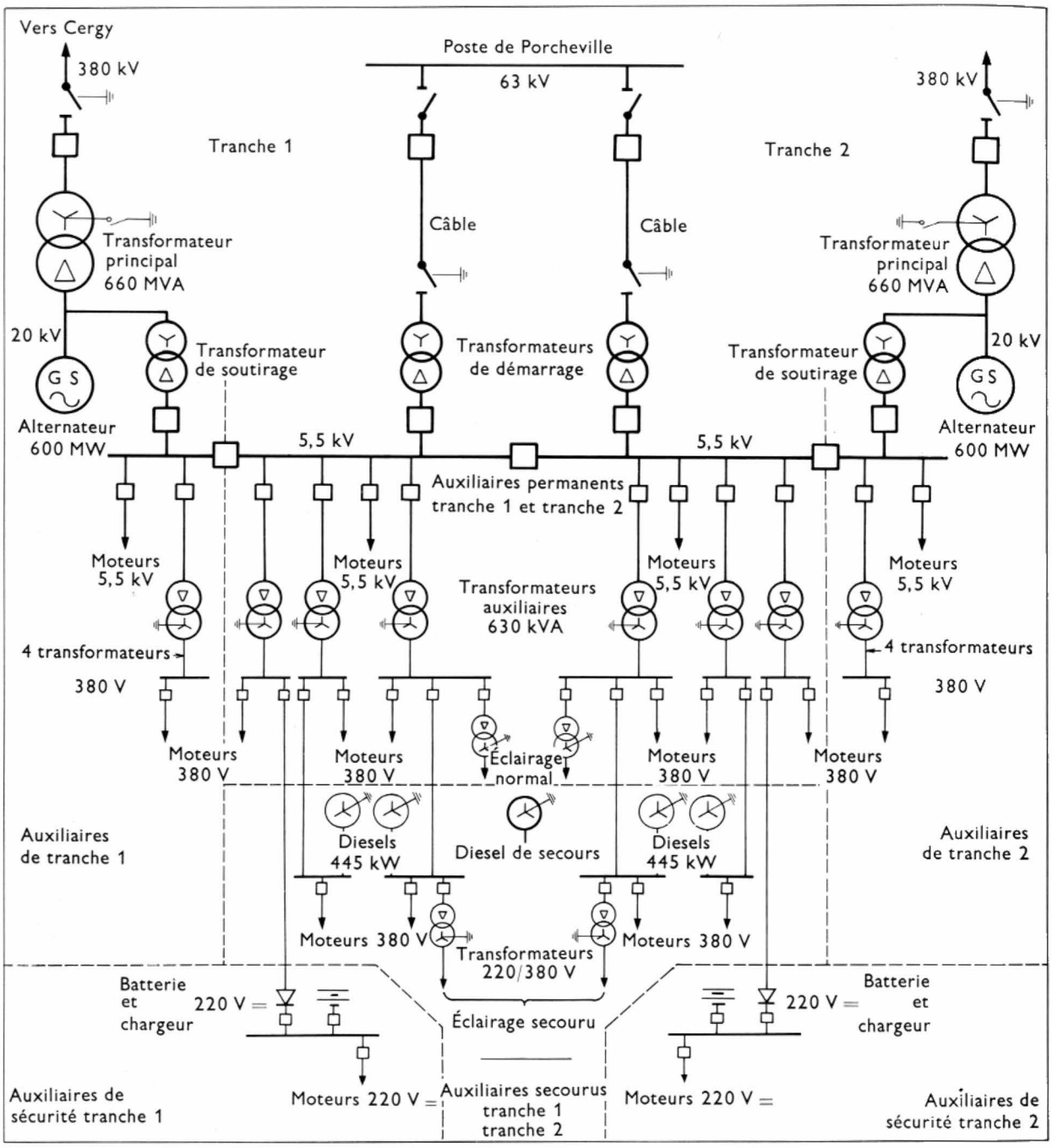


Fig. V-8 — Principe d'alimentation des auxiliaires électriques de la centrale de Porcheville B (*É.D.F.*)

indépendantes, par unité de production, au sein d'une même centrale, est également respecté pour les auxiliaires ; toutefois les jeux de barres 5,5 kV peuvent être couplés en cas de besoin. L'énergie absorbée par les auxiliaires représente environ 4 % de l'énergie totale produite par la centrale.

Les services auxiliaires sont décomposés en :

1° *Auxiliaires de tranche*, qui comprennent tous les matériels assurant la marche de la tranche.

2° *Auxiliaires généraux*, communs à toutes les tranches et qui sont alimentés par le transformateur branché sur le réseau extérieur à la centrale (transformateur de réserve ou transformateur de démarrage lorsqu'il n'y a pas de coupleur).

3° *Auxiliaires secourus*, qui comprennent les auxiliaires, propres à chaque tranche, nécessaires pour assurer l'arrêt de la tranche sans dommage matériel après un incident. Ils sont dits secourus parce qu'en cas de disparition complète des sources normales d'alimentation des auxiliaires, ils sont alimentés par des groupes électrogènes Diesel à démarrage automatique (un groupe par tranche). Par exemple, le graissage du groupe turbo-alternateur est assuré par deux pompes : la première, alimentée comme auxiliaire de tranche, assure le graissage pendant le service normal, démarrage et arrêt compris ; la seconde, branchée sur le circuit secouru, assure le graissage pendant la descente en vitesse du groupe en cas de disparition des alimentations normales des auxiliaires.

4° *Auxiliaires de sécurité* qui assurent un deuxième secours et doivent permettre un arrêt de la tranche, sans dommage pour le groupe, en cas de disparition complète des sources normales et des sources secourues par les

groupes électrogènes, ou en cas d'avarie du matériel auxiliaire secouru (qui devrait assurer l'arrêt du groupe). La pompe à courant continu prévue pour le graissage du groupe est un exemple de ce genre d'auxiliaire de sécurité. Ces auxiliaires sont alimentés sous une tension continue (230 V ou 125 V) à partir d'une batterie d'accumulateurs — une par tranche — montée en parallèle avec un redresseur marchant en *floating* (V. t. 2, Transport et distribution de l'énergie électrique, chap. 12).

4.3. Tableaux des auxiliaires de tranche. — L'importance de la puissance nécessaire à l'alimentation des tranches a conduit à l'emploi généralisé :

— De jeux de barres 5,5 kV, sous gaines, pour le branchement de transformateurs 5 500/380 V.

— D'appareillage standardisé (en moyenne et en basse tension) et réuni sous forme de tableaux à éléments *débrochables* identiques et souvent interchangeables afin de réduire le stock des pièces de rechange (fig. V-9).

— De disjoncteurs à pouvoir de coupure élevé (500 MVA en 5,5 kV).

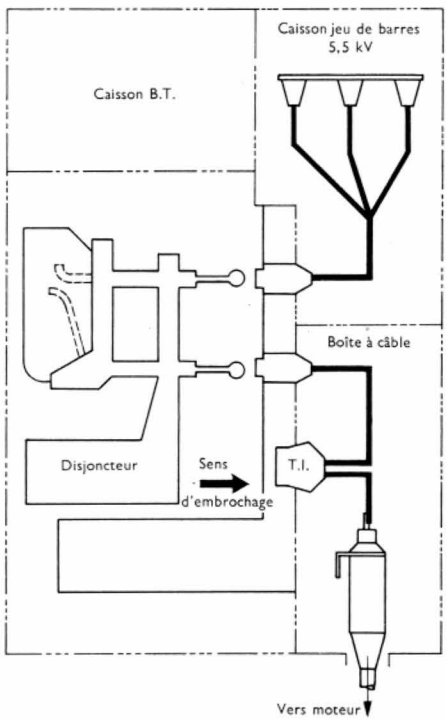


Fig. V-9 — Schéma de principe d'un disjoncteur débrochable (*É.D.F.*)

On distingue généralement :

1° *Les tableaux moyenne tension alternative 5,5 kV* (M.T.), qui alimentent tous les moteurs à moyenne tension. Ce sont tous les moteurs asynchrones à cage d'écureuil (V. t. 1, Électrotechnique, chap. 12) qui démarrent à pleine tension et entraînent notamment :

— La pompe de circulation d'eau brute du condenseur.
— Les pompes à air du condenseur.
— Les pompes alimentaires.
— Les ventilateurs de soufflage de l'air de la chaudière.
— Les ventilateurs de tirage des gaz chauds de la chaudière.
— Les ventilateurs de recyclage.
— Les broyeurs à charbon.
— Les compresseurs de ramonage.

Quelques départs du tableau 5,5 kV alimentent les transformateurs 5 500/380 V qui desservent les tableaux auxiliaires basse tension.

2° *Les tableaux basse tension alternative 380 V* (B.T.). — Ces tableaux *ouverts* ou *fermés* peuvent être rassemblés dans un local ou dans plusieurs locaux. Ils peuvent aussi être installés à proximité des auxiliaires à alimenter ; ils se présentent alors sous forme de tableaux *blindés*. Ils sont protégés par des disjoncteurs et alimentés par l'intermédiaire de transformateurs toujours placés près d'eux, les primaires de ces appareils étant connectés par câbles au tableau 5,5 kV.

Ces tableaux alimentent par exemple :

— Le matériel nécessaire à la préparation du combustible et à l'alimentation des brûleurs.
— Les ramoneurs.
— Les dépoussiéreurs.
— Les vannes motorisées.
— Le vireur de la turbine.
— Les auxiliaires du circuit d'huile de la turbine.
— Les auxiliaires du circuit de réfrigération de l'alternateur.
— Le matériel d'extraction des déchets (cendres volantes, mâchefers).
— Les pompes d'appoint d'eau distillée.

3° *Le tableau des sources de contrôle et de signalisation.* — Il est alimenté par un tableau 380 V, et a un rôle très important. Il groupe les générateurs à courant continu avec leurs tableaux et les départs qu'ils alimentent, et comprend aussi le tableau 127 V alternatif utilisé pour différents appareils de mesure et de signalisation.

4.4. Tableaux des auxiliaires généraux. — Ils sont branchés sur le transformateur de réserve (ou de démarrage). De conception identique à celle des auxiliaires de tranche, ils sont aussi équipés de disjoncteurs ou contacteurs, débrochables et sont composés de tableaux 5,5 kV et 380 V.

On trouve par exemple :

— Les tableaux alimentant les compresseurs d'air pour les besoins généraux de la centrale.
— Les tableaux des auxiliaires de la manutention des combustibles.
— Le bouclage avec le tableau des auxiliaires de tranches.
— Le tableau d'éclairage.

Ce tableau est indépendant et est raccordé directement au 5 500 V par un transformateur. Les différents départs sont alimentés en 220 V monophasé. Les deux tiers des foyers lumineux sont alimentés à partir de ce tableau.

Remarque : Pendant son fonctionnement normal, la centrale débite sur le réseau général d'interconnexion. Pour des raisons d'exploitation, par exemple, en cas d'incident sur le réseau faisant tomber la fréquence à 46 Hz, la centrale doit pouvoir être isolée sans pour cela s'arrêter afin de pouvoir reprendre sa charge très rapidement : on pratique l'*îlotage* sur les auxiliaires. La puissance minimale fournie par le groupe doit donc être inférieure, ou égale, à celle que peuvent absorber les auxiliaires. Cette condition est de plus en plus difficile à obtenir avec l'accroissement de la puissance des unités.

5. LE TRAITEMENT DES EAUX POUR L'ALIMENTATION DU GÉNÉRATEUR DE VAPEUR

Avant de décrire succinctement une chaine de traitement de l'eau, nous allons rappeler quelques définitions de termes qui interviennent dans les analyses des eaux, et qui les caractérisent.

— Une *solution normale* d'un corps contient un *équivalent-gramme* de ce corps par litre de la solution. L'équivalent-gramme est le quotient de la *masse moléculaire* du corps et de la *valence* du composant du corps pouvant se combiner avec l'hydrogène. L'unité légale de concentration du corps, ou *titre* de la solution, est *l'équivalent*, mais cette unité étant trop importante, on utilise le milliéquivalent (10^{-3} équivalent).

En France, on a l'habitude de caractériser une solution par le *degré français* qui est la fraction $\frac{1}{5}$ du milliéquivalent (ou la fraction $\frac{1}{5\,000}$ de la solution normale).

— La *dureté* de l'eau est mesurée par le degré *hydrotimétrique* (TH) indiquant la teneur de l'eau en sels de

calcium et en sels de magnésium. Une dureté de 1° TH indique une concentration de 10 mg/l de carbonate de calcium ($CaCO_3$), ce qui correspond, pour ce sel, à 1° français.

— Le titrage de la concentration en sels alcalins (sodium, potassium) est donné par le degré *alcalimétrique* (TA) ; 1° TA correspond à une concentration de 10,6 mg/l de carbonate de sodium (Na_2CO_3), soit également à 1° français.

— L'*indice de Sorensen* ou *pH*, indique la concentration C en cations H^+ et en anions OH^-. Ces deux espèces d'ions existent dans toutes les solutions aqueuses et les concentrations respectives C_{H^+} et C_{OH^-} obéissent à la loi d'action de masse :

$$[C_{H^+}] . [C_{OH^-}] = k_{H_2O}$$

Le produit ionique dépend de la constante ionique k de l'eau, variable avec la température (à 22 °C, $k_{H_2O} = 10^{-14}$). Pour l'eau pure, $C_{H^+} = C_{OH^-} = 10^{-7}$, c'est la caractéristique de la neutralité de l'eau ou d'une solution aqueuse (V. t. 2, Électrochimie, chap. 3).

$C_{H^+} > 10^{-7} \Rightarrow C_{H^+} > C_{OH^-}$: la solution est acide.

$C_{H^+} < 10^{-7} \Rightarrow C_{H^+} < C_{OH^-}$: la solution est basique.

L'indice pH d'une solution aqueuse est par définition le cologarithme de la concentration. Par exemple :

$$pH = \text{colog } 10^{-6} = \log 10^6 = 6$$

— Échelle acido-basique.

C_{H^+}	pH	Acidité
1	0	très fortement acide
10^{-1}	1	fortement acide
10^{-2}	2	assez fortement acide
10^{-3}	3	modérément acide
10^{-4}	4	faiblement acide
10^{-5}	5	très faiblement acide
10^{-6}	6	à peine acide
10^{-7}	7	neutre
C_{H^+}	pH	Alcalinité
10^{-8}	8	à peine basique
10^{-9}	9	très faiblement basique
10^{-10}	10	faiblement basique
10^{-11}	11	modérément basique
10^{-12}	12	assez fortement basique
10^{-13}	13	fortement basique
10^{-14}	14	très fortement basique

La mesure du pH s'effectue soit par *colorimétrie* (à l'aide de réactifs colorés), soit par *électrométrie* en mesurant une force électromotrice avec des électrodes, dites de référence, à l'hydrogène ou au calomel (chlorure mercureux).

Installation du traitement de l'eau d'appoint. — Après un filtrage dans des microfiltres rotatifs auto-nettoyables, l'eau subit un prétraitement de coagulation, ou floculation, dans un *décanteur-coaguleur ;* il s'agit d'agglomérer les particules colloïdales très fines (micelles) qui passent à travers les microfiltres, à l'aide d'un coagulant qui produit dans l'eau un précipité volumineux très absorbant. Suivant le pH de l'eau, on utilise couramment un hydrate d'aluminium, $Al(OH)_3$, ou un hydrate ferrique, $Fe(OH)_3$. Cette opération est souvent combinée à la décarbonatation qui a pour but d'éliminer les sels incrustants. L'eau décantée contient encore de très fines particules, elle est donc à nouveau filtrée dans des filtres à sable. Après la décarbonatation et la filtration, il reste en solution du carbonate et du sulfate de sodium, de la soude, de la silice, dans des proportions qu'il faut réduire (la salinité maximale admissible pour une eau d'appoint est de l'ordre de 0,5 mg/l). Pour cela on utilise, soit la distillation dans des bouilleurs, soit l'épuration par *réaction d'échange d'ions* ou *permutation*.

La production d'eau déminéralisée à partir de bouilleurs engendre de gros frais d'entretien et présente des inconvénients d'exploitation. La déminéralisation totale par échangeur d'ions est d'une plus grande souplesse, elle fournit de l'eau de grande qualité et est d'un entretien moins onéreux. Ces échangeurs d'ions sont des résines qui cèdent leurs ions mobiles soit contre les cations (résine cationique) soit contre les anions (résine anionique) en solution dans l'eau.

En résumé, une installation de déminéralisation classique comprend donc :

— Une décantation-coagulation avec décarbonatation.
— Une filtration au sable.
— Une chaîne primaire composée de deux réservoirs contenant : le premier, une résine cationique, le deuxième, une résine anionique.
— Une chaîne secondaire de trois réservoirs contenant : le premier, une résine anionique désiliciante, le deuxième, une résine cationique de finition et le troisième, une résine anionique désiliciante de finition.

Le poste de préparation d'eau d'appoint de la centrale de Porcheville B, prévu pour l'alimentation de deux tranches de 600 MW, peut avoir une production journalière de 1 280 t d'eau déminéralisée ; elle est stockée dans un réservoir de 1 800 m^3. Il fournit une eau ayant les caractéristiques suivantes :

— Teneur en sels inférieure à 0,4 mg/l.
— Teneur en silice inférieure à 0,01 mg/l.

Le fonctionnement du poste (injection des réactifs, régénération des résines, nettoyage des filtres, etc.) est entièrement automatique.

6. AUXILIAIRES GÉNÉRAUX DIVERS

En plus des auxiliaires principaux qui viennent d'être décrits on trouve encore :

1° *Des compresseurs* alimentant un réseau d'air comprimé distribuant de l'air à 7 ou 8 bars pour la régulation et la commande et pour les besoins des ateliers.

2° *Une chaufferie auxiliaire* produisant de la vapeur destinée au réchauffage du fuel, à sa pulvérisation dans les brûleurs, au nettoyage et au refroidissement des brûleurs à l'arrêt et à l'alimentation des aérothermes et radiateurs de l'ensemble de la centrale.

À la centrale de Vitry-sur-Seine, cette chaufferie auxiliaire est située dans un local aménagé dans la partie inférieure de la cheminée des tranches 1 et 2. Elle comprend deux chaudières (dont une de secours) alimentées en fuel lourd n° 2 et ayant les caractéristiques suivantes :

— Timbre : 15 bars (valeur absolue).
— Pression normale : 13 bars (valeur absolue).
— Puissance calorifique nominale : 3 730 000 mth/h (15 592 MJ/h).
— Température vapeur surchauffée : 195 °C.

3° *Un central téléphonique.*

7. LA SALLE DE COMMANDE ET DE CONTRÔLE

Avec la conception des tranches unitaires complètement indépendantes les unes des autres, les organes de contrôle et de commande d'une tranche sont groupés le plus près possible de celle-ci. Cependant, pour des raisons d'économie, il n'y a qu'une salle de commande commune à deux tranches. Elle est située entre les deux tranches, au niveau du plancher de la salle des machines.

La salle de commande est largement vitrée pour que le *chef de bloc* ait une bonne vue d'ensemble de la salle des machines. Elle est étudiée spécialement pour être isolée du bruit et des vibrations. Elle est climatisée.

Chaque ensemble de commande et de contrôle, correspondant à une tranche, est nettement séparé de l'autre. Les appareils de contrôle et de commande sont répartis sur le *pupitre de commande* et sur le tableau secondaire, généralement situé contre le mur du fond de la salle. Le pupitre est composé :

— D'un plateau légèrement incliné sur lequel se trouvent les boutons poussoirs, ou les commutateurs, permettant la

Pupitre de commande de la centrale de Porcheville (*Bérenger-É.D.F.*)

mise en service des organes de commande des fonctions et des chaînes de régulation et les boutons d'arrêt d'urgence de la tranche.

— D'un dosseret (vertical ou incliné) où sont placés les indicateurs et les enregistreurs des grandeurs absolument nécessaires à la conduite de la tranche, et qui doivent être surveillées en permanence, et une partie des voyants lumineux de signalisation de défaut.

Le tableau secondaire regroupe les autres appareils de commande et de signalisation qui ne nécessitent pas des interventions fréquentes. Des voyants lumineux de signalisation indiquent en permanence l'état de fonctionnement des organes manœuvrés (vannes, registres, moteurs, etc.). Ce tableau comporte en outre des panneaux sur lesquels sont placés les synoptiques de l'alimentation en combustible, de l'alimentation en énergie des auxiliaires électriques et du poste électrique de départ.

7.1. Les automatismes. — Les opérations réalisées dans une centrale thermique peuvent se résumer en un ensemble de transformations d'énergies. Entre les divers appareils et machines où s'effectuent ces transformations, des transferts de flux énergétiques sont nécessaires. Or, toutes ces fonctions résultent de transferts de fluides, ou font appel à des opérations annexes utilisant elles-mêmes des transferts de fluides divers. Les circuits des fluides deviennent si complexes et ont tant d'incidences les uns sur les autres que même un personnel nombreux ne parviendrait pas à faire fonctionner une tranche de grande puissance. C'est le rôle des automatismes d'assurer la commande et la surveillance de ces transferts de fluides et de ces différentes transformations d'énergies. Par exemple, un seul appareil peut contrôler en permanence 200 à 300 températures différentes. À l'aide de ces automatismes, un seul chef de bloc assure la conduite d'une tranche depuis la salle de commande.

D'autre part, en cas d'incident, les chaînes de sécurité automatiques peuvent provoquer une alarme, ou un déclenchement partiel ou total, dans de très bonnes conditions de sécurité car elles sont moins sujettes à défaillance qu'un homme.

Les automatismes permettent aussi d'améliorer le rendement. À intervalles réguliers, la consommation spécifique réelle de la tranche est calculée et comparée à la consommation spécifique de base. Si elles sont différentes, on recherche les causes de l'écart, causes externes (température de l'air ou de l'eau) et causes internes (excès d'air, encrassement du condenseur, etc.) sur lesquelles on peut agir. L'appareillage, effectuant rapidement une telle comparaison, permet d'intervenir sur le matériel et d'améliorer ainsi le rendement.

Cependant, on ne peut développer indéfiniment les automatismes. Une extension importante des automatismes a peu d'influence sur le nombre des agents d'exploitation et de plus la fiabilité du matériel diminue avec l'augmentation des composants; par ailleurs, le prix augmente très rapidement si l'on veut du matériel de très haute qualité. Le point où doit s'arrêter l'automatisation fait l'objet de controverses.

7.2. Les automatismes de la centrale de Saint-Ouen. — La deuxième tranche de la centrale de Saint-Ouen, entièrement automatisée, est commandée et surveillée à l'aide d'un ordinateur. Celui-ci assure quatre missions fondamentales :

7.2.1. Démarrage et arrêt de l'installation. — Le calculateur élabore, d'une part, environ 600 ordres « tout ou rien » pour la commande des organes à l'aide de relais électromagnétiques et, d'autre part, 10 programmes analogiques qui modifient certains points de consigne de la régulation et assurent la montée en vitesse et en charge de la turbine. Le calculateur contrôle lui-même l'exécution des ordres « qu'il a donnés ».

7.2.2. Surveillance de la tranche en marche normale. — Les programmes journaliers de production sont introduits dans l'ordinateur et leur exécution est ainsi automatiquement contrôlée.

7.2.3. Traitement de l'information. — L'enregistrement des informations, à des fins statistiques, s'effectue sur une unité de mémoire à bande magnétique.

7.2.4. Calcul du bilan économique. — Les principaux écarts du bilan sont donnés chaque quart d'heure. Quotidiennement et mensuellement, le calculateur fournit les informations pour l'établissement des documents périodiques.

L'exemple de la centrale de Saint-Ouen n'a pas encore été généralisé dans les centrales thermiques. Cette installation sert de banc d'essai.

8. MANUTENTION DES DÉCHETS DE COMBUSTION

Un problème important se pose dans le cas des centrales thermiques à charbon. C'est celui de l'enlèvement et du stockage des déchets de combustion, cendres de foyer et cendres volantes des dépoussiéreurs.

8.1. Les cendres volantes. — Les cendres volantes possèdent des propriétés *pouzzolaniques*, c'est à-dire qu'elles s'agglomèrent et durcissent en s'hydratant comme un ciment. Chaque fois que cela est possible, ces cendres volantes sont vendues aux cimenteries les plus proches; elles s'en servent comme charge dans leurs ciments (*ciments aux cendres volantes*). Malheureusement, cette utilisation n'est pas toujours possible et il faut alors les

stocker. Pour des raisons de sécurité, il est difficilement possible de les mettre en tas, comme les résidus des mines avec lesquels on constitue des crassiers. En effet, malgré leurs propriétés pouzzolaniques, la tenue en tas des cendres volantes est très aléatoire ; le coefficient de frottement des particules mouillées est très faible (quand elles ne s'agglomèrent pas). De plus, la pénétration de l'eau de pluie à l'intérieur d'un monticule de cendres volantes peut engendrer des réactions chimiques donnant naissance à des poches de gaz susceptibles d'exploser. En général, on met donc les cendres dans des fosses que l'on surélève parfois avec des digues de terres ; ces fosses résultent souvent des emprunts de sable ou de gravier qui ont été prélevés sur le site de la centrale pour faire des remblais, ou pour établir la plate-forme générale au niveau convenable, ou pour fournir des agrégats pour la composition des bétons.

8.2. Les cendres de foyer. — Les propriétés des cendres de foyer dépendent beaucoup des qualités des charbons ; bien souvent, elles se présentent sous forme d'une pâte incandescente de mâchefer qui devient très dure en se refroidissant. On a essayé de broyer à sec ce mâchefer et d'envoyer, par voie pneumatique, les produits de broyage vers une décharge. Cette solution économique a donné des résultats satisfaisants (Champagne-sur-Oise) ; cependant, avec de mauvais charbons de nombreuses difficultés ont dû être surmontées, le mâchefer se solidifiant dans les engrenages des broyeurs. Pour cette raison, à la centrale de Vitry-sur-Seine par exemple, les chaudières sont équipées de *cendriers hydrauliques*. Le mâchefer incandescent tombe dans un réservoir d'eau froide, et au contact de l'eau il éclate en petits morceaux. Le cendrier, dont les parois sont revêtues de briques réfractaires, est divisé en quatre compartiments, munis chacun d'une vanne de vidange ; ils se déversent périodiquement dans un caniveau. Les cendres sont ensuite entraînées par de l'eau jusque dans un broyeur, puis reprises par un éjecteur alimenté par de l'eau sous pression (8 bars). Elles vont ainsi dans une fosse de décantation où elles sont reprises à l'aide d'un pont roulant, permettant un débit de 80 t/h ; elles sont dirigées alors vers une fosse d'essorage de 300 m³ avant d'être évacuées par camion. La production de cendres, variable avec le type de charbon, est de 7 à 10 t/h pour une tranche de 250 MW.

8.3. Extraction des cendres volantes à Vitry-sur-Seine (fig. V-10). — Les électrofiltres de Vitry-sur-Seine sont équipés à leur base de trémies de récupération des cendres volantes. Chacune de ces trémies (24 par tranche) est équipée à sa partie inférieure d'un injecteur de reprise, alimenté en air surpressé (pression effective : 0,65 bar). Les cendres sont transportées jusqu'à un récepteur de groupage (un pour six trémies), puis toujours par transport pneumatique, elles sont envoyées dans un silo de stockage de 600 m³. Sous l'effet de la détente et de la centrifugation, les cendres y sont séparées de l'air qui est renvoyé en amont des dépoussiéreurs dans le circuit des fumées. Chaque tranche produit environ 10 t/h de cendres.

Les cendres volantes peuvent être évacuées de quatre façons différentes :

1° Évacuation par voie hydraulique vers les fosses des sablières de Valenton, situées à 5 km de la centrale, au moyen de deux pompes d'un débit unitaire de 500 m³/h sous une hauteur manométrique de 60 mCE (mètre de colonne d'eau). La concentration en cendres est environ de 70 g/l.

2° Évacuation des cendres sèches par camions.

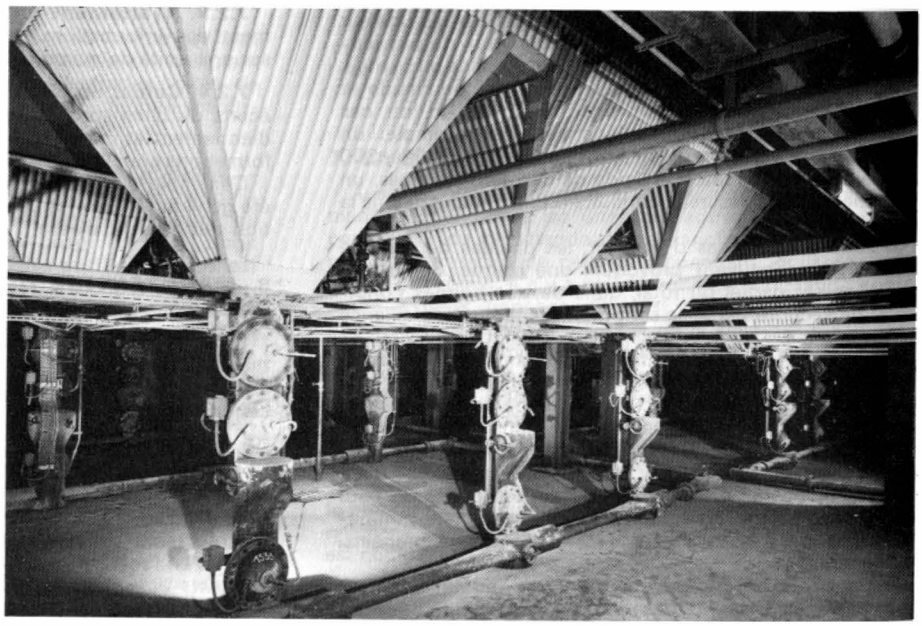
3° Évacuation des cendres humides par camions, à l'aide d'un tambour humidificateur et d'un transporteur à bande d'un débit de 60 t/h à 20 % d'eau.

4° Évacuation des cendres par péniches. Les cendres sont transportées par voie pneumatique sous une pression de 1,5 bar, dans deux silos d'une capacité unitaire de 750 m³ situés en bordure de Seine. Ces silos sont équipés d'un système de chargement de péniches de 600 t/h.

9. LES BÂTIMENTS ANNEXES

En plus du *bloc-usine*, composé principalement de la salle des machines, de la chaufferie et de la partie out-door, une centrale thermique comprend un ensemble de bâtiments annexes : les bureaux, les ateliers de réparation et les magasins.

Parmi les services installés dans les bâtiments annexes se trouve le *bureau des méthodes*. Celui-ci est placé sous la responsabilité de l'ingénieur-chef du service de l'entretien. Ce service a pour rôle d'organiser l'entretien de la centrale et tout particulièrement l'entretien préventif systématique du matériel. En effet, si l'on se contentait d'un entretien curatif fortuit, on risquerait de voir croître le nombre des incidents et d'avoir une indisponibilité des matériels, incompatible avec un fonctionnement économique de la centrale et la sécurité d'exploitation du réseau d'interconnexion. Cependant, il ne faut pas non plus accroître ces entretiens préventifs car l'arrêt d'une tranche, même en période creuse d'été, a des incidences économiques importantes, en particulier sur la rentabilité du matériel et des installations. Ce service a donc pour rôle de faire procéder à la mise en état du matériel au cours de périodes judicieusement choisies, et de réduire au minimum le coût des dépenses engagées pour ces travaux ainsi que les immobilisations des pièces de rechange stockées dans les magasins.



Trémies sous dépoussiéreurs
(*Morceau-É.D.F.*)

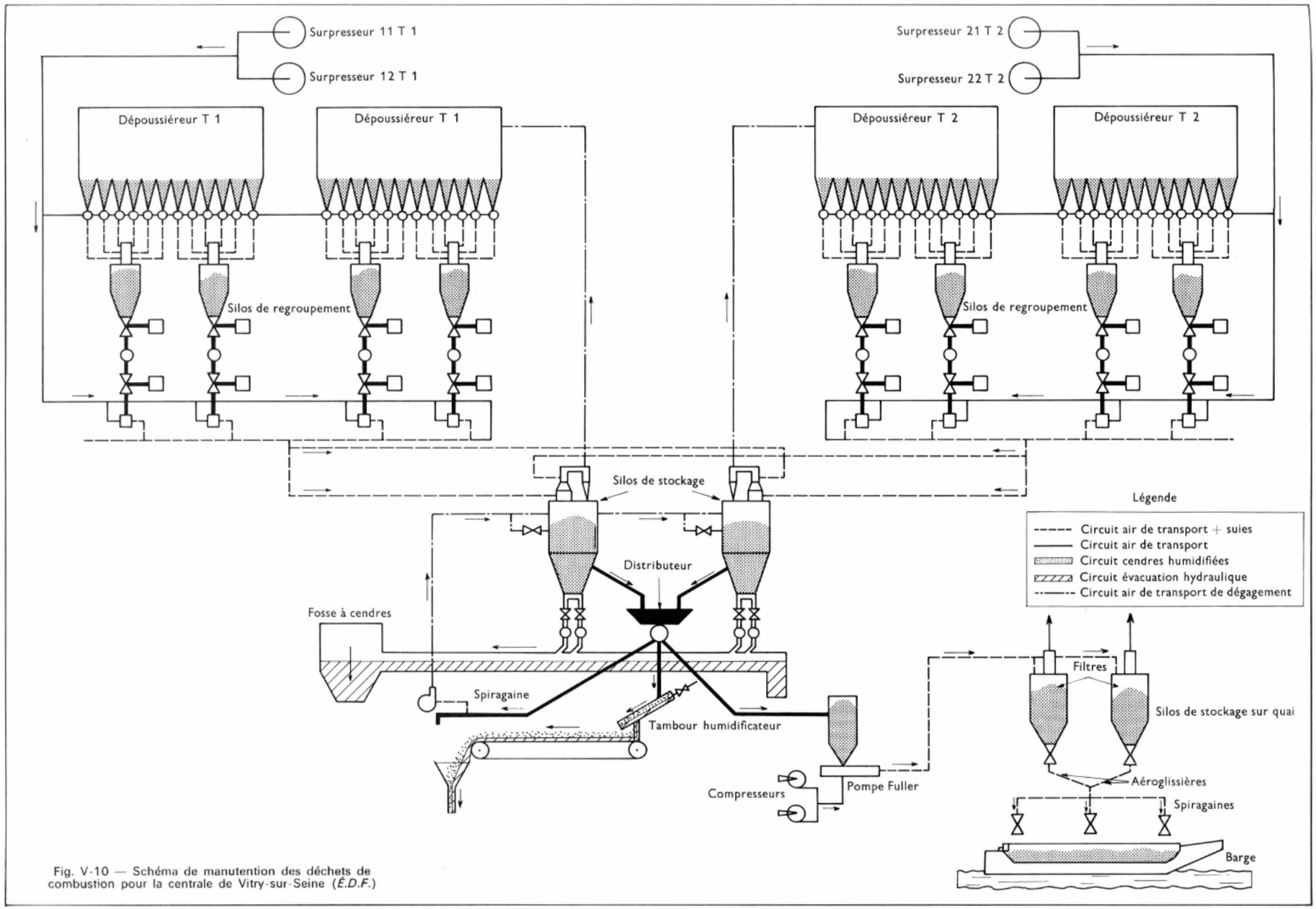


Fig. V-10 — Schéma de manutention des déchets de combustion pour la centrale de Vitry-sur-Seine (*É.D.F.*)

CHAPITRE VI

ÉVOLUTION DES CENTRALES THERMIQUES PRODUCTION D'ÉNERGIE DE POINTE

Depuis vingt ans, la recherche constante de l'abaissement du prix de revient du kilowattheure par la diminution des investissements et des charges d'exploitation, par l'amélioration du rendement et de la sûreté de l'exploitation, s'est concrétisée dans la réalisation de *paliers techniques*. Chaque palier technique, en permettant une certaine répétition des installations par une standardisation du matériel (malheureusement insuffisante si l'on considère le nombre de constructeurs par rapport au nombre de réalisations possibles), a permis une diminution du prix de revient de celui-ci en amortissant les études sur plusieurs unités. De plus, la mise au point de ce matériel étant effectuée sur la première unité, la sûreté des autres unités de la série en est considérablement augmentée.

Cependant l'évolution du progrès technique doit à un moment prendre le dessus sur les avantages de la série, et pour bénéficier de l'effet de taille, il devient nécessaire de passer à un palier supérieur.

1. CARACTÉRISTIQUES PRINCIPALES DES PALIERS TECHNIQUES (fig. VI-1 et fig. VI-2).

Caractéristiques	Années (1)		
	1951 à 1961	1956 à 1970	1963
Puissance (mégawatts)	125	250	600
Pression de vapeur à l'admission de la turbine (bars)	123	163	163
Débit vapeur à l'admission (tonne par heure)	360	700	1 725
Débit resurchauffé (%)	92	93	88
Pression de resurchauffe (bars)	25	34	34
Température de surchauffe et de resurchauffe (degrés Celsius)	540/540	565/565	565/565
Pression au condenseur (eau à 15 °C) (millibars)	35	34	33
Température de l'eau d'alimentation (degrés Celsius)	245	252	275
Vitesse de la turbine (une seule ligne d'arbre) (tours par minute)	3 000	3 000	3 000
Nombre de soutirages	7	7	7
Consommation spécifique nette sur P.C.S. (centrale à mazout) (kilojoules par kilowattheure)	9 700	9 150	9 000
Puissance nette pour 4 tranches (mégawatts)	468	960	2 340
Nombre total d'agents pour 4 tranches	188	215	254
Agent/mégawatts	0,4	0,22	0,11

(1) La première date est celle des premières commandes.

2. UTILISATION DES CENTRALES THERMIQUES

Pendant les premières années de sa vie, une centrale thermique joue le rôle d'usine de production de base : elle fournit le maximum de sa puissance pendant le plus grand nombre d'heures possible. Puis, le progrès technique apportant une amélioration de la rentabilité des centrales nouvelles, elle fournit une énergie qui est relativement de plus en plus chère, et elle est de moins en moins sollicitée pour la production d'énergie de base. Par la suite, elle est amenée à jouer un rôle de régulateur ne fonctionnant que pendant les périodes les plus chargées de l'année (hiver), souvent à charge partielle, afin d'adapter la production de l'énergie à la demande. Elle produit alors ce que l'on appelle de l'*énergie de pointe*.

Elle peut aussi fonctionner en *réserve tournante :* les groupes turbo-alternateurs fournissent la charge minimale compatible avec les exigences techniques (minimum technique) et ils sont utilisables instantanément pour remédier aux défaillances du réseau de transport et pour prendre très rapidement une charge importante. La centrale participe alors au réglage de la tension du réseau en fournissant de la puissance réactive.

En cas d'incidents, la fréquence du réseau pouvant diminuer, la centrale doit pouvoir fournir sa pleine puissance à 48 Hz afin d'éviter des déclenchements en cascade.

Le tableau ci-après donne une idée des prévisions de fonctionnement pour les tranches de 600 MW pendant leur vie.

Année	Nombre d'heures équivalant à la pleine charge
1	2 450
2	4 900
3 à 7 inclus	6 800
	décroissance exponentielle
30	273

Ces nombreuses conditions de fonctionnement, très différentes et variables avec le temps, exigent de prévoir une grande souplesse des installations.

3. ÉNERGIE DE POINTE

La production de l'énergie électrique doit être adaptée à la consommation qui est variable dans le temps. Au cours de l'année elle est bien plus grande en hiver qu'en été, surtout lors d'une période de froid dépassant la moyenne. De même, les fluctuations sont très importantes au cours d'une journée.

Quand on regarde le diagramme de la puissance fournie, en fonction des heures de la journée, on peut suivre la vie du pays. Par exemple, le matin, on peut voir le démarrage des usines et des ateliers, et le soir, dans une moindre mesure, on peut déceler l'allumage des postes de télévision lorsqu'il va y avoir une émission très populaire. Ce sont ces pointes de consommation qu'il faut pouvoir satisfaire. Il est bien évident qu'on ne peut pas installer des groupes de grosse puissance uniquement pour satisfaire des consommations d'énergie de pointe ; leur marche serait insuffisante eu égard à l'importance des investissements qu'ils nécessitent et à l'incidence de ces investissements dans le prix de revient du kilowattheure (environ le tiers de celui-ci). De plus, certaines demandes peuvent être très localisées, il n'est donc pas intéressant de faire venir l'énergie de loin, compte tenu des frais de transport d'énergie (pertes en lignes).

Il est préférable d'avoir à proximité de la demande des installations de faible puissance à démarrage très rapide. Ces groupes dits *groupes de pointe*, nécessitent des investissements bien plus faibles que les centrales importantes et bien que ne bénéficiant pas de l'effet de taille, l'incidence de

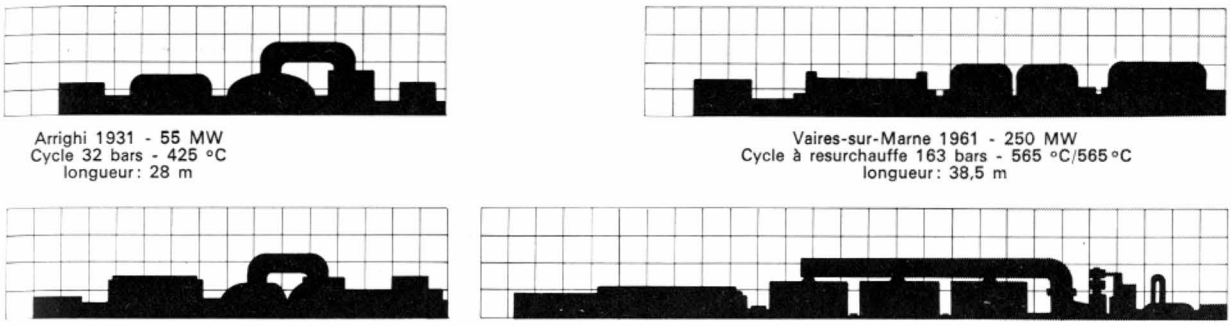


Fig. VI-1 — Évolution des turbines de différents paliers techniques

ces investissements est assez limitée. Il faut tenir compte du fait que le prix du kilowattheure de pointe est plus élevé que celui du kilowattheure de base (ce dernier est particulièrement réservé à la grosse industrie, comme la métallurgie, la pétrochimie, etc., qui sont de très gros clients et qui fonctionnent nuit et jour et toute l'année).

3.1. Moyens de production de l'énergie de pointe et de l'énergie de semi-base. — On va voir maintenant les divers moyens de production d'électricité d'origine thermique pour des faibles puissances et pour des durées voisines de 250 heures par an (énergie de pointe) et de 2 500 heures par an (énergie de semi-base).

Ces moyens sont au nombre de quatre :

— Les turbines à gaz classiques.
— Les groupes gaz-vapeur.
— Les turbines à gaz du type aviation (jet).
— Les diesels semi-rapides.

3.1.1. Les turbines à gaz classiques. — Sans faire l'étude théorique du fonctionnement (V. t. 3, Compresseurs et turbines à gaz, chap. 2), on va rappeler succinctement le fonctionnement et la composition des groupes électrogènes à turbines à gaz.

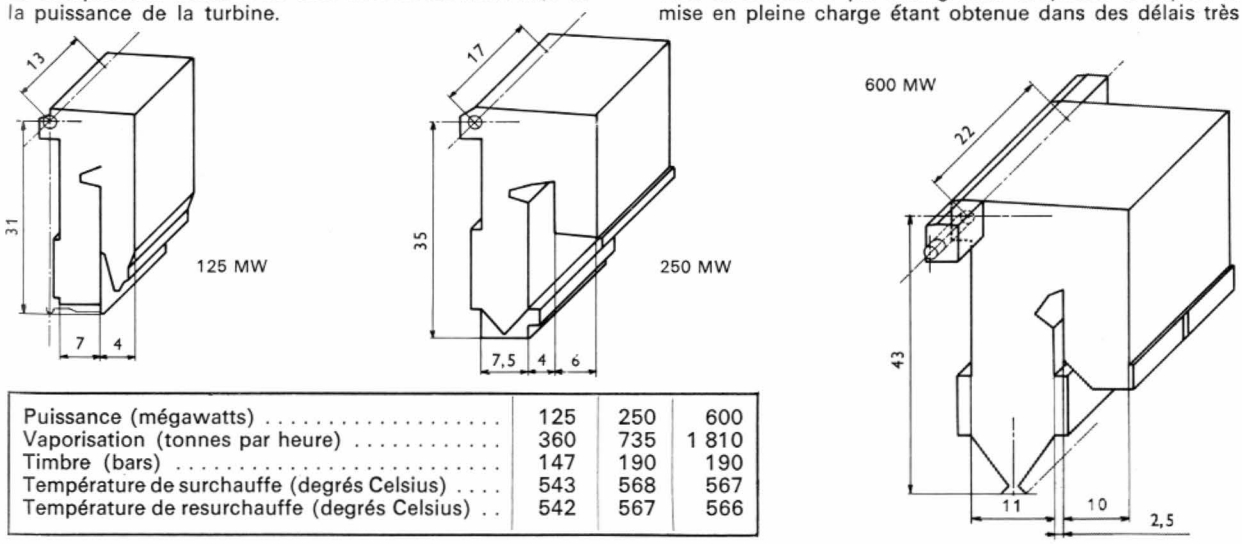
La turbine à gaz est une machine qui est mue par l'énergie de détente de gaz à haute température ; cette détente est rendue possible par une compression préalable et un réchauffement des gaz. L'air ambiant est aspiré, à travers des filtres, dans un compresseur rotatif de type axial, d'un taux de compression de 8 à 10, puis il est réchauffé (800 à 1000 °C) dans une ou plusieurs chambres de combustion brûlant, soit du fuel, soit du gaz. La turbine entraîne à la fois le compresseur, l'alternateur, l'excitatrice et les pompes. Le compresseur utilise à lui seul environ les deux tiers de la puissance de la turbine.

Le lancement est assuré, soit par un moteur à courant continu (utilisé en moteur pendant le démarrage mais en excitatrice pendant la marche normale du groupe), soit par un moteur Diesel directement placé en bout d'arbre. Cette dernière solution nécessite l'adjonction d'un accouplement débrayable.

Un tel cycle est simple mais le rendement global est assez faible (de 17 à 23 %) ; cela est principalement dû à la température élevée des gaz d'échappement.

La mise au point de ces matériels a été délicate et longue, surtout du fait des problèmes métallurgiques posés par les hautes températures des gaz. Cependant on trouve en France un certain nombre de réalisations qui ont permis de faire progresser cette technique et, compte tenu également des expériences étrangères, on peut espérer pour bientôt des réalisations beaucoup plus nombreuses. Les principales centrales É.D.F. en service sont installées à Tours (9-1959) : 6 MW (à pistons libres), Brest-Portzic (11-1962) : 17 MW, Malaguay (12-1964) : 17 MW (à pistons libres). La turbine à gaz de la centrale de Vitry-sur-Seine sera étudiée dans le paragraphe consacré aux cycles mixtes.

Actuellement, il semble que les turbines à gaz avec générateurs à pistons libres soient sur le point d'être abandonnées bien que leur rendement soit supérieur (35 %) à celui des centrales proposées en remplacement (à cause de leur puissance unitaire trop limitée). Certains constructeurs (La Compagnie Électro-Mécanique (C.E.M.) sous licence Brown Boveri, Sulzer et Alsthom sous licence General Electric C°) fournissent actuellement des ensembles, compresseur — chambre de combustion — alternateur, formant de véritables groupes électrogènes tout équipés, d'une puissance de 18 à 20 MW. Ils sont désignés par les spécialistes sous le vocable anglais de *packaged*. Ces installations sont caractérisées par leur grande souplesse d'emploi, la mise en pleine charge étant obtenue dans des délais très



Puissance (mégawatts)	125	250	600
Vaporisation (tonnes par heure)	360	735	1 810
Timbre (bars)	147	190	190
Température de surchauffe (degrés Celsius)	543	568	567
Température de resurchauffe (degrés Celsius)	542	567	566

Fig. VI-2 — Évolution des dimensions des chaudières de différents paliers techniques

courts (7 à 15 minutes suivant les puissances). Leur sûreté de fonctionnement et leur simplicité permettent de les télécommander.

3.1.2. Les groupes gaz-vapeur. — Un des inconvénients des turbines à gaz à cycle simple est la perte, par rejet à l'atmosphère, d'une importante quantité de chaleur (les gaz de rejet étant à environ 450 °C). C'est pourquoi, dans certaines installations, on récupère cette chaleur en aisant passer les gaz dans une chaudière. De tels groupes appelés S.T.A.G. (sigle venant des termes anglais *Steam And Gas*, vapeur et gaz) sont composés :

1° *D'une turbine à gaz classique*, avec sa chambre de combustion, entraînant un alternateur.

2° *D'une chaudière de récupération* traversée par les gaz d'échappement de la turbine et comportant (ou non) des brûleurs d'appoint (post-combustion).

3° *D'une turbine à vapeur* alimentée par la chaudière, montée sur le même arbre que la turbine à gaz et l'alternateur (ou bien indépendante), et qui entraîne un deuxième alternateur.

La souplesse d'exploitation de ces groupes de puissance unitaire importante (50 à 100 MW) est un peu moins grande que celle des turbines à gaz seules. En effet, il faut compter de vingt à trente minutes pour les démarrer, et leur complexité est suffisante pour que la présence continue du personnel de conduite soit nécessaire.

Bien que de conception un peu différente, on peut citer ici la réalisation récente (mise en service du premier groupe en 1969) de la société Progil pour son usine de Pont-de-Claix près de Grenoble. Cette usine fabrique du chlore par électrolyse du chlorure de sodium, opération qui consomme de grandes quantités d'électricité. L'installation est composée de 8 groupes indépendants de 17,5 MW ; chaque groupe comprend :

— Un compresseur axial de seize étages, tournant à la vitesse de 5 100 tr/mn ; il alimente en air les chambres de combustion sous une pression de 6 bars à 250 °C.

— Dix chambres de combustion, réparties sur la périphérie de la turbine et munies chacune d'un brûleur.

— Une turbine de détente, à action, à 2 étages ; les gaz entrent à 1 000 °C et sortent à 500 °C après détente jusqu'à la pression atmosphérique. Le débit nominal de gaz est de 340 t/h.

— Un alternateur refroidi par de l'eau sous pression ; il est entraîné à 3 000 tr/mn par l'intermédiaire d'un réducteur de vitesse. Il peut fournir une puissance de 17,5 MW sous une tension de 5,5 kV.

— Un ensemble d'auxiliaires assurant la régulation, le refroidissement des fluides et le graissage.

— Un compartiment de contrôle.

L'usine ayant besoin de vapeur, les gaz d'échappement traversent une chaudière de récupération ayant les caractéristiques suivantes :

— Température d'entrée des gaz : 500 °C.
— Débit des gaz : 340 t/h.
— Température de sortie des gaz : 150 °C.
— Débit de la vapeur : 46,5 t/h.
— Pression de la vapeur : 28 bars.
— Température de la vapeur : 260 °C.

Le combustible utilisé est du fuel lourd et la consommation journalière de la centrale est de 1 000 t.

3.1.3. Turbines à gaz du type aviation. — Les groupes électrogènes à turbine à gaz alimentée par un *turboréacteur*, appelé aussi *turbojet*, prennent actuellement dans le monde une place de plus en plus importante pour la fourniture de l'énergie de pointe. Ces groupes, de faible encombrement, permettent des démarrages très rapides, ne demandant pas plus de deux à trois minutes. On obtient des puissances unitaires notables (entre 20 et 140 MW) en mettant une ou plusieurs turbines sur le même arbre. Leur simplicité et leur sûreté de fonctionnement autorisent la télécommande à distance de sorte qu'on peut les placer très près des centres de consommation d'énergie qui sont éloignés des usines de base. Elles sont aussi bien adaptées aux pays en cours de développement. Leur rendement est cependant assez faible et, comme pour toutes les turbines à gaz, la puissance varie beaucoup avec la température de l'air à l'aspiration (cette puissance diminuant quand la température de l'air augmente). De plus, le combustible utilisé (kérosène, gas-oil) est très cher (toutefois, en modifiant l'injection on peut utiliser du gaz naturel). Par ailleurs, elles présentent un autre désavantage ; le niveau de bruit est élevé et il faut des investissements importants pour le ramener à une valeur acceptable.

La première expérience d'Électricité de France, dans ce domaine, a été faite, en 1964, avec le couplage de la Centrale de Villemandeur près de Montargis où se trouve installé un groupe de 9 MW (fig. VI-3). En 1969, a eu lieu le démarrage des installations de Villejust avec un groupe de 60 MW (turbojet avec six générateurs). Ce groupe, situé dans un poste d'interconnexion où aboutissent des lignes à 380 kV, 225 kV et 90 kW, est relié au réseau 225 kV au moyen d'un transformateur 15 kV/225 kV. Il peut intervenir en secours du réseau régional lorsqu'il y a un incident sur une ligne ; il peut prendre sa pleine charge en un temps compris entre 5 et 10 minutes.

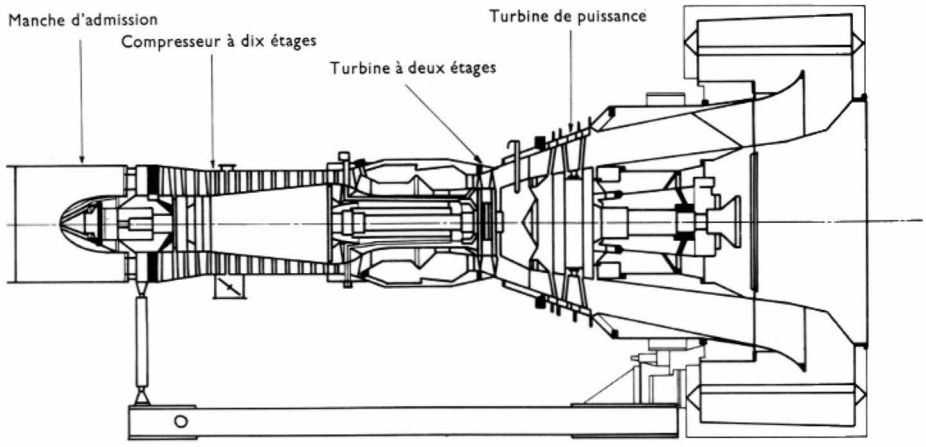


Fig. VI-3 — Villemandeur : schéma de la turbine à gaz et de son compresseur (type aviation)

3.1.4. Groupes Diesel. — Bien qu'ils soient utilisés depuis longtemps pour entraîner des alternateurs, les moteurs Diesel nécessitent des investissements plus élevés que les turbines à gaz à cycle simple ou les turbojets, particulièrement pour les installations devant fonctionner uniquement en pointe.

De puissances relativement modestes (2 à 10 MW), les groupes électrogènes Diesel sont d'un fonctionnement sûr et peuvent être facilement télécommandés. Ils sont utilisés en semi-base et même comme centrale de base dans les pays à réseau d'exploitation peu étendu tels que les pays en cours de développement industriel.

3.2. Cycle mixte. — Il consiste en l'adjonction d'une turbine à gaz au cycle normal d'une turbine à vapeur de grande puissance.

On a vu que dans un cycle normal, des soutirages de vapeur sur la turbine servent à réchauffer l'eau d'alimenta-

tion de la chaudière et que l'air comburant est réchauffé par les fumées dans les réchauffeurs d'air. Évidemment, d'une part, cette vapeur soutirée augmente le rendement du cycle mais diminue la puissance disponible de la turbine et, d'autre part, les réchauffeurs d'air sont d'un investissement assez élevé.

L'idée du cycle mixte est de récupérer la chaleur importante des gaz de rejet d'une turbine à gaz pour réchauffer l'eau d'alimentation de la chaudière principale, et, par ailleurs, d'utiliser ces gaz comme air comburant dans cette même chaudière. Le principal intérêt d'un tel cycle est de permettre la suppression du réchauffeur d'air et des ventilateurs, donc de diminuer de façon sensible le coût d'investissement tout en améliorant le rendement. Toutefois, pour qu'une telle installation soit possible il faut que la fiabilité de la turbine à gaz soit grande. Or, bien qu'actuellement les performances pour ce qui concerne la durée de fonctionnement continu de ces machines soient encourageantes, É.D.F., responsable de la majorité de la production thermique en France et de la *continuité de cette production*, ne peut pas se permettre de faire reposer toute la disponibilité d'une centrale de base de grande puissance sur une turbine à gaz. C'est pourquoi dans une première étape, à titre d'essai, il a été installé avec les tranches n° 3 et n° 4 de la centrale de Vitry-sur-Seine, deux turbines à gaz pour fonctionner en cycle mixte avec les turbines à vapeur, mais les tranches principales ont été prévues pour pouvoir éventuellement être utilisées indépendamment des turbines à gaz. Pour cela, on a conservé des réchauffeurs d'air à vapeur et des ventilateurs de soufflage.

Les possibilités de fonctionnement sont donc au nombre de trois :

1° *Fonctionnement du groupe principal seul.*

— Cycle C.E.S.A.S. (Chauffage de l'Eau par Soutirages et de l'Air par Soutirages) (fig. VI-4). — Le réchauffeur d'air comburant est alimenté par de la vapeur prise par soutirages à la turbine. Ce réchauffeur d'air est plus petit qu'un

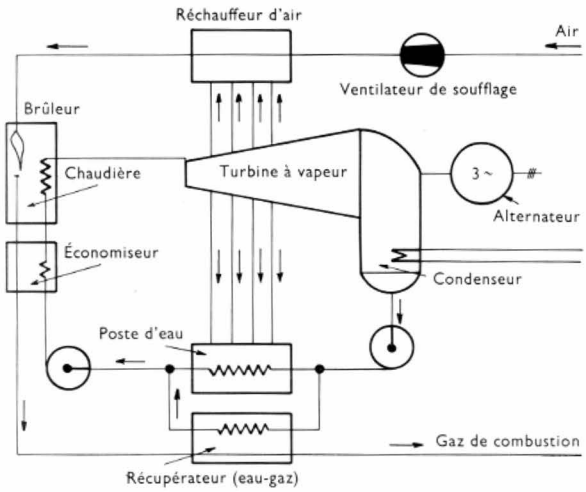


Fig. VI-4 — Schéma de principe du cycle C.E.S.A.S.

réchauffeur air-fumées. L'eau d'alimentation est réchauffée dans un poste d'eau alimenté en vapeur soutirée à la turbine, et dans un *refroidisseur des fumées*. Dans ce fonctionnement le groupe principal fournit 237 MW avec un rendement équivalent à celui d'un groupe à cycle classique de même puissance.

2° *Fonctionnement simultané du groupe principal et de la turbine à gaz* (fig. VI-5) (Cycle mixte). — Dans les gaz d'échappement d'une turbine à gaz il y a une grande proportion d'air (environ 82 %) ; ils servent donc d'air comburant pour la chaudière, la turbine à gaz jouant le rôle de ventilateur de soufflage. La turbine à gaz, placée parallèlement au réchaufeur d'air, alimente directement le coffre des brûleurs en air comburant. À la sortie de l'économiseur, les gaz de combustion traversent un échangeur (appelé refroidisseur de fumées) pour le réchauffage de l'eau d'alimentation. Le raccordement de l'échappement de la turbine à gaz s'effectue en aval du réchauffeur d'air. L'isolement ou la mise en communication de la turbine à gaz avec le circuit d'air de la chaudière se fait à l'aide de registres étanches.

La suppression des soutirages de vapeur de réchauffage d'air pendant la marche en cycle mixte permet un débit de vapeur supplémentaire dans la turbine principale, sans augmentation du débit calorifique de la chaudière, et l'alternateur fournit alors 269 MW (gain de 32 MW). La turbine à gaz entraînant un alternateur de 42 MW, la tranche fournit au total 311 MW.

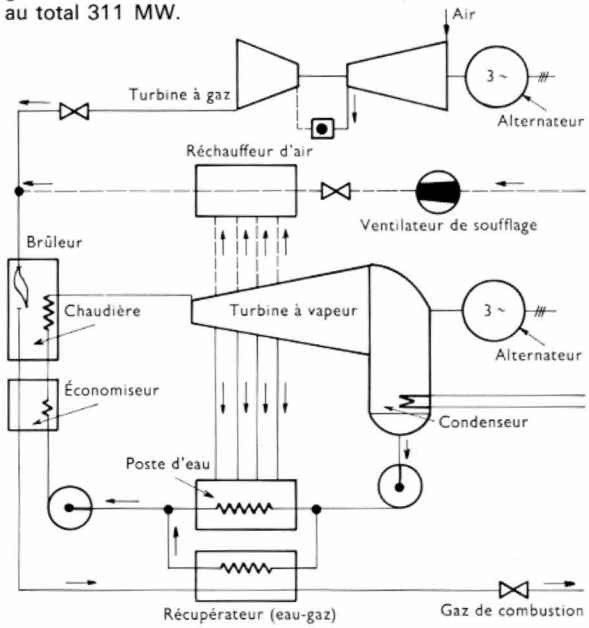


Fig. VI-5 — Schéma de principe du cycle mixte

Le démarrage des deux turbines est effectué séparément, et le passage en cycle mixte est réalisé en éliminant le ventilateur de soufflage et en fermant les soutirages alimentant le réchauffeur d'air.

3° *Fonctionnement de la turbine à gaz seule.* — Des dispositions ont été prises pour pouvoir utiliser la turbine à gaz indépendamment de la tranche principale. Cette turbine à chambre de combustion unique brûle du gaz naturel.

Caractéristiques principales du groupe turbine à gaz :

- Rapport de compression : 7,5.
- Température des gaz à l'admission de la turbine : 780 °C.
- Nombre d'étages du compresseur : 15.
- Nombre d'étages de la turbine : 6.
- Débit d'air aspiré à 10 °C ; 320 kg/s.
- Puissance de l'alternateur : 42 MW.

Caractéristiques de la tranche :

	Groupe vapeur seul	Cycle mixte	Turbine à gaz seule
Puissance électrique (mégawatts)	237	238 + 31 = 269	42
Consommation spécifique nette sur P.C.S. (thermies par kilowattheure) . . .	2,19	2,18	3,73
Consommation spécifique nette marginale au-delà de la puissance du groupe vapeur seul (thermies par kilowatt-heure)		2,15	

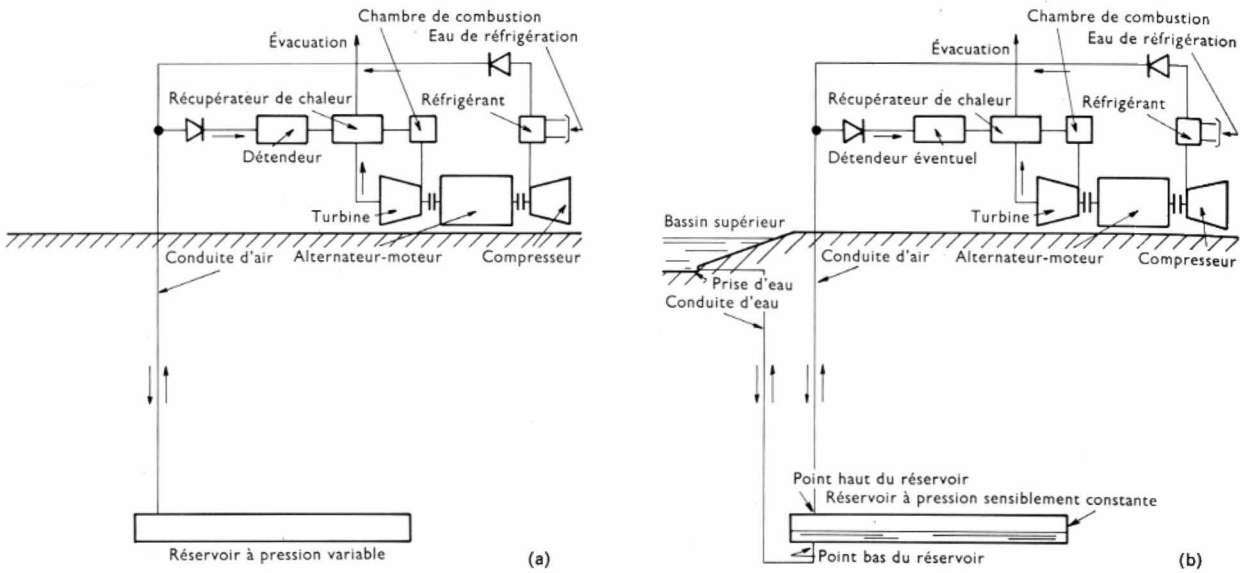


Fig. VI-6 — Principe de la récupération de l'énergie par stockage d'air comprimé

a) Récupération à pression variable

b) Récupération à pression constante (compensation hydraulique)

3.3. Perspectives d'avenir pour la fourniture d'énergie de pointe. — En plus du développement des techniques dont on vient de donner un aperçu, les services spécialisés d'É.D.F. étudient la possibilité d'emmagasiner de l'énergie pendant les *heures creuses* (c'est-à-dire en période de faible consommation où le prix du kilowattheure est le plus bas) et de la restituer pendant les heures de pointe.

Cette méthode s'apparente à celles déjà étudiées dans l'hydraulique. Elle consiste à utiliser des compresseurs pendant les heures creuses pour remplir d'air des réservoirs souterrains naturels et à alimenter, pendant les heures de pointe, des turbines à gaz avec cet air comprimé. Il s'agit donc d'utiliser les terrains sédimentaires poreux permettant d'accumuler des grandes quantités d'air comprimé sous une charge hydrostatique naturelle suffisamment grande, voisine de 30 bars (fig. VI-6).

Cette technique de stockage qui pose des problèmes délicats a d'ailleurs déjà été utilisée par Gaz de France pour constituer des réserves de gaz naturel.

AMÉNAGEMENTS HYDRO-ÉLECTRIQUES

CHAPITRE PREMIER

PRINCIPES GÉNÉRAUX SUR L'HYDRO-ÉLECTRICITÉ

Depuis la fin du XIXe siècle, pratiquement aucune utilisation un peu importante de l'énergie hydraulique n'a été réalisée sans passer par l'intermédiaire de l'électricité, dont les principales qualités sont la souplesse d'utilisation à de multiples usages, et surtout la facilité de transport.

La puissance P que met en jeu une chute d'eau, d'une hauteur H et d'un débit Q, est théoriquement donnée par la formule $P = gQH = 9{,}81\ QH$. On exprime P en kilowatts, Q en mètres cubes par seconde (ou en tonnes par seconde) et H en mètres. Cela signifie que l'on obtient une énergie de 1 kWh par mètre cube d'eau tombant de 367 m (avec un rendement de 100 %), et une puissance de 981 kW avec une chute d'eau de 100 m et d'un débit de 1 m^3/s. On verra plus loin que, par suite des diverses pertes, dans une installation moderne, on ne peut recueillir qu'une puissance P sensiblement égale à : $P = 8\ QH$, soit une énergie de 1 kWh par mètre cube tombant de 450 m. Le rendement est proche de 80 à 85 % ; il est bien meilleur que le rendement maximal (environ 40 %) des installations thermiques modernes (déterminé à partir du pouvoir calorifique du combustible utilisé).

La production hydraulique apparaît très intéressante parce qu'elle est totalement exempte de pollutions aussi bien pour l'atmosphère que pour l'eau (ni pollution bactériologique, ni pollution chimique).

Qu'il s'agisse de torrents ou de fleuves plus paisibles, le cycle d'écoulement de l'eau, provenant de l'évaporation solaire et des précipitations sur les reliefs, se renouvelle constamment, sans transformation chimique de la matière, et l'utilisation de cette énergie s'est toujours faite de la même manière avec des roues à aubes ou des turbines. L'énergie que l'homme retire ainsi à l'eau est prise sur celle qui se dissipait par frottement dans les cours d'eau, en nature vierge, en donnant un échauffement de l'eau de 1 °C pour 425 m de chute (échauffement qui entraînait d'ailleurs, au moins partiellement, une évaporation au contact de l'atmosphère). On peut ainsi dire qu'une chute d'eau restitue l'eau plus froide, ou tout au moins avec moins d'évaporation, qu'en nature vierge. À cet égard, on a ainsi un phénomène inverse, c'est-à-dire compensatoire, de celui que l'on a avec les installations thermiques qui échauffent l'eau par l'intermédiaire de leur circuit de refroidissement. Malheureusement, ces deux types d'installations intéressent en général des cours d'eau très différents, sauf dans une certaine mesure des fleuves comme le Rhône et le Rhin. Un calcul simple, basé sur les conditions actuelles de rendement des installations, permet d'estimer que la production de 1,5 à 2 kWh d'origine hydraulique compense l'échauffement ou l'évaporation des cours d'eau provoqué par la production de 1 kWh d'origine thermique. Ce phénomène, appelé *pollution thermique*, est loin d'être négligeable par ses effets néfastes sur les processus biologiques ; par ailleurs, on a vu qu'il limite actuellement l'extension de la production thermique dans plusieurs régions de France, spécialement le Nord-Est et la région parisienne (c'est à lui, également, que l'on doit le fait, souvent ignoré, que les cours d'eau de la région parisienne soient libres de glace lors des hivers rigoureux). C'est aussi pour cela que le choix des implantations des puissantes installations thermiques se tourne actuellement vers les estuaires et les bords de mer, à moins que l'on emploie la réfrigération par évaporation qui est coûteuse, inesthétique, consommatrice d'eau et qui favorise les brouillards (V. t. 1, Centrales thermiques, chap. 5).

1. HISTORIQUE DE L'HYDRO-ÉLECTRICITÉ

L'utilisation de ce que l'on appelait autrefois la force hydraulique remonte assez loin dans le temps, mais elle ne s'est vraiment développée en Europe qu'au Moyen Âge, sous des hauteurs de chute qui ne dépassaient guère le diamètre d'une roue à aube et pour des puissances très faibles. C'est cette utilisation (de même que celle des moulins à vent) qui a alors favorisé l'essor de notre civilisation en remplaçant la force humaine ou animale pour des quantités d'usages industriels ou artisanaux : moulins, marteaux de forge, foulage, etc. Ce n'est guère qu'au cours du XIXe siècle que des puissances importantes furent obtenues, d'abord sur de hautes chutes, par l'emploi des premières conduites forcées et des turbines métalliques. En particulier, dès 1869, Aristide Bergès et Amable Matussière réalisèrent la première chute de 200 m près de Domène dans l'Isère ; par la suite, en 1882, sa hauteur fut portée à 500 m (avec des réservoirs amont) et une usine de 600 kW fut équipée de dynamos. La **houille blanche** était née et cette appellation, à laquelle sont attachés les noms de ces deux précurseurs, fut répandue dans le grand public français à l'occasion de l'exposition de 1889 à Paris.

Par la suite, les installations se multiplient dans le monde et notamment en France dans les Alpes et les Pyrénées. En effet, la technique d'aménagements de puissances unitaires un peu importantes, en basses chutes de rivières et donc avec de gros débits, ne s'est développée que plus tardivement. Les dernières années du siècle virent l'apparition du transport en « haute tension » permis par l'emploi du courant alternatif (« haute tension » d'abord modeste puisque sa valeur était de 11 kV). En définitive,

pour le territoire français tout au moins, on peut distinguer trois époques dans l'évolution de l'hydro-électricité :

— *L'époque des pionniers*, correspondant à ce que l'on a appelé « La Belle Époque » ; elle commence avec les deux ou trois dernières décades du XIXe siècle pour se terminer à la guerre de 1914-1918. Au prix de nombreuses difficultés, ces pionniers ont réussi des hautes chutes dont l'importance relative est digne d'admiration. Comme la technique de transport était encore embryonnaire, ils étaient des électrochimistes ou des électrométallurgistes (c'était, notamment, l'âge d'or du carbure de calcium) ; ils utilisaient sur place l'énergie (en général en courant continu, fourni par des dynamos) et n'en distribuaient qu'une faible partie aux alentours pour l'éclairage.

— *L'époque de l'entre-deux-guerres* où la technique se perfectionne, surtout en matière de transport d'énergie, et où la loi sur les concessions hydro-énergétiques du 16 octobre 1919 (toujours en vigueur actuellement) fait bénéficier les concessionnaires de diverses facilités administratives dont surtout celles découlant de la déclaration d'utilité publique. On vit apparaître alors les premières accumulations saisonnières importantes dans les Alpes, les Pyrénées et le Massif Central.

— *L'époque suivant la guerre de 1939-1945*, caractérisée par de nouvelles évolutions techniques et par la loi de nationalisation de 1946 qui a donné les facilités administratives favorables à la réalisation de grands ensembles d'équipement rationnel concernant des vallées entières. Le transport d'énergie à longue distance fait alors de nouveaux progrès avec un renforcement de l'interconnexion générale du réseau français et un accroissement des échanges avec l'étranger.

2. LES RESSOURCES POTENTIELLES

L'utilisation intégrale de l'énergie hydraulique d'un certain territoire correspond à celle de toute l'eau s'écoulant jusqu'à la mer. Pour le territoire français métropolitain, cela correspondrait à une énergie égale à environ 266 TWh par an (1 TWh = 1 milliard de kilowattheures) ; dans le monde, elle est évaluée à 30 000 TWh, dont 2 100 pour l'Europe. Bien entendu, seule une faible partie de cette énergie est économiquement aménageable. Tout d'abord, il convient que le cours d'eau utilisé soit suffisamment formé et qu'il soit aménageable sur une dénivellation permettant une installation dépassant une certaine puissance. Enfin, les conditions de « site » (débit, pente, conditions géologiques, etc.) doivent être suffisamment avantageuses pour permettre un aménagement qui soit compétitif avec les autres moyens de production (notamment thermiques).

Il y a 25 ans, on évaluait à environ 80 à 85 TWh par an le potentiel métropolitain français économiquement aménageable compte tenu de cette compétitivité. En 1970 cette limite a été ramenée entre 60 et 65 TWh par suite de la baisse du prix de revient de l'énergie thermique. Cela revient à dire que plus des trois quarts du potentiel français sont déjà aménagés. Cette limite de compétitivité est cependant susceptible de se déplacer dans un sens ou dans l'autre, suivant les conditions économiques.

Il convient de signaler les ressources hydrauliques qui n'ont pas pour origine les précipitations atmosphériques : il s'agit de l'*énergie de la houle* ou des vagues des océans, créée par le vent, et de l'*énergie des marées*. L'énergie de la houle a fait l'objet de quelques installations d'essais qui ne se sont pas encore révélées compétitives. En revanche, l'énergie marémotrice s'est révélée plus prometteuse, et elle a fait l'objet de l'aménagement de l'estuaire de la Rance (production : 544 GWh/an avec 24 groupes du type « bulbe » de 10 MW chacun ; 1 GWh = 1 million de kilowattheures). L'énergie marémotrice est empruntée à l'énergie cinétique de rotation de la terre ; son utilisation entraîne un ralentissement, d'ailleurs extrêmement faible, de cette vitesse de rotation. Il y a quelques années, un très grand projet a été envisagé dans la baie du Mont-Saint-Michel, il reste pour l'instant sans suite. À l'étranger, plusieurs sites sont à l'étude dans des baies ou estuaires présentant des marées de grande amplitude ; ils s'appuient notamment sur la technique française mise au point avec succès à l'usine marémotrice de la Rance. À ce propos il convient de citer divers projets canadiens dans la baie de Fundy et en particulier trois projets à double effet avec pompage (8 828 MW installés, 3 800 MW de puissance de pointe) pour une production annuelle de 16,9 TW/h.

3. HYDROLOGIE, DÉBITS UTILISABLES

L'hydrologie joue un rôle fondamental dans la conception d'un aménagement ; elle en conditionne le dimensionnement, la puissance et l'énergie moyenne annuelle, cette dernière notion est appelée *productibilité*. Un autre élément a un rôle très important : c'est la hauteur de chute qui est fonction de la topographie.

Il est essentiel de connaître l'hydrologie avec le plus de précisions possibles, notamment, les variations saisonnières et même les écarts interannuels qu'elle est susceptible de subir sous l'influence des conditions climatiques. Faute d'une connaissance suffisante de cette hydrologie, on peut être amené à réaliser des aménagements plus ou moins inadaptés, trop ou insuffisamment importants, avec des conséquences économiques regrettables. À cet égard, l'estimation de l'hydrologie a exactement la même importance que celle des dépenses de construction et d'exploitation.

3.1. Stations de jaugeage. — On observe les débits dans des *stations de jaugeages* aménagées dans des endroits opportuns, le plus près possible des emplacements envisagés pour les prises d'eau. Le principe consiste à établir une relation entre la cote du niveau de l'eau et le débit, ou *loi hauteur-débit*, qui peut être enregistrée sous la forme d'un graphique. La station comporte une échelle limnimétrique qui est relevée périodiquement par un observateur, par exemple, une ou deux fois par jour. Plus généralement, la station est pourvue d'un enregistreur graphique à tambour qui permet de suivre complètement les moindres fluctuations du débit, dues en particulier aux crues ou à la fonte diurne des neiges.

L'enregistrement réalisé permet d'établir un graphique du débit en fonction du temps et d'obtenir le débit moyen journalier. Très souvent, la station fait l'objet d'aménagements (par exemple, construction d'un seuil fixe). Le tarage des stations, c'est-à-dire l'établissement de la loi hauteur-débit, doit être refait périodiquement surtout si le lit du cours d'eau est sujet à modifications du fait du charriage alluvionnaire.

Deux procédés de jaugeage, servant à tarer la station, sont normalement employés ; de notables progrès ont été fait ces dernières années :

— *jaugeages au moulinet*, ou hélice actionnée par le courant en différents points de la section,

— *jaugeages chimiques;* cette méthode consiste à injecter dans le cours d'eau (avec un débit continu et connu) une solution chimique titrée très concentrée et à déterminer après mélange la teneur des prélèvements. On emploie généralement le bichromate de sodium, car il est possible d'apprécier directement son titre au colorimètre à partir de solutions témoins ; comme le bichromate de sodium est pratiquement sans coloration en solution étendue, on emploie un réactif colorant (100 cm^3 d'alcool à 95 % avec 4 g d'anhydride phtalique en poudre et 0,25 g de diphénylcarbazide) à raison de 2 cm^3 pour 20 cm^3 de solution diluée au bichromate. La rapidité de coloration est augmentée par une légère addition d'acide sulfurique. Une précision supérieure à 3 % est facilement obtenue lorsque les échantillons prélevés ont une concentration minimale en bichromate de sodium (voisine de 1 mg par litre). Il est essentiel que les prélèvements soient effectués suffisamment en aval du point d'injection pour obtenir un mélange bien homogène ; en outre, la durée d'injection doit être suffisante pour l'obtention d'un régime permanent au lieu de prélèvements.

Les deux méthodes sont complémentaires : la méthode au moulinet est bien adaptée aux écoulements homogènes de type fluvial et aux grands cours d'eau ; en revanche, la méthode chimique convient particulièrement bien aux écoulements torrentiels assurant rapidement un mélange homogène à l'aval. Depuis peu, on commence à utiliser des

radio-isotopes selon le même principe que la méthode chimique.

Il existe en France environ 750 stations de jaugeages exploitées soit par l'Administration, soit par des organismes tels qu'Électricité de France ou la Compagnie Nationale du Rhône. En outre, la production des usines en service donne une idée assez précise des débits turbinés (les excédents sont évalués avec moins de précision par l'ouverture des vannes).

3.2. Hydrologie et régimes hydrologiques. — L'hydrologie d'un cours d'eau n'est vraiment bien connue que lorsque l'on dispose de débits moyens journaliers durant plusieurs années, 10 à 15, par exemple. Avec une période plus courte, on peut cependant estimer quelles seraient approximativement les valeurs correspondant à une longue période en comparant les résultats de cours d'eau de conditions climatiques voisines. Les comparaisons avec la pluviosité sont aussi utiles, mais il est indispensable d'avoir une idée précise du *coefficient d'écoulement* qui est le rapport entre les volumes écoulés d'un bassin versant et le volume correspondant des précipitations. La hauteur de précipitation annuelle peut varier de 0,60 m dans le Bassin Parisien à 2 m, ou plus, en haute altitude alpine. Le coefficient d'écoulement peut varier énormément suivant le relief, la végétation, etc.; en France, il est compris entre 0,9 en montagne et moins de 0,4 en plaine. Le déficit provient essentiellement de l'évaporation.

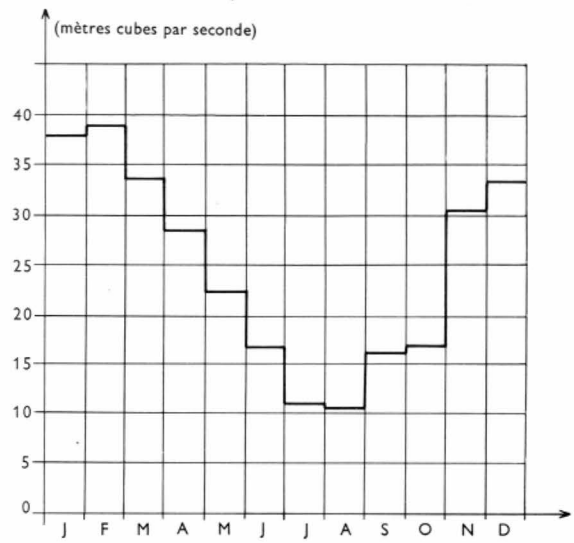


Fig. I-1 — Débits moyens mensuels de la Dordogne à Bort-les-Orgues

On caractérise souvent une hydrologie par son *module spécifique* exprimé en litre par seconde et par kilomètre carré de bassin versant (symbole: l/s-km²). En France, en moyenne annuelle, il peut varier de 6 l/s-km² pour des cours d'eau de plaine, à plus de 60 l/s-km² pour certains cours d'eau d'altitude. Pour les cours d'eau alpins à 1 000 m d'altitude, il est voisin de 25 à 45 l/s-km²; le Rhône à Donzère écoule 21 l/s-km².

L'hydrologie comporte aussi l'étude des crues avec leur importance et leur fréquence, car cela conditionne le dimensionnement des ouvrages d'évacuation. C'est une question très délicate car, en général, elle doit faire l'objet d'un choix entre les risques encourus et les coûts des ouvrages.

Plusieurs représentations graphiques facilitent les études énergétiques; elles sont réalisées au moyen des tableaux de débits moyens journaliers, notamment:

— débits moyens mensuels durant plusieurs années avec représentation des valeurs atteintes 1 année sur 10, 5 sur 10, etc. (fig. I-1 et I-2);

— courbes des débits classés indiquant le débit minimal que l'on aurait eu en année moyenne au moins tant de jours par an. L'intégration de cette courbe donne le volume dérivable annuellement en fonction du débit équipé (fig. I-3).

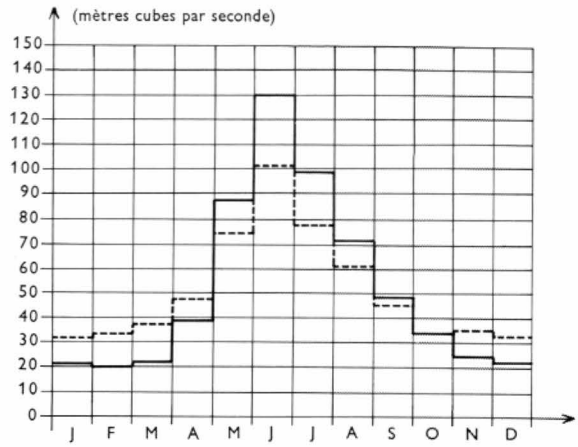


Fig. I-2 — Débits moyens mensuels de l'Isère à l'aval de Moûtiers: années 1903-1945 sans réserve de Tignes — années 1951-1968 avec réserve de Tignes - - -

Comme les hauteurs de chute dépendent du relief, les régions productrices sont principalement les massifs montagneux (Alpes, Pyrénées et Massif Central, par exemple). Il faut y ajouter les fleuves, ayant à la fois en suffisance débit et pente: le Rhin français et le Rhône, aménageables en basses chutes.

Pour la France, la diversité géographique entraîne une diversité des régimes hydrologiques qui est très favorable à l'hydro-électricité. Dans les Alpes, suivant les altitudes, on a des régimes glaciaires ou pluvio-nivals. Le Massif Central est pluvio-nival. Les Pyrénées sont plus franchement à régime nival avec hautes eaux de printemps. À moyenne et haute altitude, l'évolution progressive de la réserve de neige est attentivement surveillée au cours de l'hiver, elle permet d'être renseigné sur le prochain remplissage estival

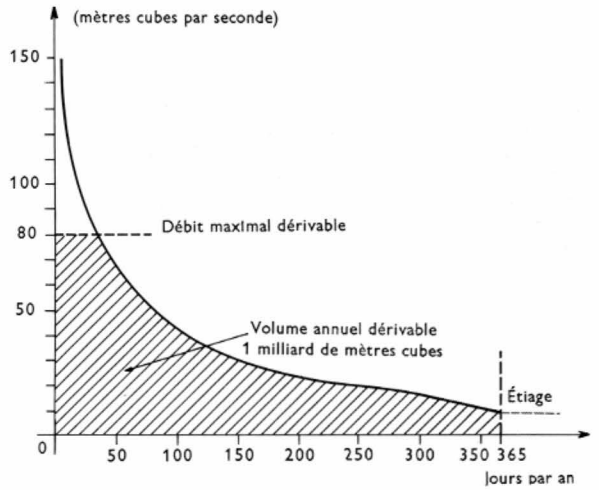


Fig. I-3 — Courbe de débits classés de l'Arc au Pont de la Madeleine (moyenne de 11 années)

des réservoirs et cela conditionne la façon optimale dont ceux-ci doivent être déstockés en hiver. Les Alpes, surtout en altitude, présentent une irrégularité inter-annuelle relativement très faible et sont beaucoup moins soumises aux aléas climatiques que le Massif Central. Un été sec, donc chaud, active la fonte glaciaire; les étiages d'hiver, avec creux en février, sont très accusés, mais ils varient dans des limites très étroites d'une année à l'autre. En revanche, le Massif Central a normalement ses hautes eaux en hiver, sauf en cas de froid rigoureux, et lors des pluies d'automne et de la fonte des neiges au printemps; l'étiage est estival contrairement à celui des cours d'eau glaciaires des Alpes.

On verra ce que ces considérations entraînent, en particulier, pour les réservoirs qui ont deux fonctions, en général combinées: la régularisation et l'adaptation des débits à la demande d'énergie saisonnière, journalière et même horaire.

4. ASPECTS ÉCONOMIQUES DE L'HYDRO-ÉLECTRICITÉ

Depuis ces origines, et encore plus actuellement du fait des possibilités accrues du transport en haute tension qui permet de s'affranchir en grande partie des distances, l'hydroélectricité est soumise à l'âpre concurrence de la production thermique. Cela est vrai dans presque tous les pays du monde, à l'exception de certains d'entre eux tels les pays scandinaves, par exemple, où la production thermique est encore relativement faible. Il est donc tout naturel de prendre en compte comme référence le prix de revient de l'énergie thermique, corrigé éventuellement pour tenir compte du transport, lorsque l'on examine la valeur économique d'un projet hydro-électrique. Plus exactement, on se base sur les conditions économiques d'un projet thermique type auquel le projet hydraulique pourrait se substituer pour faire face à l'accroissement de la demande, considérée comme donnée impérative tant en puissance qu'en énergie.

Cette comparaison met en jeu de nombreux critères économiques assez complexes ; pour la part proprement financière, les principaux sont :

— l'investissement initial (très élevé pour l'hydraulique) ;
— la durée d'amortissement (très grande pour l'hydraulique, peu sensible à l'obsolescence) ;
— les frais de combustible (nuls pour l'hydraulique) ;
— les frais d'entretien et d'exploitation, y compris les impôts (faibles pour l'hydraulique) ;
— le transport (frais et pertes en ligne).

D'autres critères entrent en jeu, tels que les *nuisances* (qui sont très faibles pour l'hydraulique), *la fiabilité*, ainsi que la *souplesse de fourniture* sur laquelle on reviendra plus loin.

En ce qui concerne la France, et tout spécialement à Électricité de France, cette notion de substitution de l'hydraulique au thermique fait l'objet d'études assez poussées. On a cependant dû simplifier la question en admettant que la production d'un aménagement doit être caractérisée au moyen d'un certain nombre de critères qui tient compte de la demande prévisible de la clientèle suivant les heures et les saisons ; ces valeurs caractéristiques principales sont les suivantes :

— la *productibilité moyenne* en kilowattheures par an qui représente une valeur de combustible ;
— les *puissances moyennes* dites garanties de 10 ou de 14 h pleines par jour ouvrable d'hiver ;
— la *puissance moyenne de pointe* en jour ouvrable d'hiver, lors des deux pointes de 2 à 3 h chacune.

Seule, la productibilité représente une valeur en énergie, évaluée uniquement en combustible ; les autres termes sont des puissances qui correspondent à un potentiel ; elles représentent la valeur en possibilités d'un aménagement thermique de référence équivalent, dont le coût est évalué en investissement ainsi qu'en frais de conduite, d'entretien et de renouvellement. Les prix unitaires actualisés (c'est-à-dire ramenés en capital à la date prévue de mise en service) de chacune de ces différentes valeurs caractéristiques sont déterminés en valeurs thermiques de référence pour différents taux d'actualisation. Ils sont appliqués au projet hydraulique considéré et permettent d'en déterminer les valeurs économiques, c'est-à-dire essentiellement la rentabilité des capitaux investis. Plus précisément, on calcule :

— la somme A de ces trois valeurs en francs actualisés, ou performances énergétiques actualisées ;
— les dépenses D d'investissement de l'opération hydraulique envisagée, à sa date de mise en service, y compris les frais d'études et de gestion y afférant et les intérêts intercalaires durant les années de construction. Ces intérêts intercalaires sont relativement importants si l'on considère, d'une part, les taux des prêts qui sont élevés ; d'autre part, la durée de construction en général comprise entre 3 et 6 ans (l'érosion monétaire n'intervient pas, le calcul étant fait en monnaie constante) ;
— les charges annuelles actualisées F comprenant celles d'exploitation avec les impôts ainsi que les charges de renouvellement et d'entretien, à l'exclusion bien entendu des charges financières propres à l'investissement.

L'enrichissement en valeur de capital apporté par l'aménagement projeté est égal à : $Y = A - (D + F)$.

Un enrichissement nul ($Y = 0$) correspond théoriquement à une opération hydro-électrique pour laquelle les capitaux investis ont une rentabilité juste égale au taux d'actualisation choisi dans les calculs.

(Il importe de rappeler qu'en France, on distingue traditionnellement taux d'intérêt et taux d'actualisation, ce dernier définissant le taux de rentabilité, en principe minimal, fixé par l'État pour l'emploi des capitaux publics qu'il contrôle plus ou moins directement.)

Les différentes valeurs (A, D et F) varient en fonction du taux d'actualisation choisi. Par exemple, et plus précisément, la valeur F représente le capital dont l'intérêt annuel (pour le taux d'actualisation choisi) est égal aux charges annuelles ; une élévation de ce taux a donc pour effet de diminuer la valeur actualisée F à égalité de charges annuelles. On notera que pour la méthode de calcul choisie on admet théoriquement que l'utilisation et le maintien en bon état des ouvrages s'étendent sur une durée infinie. Cette hypothèse, pessimiste, est d'autant plus correcte que le taux d'actualisation est plus élevé. La rentabilité de l'aménagement est donnée par le taux d'actualisation qui annule juste l'enrichissement Y. Une autre valeur économique est le coefficient de valeur V, variant bien entendu en fonction du taux d'actualisation ; il est donné par l'expression suivante :

$$V = 1 + \frac{A - (D + F)}{D} = 1 + \frac{Y}{D}$$

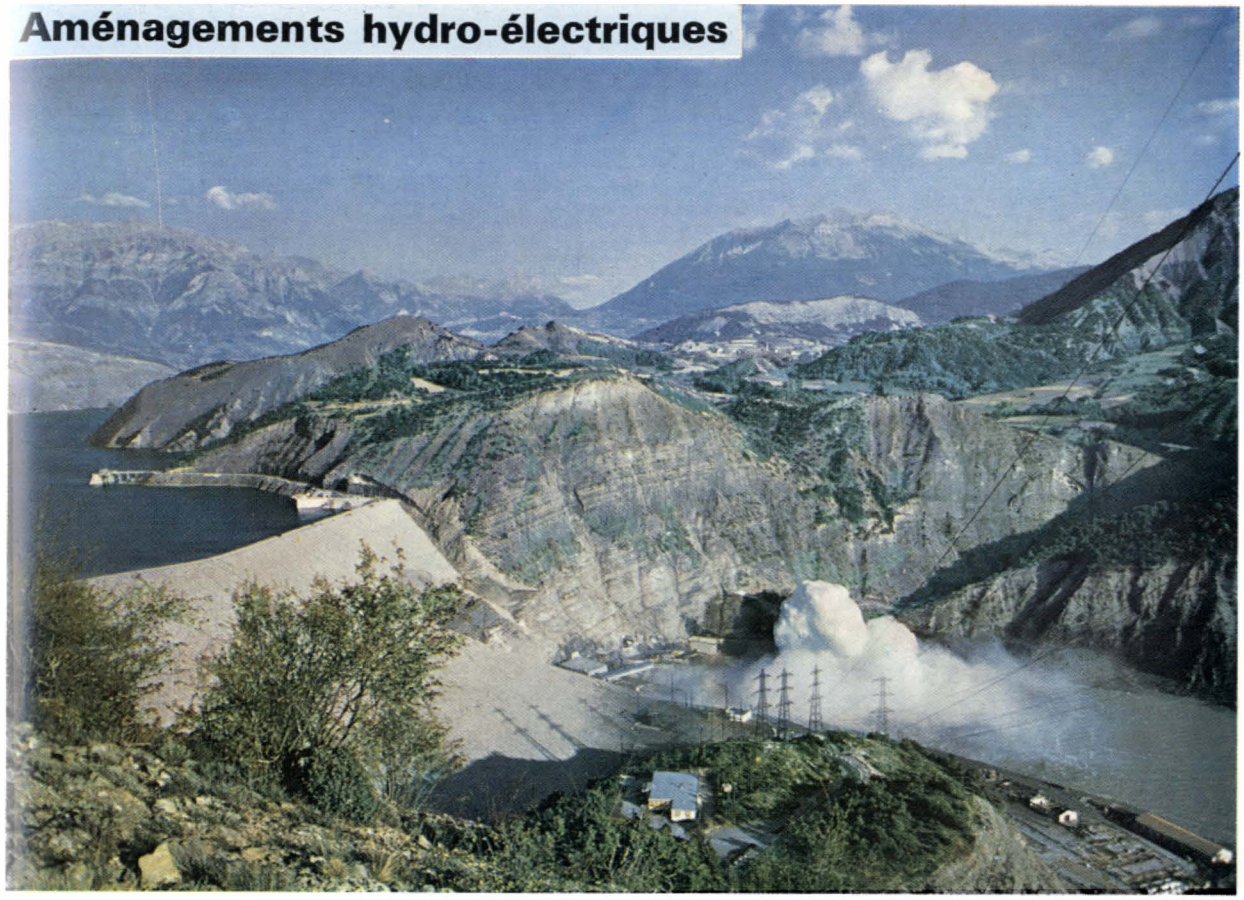
Ce coefficient V représente, pour le taux d'actualisation choisi, la valeur du franc investi. Une bonne opération financière hydraulique correspond à V supérieur à 1, une mauvaise à V inférieur à 1. Appliquée à l'investissement thermique de référence, cette valeur donne par définition : $V = 1$, bien entendu avec le taux d'actualisation auquel on désire se référer. Cette méthode sert au choix des aménagements à engager, elle est également applicable au dimensionnement de l'installation projetée : débit équipé, diamètre des adductions, capacités des réservoirs, etc.

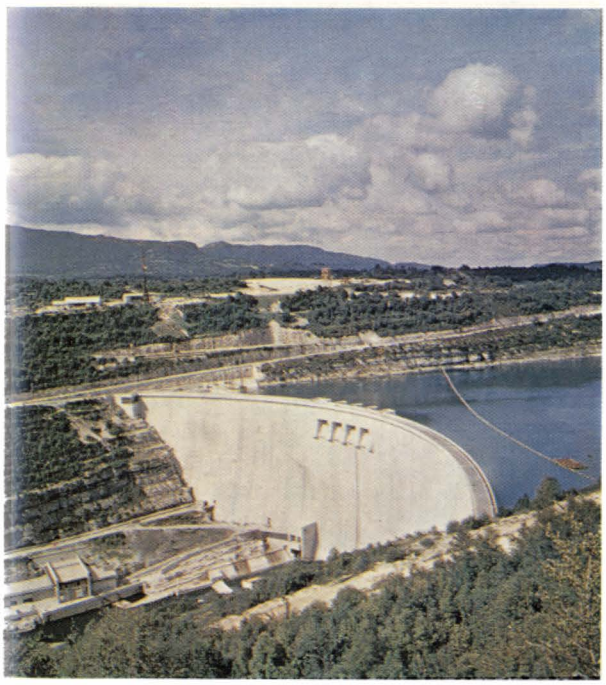
Les coûts de l'installation thermique de référence doivent tenir compte des diverses évolutions, en particulier des progrès effectués et escomptés. Ces progrès ont déjà été très importants : abaissement des coûts d'investissements, d'exploitation et d'entretien par kilowatt installé (dû aux fortes puissances unitaires) et augmentation du rendement thermique global. On arrive actuellement à une équivalence de 2,2 thermies par kilowattheure, ce qui correspond à un rendement global assez élevé (près de 40 %), très supérieur à celui d'il y a quelques décennies ; on admet actuellement qu'il n'est guère améliorable dans l'immédiat, car le supplément d'investissement nécessaire serait trop important compte tenu du prix de la calorie. On fait aussi intervenir un pourcentage d'indisponibilité du thermique ; il est, nettement plus grand que celui de l'hydraulique.

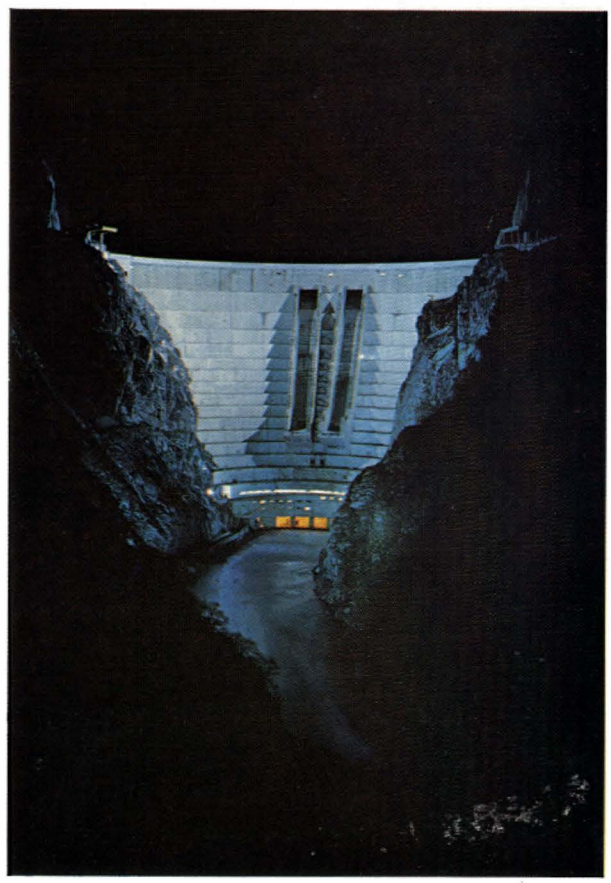
Un processus de calcul un peu différent peut être employé pour l'étude économique des aménagements. Cependant, les diverses méthodes restent basées sur le principe de l'actualisation ou de la capitalisation en tenant compte des prix de l'énergie sous ses différentes formes, et, en particulier, des variations qu'ils subissent en fonction de la saison et de l'horaire. Il est également judicieux de prendre en compte le risque de défaillance en cas d'hydrologie exceptionnellement défavorable.

Malgré ses grandes qualités de pérennité et de fiabilité, deux facteurs sont prépondérants et expliquent la faible compétitivité de l'hydraulique dans les circonstances économiques actuelles : le bas prix de la calorie (en particulier, celle obtenue par combustion du fuel lourd) et le taux élevé des intérêts des capitaux (conduisant à de forts taux d'actualisation). En outre, et surtout en Europe, il y a un épuisement progressif des sites, les meilleurs étant déjà aménagés. Dans les estimations actuelles, les prix futurs du fuel lourd restent relativement très bas ; si cette optique peut être jugée critiquable, il convient de ne pas oublier que les prévisions concernant les prix de revient futurs de l'énergie nucléaire rejoignent sensiblement ceux qui sont escomptés pour le thermique au fuel. On peut estimer, cependant, qu'il puisse y avoir une certaine incertitude à cet égard. Pourtant, tout au moins en France, plusieurs

Aménagements hydro-électriques



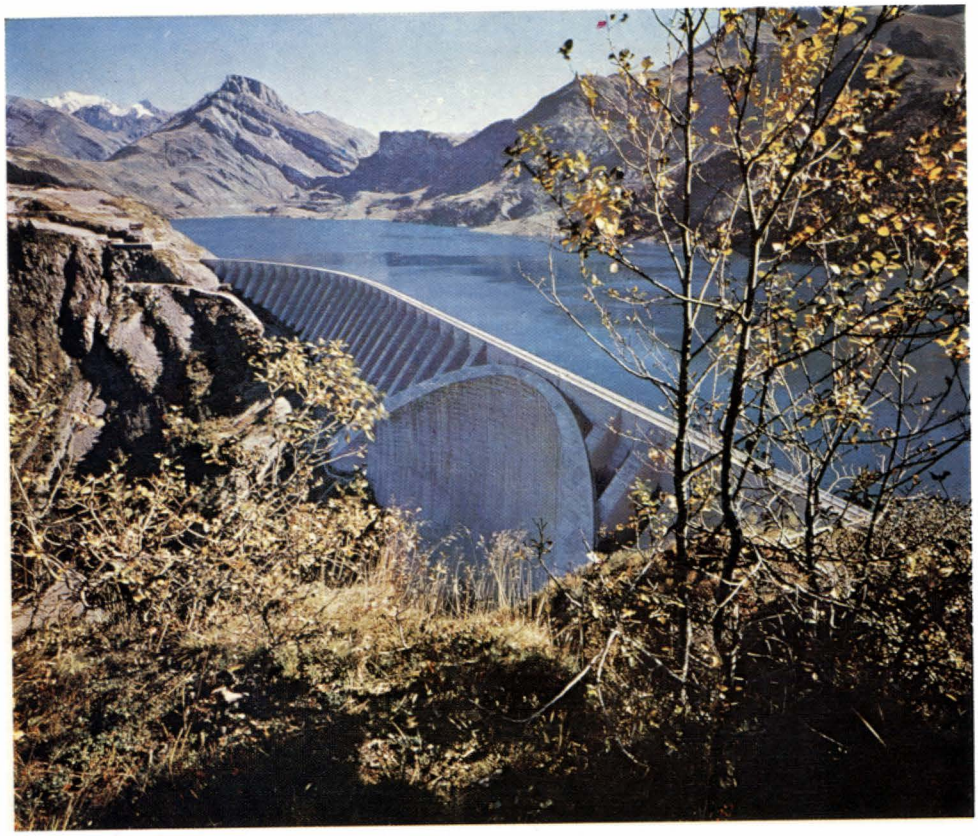




En haut, barrage de **Serre-Ponçon** (Hautes-Alpes), sur la Durance ; retenue de 1 270 millions de mètres cubes, productibilité de la centrale hydraulique : 700 000 MWh/an*. *Ci-dessus,* barrage de **Vouglans** (Jura), sur l'Ain ; retenue de 600 millions de mètres cubes, productibilité de la centrale hydraulique : 230 000 MWh/an. *À droite,* barrage de **Monteynard** (Isère), sur le Drac ; retenue de 275 millions de mètres cubes, productibilité de la centrale hydraulique : 495 000 MWh/an.

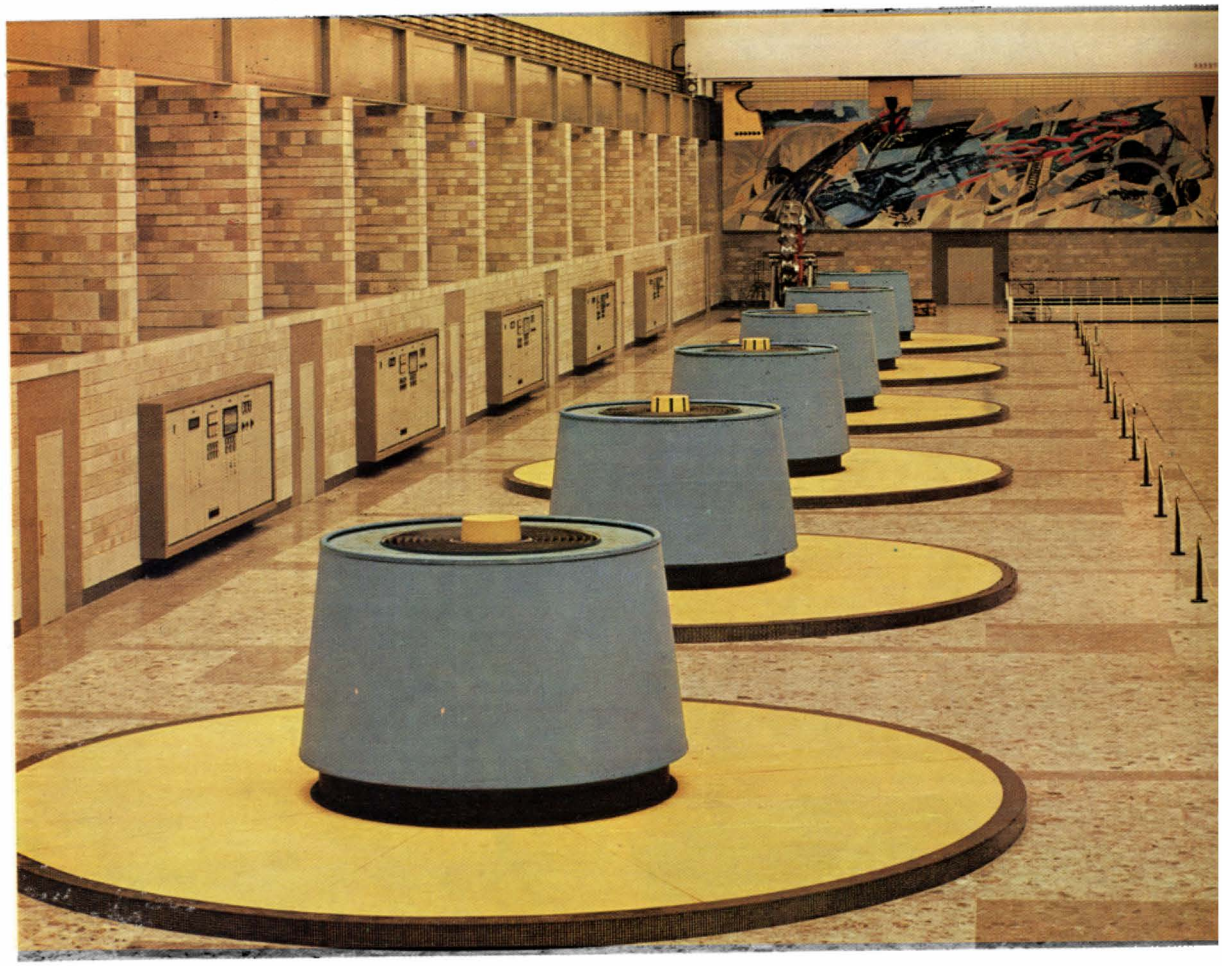
* 1 MWh (mégawattheure) = 1 million de wattheures.

Photothèque E.D.F., photos : Baranger, P. Berenger, M. Brigaud.



À gauche, barrage de **Roselend** (Savoie), sur le Doron ; retenue de 188 millions de mètres cubes.

Ci-dessous, intérieur de la centrale hydraulique de **La Bâthie,** dépendant de la retenue de Roselend ; productibilité : 100 000 MWh/an.



Photothèque E.D.F., photos : P. Berenger.

aménagements sont encore envisagés; ce sont ceux dont une part plus ou moins importante des investissements est à supporter par d'autres usages, tels que régularisation et surtout navigation ou irrigation; c'est notamment le cas du Rhône et du Rhin, ainsi que de la Durance pour l'irrigation.

D'autres aménagements sont à modifier ou à réaménager pour différentes raisons, parmi lesquelles on peut citer notamment:

— vétusté et mauvais rendement de très anciens aménagements;

— suréquipement en puissance par concentration de l'énergie productible durant les heures pleines;

— modification du régime des eaux, par exemple, à la suite de la mise en service de réservoirs en amont (importants débits d'hiver en heures pleines) alors que l'équipement préexistant en aval (trop faible en débit) est insuffisant.

Par ailleurs, on verra que de nouveaux types d'aménagements deviennent compétitifs: il s'agit des installations de **transfert d'énergie par pompage,** qui fournissent de l'énergie en heures pleines, au prix d'une consommation en heures creuses.

CHAPITRE II

EXPLOITATION DES AMÉNAGEMENTS HYDRO-ÉLECTRIQUES

1. RENDEMENT D'UN AMÉNAGEMENT HYDRO-ÉLECTRIQUE

Dans une installation hydro-électrique, sous l'effet de la perte d'altitude, l'énergie potentielle d'une certaine masse d'eau est transformée en énergie électrique. Cette transformation se fait avec un certain rendement et dans une bonne installation les rendements des diverses parties sont les suivants:

— ouvrages d'amenée et de fuite, galeries, canaux, conduites (les pertes de charge sont proportionnelles au carré du débit instantané): 0,90 à 0,97, soit en moyenne	0,95
— turbines	0,90
— alternateurs	0,98
— transformateur élévateur de tension	0,99

Le rendement total est donc égal, environ, à 83 %. Ces valeurs sont seulement indicatives, et elles varient suivant le type d'aménagements et la charge en puissance. On peut ainsi remarquer que le rendement global est très élevé et reste donc peu améliorable par des progrès techniques futurs. Il faut remarquer également que la consommation des services auxiliaires est extrêmement faible, en général proche de 1 à 2 °/₀₀ (il n'en est pas de même dans les usines thermiques).

Les *caractéristiques ou performances énergétiques* dépendent de l'hydrologie, de l'exploitation du réservoir s'il y a lieu, des hauteurs de chute nettes et des rendements. On les détermine toujours en année moyenne, et parfois en précisant ce qu'elles deviennent avec une hydrologie particulièrement défavorable, alors assortie d'un certain coefficient de probabilité (lequel implique un pourcentage de risques de défaillance). Plusieurs de ces données sont aléatoires; il s'agit bien entendu de l'hydrologie, ainsi que, dans le cas où l'on a un réservoir, du régime d'exploitation en puissance. On est ainsi conduit à faire quelques approximations simplificatrices qui sont applicables dans la plupart des cas. En particulier, en partant de la chute nette, donc en déduisant les pertes de charge, on admet en général un rendement moyen voisin de 84 % (on obtient 8,25 kW avec un débit d'un mètre cube par seconde pour un mètre de chute nette, soit 1 kWh par mètre cube et par 437 m de chute nette). Bien entendu, les rendements sont moins bons pour les petites chutes et les installations vétustes.

La courbe des débits classés donne le volume moyen annuel turbinable en fonction du débit maximal équipé; de ce volume on déduit la productibilité ou le nombre de kilowattheures productibles en année moyenne. Pour les pertes de charge, qui sont proportionnelles au carré du débit, on peut prendre, par exemple, une valeur moyenne pondérée correspondant à:

$$p = \frac{2\,p_1 + p_2}{3}$$

dans laquelle p_1 représente les pertes au débit maximal et p_2 celles au débit moyen considéré. Dans le cas de chutes à réservoirs dont la hauteur de marnage est relativement faible par rapport à la hauteur totale de chute, la chute brute moyenne peut être assimilée à celle correspondant au niveau du réservoir à mi-capacité utilisée normalement. Les débits moyens turbinables en heures pleines, et, par conséquent, les puissances correspondantes, peuvent être très importants dans le cas de chutes à réservoirs. Par exemple, le débit moyen turbinable de dix heures pleines de chacun des cinq jours ouvrables d'une semaine type s'obtient en multipliant le débit moyen hebdomadaire (corrigé suivant le cas du jeu saisonnier du réservoir) par le coefficient suivant:

$$\frac{24 \times 7}{10 \times 5} = 3{,}36$$

Lorsque la chute brute varie notablement, il y a lieu d'en tenir compte, c'est en particulier le cas des usines en pied de barrages dont la hauteur de chute est fortement influencée par le niveau amont. De plus, il faut tenir compte de l'effet sur les aménagements voisins influencés: par exemple, diminution de production en cas de court-circuitage, ou au contraire bénéfice sur les aménagements aval profitant des lâchures d'un réservoir amont.

2. EXPLOITATION DES USINES HYDRO-ÉLECTRIQUES

Le terme d'exploitation sera employé ici dans son sens étroit qui est le *régime de fonctionnement en puissance d'une usine.* Sauf cas très particuliers, un groupe générateur est muni d'un organe distributeur lié par servomoteur à un régulateur. Si l'eau est en quantité suffisante, le distributeur peut faire varier progressivement la puissance du groupe depuis la marche à vide jusqu'à la pleine puissance (à l'instar d'un accélérateur de moteur à explosion). Cependant, la vitesse est pratiquement constante, étant liée impérativement à la fréquence du réseau électrique (50 hertz en Europe et 60 aux États-Unis d'Amérique).

Pour être couplé au réseau, un groupe doit être entraîné à sa vitesse de synchronisme. Au moment du couplage il fonctionne à vide; il peut être monté en puissance ensuite par action sur son régulateur (action sur le débit de la chute). L'intensité du courant continu dans le rotor inducteur de l'alternateur est également réglable; ainsi on agit directement sur la tension et sur la puissance réactive livrée au réseau (V. t. 1, Électrotechnique, chap 9 et 10). Parfois un groupe tourne à vide en compensateur synchrone: il fournit de l'énergie réactive au réseau, la turbine est alors dénoyée au moyen d'air surpressé.

En France, actuellement, l'exploitation des usines est confiée au *Service des mouvements d'énergie d'Électricité de France;* c'est un service de répartition, parfois désigné au moyen du terme anglo-saxon *dispatching* qui a la même signification. Son rôle est très important car il doit répartir la charge de chaque usine, y compris bien entendu celle des usines thermiques, au mieux des conditions

économiques de chaque instant. Cette répartition de la charge s'étend à tout le réseau de transport, normalement complètement interconnecté, ainsi qu'aux échanges de puissance, importation et exportation, avec les nations voisines. Pour cela ce Service des mouvements d'énergie doit posséder de multiples informations, constamment remises à jour, concernant l'hydraulicité, les réserves d'eau, les stocks de combustible des usines thermiques, etc. Il a, par ailleurs, d'autres informations relatives aux besoins du réseau grâce à des prévisions qui s'appuient, en particulier, sur les conditions climatiques et sur le comportement de la clientèle. Par exemple, une émission de télévision à grande audience est décelable par l'appel de puissance qu'elle engendre ; ces informations, convenablement traitées, guident l'exploitation. Celle-ci veille donc essentiellement à ne pas perdre d'eau et à l'utiliser au moment où elle a le plus de valeur tout en économisant le combustible des usines thermiques. C'est un *problème d'optimisation*, domaine privilégié d'emploi des ordinateurs.

En schématisant, on peut distinguer trois modes d'exploitation différents pour les aménagements hydro-électriques débitant sur un réseau interconnecté :

— exploitation au fil de l'eau ;
— exploitation sur programme fixe en éclusées ;
— exploitation sur programme avec *téléréglage « fréquence-puissance »*.

Ces modes d'exploitation peuvent tous être automatisés ou au moins télécommandés.

2.1. Exploitation au fil de l'eau. — C'est la plus simple, et elle ne nécessite pratiquement pas l'intervention du Service de répartition ; elle est appliquée aux aménagements n'ayant aucune réserve, et elle consiste à utiliser tout le débit disponible. Ce débit pouvant subir des variations, la prise d'eau, ou la chambre de mise en charge, est munie d'une télétransmission de niveau qui commande les organes distributeurs des groupes, de façon à maintenir le niveau à la prise d'eau entre d'étroites limites. En effet, une légère baisse de niveau fait baisser la chute, donc la puissance, et une hausse peut faire perdre de l'eau, donc de l'énergie, par déversement. Bien entendu, le nombre de groupes à mettre en service varie en fonction du débit ; il s'agit d'éviter la marche des groupes à faible charge, avec un faible rendement, ce qui dépend du type de turbine.

2.2. Exploitation sur programme fixe en éclusées. — Ce mode d'exploitation est employé pour des usines à réservoir saisonnier, ou à éclusées journalières. Il consiste à fixer, quelques heures à l'avance, des paliers de puissance en fonction des besoins du réseau, du débit et de la réserve en eau. Ce programme, souvent établi pour 24 h, subit fréquemment des ajustements durant la journée, toujours à la demande du Service de répartition. Bien entendu, en cas d'abondance d'eau sur un aménagement à réservoir journalier, la puissance reste fixe et égale à la valeur maximale qu'il est possible d'obtenir.

2.3. Exploitation en téléréglage « fréquence-puissance ». — Pratiquement, tous les groupes générateurs, y compris ceux des usines exploitées au fil de l'eau et sur programme fixe, sont munis d'un réglage accélérotachymétrique, dénommé *réglage primaire,* afin de faire varier, dans une certaine mesure, leur puissance en fonction des écarts de fréquence du réseau ; l'importance de cette action peut être ajustée à la demande en agissant sur le régulateur. Cette action, dépendant des écarts de fréquence, doit être faible de façon à ne pas prendre une importance prépondérante vis-à-vis de celle qui est fonction des indications du télélimnimètre, cela tout spécialement pour les usines au fil de l'eau. Cette disposition fait participer au réglage de la fréquence toutes les usines interconnectées sur un réseau ; en outre, les organes de régulation ne doivent pas engendrer de phénomènes d'instabilité, entraînant des balancements de puissance entre usines. Aussi, pour assurer simultanément le réglage de la fréquence et celui de la puissance d'échange à l'intérieur d'un réseau (ainsi qu'aux frontières d'interconnection des réseaux) fait-on appel à d'autres équipements pour la commande de régulateurs de turbines. Le réglage obtenu est dit *secondaire*, ou réglage *fréquence-puissance*.

Dans le réglage secondaire, une action par télécommande est effectuée sur certaines usines seulement à partir d'un Centre régional du Service des mouvements d'énergie. Ces usines, thermiques et hydrauliques, sont choisies en fonction de leurs diverses caractéristiques parmi celles qui permettent le mieux cette fonction. En particulier, pour les usines hydrauliques, il s'agit d'usines assez puissantes, à réservoirs et dont les turbines conservent un bon rendement dans une importante plage de puissance. En France, sur un total de plus de 200 usines hydrauliques d'une puissance supérieure à 10 MW, seulement 21 sont ainsi téléréglées ; en outre, 25 centrales thermiques le sont également.

En pratique, comme dans l'exploitation sur programme fixe, le Centre régional indique à l'avance des paliers de puissance de base, variables suivant les horaires de la journée, en affectant ces paliers d'une marge de réglage « fréquence-puissance », en plus et en moins. On conçoit que ce rôle soit souvent confié à d'importants aménagements à réservoirs saisonniers. C'est, en effet, ce type d'aménagements qui possède le mieux les grandes qualités de souplesse d'adaptation propres à l'hydraulique et qui peut ainsi faire face au réglage fin des « dentelles » de la consommation. Les turbines Pelton sont spécialement aptes à cet usage car leur rendement varie relativement peu avec leur charge en puissance.

Par exemple, l'aménagement de Roselend-La Bâthie, le plus puissant de France avec 500 MW installés et 1 200 m de chute, peut passer de l'arrêt complet à la pleine puissance en 3 minutes environ ; quelques dizaines de secondes suffisent pour chaque groupe pour passer d'une puissance très réduite à la pleine charge, et inversement. On peut souligner à ce propos que, contrairement aux machines thermiques, les générateurs hydro-électriques peuvent donner à froid et sans inconvénients leur pleine puissance.

2.4. L'automatisme dans l'hydro-électricité. — Les grands progrès réalisés dans les moyens de télétransmissions, dans les détecteurs de défauts, de même que dans les organes de manœuvre oléodynamiques, électriques ou pneumatiques ont permis de rendre pratiquement automatique presque tout ce qui concerne l'exploitation d'usines ou de groupes d'usines. Ainsi certaines sont télécommandées à partir d'un poste central plus ou moins lointain et aucun personnel n'est nécessaire sur place. C'est notamment le cas de l'usine automatique du Plan d'Aval en Savoie (elle est située à 1 950 m d'altitude et pratiquement inaccessible en hiver).

3. DIFFÉRENTS TYPES D'AMÉNAGEMENTS

Les aménagements hydro-électriques sont de types très divers mais ils peuvent être classés suivant deux critères, à savoir leurs hauteurs de chute et leurs réservoirs.

Suivant les **hauteurs de chutes,** ou plus précisément suivant le type de turbine (qui en dépend en grande partie) on distingue :

— les très hautes chutes : 500 m environ (turbines Pelton) ;
— les hautes et moyennes chutes : 500 m à 30 m (turbine Francis) ;
— les basses chutes : 40 m à 10 m (turbines Kaplan) ;
— les très basses chutes : 20 m à 2 m (turbines Kaplan en disposition de type « bulbe »).

En règle générale, pour une même puissance unitaire, les turbines pour hautes chutes tournent plus vite que celles des basses chutes. Leur groupe générateur, c'est-à-dire l'ensemble accouplé turbine-alternateur, est ainsi bien plus économique. Les vitesses peuvent varier de 1 000 tr/mn à des valeurs très basses (par exemple, 93,75 tr/mn pour l'usine marémotrice de la Rance ou pour celle de Beaucaire sur le Rhône).

Cette classification n'est pas absolue, en ce sens que le meilleur type de turbine à employer varie également avec la puissance unitaire. Par exemple, une chute de 350 m

recevra une turbine Francis pour une forte puissance, ou une turbine Pelton pour une puissance réduite.

Suivant l'importance de leur **réservoir amont** (qui a en général simultanément deux rôles distincts: la régularisation et le report d'énergie) on peut établir une classification en tenant compte de la durée de remplissage du réservoir.

Classification des usines hydrauliques	Durée de remplissage
Usines de lacs (en général à remplissage saisonnier)	de 400 h à 6 mois
Usines d'éclusées	entre 400 h et 2 h
Usines pratiquement au fil de l'eau	inférieure à 2 h

Il y a également des aménagements qui sont eux-mêmes au fil de l'eau mais qui, en réalité, profitent d'un, ou plusieurs, réservoir amont; le cas est fréquent le long d'une vallée où l'on a souvent une véritable chaîne d'usines dont le régime de fonctionnement en puissance est interdépendant. Ces usines sont donc synchronisées en puissance et font simultanément des éclusées; c'est le cas de plusieurs usines sur la Durance.

On peut établir également une autre classification des réservoirs en tenant compte de la *durée de vidange à pleine puissance;* cette classification a une autre signification car elle fait intervenir la puissance installée dont le choix peut être soumis à d'autres critères, en particulier pour la fourniture de fortes puissances durant des pointes de faible durée.

La classification des aménagements suivant les deux critères considérés (hauteur de chute et capacité des réservoirs) est très insuffisante pour justifier l'extrême diversité des aménagements. Celle-ci provient surtout de la variété des conditions climatiques, topographiques et géologiques, et cette variété est spécialement accusée en France métropolitaine. Dans les lignes qui suivent, on classe les aménagements en quatre grandes catégories schématiques dont on étudiera ensuite les caractéristiques. Ces catégories se distingueront évidemment entre elles par la hauteur de chute, mais surtout par la manière dont cette hauteur est obtenue ou créée.

3.1. Les chutes de montagne. — Dans ces aménagements, la chute, en général haute, est créée essentiellement par la topographie; cette chute ne correspond pas toujours directement à la pente d'un cours d'eau à cause des transferts d'eau entre vallées réalisés au moyen de galeries. Ces chutes peuvent être au fil de l'eau ou elles peuvent comporter des retenues; en général, la hauteur des barrages de retenue n'intervient que pour une fraction faible de la hauteur de chute totale.

Les chutes de montagne sont d'une extrême diversité, ce qui provient essentiellement des multiples combinaisons que l'on peut obtenir avec des tunnels. Le coût des tunnels intervient souvent pour une part prépondérante dans le coût total d'investissement, souvent la moitié si l'aménagement ne comporte pas de grand barrage, et il est très influencé par les conditions géologiques. C'est dire l'importance que peut avoir le choix entre les diverses solutions envisageables. La conception même de l'aménagement en dépend directement, ainsi que les répercussions que cette conception peut avoir sur les aménagements voisins existants ou même prévisibles. Souvent, un aménagement prive d'eau, partiellement ou totalement, d'anciens aménagements (cela pour une meilleure utilisation). Les études des chutes de montagne doivent être conduites par des ingénieurs-projeteurs expérimentés; en particulier, ils doivent tenir le plus grand compte des conditions géologiques dans le choix qu'ils ont à faire, choix qui a d'importantes répercussions économiques.

3.2. Moyennes chutes de grands barrages. — Ces chutes sont situées dans des régions de moyenne altitude et la hauteur de chute correspond sensiblement à la hauteur du barrage. L'usine est située soit dans le corps même du barrage, soit assez peu à l'aval et reliée à la retenue par une courte dérivation. En France, la plupart des belles réalisations du Massif Central sont de ce type, avec des hauteurs dépassant parfois 100 m. Dans les Alpes, on peut citer celle du Sautet sur le Drac et surtout celle de Monteynard, plus moderne, avec usine incorporée au barrage.

3.3. Moyennes chutes comportant des canaux. — Le barrage de prise est de faible hauteur et la hauteur de chute provient essentiellement de la différence de pente entre le cours d'eau et un assez long canal de dérivation aboutissant à l'usine. Les diverses chutes équipant la Durance à l'aval de Serre-Ponçon sont de ce type, certaines comprennent en outre d'importantes dérivations alimentant des installations d'irrigation.

3.4. Basses chutes de fleuves ou de rivières. — C'est ce type d'aménagement qui fait notamment l'objet des grandes réalisations sur le Rhin et le Rhône. En général, ces aménagements sont dits à *buts multiples:* en effet, ils servent également à la navigation (et pour cela sont munis d'écluses) et aussi parfois à l'irrigation. La disposition des ouvrages peut être très diverse: l'usine, les passes de crues et les écluses peuvent faire partie d'un même ensemble aligné en travers du cours d'eau, ou être séparés les uns des autres par des canaux spécialisés: canal usinier et canal de navigation en plus du lit naturel.

CHAPITRE III

PRINCIPAUX OUVRAGES D'UNE CHUTE D'EAU

Les ouvrages de génie civil

Avant de donner des exemples d'aménagements, il est judicieux d'exposer, dans les grandes lignes, les conceptions actuelles en ce qui concerne les principaux ouvrages de génie civil, à savoir de l'amont vers l'aval:

- les prises d'eau au fil de l'eau;
- les tunnels ou canaux de dérivation;
- les grands barrages de retenue en béton ou en matériaux compactés;
- les galeries en charge;
- les cheminées d'équilibre;
- les conduites forcées;
- les usines;
- les galeries ou canaux de restitution.

1. PRISES AU FIL DE L'EAU

1.1. Prises sur torrents de montagne. — La conception de ces ouvrages a fait d'importants progrès ces dernières années. En particulier, on a mis au point des prises d'eau de haute montagne, entièrement automatisées, qui fonctionnent sans intervention humaine et sans énergie électrique. Les plus grosses difficultés à vaincre étaient celles causées par les apports solides de sable et de gravier, spécialement lorsque le torrent est d'origine glaciaire. En torrent, l'ouvrage de prise proprement dit se compose d'un très petit barrage submersible et d'une prise latérale à barreaux espacés; plus souvent, on emploie le dispositif dit à *prise par en dessous*, constitué de barreaux disposés sous le

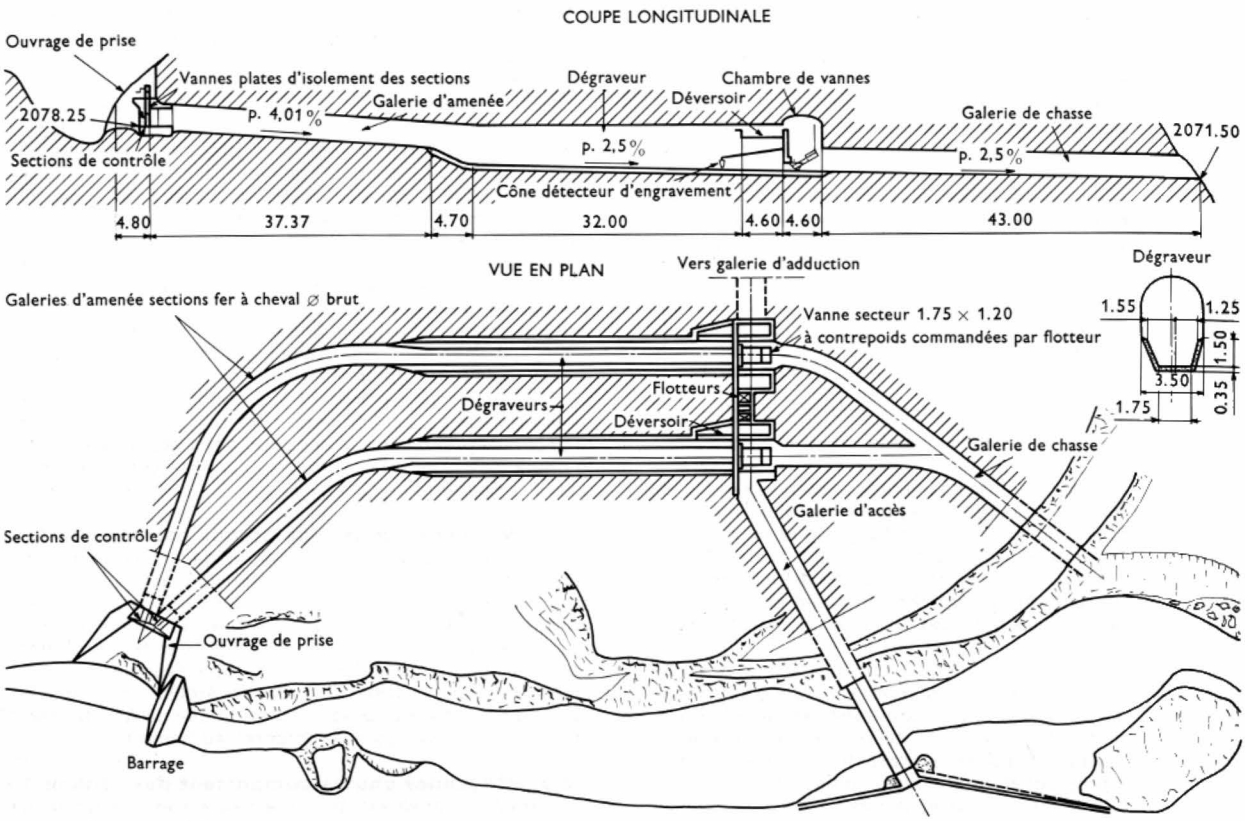


Fig. III-1 — Prise d'eau de haute montagne à double dégraveur automatique (torrent d'Avérole pour la chute du Mont-Cenis) *(É.D.F.)*

lit du torrent, l'eau et les apports solides, sauf les gros éléments, sont recueillis par-dessous. Ce flot est ensuite conduit dans un dégraveur où les apports solides se déposent ; l'eau dessablée et dégravée s'écoule par un déversoir latéral à l'aval du dégraveur. Le fond du dégraveur est muni d'un détecteur hydro-manométrique d'engravement, lequel commande l'ouverture temporisée d'une vanne de chasse, les corps solides sont alors évacués à l'aval dans le torrent par une galerie de chasse. Avec ce type de prise, il n'y a qu'une légère perte d'eau lors des chasses et seulement lorsque celles-ci sont nécessaires. Ces ouvrages sont en général souterrains ou recouverts, ce qui les met à l'abri du gel ; ils peuvent ainsi rester en service plusieurs mois consécutifs sans surveillance. Le vannage est manœuvré hydrauliquement par flotteurs en puits, ou bac à eau formant contrepoids (fig. III-1).

Un dessablage très poussé est obtenu en augmentant la section et la longueur du dégraveur ; c'est notamment le cas lorsque l'eau dérivée est destinée à être turbinée sans transiter dans une retenue où elle se décanterait ; l'usure des conduites et surtout des turbines est, en effet, directement fonction de la teneur des eaux en sable.

1.2. Autres prises d'eau à plus basse altitude. — Les prises d'eau alimentant directement une usine sont munies de grilles à barreaux destinées à arrêter les corps flottants, l'espace libre entre barreaux varie de 3 à 15 cm suivant le type de turbines. Le nettoyage des grilles est assuré manuellement ou par un dégrilleur plus ou moins perfectionné suivant les cas, parfois même automatisé.

Depuis quelques années, on a une certaine tendance à supprimer les grands dessableurs compliqués couramment employés autrefois. En effet, d'une part, les turbines modernes résistent mieux qu'autrefois à l'abrasion, d'autre part, ces dessableurs se sont révélés à l'usage difficiles à exploiter et parfois moins efficaces que prévu. Lorsque cela est possible, on préfère concevoir la retenue en rivière de façon à ce qu'elle puisse assurer le dessablage à elle seule.

Des purges périodiques de la retenue sont alors nécessaires ; au cours de celles-ci, l'usine doit être arrêtée et il y a une perte d'eau. Les purges s'effectuent préférentiellement en hautes eaux, le dégravage de la retenue est ainsi plus efficace et plus rapide et l'énergie ainsi perdue a beaucoup moins de valeur.

Les déversoirs de surface, souvent contrôlés par un vannage, doivent être établis de telle façon que la lame d'eau déversante par-dessus le barrage de prise ne subisse pas de décollements créateurs de vibrations. À cet effet, le profil du coursier doit être soigneusement étudié et des dispositifs amortisseurs doivent éviter les affouillements à l'aval des ouvrages (fig. III-2).

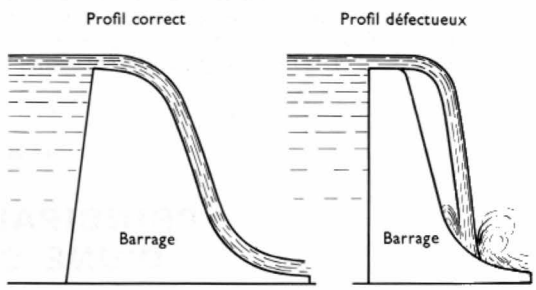


Fig. III-2

2. CONDUITES DE DÉRIVATION ET GALERIES

2.1. Conditions d'utilisation. — Ces conduites peuvent être constituées de tuyaux en béton armé, enterrés, préfabriqués, ou coulés sur place en tranchée pour les plus grandes sections. Les matières plastiques sont de plus en plus employées pour les très faibles diamètres. Plus généralement, les conduites de dérivation sont en tunnel et peuvent être, suivant le cas, soit à écoulement libre, soit en charge. Les tunnels, ou galeries, permettent de réaliser des circuits très directs, et également de transférer les eaux d'un bassin versant dans un autre en favorisant toutes sortes de combinaisons qui aident le projeteur à trouver la meilleure

solution. Bien entendu, le coût et les délais de réalisation des tunnels sont extrêmement influencés par les conditions géologiques. Ces conditions sont souvent aléatoires, surtout lorsqu'on envisage des travaux à grande profondeur et de grandes longueurs sans « fenêtres » de communication avec l'extérieur. En effet, les observations géologiques de surface, ainsi que les divers procédés d'étude géotechnique, notamment par procédés sismiques et électriques, sont souvent insuffisants pour obtenir les renseignements que l'on désirerait. C'est dire que le choix entre les multiples solutions de tracé et de calage des galeries est assez délicat : la conception même de l'aménagement peut en être fonction. Parfois, préalablement aux travaux, on effectue des galeries de reconnaissance dont les enseignements sont susceptibles d'amener des changements importants dans la structure du projet (quelquefois même l'abandon du projet).

La section des galeries varie avec le débit prévu, entre quelques mètres carrés nécessaires au passage de l'homme et des engins, et une centaine de mètres carrés pour les souterrains à gros débits. En pratique, le diamètre minimal de perforation est de 2,6 m en roche nue, ce qui donne un diamètre utile d'écoulement de 2,3 m lorsque l'on doit munir la galerie d'un revêtement de béton.

La section économique se détermine par l'analyse marginale. On compare les performances énergétiques (liées aux économies de perte de charge) et le coût de construction (fonction du diamètre) pour le taux d'actualisation choisi.

La *pente piézométrique*, c'est-à-dire celle de l'écoulement, dépend de la section retenue. Selon cette pente piézométrique on peut caler la galerie de façon à obtenir un écoulement à surface libre ou un écoulement en charge, sans possibilité de rentrée d'air. Dans la pratique, la pente piézométrique est de quelques unités pour mille.

Les pertes de charge sont assez souvent calculées au moyen de la formule suivante dite de *Strickler* :

$$V = K\, R^{2/3}\, J^{1/2}$$

dans laquelle on désigne :

— par V, la vitesse moyenne de l'eau (quotient du débit et de la section utile) ;

— par R, le rayon hydraulique mouillé, ou quotient de la section par le périmètre mouillé ;

— par J, la pente de perte de charge ;

— par K, le coefficient de rugosité dépendant de l'état des parois.

On exprime V en mètres par seconde, R en mètres, J en mètres par mètre. K est un coefficient dont l'unité est le mètre à la puissance un tiers par seconde.

Cette formule approchée est très pratique d'emploi quand on ne recherche pas une grande précision ; en effet, elle peut être utilisée pour une gamme de diamètres allant de 0,5 m à 10 m (et même plus), ainsi que pour une gamme de vitesse moyenne allant de 0,3 m environ à plusieurs dizaines de mètres par seconde. Elle est applicable à un écoulement fluvial libre et également aux conduites forcées où la vitesse moyenne est en général comprise entre 4 et 10 m/s.

Les valeurs à prendre pour le coefficient K sont les suivantes :

- $K = 90$ à 100 (ou même un peu plus) pour les conduites forcées munies d'une peinture très lisse ;
- $K = 80$ pour un béton assez uni (70 pour un revêtement ordinaire) ;
- $K = 30$ pour une galerie brute de rocher dont le radier est revêtu de béton ;
- $K = 25$ à 30 pour une galerie en rocher brut.

Pour un calcul plus précis, il faut cependant admettre que le coefficient K doit légèrement varier en fonction de la section.

2.2. Exécution des galeries. — Les travaux souterrains représentent une opération difficile et délicate ; ils requièrent des équipes qualifiées et entraînées. Les venues d'eau augmentant les difficultés des travaux, dans la mesure du possible on s'attache à perforer les galeries à partir de *fenêtres* correspondant à des points bas pour éviter les risques graves et le pompage en cours de travaux. D'une façon générale, on préfère les terrains durs et imperméables. Lorsque le terrain n'est pas bon, il a tendance à s'ébouler et on se protège alors par des soutènements de types divers : cintres en bois ou métalliques, boulons d'ancrage. On peut même être amené à traiter le terrain par injections à l'avancement ou à le soutenir par la *méthode des enfilages*.

La forme de la section transversale a une grande importance pour la tenue de l'ouvrage et pour sa résistance aux poussées de terrains. Le profil circulaire est le mieux adapté à ce point de vue, mais sa réalisation est incommode du fait des difficultés de circulation sur un radier courbe ; on le réserve aux galeries en forte charge ou aux tronçons en très mauvais terrains. Dans les autres cas, on utilise un profil en fer à cheval.

Si le rocher est suffisamment résistant et étanche, le tunnel peut être laissé à l'état brut ; dans les autres cas, on procède à un revêtement des parois à l'aide de béton ; ce revêtement a aussi l'avantage de diminuer les pertes de charge et de permettre une réduction de la section. Le béton projeté par air comprimé est de plus en plus utilisé car plus économique que le revêtement classique en béton coffré ; cependant, il est moins résistant et offre une plus grande rugosité. Lorsque la galerie comporte des cintres de soutènement métalliques, ceux-ci ne sont généralement pas récupérés ; ils restent dans le béton de revêtement qu'ils renforcent ainsi.

Le percement par les méthodes traditionnelles est resté employé jusqu'à présent. Ces méthodes ont fait des progrès durant les dernières décennies grâce à la mécanisation de plus en plus poussée. Elles consistent à perforer le front de taille d'un certain nombre de trous de 3 à 5 m de profondeur ; ces trous sont ensuite chargés d'explosifs, et les roches broyées par l'explosion (*marinage*) sont ensuite chargées sur des wagonnets par une pelle électrique ou à air comprimé. En bon terrain la cadence d'avancement atteint facilement 300 m par mois. Les marteaux de perforation restent à air comprimé ; de plus en plus ils sont montés en groupe sur des plates-formes lourdes dénommées « Jumbo », tout au moins pour les souterrains de grande section.

Les wagonnets sont remorqués sur une voie ferrée par un tracteur électrique à accumulateurs ; ce procédé de roulage a été très souvent employé jusqu'à présent pour le trafic du matériel et l'évacuation des déblais. La traction sur pneus avec des moteurs Diesel est de plus en plus mise en œuvre bien qu'elle accroisse les besoins de ventilation.

Depuis quelques années, on commence à employer des machines spéciales ou *tunneliers* qui perforent la galerie de manière continue, sans explosifs, comme dans le cas d'un sondage. Elles comportent un disque tournant ayant le diamètre de la galerie, sur lequel est exercée une très forte poussée axiale ; il est garni d'outils qui broyent la roche et les déblais sont évacués vers l'arrière. On peut ainsi obtenir des vitesses d'avancement très grandes : 20 à 50 m par jour. Les tunneliers offrent encore d'autres avantages : ne « fatiguant » pas la roche comme le fait l'explosif, ils permettent d'économiser sur le soutènement qui est, en général, très onéreux et lent. En outre, la section de forage est beaucoup plus lisse, ce qui permet de réduire la section utile d'écoulement en galerie brute ou encore de faire d'importantes économies sur le béton de revêtement par suite de l'absence d'*hors profils*. Actuellement on estime même que les tunneliers sont susceptibles d'entraîner une sorte de révolution dans les travaux souterrains, cela avec des conséquences bénéfiques, analogues à celles provenant de la révolution advenue dans les travaux publics à l'air libre par l'emploi des grands engins de terrassement, de manutention et de compactage.

2.3. Les longues galeries. — Une longue galerie, entre deux débouchés au jour par des fenêtres, pose des problèmes divers : délais d'exécution, ventilation, roulage, inconnues d'ordre géologique, etc. Autrefois, on cherchait à diminuer les distances entre fenêtres ; elles étaient souvent de quelques centaines de mètres et ne dépassaient guère un kilomètre. Les progrès effectués ont permis d'allonger notablement ces distances : elles atteignent couramment 4 à 5 km.

Certaines galeries s'étendent sur de très grandes longueurs sans qu'il y ait de fenêtre ; celle de la chute Isère-

Barrage en enrochements du Mont-Cenis (*J. Léger*)

Arc (datant de 1954) est en faible charge, la distance entre fenêtres atteint 12 km et le diamètre intérieur est de 6,4 m. Cette galerie traverse la chaîne de Belledonne avec une couverture rocheuse atteignant 2 000 m. La chute projetée Arc-Isère (usine du Cheylas dans l'Isère) aura même une longueur sans fenêtre de 18 km. Toutefois, beaucoup plus que pour la galerie Isère-Arc, lors de l'exécution de cette grande traversée, il faudra tenir compte des deux particularités marquantes, à savoir : les conséquences de l'état de précontrainte de la roche (qui est cristalline) contre lesquelles la technique du boulonnage est très efficace et celles dues à l'effet géothermique (vraisemblablement, il faudra installer des dispositifs de refroidissement durant les travaux).

3. LES GRANDS BARRAGES DE RETENUE

Les retenues d'eau créées par ces ouvrages sont importantes, donc en général saisonnières. Deux techniques s'affrontent : le béton rigide et les matériaux compactés. Toutes deux ont fait des progrès ces dernières années mais ceux-là ont peut-être été plus importants pour les barrages en terre et enrochements compactés. L'emploi des grands engins modernes de terrassement, de manutention et de compactage a récemment permis de réduire le prix relatif des barrages en matériaux meubles ; de grands ouvrages, jugés auparavant trop onéreux, ont pu être réalisés dans des sites où, il y a quelques décennies, on ne pensait guère qu'à des ouvrages en béton. De plus, et ceci est très important, les barrages rigides en béton, s'ils ont une hauteur notable, ne peuvent guère accepter qu'un soubassement rocheux (cela limitait les sites utilisables).

Le premier ouvrage important en matériaux meubles réalisé en France est celui de Serre-Ponçon sur la Durance. Il a été suivi de celui du Mont-Cenis, où le volume de matériaux a été un peu plus important (15 Mm^3), et réalisé dans des conditions climatiques incomparablement plus rudes en raison de l'altitude. Cependant, comparés aux barrages en matériaux meubles, les barrages en béton rigide offrent notamment les deux avantages suivants :

— la possibilité d'installer l'usine au pied d'ouvrage, dans le corps même du barrage ;

— des facilités pour aménager les organes de vidange et d'évacuation des crues, ainsi que la dérivation provisoire, durant les travaux.

Là où les vidanges de fond sont réalisées par conduites métalliques bloquées dans le béton du barrage et munies de vannes, les évacuateurs de crues sont facilement réalisables à la partie supérieure du barrage, souvent à son axe de symétrie ; les évacuateurs en « saut de ski » reportent l'impact de l'eau plus loin à l'aval et permettent d'économiser sur les ouvrages de protection. En revanche, avec un barrage en matériaux meubles, les ouvrages de vidange et d'évacuation ne peuvent guère être aménagés qu'en dehors du barrage, dans les appuis, et plus généralement en souterrains. De ce fait, ces ouvrages sont coûteux, surtout si des crues importantes sont à prévoir car cela nécessite de très grandes sections.

Dès que la réserve d'eau en amont d'un barrage est un peu importante, il y a dépôt de la quasi-totalité des apports solides amenés par les cours d'eau qui l'alimentent ; en général, seule une faible partie des matériaux les plus fins, ou proches des organes de vidange de fond, peuvent être évacués par la vidange. Ainsi on peut estimer que la plupart des retenues se combleront en quelques centaines d'années, d'autres dans un délai beaucoup plus réduit, et qu'il faudra peut-être un jour les purger par d'autres moyens. Plusieurs retenues ont déjà subi, de ce fait, une réduction importante de leur capacité utile en eau après trente ou quarante ans de service.

3.1. Barrages en béton. — Depuis la dernière guerre mondiale, d'importants progrès techniques ont été réalisés dans le domaine du béton. Le temps où l'on hésitait à faire des ouvrages en béton nu à très haute altitude, par crainte des effets du gel, est révolu depuis longtemps.

Lorsque le barrage de Bissorte a été construit en 1930 (à 2 080 m d'altitude), cette crainte avait conduit les constructeurs à revêtir les parements amont et aval de pierres appareillées, ce qui est coûteux, alors que le corps même du barrage, du type poids, est en béton de masse.

Les progrès effectués concernent tous les domaines du béton : les ciments, la nature et la granulométrie des agrégats, les différents additifs tels que les entraîneurs d'air, etc. La mise en œuvre s'est également perfectionnée avec la mécanisation et l'automatisation qui permettent un

dosage précis des constituants ; la teneur en eau du béton frais a pu être considérablement abaissée par l'emploi généralisé de vibrateurs efficaces. On a ainsi obtenu une très sensible amélioration des caractéristiques mécaniques et de l'étanchéité du béton.

Normalement, les barrages ne sont pas armés, contrairement à une opinion très répandue chez les non-spécialistes. Parfois cependant certains « revêtements de peau » ou des parties annexes telles que le voisinage d'organes hydrauliques ou celui de passerelles peuvent être faiblement armés. La crête des barrages est souvent aménagée en voie carrossable réservée à l'exploitation, ou ouverte au public

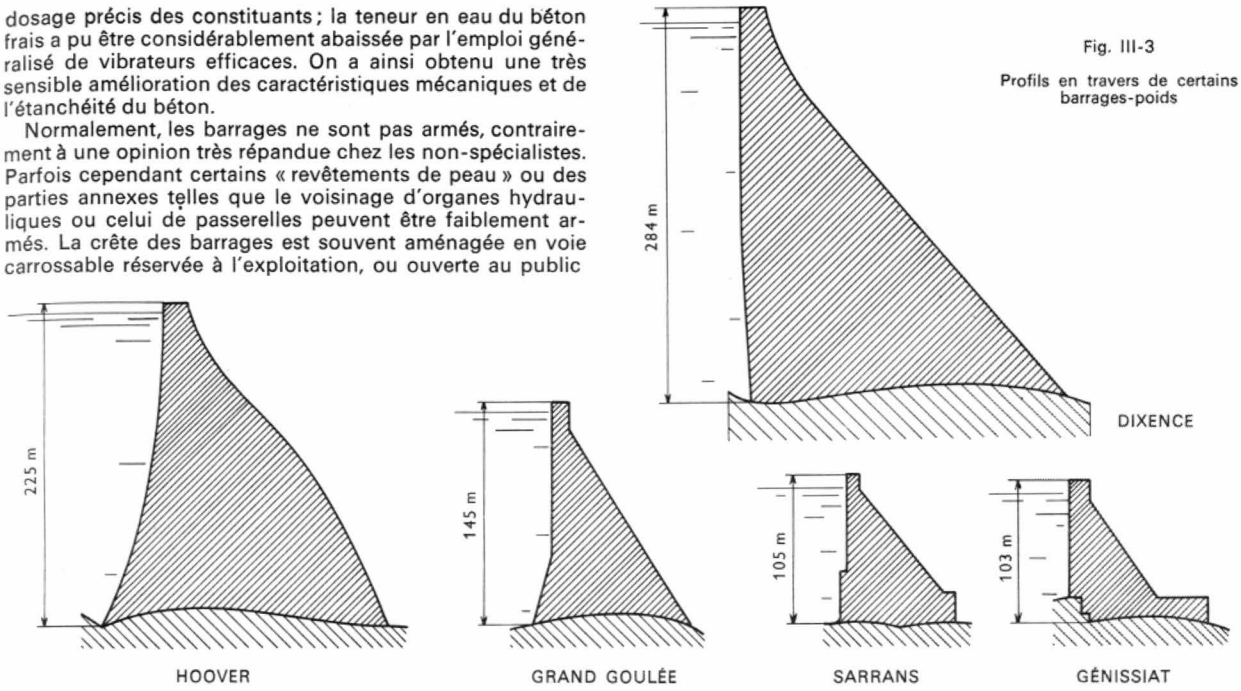


Fig. III-3

Profils en travers de certains barrages-poids

rétablissant ainsi une communication submergée par la retenue. Sauf dans le corps même d'un barrage-poids (où ils sont souvent plus réduits), les dosages sont voisins de 250 kg de ciment au mètre cube de béton ; les résistances à la rupture par compression atteignent environ 250 bars à 90 jours et 300 bars à un an (1 bar = 10^5 N/m²).

Quel qu'en soit le type, un barrage en béton doit travailler essentiellement en compression ; la structure est étudiée pour que les contraintes de traction soient les plus faibles possibles (elles ont surtout des causes thermiques difficilement évitables).

Les grands barrages en béton peuvent être sommairement classés en quatre catégories :

— les barrages-poids massifs ;
— les barrages-poids évidés ou à contreforts ;
— les barrages-voûtes ;
— les barrages à voûtes multiples.

Cette classification n'a rien d'absolu ; ainsi le grand barrage de Roselend est une combinaison des types voûte et à contreforts. De même, plusieurs barrages-poids sont incurvés et leur stabilité bénéficie partiellement de l'effet voûte. Sauf pour des hauteurs assez faibles, les barrages-poids massifs ont tendance à être abandonnés au profit des barrages à contreforts. À propos des barrages-poids, on mentionnera divers dispositifs d'étanchéité en fondation, de drainage et d'auscultation, étant bien entendu que ces dispositifs, *mutatis mutandis*, sont communs à tous les autres types de grands barrages, qu'ils soient en béton ou en matériaux meubles.

3.1.1. Barrages-poids massifs. — Un barrage-poids est ainsi appelé parce qu'il résiste à la poussée horizontale de l'eau du fait de son propre poids. Le parement amont est en général presque vertical ou à très faible fruit ; pour le parement aval le fruit est d'environ 75 % (fig. III-4).

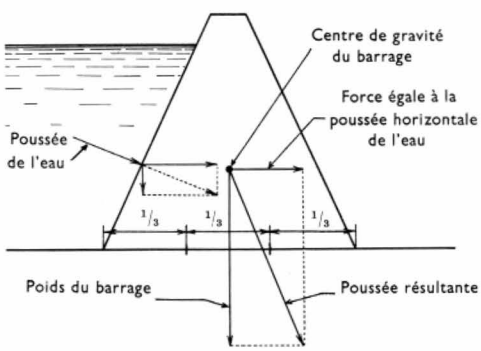


Fig. III-4

Pour que la stabilité soit satisfaisante, la poussée de l'eau perpendiculaire au parement amont et le poids propre de l'ouvrage doivent admettre une résultante passant à l'intérieur du polygone d'appui de l'ouvrage, c'est-à-dire à l'intérieur de sa base. D'autre part, pour qu'aucune partie du barrage ne supporte un effort notable de traction, on démontre qu'il est nécessaire que cette force résultante passe à l'intérieur du tiers médian de la base d'appui. Si cette condition n'était pas remplie, le béton côté amont serait soumis à des efforts d'extension, de telle sorte que la moindre fissure pourrait s'ouvrir et laisser l'eau sous pression s'infiltrer, compromettant ainsi la stabilité de l'ouvrage. Mais le danger le plus grand est celui des « sous pressions » dues à l'eau même, en provenance des appuis et du soubassement ; elle cheminerait de bas en haut par les fissures de la roche et elle pourrait pénétrer sous et à l'intérieur du barrage et ainsi créer un effort de soulèvement, de nature à diminuer l'effet de poids du barrage. À l'extrême, celui-ci serait en quelque sorte flottant et entraîné ou basculé vers l'aval.

Plusieurs dispositions sont prises pour empêcher ces effets néfastes. Tout d'abord, on soigne particulièrement le parement amont pour le rendre le plus étanche possible ; ensuite on injecte soigneusement du mortier sous pression dans le contact béton-rocher sous le parement amont. Enfin, l'étanchéité, réalisée en travers de la vallée par le barrage lui-même, est prolongée en profondeur, au travers du rocher qui le supporte, par un voile injecté en ciment ; il permet d'améliorer les caractéristiques naturelles d'étanchéité du rocher. De plus, considérant que des infiltrations sont inéluctables, on les collecte en ménageant des galeries et des conduites de drainage dans le sein même du barrage et dans la roche à son voisinage. Certains grands ouvrages

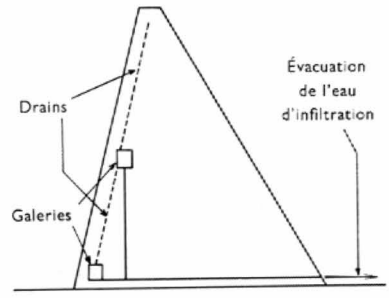
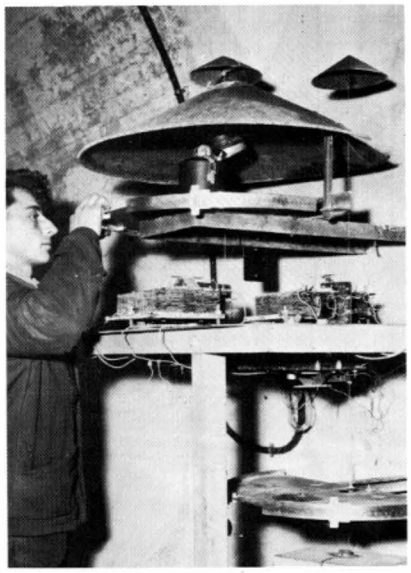


Fig. III-5



Système de contrôle d'oscillations sous le barrage de Tignes (*Goldner*)

ont ainsi plusieurs kilomètres de drains ou de galeries (fig. III-5).

Il est bon de dire quelques mots des dispositifs d'« auscultation » des barrages qui se sont notablement perfectionnés. Ils sont utilisés en phase constructive et en phase d'exploitation. Il s'agit essentiellement de jauges extensométriques et thermométriques qui sont noyées dans le corps du barrage et dont les indications sont centralisées dans une chambre d'auscultation fréquemment visitée. Les jauges extensométriques les plus souvent employées sont à cordes vibrantes ; une corde métallique tendue est excitée électriquement et la période de vibration, fonction de la tension mécanique, est transmise à l'extérieur. En un même point, on dispose de plusieurs jauges diversement orientées, ce qui permet d'avoir la valeur et la direction des contraintes principales subies par le béton, connaissant son coefficient d'élasticité. Des déplacements de l'ouvrage, même très faibles, peuvent être décelés, soit par des mesures topographiques extérieures, soit à l'aide de pendules de précision disposés dans des conduits verticaux aménagés dans le corps même de l'ouvrage. Enfin, on surveille l'évolution du débit des drains et les pressions hydrostatiques dans les appuis rocheux (grâce à des piézomètres).

Aussi bien à sa construction (du fait du retrait thermique du béton) qu'à la suite des variations saisonnières de température, le béton d'un barrage est le siège de phénomènes thermiques qui peuvent provoquer sa fissuration. C'est pour cela qu'un barrage est en général édifié par « plots » verticaux qui sont ensuite jointés par divers dispositifs d'étanchéité. Ce mode d'édification favorise l'évacuation de la chaleur de prise du béton. Certains ouvrages massifs comportent même des tuyauteries de refroidissement à l'eau, noyées dans le béton et destinées à servir durant sa prise ; elles permettent une grande cadence de bétonnage, et, par suite, un gain sur les délais de construction, ce qui est précieux sur les chantiers saisonniers d'altitude.

3.1.2. Barrages-poids évidés ou à contreforts. — Les progrès techniques réalisés sur les bétons ont permis de les soumettre à des taux de compression plus élevés et une économie des volumes de béton est devenue possible. À l'aval du parement amont, qui est souvent moins vertical que celui d'un barrage-poids massif, on dispose un certain nombre de plots ou contreforts dont la section horizontale a souvent la forme d'un T. Chaque contrefort, et la portion de parement amont qu'il étaye, se comporte et est calculé comme un élément de barrage-poids. Entre chaque élément, le parement amont est muni de joints d'étanchéité soignés. Il faut observer que la surface d'appui des contreforts sur le sol est limitée ; de ce fait, la pression d'appui est plus forte qu'avec un barrage-poids pur, et il faut que le sol puisse la supporter.

Le barrage de Plan d'Amont à 2 077 m d'altitude dans la région de Modane, construit en 1950-55, en est un exemple, de même les deux ailes du grand barrage de Roselend, construit peu d'années après.

3.1.3. Barrages-voûtes. — Ce type de barrage permet une très importante économie de volume par rapport aux types précédents. Comme son nom l'indique, il est calculé

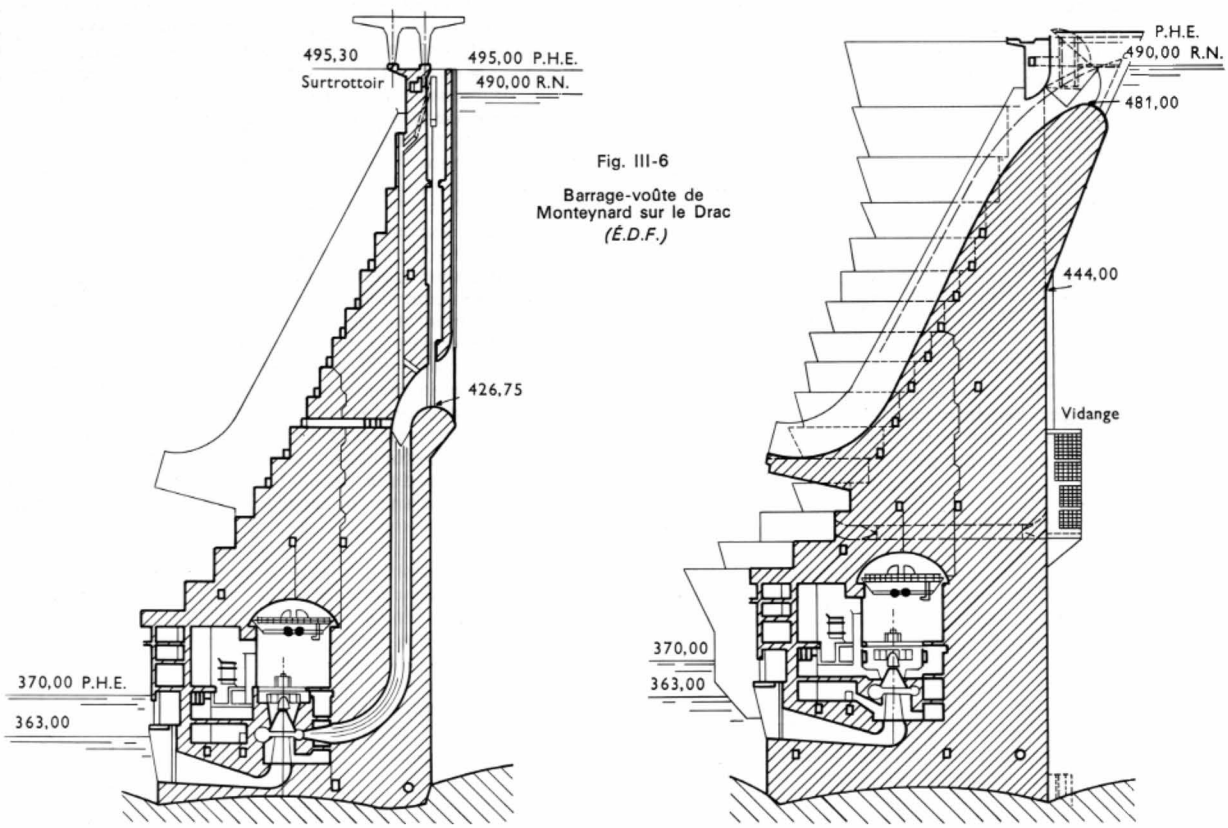


Fig. III-6

Barrage-voûte de Monteynard sur le Drac (*É.D.F.*)

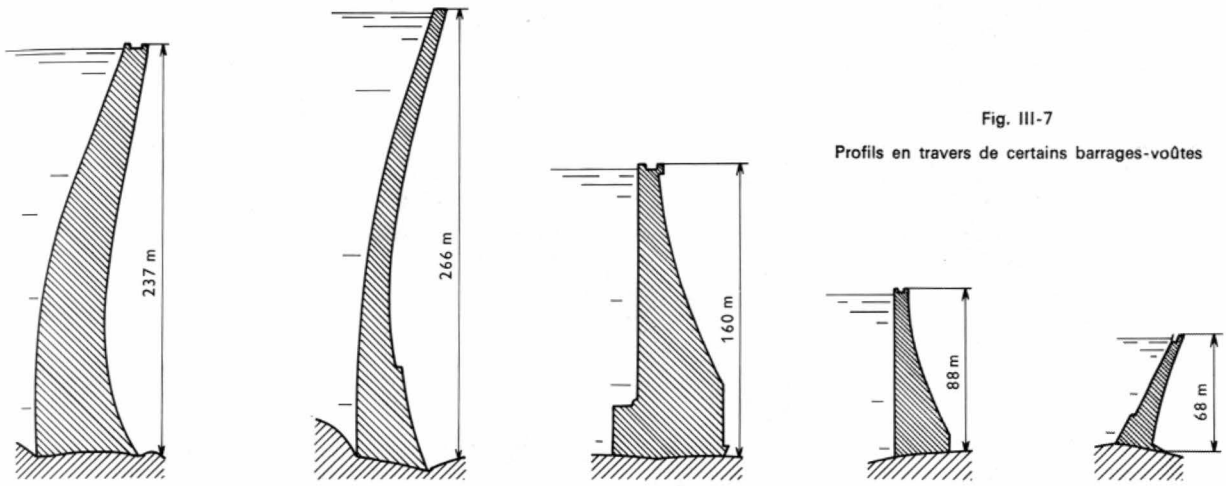


Fig. III-7

Profils en travers de certains barrages-voûtes

comme une voûte. Il transmet la poussée de l'eau horizontalement soit sur des culées d'extrémités en béton massif, soit beaucoup plus généralement sur les parois de la vallée si la nature des roches le permet. Les barrages-voûtes sont particulièrement bien adaptés aux gorges étroites en rocher sain. On peut distinguer: les **barrages-voûtes purs** à simple courbure, à parement amont cylindrique, les **barrages-coupoles** à double courbure et ceux à voûte épaisse ou **barrages poids-voûtes** (ainsi appelés parce que le poids intervient pour assurer la stabilité). Un des plus beaux exemples de voûte est donné par le barrage du Vajont en Italie, établi dans une gorge extrêmement étroite, de 190 m de longueur en crête seulement, et dont la hauteur est considérable: 266 m.

Il est courant de faire travailler le béton de voûte en compression au taux de $5.10^6 N/m^2$, calculé par la simple formule de résistance des tuyaux cylindriques, cela bien entendu indépendamment des effets secondaires tels que les effets thermiques. Des calculs plus poussés sont effectués par d'autres méthodes plus élaborées telles que celles des arcs encastrés, des arcs-consoles, des ajustements (*trial load method*), ou des éléments finis. On procède fréquemment à des essais sur modèles réduits, construits en plâtre, en caoutchouc dur ou autres matériaux; ils sont chargés à l'eau, au mercure, ou aux vérins à huile, les contraintes sont mesurées à l'aide de jauges extensométriques.

3.1.4. Barrages à voûtes multiples. — Un barrage à voûtes multiples comprend un organe d'étanchéité, ou *masque amont*, constitué d'un certain nombre de voûtes en béton ou en béton armé, souvent de très faible épaisseur. Cet organe s'appuie sur des contreforts qui reportent sur le

Caractéristiques de quelques grands barrages modernes

Grands barrages modernes		*H* en mètres	*L* en mètres	*l* en mètres	*V* en millions de mètres cubes
Barrages en béton	*Type poids :*				
	Grande Dixence (Suisse)	284	700	210	6
	Type poids-voûte à usine incorporée :				
	Monteynard (France)	155	200	54	0,45
	Type voûte :				
	Vouglans (France)	130	425	25	0,545
	Vajont (Italie)	262	190		0,352
	Kariba (Rhodésie)	128	617		1
	Type et voûte et contreforts :				
	Manicouagan (Canada)	214	1 300		2,25
	Type voûte et contreforts en partie appuyés sur la voûte :				
	Roselend (France)	150	900		0,95
Barrages en matériaux meubles (terres, enrochements)	Mont-Cenis (France)	115	1 500	550	15
	Serre-Ponçon (France)	122	620	650	14
	Assouan (Égypte)	111	3 800		42,6
	Oroville (États-Unis d'Amérique)	236	2 300		60
	Tarbela (Pakistan)	148	2 750		150
	Nurek (U.R.S.S.)	310	730		58

H : hauteur maximale sur fondation.
L : longueur développée en crête.
l : largeur maximale à la base.
V : volume de matériaux constitutifs sur fondations.

Barrage à voûtes multiples de Migoélou (*Ehrman - É.D.F.*)

sol les poussées des voûtes. L'axe des voûtes est souvent fortement incliné, parfois à 45°, de façon à reporter les poussées hydrauliques le plus verticalement possible vers le sol par l'intermédiaire des contreforts. Cependant, depuis quelques années, ce type de barrage a tendance à être concurrencé par les types barrages-poids évidés ou barrages en matériaux meubles. En effet, la très haute qualité des matériaux constituant les barrages à voûtes multiples et leur délicate mise en œuvre élèvent le prix, et cela n'est pas toujours compensé par l'économie de volume de ces matériaux.

3.2. Les barrages en matériaux meubles. — Un des avantages essentiels de ce type d'ouvrage, du fait de sa souplesse, est de pouvoir être édifié sur des terrains très divers, aussi bien rocheux et rigides que meubles ; on peut même rencontrer les deux à la fois pour un même ouvrage. Cependant, comme pour les autres types de barrages, il est essentiel que le soubassement soit suffisamment étanche, ou qu'il puisse être rendu étanche par traitement, notamment par injections.

En général, les grands ouvrages comprennent un noyau central étanche en terre ou en matériaux suffisamment fins ; à l'amont et à l'aval, ce noyau est flanqué de recharges en matériaux pouvant être perméables qui sont essentiellement destinées à le soutenir et à le protéger. Entre le noyau et chaque recharge, on interpose des matériaux filtrants destinés à empêcher la diffusion des matériaux fins du noyau vers les recharges. Le noyau peut être vertical comme à Serre-Ponçon, ou incliné comme c'est le cas pour le barrage du Mont-Cenis (fig. III-8 et III-9). Si la recharge aval n'est pas suffisamment perméable, elle doit être drainée à son contact avec le noyau étanche, comme ce fut le cas au barrage de Serre-Ponçon où la recharge aval est en matériaux alluvionnaires avec de fortes proportions de constituants fins.

Certains ouvrages n'ont pas de noyau étanche, l'étanchéité doit alors être assurée par un masque imperméable

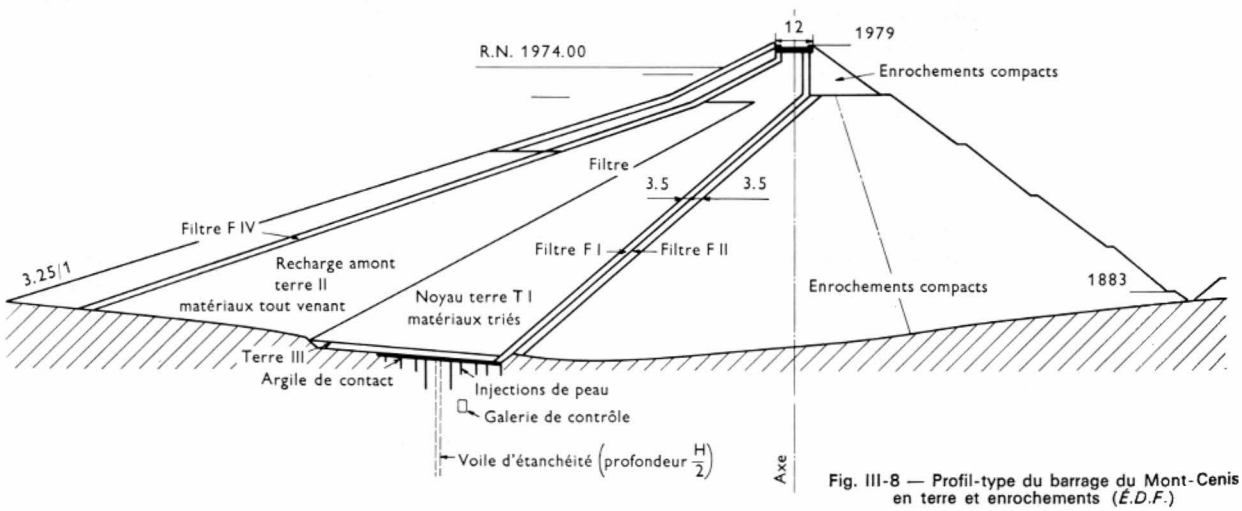


Fig. III-8 — Profil-type du barrage du Mont-Cenis en terre et enrochements (*É.D.F.*)

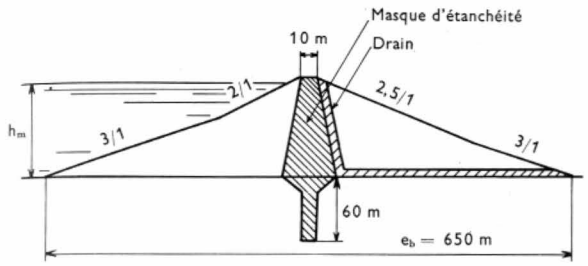


Fig. III-9 — Profil de la digue de Serre-Ponçon

disposé, en général, au contact de l'eau sur le parement amont ; ce masque réalisé soit en béton classique, soit en béton bitumineux, doit présenter une certaine souplesse car les moindres tassements des matériaux constituant la masse de l'ouvrage le fissureraient.

Comme les barrages en béton, les barrages en matériaux meubles sont pourvus de dispositifs d'auscultation utilisés en cours de travaux et en exploitation. On mesure les tassements, les pressions interstitielles à l'aide de capsules manométriques ; les indications de ces appareils sont souvent centralisées dans une chambre d'auscultation. Le barrage et son terrain d'appui sont drainés à l'aval de la partie étanche, afin d'éviter les sous-pressions.

4. LES GALERIES EN CHARGE

Ce qui a été dit à propos des galeries d'adduction s'applique aussi aux galeries en charge. La différence provient essentiellement de la charge d'eau : au lieu de quelques mètres, elle dépasse parfois 130 à 140 m comme dans les aménagements de Roselend et du Mont-Cenis (leurs galeries en charge ont respectivement 12 et 18 km de longueur, les diamètres intérieurs atteignant 4,2 à 4,6 m). Les galeries en charge sont établies le plus possible en profondeur, avec un fort recouvrement rocheux ; malgré la pression intérieure à laquelle elles sont soumises, elles ne sont qu'exceptionnellement armées ou blindées, pratiquement seulement dans les zones de mauvais terrain ou près de leur débouché. Les injections de finition, entre le revêtement et le rocher, doivent être particulièrement soignées de façon à éviter la fissuration du revêtement en pression de service. La section intérieure bétonnée est pratiquement toujours circulaire afin que la résistance aux pressions et aux sous-pressions soit meilleure. Malgré les précautions prises, le revêtement de béton présente toujours une certaine perméabilité due à sa nature et à une légère fissuration. Cela présente d'autant moins d'inconvénients que la galerie est établie plus profondément et que le rocher est plus sain. D'ailleurs la pression de l'eau présente dans les fissures de la roche est souvent égale ou supérieure à la pression intérieure de service. Cependant, ce n'est guère que depuis quelques décennies que l'on réalise des galeries sous forte charge.

5. LES CHEMINÉES D'ÉQUILIBRE

Il est nécessaire d'interposer une cheminée d'équilibre entre la galerie en charge et la conduite forcée. Cet ouvrage, généralement souterrain, fonctionne comme un vase d'expansion lors des variations du débit turbiné. Lors d'un arrêt de débit, elle emmagasine l'énergie cinétique considérable de la masse d'eau en mouvement dans la galerie et limite ainsi la surpression de « coup de bélier ». À l'inverse, au démarrage, elle fournit de l'eau à la conduite pendant le temps nécessaire à la mise en vitesse de l'eau en galerie. Les deux types de cheminées d'équilibre les plus simples et les plus classiques sont le *puits vertical de faible diamètre à chambres d'expansion* et *le puits vertical, de plus fort diamètre, à diaphragme inférieur* sans chambres d'expansion ; ils sont aérés à leur partie supérieure. À service égal, ces deux types de cheminée ont assez sensiblement le même volume intérieur et, par conséquent, leurs prix de revient sont peu différents (fig. III-10 et III-11).

Le premier type de cheminée comporte deux chambres d'expansion, une inférieure, l'autre supérieure, les niveaux d'eau en régime permanent étant compris entre les deux chambres. Lors d'un arrêt du débit, l'eau monte très rapidement au niveau de la chambre supérieure emmagasinant de l'énergie ; à l'inverse, lors d'un appel d'eau par l'usine, le niveau d'eau descend rapidement au niveau de la chambre inférieure (l'eau de la cheminée sert à alimenter l'usine dans un premier temps). Après chaque manœuvre, le niveau d'eau dans la cheminée oscille avec une période, fonction des caractéristiques de la galerie, et ce, jusqu'à amortissement complet par frottements hydrauliques.

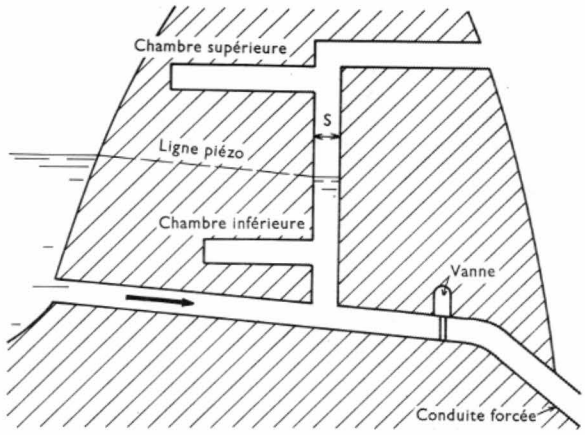


Fig. III-10 — Cheminée à chambre d'expansion

Dans une cheminée à diaphragme, celui-ci crée, à la montée d'eau, et à sa descente, une charge artificielle par étranglement (elle joue le même rôle que la dénivellation entre les chambres dans une cheminée du premier type). On peut même donner une certaine dissymétrie au diaphragme lui conférant des pertes de charge différentes dans un sens ou dans l'autre. Dans une cheminée, la période d'oscillation de l'eau peut être assez grande ; par exemple, elle est proche de 15 minutes pour la chute Isère-Arc (usine de Randens en Savoie), dont la galerie d'amenée a une longueur de 16 km et un débit de 120 m³/s. Une cheminée d'équilibre peut parfois être déversante à sa partie supérieure, ce qui conduit à une économie de dimension.

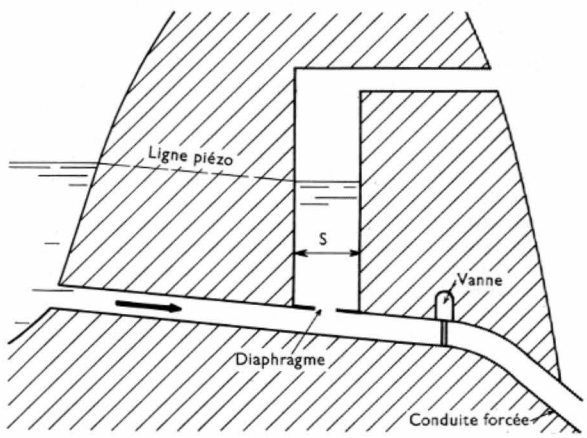


Fig. III-11 — Cheminée à diaphragme

Il existe plusieurs autres types de cheminées d'équilibre (cheminées à épanouissements, cheminées différentielles avec deux puits, etc.). Certaines amortissent très rapidement les oscillations, donnant ainsi plus de facilités pour l'exploitation de l'usine ; autrement les variations possibles de débit sont limitées par l'amortissement des oscillations. En particulier, il est essentiel que de l'air ne soit pas entraîné jusqu'aux turbines par la conduite forcée.

La cheminée d'équilibre de la chute de Pressy en Haute-Savoie mérite d'être citée à cet égard. Il s'agit d'une cheminée qui est à la fois à expansion, à diaphragme et diffé-

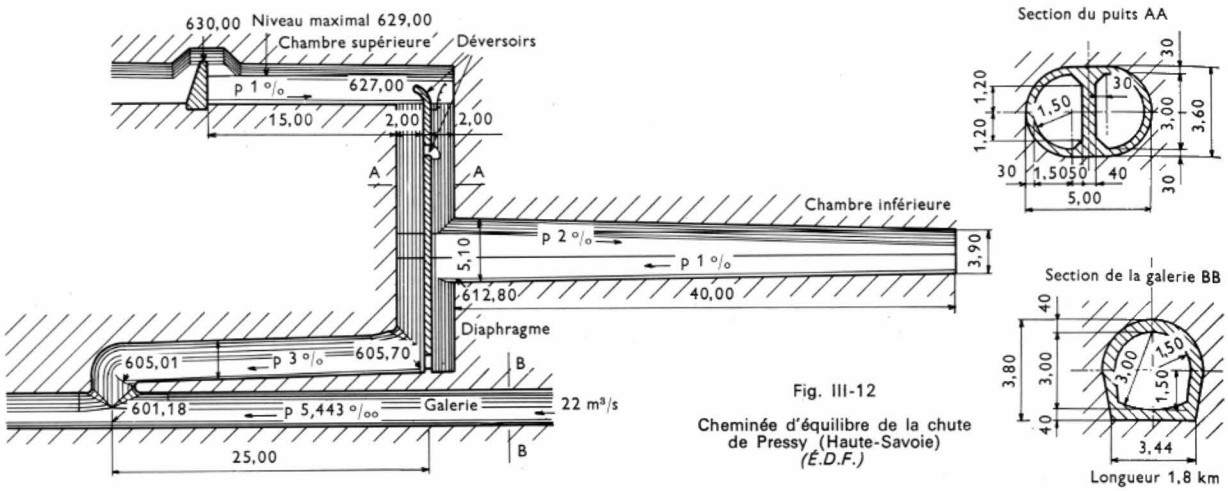


Fig. III-12

Cheminée d'équilibre de la chute de Pressy (Haute-Savoie) *(É.D.F.)*

rentielle. Elle comporte deux demi-puits séparés par une cloison médiane; toutes les oscillations sont amorties en une demi-période. Cette disposition a été facilitée par le fait que la galerie d'amenée est courte (1,8 km de longueur) et que les niveaux statiques extrêmes ne diffèrent que de 2,0 m; le débit maximal dérivé est de 22 m³/s. La cloison séparant les deux demi-puits comporte un déversoir supérieur (vers le demi-puits à diaphragme) et un petit déversoir aux trois quarts environ de sa hauteur. Les demi-puits absorbent ou fournissent juste l'énergie excédentaire ou nécessaire. Le volume de cette cheminée est du même ordre de grandeur que celui d'une cheminée à performances classiques mais son génie civil est un peu plus compliqué (fig. III-12).

Une cheminée d'équilibre peut être sujette à un phénomène néfaste d'oscillations entretenues sous l'action des régulateurs des turbines et des fluctuations du réseau. Pour éviter ce phénomène, il convient que la section soit supérieure à une valeur déterminée qui dépend des caractéristiques de la galerie (« condition de Toma »). Depuis quelques années, on ne considère plus cette condition comme impérative, car les régulateurs modernes des turbines permettent d'éviter ce phénomène de « pompage », et de plus, l'amélioration de la stabilité du réseau H.T., sur lequel débitent les usines, s'oppose à ce phénomène.

Pour le calcul des cheminées d'équilibre, on a recours à différentes méthodes, toutes de même principe (celle de « Stücki » est généralement employée). On peut également étudier une cheminée d'équilibre par une méthode entièrement graphique qui donne d'excellents résultats; elle a l'avantage de fournir une représentation graphique extrêmement parlante des phénomènes d'oscillation et de leur amortissement progressif. Le calcul s'effectue, d'une part, à la fermeture du débit, d'autre part, à l'ouverture de celui-ci.

À la fermeture, on admet généralement une coupure totale et instantanée du débit, car la durée de fermeture des turbines (lors d'un déclenchement de l'usine), ou celle de la vanne en tête de conduite forcée, est très faible vis-à-vis de la période d'oscillation de la cheminée. À l'ouverture on peut prendre la condition la plus draconienne: l'ouverture quasi instantanée. Plus généralement, on se donne une loi avec une durée d'ouverture déterminée compatible avec les conditions que l'on juge acceptables pour la prise de charge en puissance; on peut ainsi réaliser une certaine économie dans le dimensionnement des parties inférieures de la cheminée.

Une cheminée d'équilibre est également nécessaire à l'aval d'une usine lorsque le canal de fuite est souterrain sur une certaine longueur; on la dispose juste à l'aval des aspirateurs de turbines, c'est-à-dire à l'origine amont du canal de fuite souterrain (usine de la Saussaz II sur l'Arc en Savoie, usine de Churchill Falls au Labrador, etc.).

Les chambres de mise en charge. — Une disposition couramment employée autrefois consistait à avoir une galerie à écoulement libre depuis la prise d'eau jusqu'à une chambre de mise en charge d'où partait la conduite forcée. Cette disposition, ne convenant qu'aux chutes au fil de l'eau, est d'exploitation compliquée; en outre, la pente de la galerie doit correspondre très exactement à ses propres pertes de charge au débit maximal, et les pertes de charge ne peuvent pas être récupérées aux débits partiels. La chambre de mise en charge doit être obligatoirement munie d'un déversoir, et il faut que l'exploitation en puissance soit exactement ajustée à l'aide d'un télélimnimètre, cela dans une marge très étroite de niveau dans la chambre.

Cette disposition est pratiquement abandonnée sauf toutefois pour les chutes dont les ouvrages d'amenée sont des canaux, tout au moins lorsque les berges du canal se trouvent au-dessous du niveau maximal statique de la prise d'eau. Plusieurs chutes sur la Durance sont notamment dans ce cas.

6. CONDUITES FORCÉES

Les conduites forcées sont destinées à conduire l'eau sous pression jusqu'à l'usine. Comme elles doivent résister à la charge d'eau majorée des surpressions provoquées par les manœuvres d'exploitation, on leur donne une section circulaire. Ce sont des ouvrages onéreux; on adopte donc un tracé aussi court que possible, surtout dans les parties basses, car le coût augmente avec la charge. Les vitesses

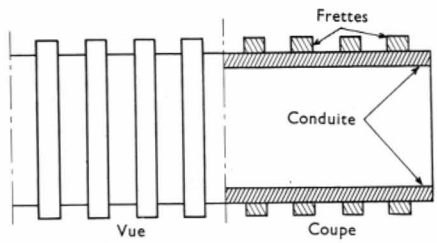


Fig. III-13

Conduite autofrettée

d'eau admises généralement couvrent une gamme allant de 3 m/s en petits diamètres à 8 à 10 m/s en grands diamètres (de 3 m ou plus). Le diamètre est déterminé en fonction des considérations économiques habituelles; pour les hautes chutes cela conduit à choisir plusieurs diamètres et ils décroissent depuis le haut jusqu'en bas. Les tuyaux sont soit des tuyaux lisses constitués par des tôles roulées et soudées, soit des tuyaux frettés par des bandages d'acier à haute résistance. Dans la solution du tuyau bicouche, mise au point à Roselend, la frette extérieure est constituée par un deuxième tuyau concentrique au premier. Le frettage à froid s'effectue par une mise en surpression d'eau du tube intérieur (fig. III-13). Les conduites peuvent être placées à l'air libre ou dans une tranchée remblayée ou bétonnée. Elles reposent sur des supports en béton ou des berceaux métalliques. De place en place, on dispose des massifs d'ancrage qui assurent la stabilité. Le tracé suit autant que possible la ligne de plus grande

pente en évitant les terrains instables et les couloirs d'avalanches.

Pour des raisons d'économie (meilleures fondations, raccourcissement de la conduite), on place parfois les conduites forcées en souterrain. Elles peuvent y être disposées, sur des berceaux comme à l'extérieur, ou bien bloquées au rocher (les conduites de Roselend sont bloquées au rocher, et celles du Mont-Cenis sont libres en galerie). Dans le premier cas, qui n'est utilisé que si le rocher est de bonne qualité, lorsque la couverture de terrain est suffisante, on tient compte de la participation du rocher à la résistance à la pression concurremment avec le blindage; cela permet de notables économies d'acier. Cependant, il peut arriver que l'eau du terrain environnant se mette en charge derrière le blindage au risque de l'aplatir ou de le déformer quand la conduite est vide; le choix est donc toujours délicat. Par exemple, à Roselend, la conduite forcée est extérieure, bétonnée en tranchée dans sa partie haute et souterraine, avec participation du rocher dans le tiers inférieur. Autrefois, il était fréquent de voir plusieurs conduites parallèles car on était alors limité par les possibilités industrielles: pliage de tôles épaisses,

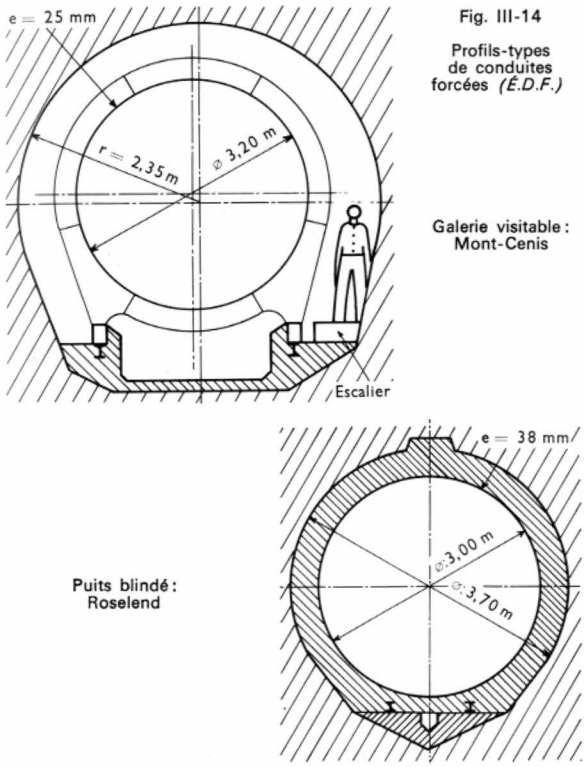


Fig. III-14

Profils-types de conduites forcées *(É.D.F.)*

Galerie visitable : Mont-Cenis

Puits blindé : Roselend

possibilités de soudage. L'emploi d'outillage toujours plus puissant permet maintenant, presque partout, de retenir pour les hautes chutes la solution plus économique: la conduite unique. La puissance maximale unitaire des conduites forcées n'a cessé d'augmenter: 100 000 kW, en 1932, à Bissorte; 200 000 kW, en 1948, à Malgovert; 500 000 kW, en 1960, à Roselend. Les viroles sont généralement construites en atelier et, lors du montage, l'on n'a à exécuter sur le chantier que des soudures circulaires entre viroles, sur lesquelles les efforts sont moindres que sur les génératrices.

Les conduites sous fortes pressions sont en acier ayant des limites élastiques de 42 à 52 hbar avec un allongement de 20 % environ; pour les frettes ces limites sont: 70 à 90 hbar avec allongement de 8 à 10 %.

L'épaisseur d'une conduite est sensiblement donnée par la formule simple d'un tube à paroi mince, soit:

$$e = \frac{p\,D}{2\,T}$$

dans laquelle p est la pression intérieure; D, le diamètre intérieur; T, le taux de travail de l'acier (la résistance dans le sens de la longueur est le double de celle à l'éclatement). Le coefficient de sécurité d'une conduite est le rapport entre la limite élastique de l'acier et son taux de travail sous la pression intérieure normale, augmentée des surpressions dynamiques. Les coefficients généralement admis sont les suivants: 2,2 pour une conduite à l'air libre; 1,8 pour une conduite libre en galerie où les conditions thermiques et les risques d'avarie sont beaucoup moins contraignants; couramment 1,2 pour les conduites au béton bloquées en galerie (cela sans tenir compte de la participation du rocher); quelquefois 1,0 si le blocage de béton est soigneusement injecté. On a même réalisé des conduites bloquées en tôles assez minces, pour lesquelles la plus grande partie de l'effort dû à la pression était supportée par le rocher; la tôle n'a alors pratiquement qu'un rôle d'étanchéité à l'instar d'une chambre à air dans un pneumatique. Ces conduites présentent malheureusement de grands risques de « flambage » sous l'effet des sous-pressions, spécialement lors de leur vidange, l'élimination des sous-pressions par drainage étant en effet très délicate et le plus souvent aléatoire.

On dispose presque toujours un vannage en tête d'une conduite forcée. La vanne est normalement prévue pour se fermer automatiquement en cas de survitesse de l'eau, si la conduite venait à être endommagée gravement. Dans les installations plus complexes, notamment celles comportant un siphonnage (chute du Mont-Cenis) on est parfois amené à installer une protection différentielle.

Pour éviter la mise au vide d'une conduite, et par suite, son risque de flambage par aplatissement lors de la fermeture de la vanne, en aval de celle-ci on dispose toujours une *soupape* ou *ventouse*, ou beaucoup plus généralement et avec plus de sécurité, un *reniflard* s'aérant au-dessus des plus hauts niveaux pouvant être atteints par l'eau (ou même dans la cheminée d'équilibre).

Une conduite forcée en acier à l'air libre est fixée rigidement de place en place sur des massifs d'ancrage; entre les massifs d'ancrage, elle repose sur des massifs d'appui plus légers destinés à soutenir seulement le poids de la conduite avec son eau. Ces massifs sont toujours disposés aux coudes de changement de direction.

Coups de bélier dans les conduites forcées. — Quand on ferme brusquement l'extrémité aval d'une conduite, la vitesse V_0 de l'eau qu'elle contient ne s'annule pas instantanément sur toute la longueur de la conduite: la section limitant la masse d'eau de vitesse V_0 de la masse d'eau de vitesse nulle remonte vers l'amont avec une vitesse c en même temps que se propage une onde de surpression Δp s'ajoutant à la pression hydrostatique. Si l'amont de la conduite débouche dans un réservoir à surface libre, l'onde de surpression se réfléchit et une onde de dépression se propage vers l'aval; elle se réfléchit sur le clapet de la vanne de fermeture aval, donne naissance à une onde de compression et ainsi de suite. Ce phénomène de va-et-vient d'ondes s'atténue dans le temps du fait des pertes de charge dans la conduite, mais on conçoit que cette alternance de surpressions et de dépressions est la cause de fatigues importantes pour le matériel.

La surpression maximale Δp, dans une conduite où la vitesse est V_0 est donnée par la relation:

$$\Delta p = c\,\frac{V_0}{g}$$

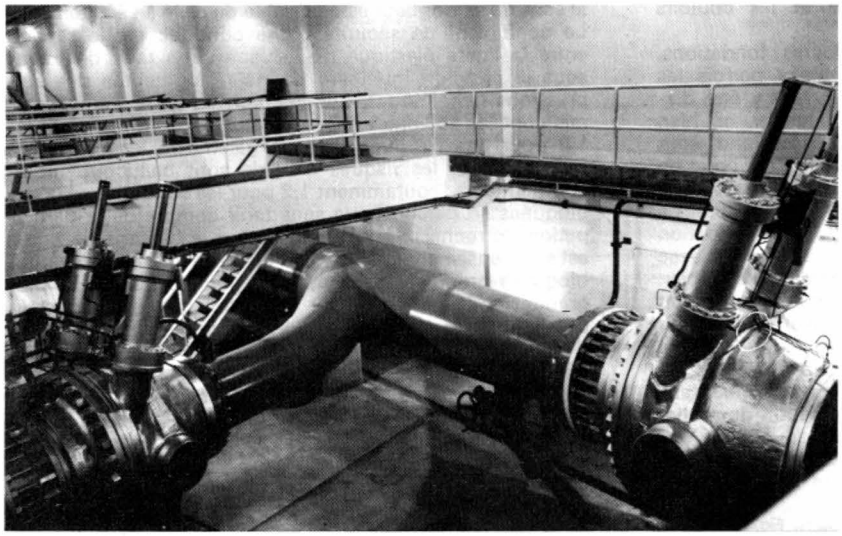
avec:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{E}\cdot\frac{D}{e}\right)}}$$

Dans ces deux relations on désigne par:

g: l'accélération de la pesanteur ($g = 9{,}81$ m/s²);
ε: le coefficient de compressibilité de l'eau qui est égal à 2.10^9 N/m²;
E: le module d'élasticité du matériau qui constitue la conduite; pour l'acier: $E = 200\,000.10^6$ N/m²;
D: le diamètre de la conduite (on l'exprime en mètres);
e: l'épaisseur de la conduite (on l'exprime en mètres);
ρ: la masse volumique de l'eau $\rho = 1\,000$ kg/m³.

Par exemple, pour une conduite en acier avec $D = 3$ m et $e = 0{,}03$ m, la vitesse de propagation c est de 1 000 m/s.



Usine de Mont-Cenis-Villarodin : répartiteur et robinets sphériques (*J. Léger*)

Pour $V_0 = 6$ m/s, si la fermeture est instantanée, la surpression Δp atteint 600 m d'eau, soit 60.10^5 N/m² (60 bars). Si la fermeture est progressive, la surpression Δp est moindre ; elle peut être calculée à l'aide de la formule de Michaud :

$$\Delta p = \frac{2L}{T}\,\frac{V_0}{g} \quad \left(\text{lorsque } T > \frac{2L}{c}\right)$$

On appelle T le temps de fermeture des directrices de la turbine ou de son robinet de tête, L la longueur de la conduite depuis le robinet jusqu'à la première surface libre, soit à la cheminée d'équilibre en général.

Si T est inférieur à $\frac{2L}{c}$ la surpression est la même que si la fermeture était instantanée. En pratique on arrive à avoir T suffisamment grand pour que la surpression ne dépasse guère 30 % de la pression hydrostatique avec des turbines Francis, et 15 % avec des turbines Pelton, grâce à leurs déflecteurs de jets.

Joints dans les conduites forcées. — Les variations de température, surtout lors des vidanges, peuvent entraîner des contraintes longitudinales et c'est pourquoi certaines conduites sont munies de joints coulissants ; l'étanchéité est réalisée avec un élastomère (procédé parfois utilisé à l'étranger). En France on préfère la technique dite « française », sans aucun joint ; en effet, sous l'action de la pression intérieure, les conduites sont deux fois moins

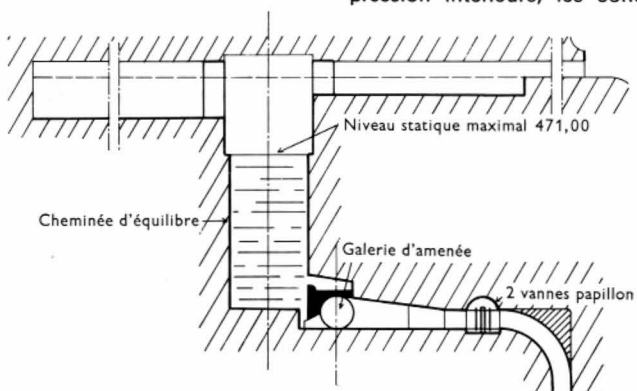
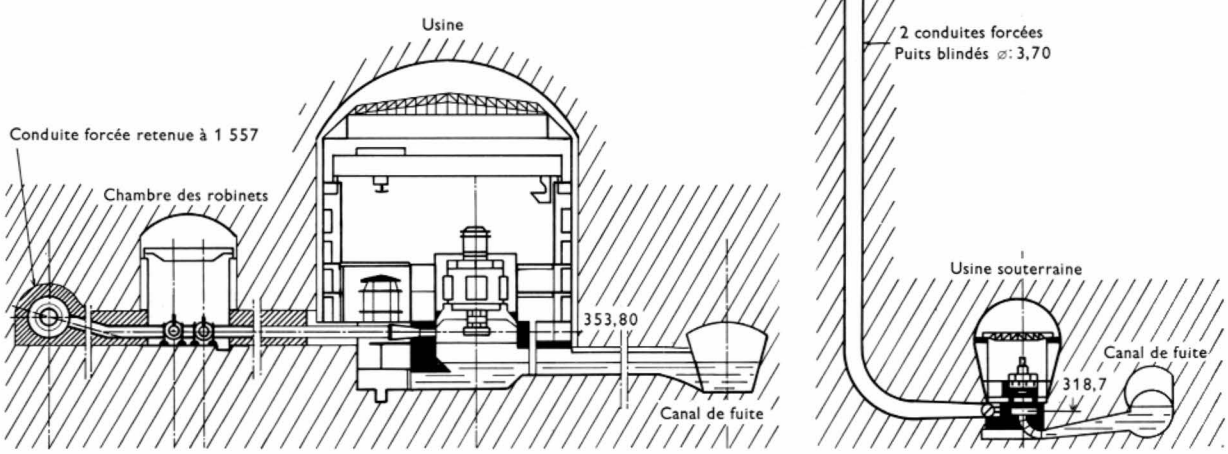


Fig. III-16

Profil en long aval de la chute Isère-Arc avec l'usine souterraine de Randens (*É.D.F.*)

Fig. III-15 — Coupe transversale de l'usine de La Bâthie-Roselend (chute brute : 1 200 m) (*É.D.F.*)



sollicitées longitudinalement que transversalement et l'on démontre que les efforts thermiques longitudinaux entre deux massifs d'ancrage sont généralement supportables sans joints (cela, sous réserve que la dernière soudure de raccordement soit faite à une température d'ambiance prévue par les calculs).

Gel dans les conduites forcées. — Le risque est important dans les conduites extérieures alimentant des usines d'éclusées ; on y remédie en évitant les trop longues durées d'arrêt total de l'usine, ou en laissant un léger débit permanent.

Conduites forcées en béton armé. — Ces conduites permettent une économie d'acier et conviennent surtout aux faibles chutes et aux grands diamètres. L'évolution des prix de ces dernières années fait que les conduites en béton armé sont moins employées qu'autrefois.

Collecteur ou répartiteur. — La base d'une conduite forcée comporte un collecteur, ou répartiteur, alimentant sous plus petit diamètre chaque turbine de l'usine (chaque turbine est munie d'un robinet amont). Ce collecteur est en général d'une métallurgie très élaborée car il est soumis à toute la pression de la chute. Parfois, il est bloqué au béton en souterrain, ce qui accroît la sécurité et évite des vibrations éventuelles.

7. USINES

Les usines sont de types très divers, mais on peut distinguer les usines en bâtiment extérieur et celles en bâtiment souterrain. Pour les chutes de montagne, la disposition en souterrain est de plus en plus adoptée, tout au moins si le rocher est résistant, et surtout pour les usines puissantes.

Dans les usines souterraines, un élément important est la connaissance des propriétés de la roche encaissante dont on déduira la forme de la caverne. Le grand axe sera, si possible, dirigé perpendiculairement aux couches du terrain. Les problèmes rencontrés sont les mêmes que pour les galeries à grande section. Si la qualité du rocher le permet, on pourra économiser le revêtement et se contenter d'une enveloppe légère destinée à protéger le matériel contre les suintements d'eau. Parfois, lorsque le rocher est médiocre, la voûte et les piédroits sont ancrés au rocher par des tirants précontraints. On s'attache spécialement à diminuer autant que possible la hauteur de l'excavation et surtout la portée de voûte correspondant à la largeur de l'usine.

Selon les circonstances, la totalité du matériel est groupée dans une seule caverne, ou bien des galeries latérales contiennent les vannes ou les transformateurs. Pour des raisons de sécurité et pour faciliter la ventilation, en général, on a une galerie d'accès et une galerie de secours. Lorsque l'usine souterraine est proche de l'extérieur, on est amené à installer les transformateurs à l'extérieur, au poste de départ ; les conducteurs de puissance en moyenne tension doivent alors être en galerie.

Le principal avantage des usines souterraines est le raccourcissement de la conduite forcée, qui est ainsi souvent en puits vertical blindé. En outre, les conditions de fondation de la conduite forcée et de l'usine sont bien plus favorables, et ces ouvrages sont à l'abri des diverses agressions extérieures.

La disposition de l'usine en souterrain plutôt qu'à l'extérieur tend à rallonger le canal de fuite (alors en galerie) ainsi que l'accès ; la dépense entraînée ne représente qu'une partie de l'importante économie réalisée sur la conduite forcée, aussi bien en investissements qu'en pertes de charge.

Depuis quelques décennies, les dimensions des usines et de leurs annexes, soit en solution extérieure, soit surtout en solution souterraine ont pu être diminuées ; l'augmentation de la puissance unitaire des groupes générateurs qui permet une diminution de leur nombre, y a beaucoup contribué. Il en est de même pour la disposition des groupes avec axe vertical, quasi généralisée ; l'encombrement est ainsi réduit et de plus, cette disposition permet d'éviter les fréquents défauts d'alignement d'une longue ligne d'arbre horizontale sous l'action de déplacements, même très faibles, des massifs de fondation. Toutes ces raisons ont entraîné d'importantes économies dans les investissements.

On a même réalisé des usines avec groupes non abrités. Cette disposition, dite « out door », impose l'emploi de groupes et d'organes annexes convenablement capotés ; elle est surtout mise en œuvre lorsque les conditions climatiques sont favorables. De ce fait les inconvénients ne se présentent guère que lors du montage et des réparations.

CHAPITRE IV

MATÉRIEL HYDROMÉCANIQUE

1. VANNES ET ROBINETS

Le terme *vanne* est très général et s'applique à tous les organes mobiles pouvant interrompre un circuit d'eau ; le mot robinet est plutôt réservé aux organes employés dans les conduites en pression. Actuellement, les vannes et robinets, sauf pour les petits organes, sont presque toujours à commande oléodynamique ; ils peuvent ainsi être automatisés et télécommandés. Souvent les organes extérieurs de vantellerie, dont le gel risque d'entraver le fonctionnement, sont munis de dispositifs de réchauffage. On tend à abandonner le réchauffage par résistances électriques et à préférer celui obtenu au moyen de tuyauteries d'eau chaude disposées le long des pièces fixes ; l'eau additionnée d'antigel est chauffée électriquement avec mise en service automatique par thermostats.

On distingue schématiquement :

— *Les vannes plates* (fig. IV-1) obturent des pertuis rectangulaires ; elles se déplacent dans des rainures et l'étanchéité est obtenue au moyen de pièces souples autoclaves, en métal ou plus généralement en élastomères. Leur appui peut être à simple glissière ou à rouleaux, à galets ou à chenilles.

— *Les vannes à segment* (fig. IV-2) pivotent autour d'un axe horizontal sur lequel est reportée la poussée de l'eau ;

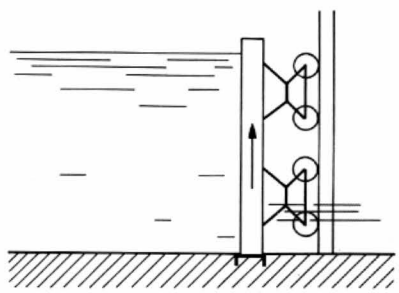


Fig. IV-1

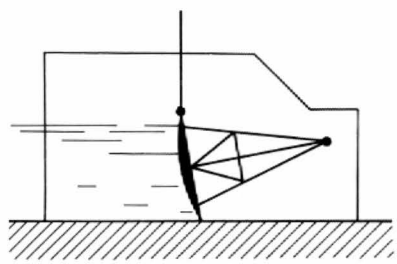


Fig. IV-2

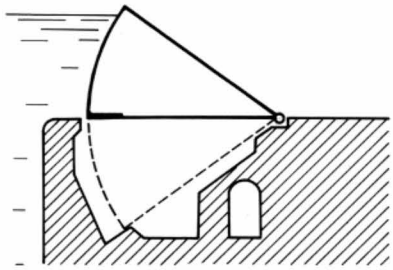


Fig. IV-3

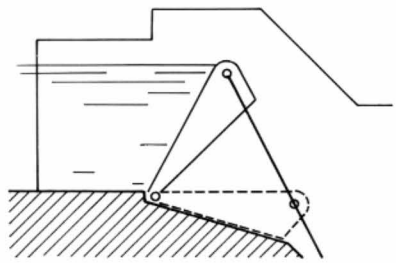


Fig. IV-4

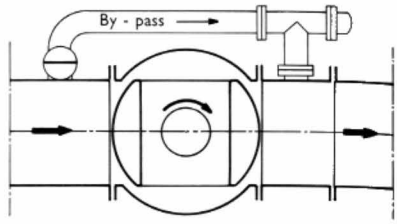


Fig. IV-5

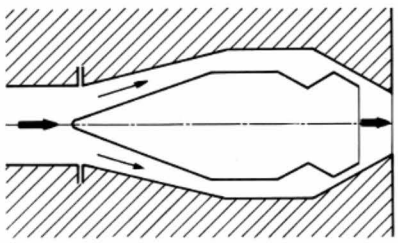


Fig. IV-6

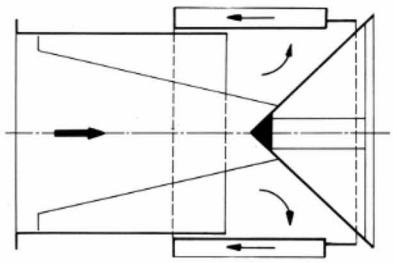


Fig. IV-7

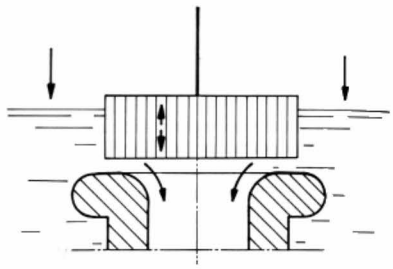


Fig. IV-8

l'excentricité de la position de l'axe par rapport à la courbure du tablier permet de conférer à ces vannes une tendance soit à la fermeture, soit à l'ouverture. Elles sont de plus en plus employées au lieu des vannes plates, même sur des ouvrages en charge. Leur emploi est assez général comme vannes de surface.

— *Les vannes à secteur* (fig. IV-3) sont également pivotantes, mais leur ouverture s'effectue par abaissement, de même que les clapets (fig. IV-4) et les vannes-toits. Elles sont plutôt réservées aux prises d'eau de faible hauteur en rivière de plaine où le charriage en matériaux solides de fond est négligeable.

On a réalisé d'autres types de vannes, notamment la vanne « type boudin », en caoutchouc. Elle se place sur la crête d'un barrage. Cette vanne, dont le diamètre atteint 2 m environ, est en général gonflée à l'eau ; l'aplatissement de la vanne est obtenu par vidange de cette eau. Le flot peut se déverser par-dessus la vanne aplatie ; elle est solidement maintenue sur la crête du barrage par une génératrice du boudin.

Pour les robinets, on distingue également :

— *Les robinets-papillons* constitués d'un disque en forme de lentille dont le plan est parallèle au courant d'eau, une rotation d'un quart de tour autour de leur diamètre amène la fermeture. Étant très économiques, ils sont très employés, sauf pour les très hautes pressions. Leur étanchéité a pu être très améliorée par des joints gonflables en caoutchouc. On a réalisé dernièrement des robinets-papillons à deux lentilles reliées entre elles par un cloisonnement parallèle au courant d'eau. Cette construction permet l'utilisation sous des pressions assez fortes car elle augmente la rigidité de la partie mobile.

— *Les robinets sphériques* (fig. IV-5) ont l'avantage de ne pas perturber la veine cylindrique d'eau comme le fait la lentille des robinets-papillons. Ils sont souvent employés pour les très fortes pressions, et en général juste à l'amont des turbines ou des pompes.

— *Les robinets à pointeau* (fig. IV-6) ; leur principe est analogue à celui des injecteurs des turbines Pelton : l'écoulement de l'eau est annulaire, autour du pointeau conique qui coulisse axialement et vient s'appuyer à la fermeture sur un siège fixe.

— *Les robinets à jet creux* (fig. IV-7) diffusent généralement à l'air libre ; ils sont souvent employés, même aux fortes pressions, comme organes de vidange de fond, en pied d'un haut barrage. Le jet d'eau, s'étale en cône et l'énergie est rapidement dissipée dans l'air. Seule, une manchette cylindrique est mobile par coulissement et le cône aval est fixe.

— *Les vannes-fourreau de turbines* (fig. IV-8) ; on remplace parfois la vanne de tête d'une turbine Francis par un fourreau cylindrique coulissant axialement et venant obturer le circuit d'eau entre les directrices mobiles et la roue. Cette disposition est économique mais le mécanisme de turbine est alors plus compliqué ; elle donne moins de facilité d'exploitation qu'une vanne de tête indépendante.

2. TURBINES (V. t. 3, Turbines hydrauliques)

2.1. Caractéristiques principales. — Contrairement à autrefois, les turbines sont le plus souvent à axe vertical, sauf, toutefois, pour les groupes bulbes de très basse chute. Cette disposition plus économique, surtout en génie civil, a été permise par les progrès technologiques effectués sur les pivots de suspension supportant tout le poids de la partie tournante du groupe auquel s'ajoute la réaction de l'eau dirigée en général de haut en bas (sauf pour les turbines Pelton qui n'ont pas de réaction axiale). Le pivot est fréquemment disposé au-dessus de l'alternateur ; il est à patins, en bain d'huile réfrigéré par une tuyauterie à circulation d'eau.

Une turbine est caractérisée par sa vitesse spécifique (n_s) qui est la fréquence de rotation que devrait avoir une turbine modèle homothétique pour fournir une puissance de 736 W, sous 1 m de chute nette, et avec un rendement optimal. Les caractéristiques d'une turbine réelle dont la fréquence de rotation est N sont liées par diverses relations à la turbine modèle dont la fréquence de rotation spécifique est n_s. Par exemple, si l'on désigne par P_u la puissance utile de la turbine réelle et par H_n la hauteur de chute nette de la turbine réelle, on peut écrire :

$$n_s = N \frac{P_u^{1/2}}{\sqrt{736}\, H_n^{5/4}}$$

Les dimensions de la turbine réelle sont obtenues en multipliant les dimensions de la turbine modèle par le nombre λ tel que :

$$\lambda = \sqrt{736}\, \frac{H_n^{3/4}}{P_u^{1/2}}$$

On exprime n_s et N avec la même unité, en tours par minute par exemple, P_u en watts et H_n en mètres.

On tend à substituer à la notion de vitesse spécifique n_s une autre caractéristique dénommée *coefficient de vitesse* C_v qui est un nombre sans dimension (il devrait donc être appelé facteur de vitesse).

Normalement, une roue de turbine est accouplée rigidement à l'arbre de l'alternateur qu'elle entraîne. Le groupe turbine-alternateur est d'autant plus économique que sa vitesse de rotation est grande. Le choix de la vitesse

résulte donc d'un compromis entre le coût d'investissement et de nombreux facteurs tels que : rendement, résistance à l'abrasion, résistance à la cavitation, etc.

Les domaines d'utilisation des différents types de turbines correspondent aux vitesses spécifiques suivantes :

Types de turbines	n_s est compris entre
Pelton à 1 jet	2 et 35 tr/mn
Pelton à 2 jets	31 et $31\sqrt{2}$ tr/mn
Pelton à 4 jets	$31\sqrt{2}$ et 62 tr/mn
Francis	50 et 400 tr/mn
Kaplan ou hélice	300 et 1 200 tr/mn

Le rendement maximal d'une turbine peut dépasser 93 % dans la zone optimale ; il est toutefois un peu plus faible pour les turbines Pelton ; en revanche, sur une même turbine, les variations de hauteur de chute et de débit peuvent provoquer de très importantes modifications de rendement et cela dépend beaucoup du type de turbine (fig. IV-9).

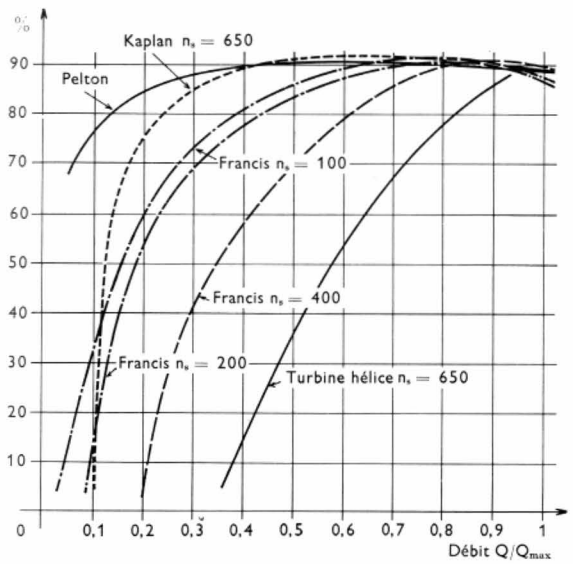


Fig. IV-9 — Courbes de rendement des divers types de turbines hydrauliques en fonction du débit à chute constante

Une turbine peut être soumise au néfaste phénomène de cavitation qui se produit en certaines de ses parties lorsque celles-ci sont en présence d'eau en dessous de la pression atmosphérique. Pour remédier à cet inconvénient, on cale les turbines assez en dessous du niveau de restitution et on évite une trop forte vitesse spécifique ; par ailleurs, on emploie des aciers inoxydables, autrefois même du bronze (la cavitation engendre, en effet, une érosion très marquée des parties métalliques). D'une façon générale, ce phénomène de cavitation est autant que possible à éviter dans toutes les parties d'un aménagement hydro-électriques ; il est même néfaste aux bétons lorsqu'il est fréquent et il engendre des vibrations.

Déchargeurs. — Lorsque la conduite forcée est particulièrement longue, on est parfois contraint de placer un robinet de décharge en amont de la turbine ; son rôle est de dériver temporairement une partie du débit lors d'une manœuvre de fermeture rapide de la turbine, on limite ainsi les surpressions de « coups de bélier » dans la conduite forcée (c'est notamment le cas à l'usine de Pressy en Haute-Savoie, mise en service en 1956). Le déflecteur des turbines Pelton joue le même rôle, beaucoup plus économiquement et efficacement.

2.2. Classification. — On distingue les turbines à action et les turbines à réaction, ces dernières étant d'ailleurs mixtes, action et réaction.

2.2.1. Turbines à action. — La turbine *Pelton* est la seule turbine à action utilisée. L'eau pénètre dans la bâche sous la forme d'une veine liquide cylindrique qui est à la pression atmosphérique ambiante. L'énergie de la chute d'eau se retrouve sous forme d'énergie cinétique et la vitesse v du jet d'eau est donnée par l'expression suivante :

$$v = \sqrt{2\,gH}$$

si l'on désigne par g l'accélération de la pesanteur ($g = 9{,}81$ m/s²), et par H la hauteur de chute nette, ou hauteur de chute brute diminuée de la perte de charge de tout le circuit d'eau, y compris celle de l'injecteur. On exprime v en mètres par seconde et H en mètres.

Cette formule montre que la vitesse du jet est pratiquement constante aux pertes de charge près ; les variations de débit sous l'action du pointeau axial de l'injecteur se traduisent donc seulement par une variation du *diamètre de la veine liquide* (le pointeau est commandé par le régulateur avec un servomoteur oléodynamique). Par exemple, pour une chute brute de 1 050 m et une chute nette de 1 000 m le jet a une vitesse de 140 m/s ou 500 km/h. Les augets en double cuillère de la roue divisent le jet en deux ; à la sortie des augets, l'eau du jet a donc fait une rotation de presque 180° et elle ressort à vitesse sensiblement nulle en principe. De ce fait, la vitesse périphérique des augets est donc sensiblement la moitié de la vitesse du jet. L'eau retombe ensuite dans une bâche (sorte de réservoir) à *niveau libre,* d'où elle rejoint le canal de fuite. Le niveau d'eau dans la bâche doit être suffisamment bas par rapport à la roue pour éviter que celle-ci ne soit freinée par les rejaillissements (pratiquement, cette dénivellation est voisine de 3 m ou est de l'ordre de grandeur d'un diamètre de roue). Cette disposition entraîne une perte inévitable de hauteur de chute.

Une roue Pelton peut avoir plusieurs jets ; à puissance réduite le rendement est moins affecté en ne mettant que quelques jets en service plutôt qu'en réduisant le débit de chaque jet. Le régulateur peut être chargé de cette sélection du nombre de jets à mettre en service en fonction de la puissance demandée. Les deux turbines de 182 MW tournant à 375 tr/mn de l'usine de Villarodin de la chute du Mont-Cenis (mise en service en 1968) étaient, à l'époque, les plus puissantes du monde et comportaient chacune six jets (fig. IV-10).

Les turbines Pelton offrent l'avantage d'avoir un rendement dépendant peu du débit ; en revanche, les variations

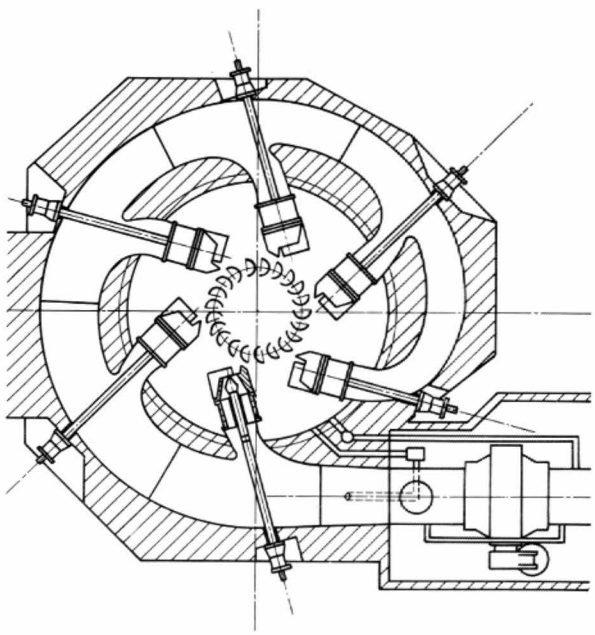
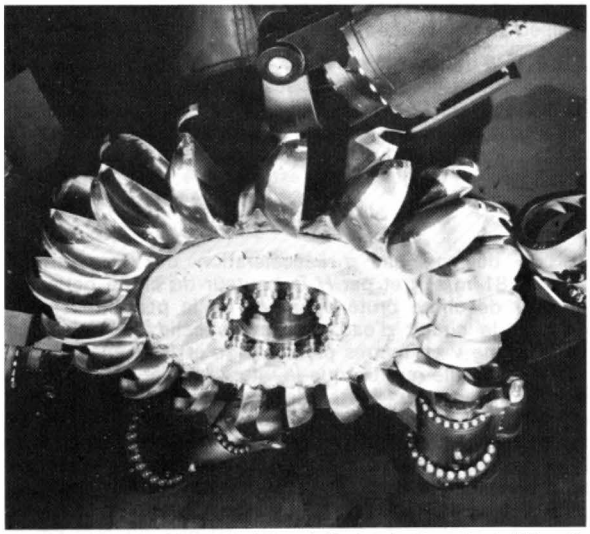


Fig. IV-10 — Schéma d'une turbine Pelton verticale à six jets



Turbine Pelton de 182 MW à six jets de l'usine de Mont-Cenis-Villarodin (*Neyrpic*)

de hauteur de chute ont beaucoup d'influence sur ce rendement. Un autre intérêt de ces turbines est de ne donner que de très faibles surpressions dynamiques dans les conduites forcées; en effet, chaque injecteur est muni d'un *déflecteur* pouvant dévier le jet et qui est donc utilisé temporairement lors d'une brusque diminution de puissance. Certaines roues sont même munies d'un contre-jet de freinage, utilisé pour arrêter rapidement le groupe. Depuis quelques décennies, toutes les roues Pelton sont en acier coulé d'une seule pièce, alors qu'autrefois, elles étaient parfois à augets rapportés sur la roue.

Dernièrement, on a construit des turbines Pelton dont la bâche est alimentée en air surpressé, ce qui permet un *niveau de restitution d'eau supérieur à celui du niveau de l'eau retombée dans la bâche*. De telles turbines équipent la chute de Tisso II en Norvège (surpression de 0,9 atm.); la restitution a lieu dans un lac à niveau variable servant de réservoir de retenue à un aménagement aval; lorsque le lac est à son niveau le plus bas, la surpression est supprimée. Cela a permis d'utiliser 9 m de chute de plus que dans une retombée à niveau libre du fait du calage en niveau de la turbine.

2.2.2. Turbines à réaction. — Ces turbines fonctionnent entièrement immergées; elles sont nommées ainsi parce que l'énergie potentielle due à la hauteur de chute n'est que partiellement transformée en énergie cinétique à l'entrée de la roue, où l'eau est donc encore à une notable pression.

On distingue essentiellement les *turbines Francis* et les *turbines Kaplan;* les turbines hélices sont une variété de turbines Kaplan; les pales sont fixes au lieu d'être à pas variable.

1° *Turbine à réaction Francis.* — Une turbine Francis comprend une bâche métallique d'entrée en colimaçon, parfois bloquée dans du béton, entourant une couronne d'aubes ou directrices fixes guidant le courant d'eau, elles-mêmes suivies de directrices mobiles dont l'orientation angulaire dépend d'un cercle de vannage (ou distributeur) muni de biellettes qui commande donc l'ouverture de la turbine, c'est-à-dire son débit et sa puissance. Les fuites entre les parties fixes et tournantes causent des pertes de rendement; on les limite en disposant des joints du type labyrinthe et en réduisant les entrefers.

La roue Francis est centripète à aubes fixes: l'eau ressort axialement dans un *divergent* ou *aspirateur* où elle récupère en grande partie l'énergie due à sa vitesse à la sortie de la roue. Une roue Francis donne lieu à une importante réaction axiale sur son arbre (fig. IV-11).

Le rendement est naturellement affecté par les variations de chute et de débit; suivant le genre de fonctionnement envisagé par l'exploitant, le tracé des aubes peut être ajusté pour obtenir soit un rendement élevé dans une étroite zone de fonctionnement, soit un rendement maximal plus faible, mais restant acceptable dans une large zone.

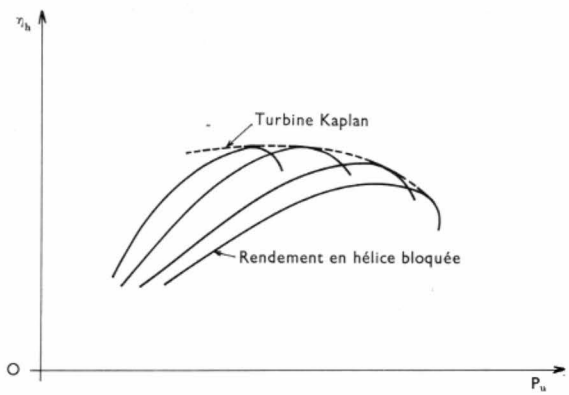


Fig. IV-12 — Variation du rendement manométrique des turbines à réaction en fonction de la puissance utile

Il existe des turbines Francis doubles dont la roue est constituée de deux roues simples accolées l'une à l'autre en une seule pièce. Cette disposition n'est normalement employée qu'avec axe horizontal. Il y a une sortie d'eau axiale de chaque côté, et l'un des côtés au moins est traversé par l'arbre de transmission, alors muni d'un joint d'étanchéité tournant au coude du divergent; la réaction axiale est ainsi éliminée.

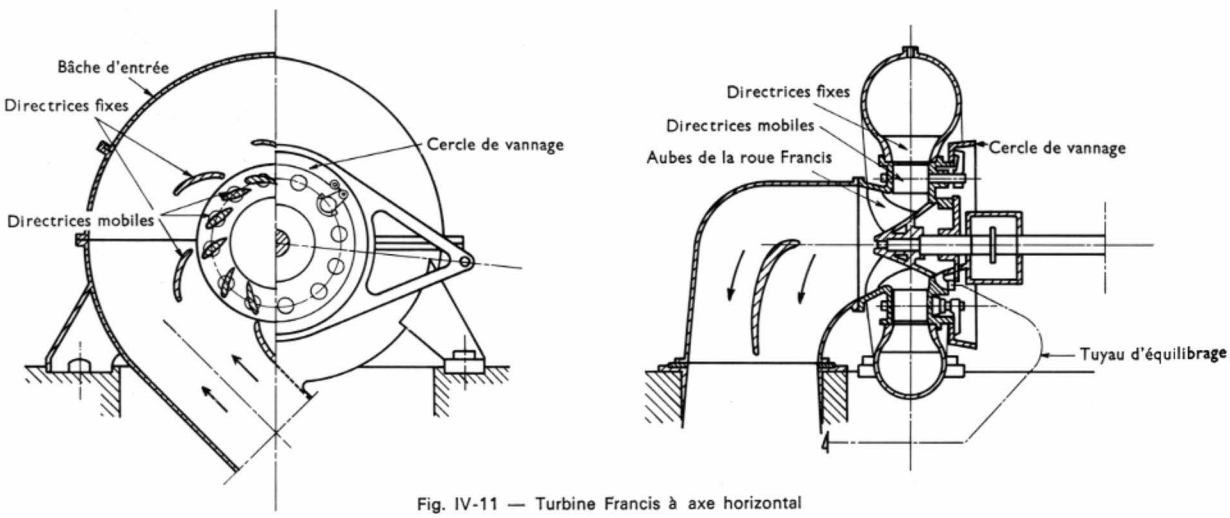
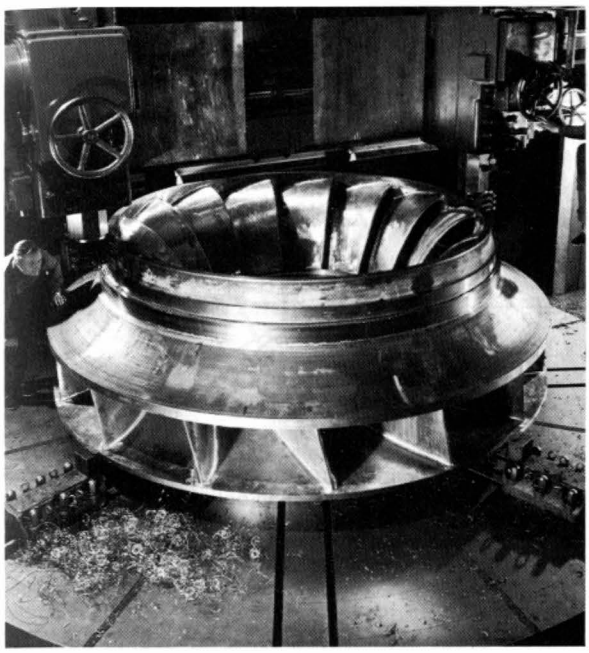


Fig. IV-11 — Turbine Francis à axe horizontal



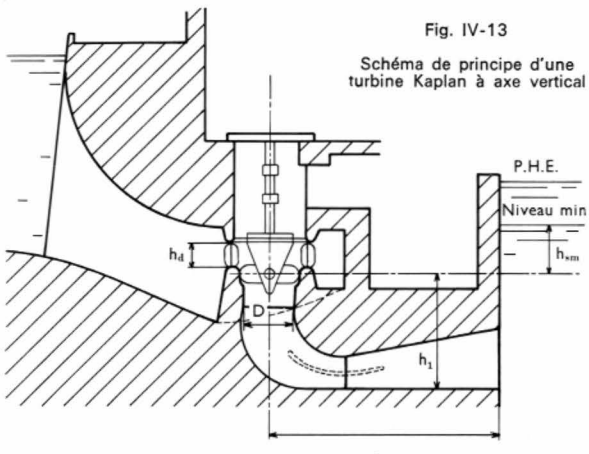
Usinage d'une roue Francis de 110 MW pour l'usine de Bersimis à Québec (Vue en position inversée) (*Neyrpic*)

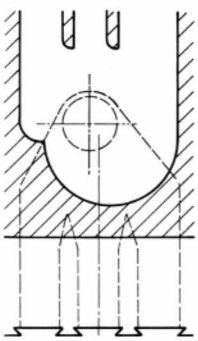
La turbine Francis est la plus employée en moyenne chute. Plus récemment, on l'a utilisée dans de hautes chutes, atteignant même 600 m, car elle y permet de grandes vitesses de rotation (600, 750 ou 1 000 tr/mn), supérieures à celles des turbines Pelton équivalentes et de ce fait, l'alternateur est moins onéreux. Les plus grandes puissances unitaires obtenues avec des turbines Francis sont voisines de 600 à 800 MW, mais on envisage 1 000 MW.

2° *Turbine Kaplan pour basses et très basses chutes.* — Le système de bâche d'entrée et d'aubes directrices est conçu sensiblement suivant le même principe que pour les turbines Francis, mais la roue comporte des pales d'hélice, dont le pas varie sous l'action d'une commande axiale. En général, la bâche d'entrée amont et le divergent aval sont en béton, contrairement aux turbines Francis où ces organes fixes sont en tôle (fig. IV-13).

Fig. IV-13

Schéma de principe d'une turbine Kaplan à axe vertical

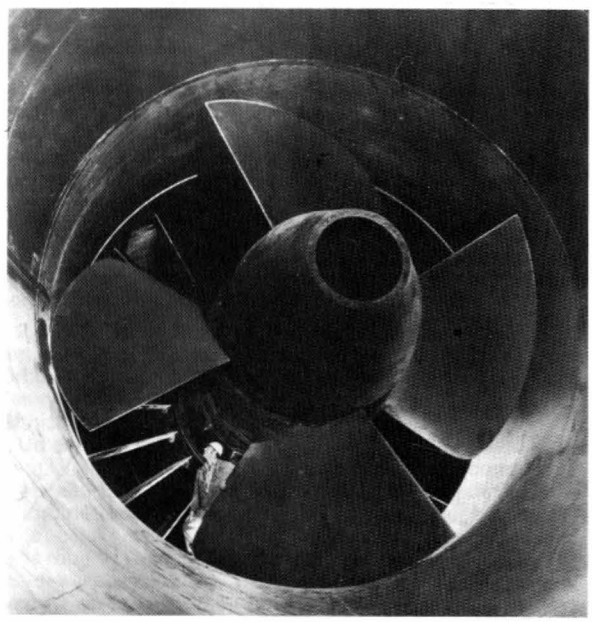




Une turbine Kaplan a donc deux commandes conjuguées, mais cette complication lui permet d'avoir une plage de fonctionnement où le rendement varie dans de moins grandes limites que pour une turbine Francis lorsque la hauteur de chute et le débit varient notablement.

3° *Turbine-hélice.* — C'est une turbine Kaplan dont les pales sont fixes; plus économique que celle-là, la turbine-hélice est employée lorsque le débit et la hauteur de chute varient très peu et spécialement sur de petits groupes simplifiés fonctionnant en « tout ou rien », sans directrices mobiles. Pour de très petites puissances, par exemple, moins de 2 MW environ, le générateur électrique est asynchrone avec rotor à cage (V. t. 1, Électrotechnique, chap. 13), ce qui est bien plus économique qu'un alternateur synchrone, mais le facteur de puissance (cos φ) est défavorable.

4° *Groupes bulbes.* — Ces groupes sont équipés de turbines Kaplan, plus rarement de turbines-hélice. Ils sont horizontaux, l'alternateur accouplé à la turbine est dans un bulbe immergé dans le courant d'eau et maintenu par des entretoises radiales. Ils sont de plus en plus employés dans les très basses chutes, car, d'une part, la veine liquide ne subit pas de coudes, d'autre part, le génie civil est plus économique parce que les fondations sont moins profondes et que l'entre-axe entre groupes est plus réduit. Les groupes bulbes nécessitent des alternateurs de diamètre le plus faible possible.



Turbine Kaplan de 35 MW pour le groupe bulbe de Beaucaire sur le Rhône (*Neyrpic*)

Des groupes bulbes équipent des microcentrales. Par exemple, la microcentrale de la Richardière sur la Mayenne, comporte un groupe de 9,2 m³/s pour une chute brute

Caractéristiques de quelques turbines Kaplan

Nom de l'usine	P_{am}	h_1	D	h_d	l	h_{sm}
Donzère-Mondragon	51,5	12,5	6,1	2,1	36	2,5
Ottmarsheim	35	12,9	6,2	2,2	33	3,2
Vargön (Suède)	11	17,8	8	3,2	26,5	— 3,4
Kouibychev (U.R.S.S.)	105	11,4	9,3	1,6	24	— 1,6

P_{am} en mégawatts; h_1, D, H_d, l et h_{sm} en mètres.

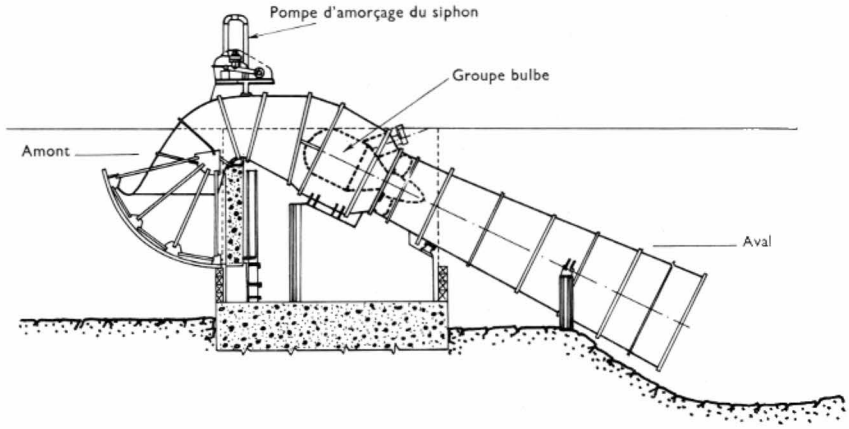


Fig. IV-14

Microcentrale de la Richardière sur la Mayenne

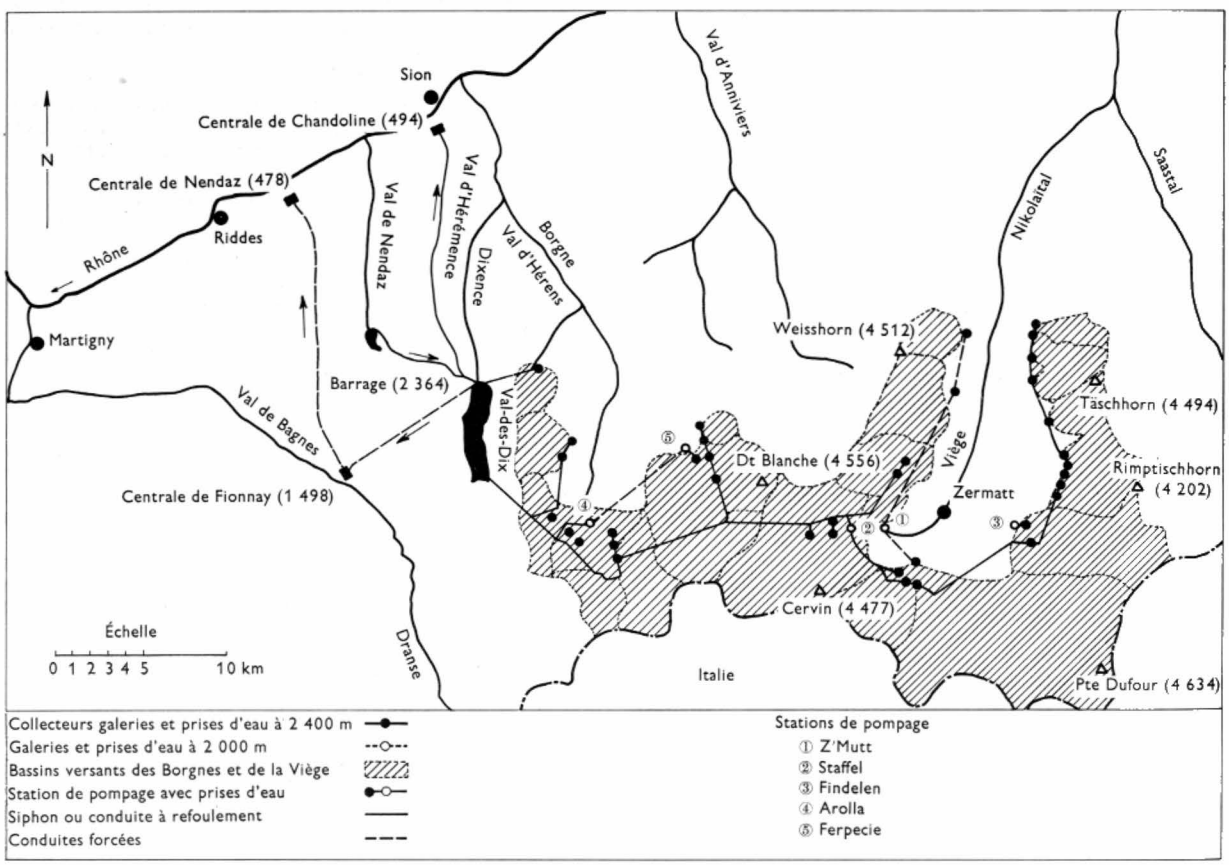
maximale de 2,76 m. Le générateur de 182 kW est asynchrone. La disposition en siphon impose de réaliser un amorçage au démarrage à l'aide d'un petit ventilateur à dépression (fig. IV-14).

2.2.3. Turbines réversibles à réaction à un seul étage. — Cette énumération ne serait pas complète si l'on ne mentionnait pas les turbines réversibles en pompe dont l'emploi devient de plus en plus fréquent actuellement pour les reports d'énergie d'heures creuses sur les heures pleines.

Il s'agit de turbines du type Francis qui peuvent fonctionner en pompe avec la même chute par inversion du sens de rotation. La technique de ces machines est nouvelle et actuellement en pleine évolution. Leur plage de rendement en turbine est plus limitée que celle des autres turbines Francis; pour cette raison, ainsi que pour des raisons de tenue mécanique et de stabilité, normalement on ne les fait fonctionner en turbine qu'en dessus d'une certaine charge, par exemple, entre 60 et 100 % de leur puissance nominale. En pompe, elles ne fonctionnent généralement qu'à puissance fixe avec blocage des directrices dans une position optimale. Les rendements en pompe et en turbine sont du même ordre de grandeur et assez proches de ceux des machines classiques. Bien entendu, ces machines sont un peu plus délicates et plus coûteuses que les turbines classiques; en particulier, leur diamètre de roue est de 35 à 40 % supérieur; les puissances sont souvent les mêmes en turbine et en pompe. Leur domaine d'emploi courant est l'équipement des chutes ne dépassant pas 400 m de hauteur environ.

2.2.4. Pompes de hautes chutes. — Ce sont des pompes centrifuges, généralement multi-étages, semblables à celles qui sont employées pour les petites et les moyennes puissances. Leur technologie est depuis longtemps bien au point et l'on a seulement étendu leur emploi aux très fortes puissances.

Ces pompes sont parfois employées pour alimenter un réservoir par des cours d'eau dont la cote serait un peu



Plan d'aménagement de la Grande Dixence *(É.D.F.)*

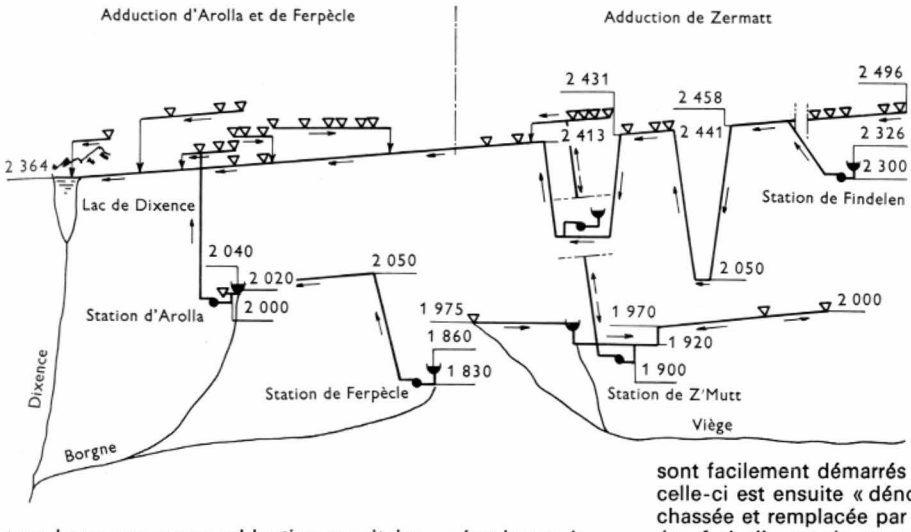


Fig. IV-15

Profil des adductions de l'aménagement de la Grande Dixence *(É.D.F.)*

trop basse pour une adduction gravitaire — c'est le cas de l'aménagement complexe de la Dixence en Suisse (fig. IV-15) — le groupe ne comprend alors que la pompe et son moteur.

2.2.5. Pompes-turbines réversibles multi-étages pour hautes chutes. — La première utilisation de ces machines aura vraisemblablement lieu dans l'usine de Sainte-Hélène pour la chute de la Coche édifiée près de Moûtiers en Savoie. Elle comporte quatre machines de chacune 80 MW, 600 tr/mn, à 5 étages pour 900 m de chute; les travaux de cet aménagement ont débuté en 1971-1972.

Le principe de ces machines est le suivant: si le moteur d'une pompe centrifuge cesse d'entraîner cette pompe, celle-ci « dévire », c'est-à-dire tourne en sens inverse en jouant le rôle d'une turbine. Une machine conçue dans ce but a des rendements en pompe et en turbine sensiblement comparables à ceux d'une machine classique. Comme elle est sans directrices mobiles, elle n'a pas besoin de régulateur et ne fonctionne qu'à puissance nominale, en turbine comme en pompe. On peut dire que ces machines sont donc des pompes que l'on fait fonctionner en turbine, plutôt que l'inverse.

Pour le pompage, ces machines réversibles sont entraînées par l'alternateur auquel elles sont accouplées et qui fonctionne alors en moteur synchrone. Le démarrage du groupe en pompage est obtenu par divers procédés: moteur électrique auxiliaire de démarrage, démarrage par induction en asynchrone à pleine tension ou à tension réduite, démarrage à fréquence réduite à l'aide soit d'un autre groupe, soit d'une turbine auxiliaire de démarrage.

Comme pour toutes les pompes centrifuges, le démarrage en pompe est effectué en circuit d'eau fermé par la vanne côté haute pression; ce n'est qu'après synchronisation que cette vanne est ouverte, permettant le pompage. À vanne fermée, une pompe n'absorbe qu'une fraction de sa puissance nominale et ce fonctionnement ne doit pas se prolonger à cause de l'échauffement de l'eau non renouvelée.

Le couple de démarrage peut être très réduit si la machine est préalablement dénoyée à l'air surpressé. Ce procédé est souvent employé malgré des inconvénients parfois assez sérieux lors de la purge de l'air inclus avant ouverture de la vanne côté haute pression.

2.2.6. Groupes isogyres. — On a réalisé des machines qui tournent dans le même sens en turbine et en pompe, avec différenciation des circuits d'eau et deux roues. Elles permettent de passer très rapidement du turbinage au pompage et inversement. L'aménagement de Robiei en Suisse est un exemple d'utilisation de ces groupes (disposition à axe horizontal).

2.2.7. Groupes ternaires de pompage. — Ces groupes comprennent trois machines sur le même arbre: alternateur-moteur synchrone, turbine, et pompe centrifuge. Un accouplement permet de séparer la pompe lorsque l'on turbine. Ces groupes, tournant toujours dans le même sens, sont facilement démarrés en pompe à l'aide de la turbine; celle-ci est ensuite « dénoyée » à l'air comprimé (l'eau est chassée et remplacée par de l'air) pour éviter tout freinage (sauf si elle est du type Pelton). La ligne d'arbre est très longue, par exemple 40 m environ pour l'aménagement italien en bordure du lac Majeur, comportant 8 groupes à axe vertical de chacun 90 MW en pompe et 130 MW en turbine Pelton.

Les groupes ternaires sont ainsi très souples mais coûteux: ils comportent deux machines hydrauliques au lieu d'une. Jusqu'à ces dernières années, ils étaient seuls employés, tout au moins pour les hautes chutes. Par exemple, pour l'aménagement de Lünersee en Autriche (1958) avec 900 m de chute, on a utilisé des turbines du type Pelton à axe vertical et des pompes à 5 étages, de chacune 50 MW tournant à 750 tr/mn. L'accouplement mécanique y est même doublé par un accouplement hydraulique permettant de passer très rapidement d'un fonctionnement à l'autre; l'accouplement hydraulique permet d'obtenir à 1 % près la vitesse de synchronisme, après quoi l'accouplement mécanique à dents est enclenché pour la marche normale en pompe dont le robinet est ouvert aussitôt après.

2.2.8. Autres types de turbines. — Au siècle dernier, certaines installations de faibles puissances utilisaient des turbines du type Fourneyron ou Girard qui sont à réaction. Ces types sont abandonnés et n'ont plus guère qu'un intérêt historique.

Un autre type est actuellement employé mais assez rarement, il s'agit de la turbine *Dériaz* qui est un compromis entre la turbine Kaplan et la turbine Francis, en effet comme la turbine Kaplan, elle est munie de deux réglages conjugués: celui des directrices et celui de l'orientation des pales de la roue. À l'instar des turbines Kaplan, l'orientation variable des pales mobiles lui confère une plage de fonctionnement assez large avec un assez bon rendement; elle est réversible en pompe. La turbine Dériaz équipe des chutes d'eau de hauteur intermédiaire entre celles nécessitant des turbines Francis et celles pour lesquelles les turbines Kaplan sont mieux adaptées.

3. ALTERNATEURS TRIPHASÉS

La vitesse dépendant directement de la fréquence du réseau, le nombre de pôles est inversement proportionnel à la vitesse (V. t. 1 Électrotechnique, chap. 9).

En Europe où la fréquence est de 50 Hz, les fréquences de rotation possibles, exprimées en tours par minute, sont égales à: 1 000, 750, 600, 500, 428, 375, etc. Le rotor, excité en courant continu réglable, est généralement à pôles saillants et feuilletés. L'excitatrice traditionnelle à courant continu, en général sur le même arbre, tend actuellement à être abandonnée par l'emploi de différents dispositifs, tels que l'alternateur auxiliaire inversé dont le courant est redressé par des diodes à semiconducteurs, incorporées aux parties tournantes. On évite ainsi collecteurs et autres contacts tournants en gagnant sur la fiabilité et l'entretien (V. t. 1, Centrales thermiques, chap. 4).

Le refroidissement de l'alternateur est très généralement effectué à l'air en circuit fermé, avec radiateurs à circulation

d'eau. En fortes puissances, on commence à effectuer le refroidissement du stator et du rotor avec de l'eau qui circule dans les conducteurs creux (en cuivre) de ces enroulements.

Le courant fourni par l'alternateur, sous une tension nominale, généralement comprise entre 5 et 15 kV, est envoyé vers le primaire des transformateurs, dont le secondaire est branché sur le poste haute tension de départ.

4. INSTALLATIONS DE TRANSFERT D'ÉNERGIE PAR POMPAGE

4.1. Installation classique de transfert quotidien. — La grande différence de prix de revient marginal entre l'énergie de nuit ou d'heures creuses et celles d'heures pleines ou de pointe, alliée à la souplesse propre à la production hydro-électrique, a rendu intéressantes les installations de transfert d'énergie par pompage. En outre, ces installations ont bénéficié de la récente mise au point des turbines réversibles en pompe, ce qui permet une importante économie.

Schématiquement une station de transfert comprend : un réservoir supérieur et un réservoir inférieur reliés par un circuit d'eau passant par une usine permettant soit de turbiner, soit de pomper l'eau entre les deux réservoirs.

L'usine est très généralement souterraine par suite de la nécessité de caler les turbines-pompes au moins une dizaine de mètres en dessous du plus bas niveau du réservoir inférieur ; autrement on aurait un phénomène de cavitation durant le pompage. On admet généralement que la hauteur de chute ne doit guère être inférieure à 150 m environ pour que l'installation soit suffisamment rentable. Une faible distance horizontale entre les deux réservoirs, par rapport à leur dénivellation, est bien entendu avantageuse.

Les réservoirs peuvent être entièrement artificiels ou être des lacs ou réservoirs déjà existants. Comme de telles installations sont indépendantes de l'hydrologie, car elles fonctionnent avec la même eau (celle de premier remplissage), elles peuvent être avantageusement situées dans des zones à forte production thermique ou nucléaire, ou mieux proches d'une région forte consommatrice, si le relief s'y prête. En effet, une station proche d'un centre de consommation utilise pour le pompage en heures creuses, la capacité de transport du réseau alors peu chargé ; de plus, l'énergie produite en heures pleines n'est à transporter que sur de très courtes distances. L'investissement pour le transport et les pertes en ligne sont ainsi très réduits.

Les rendements en turbinage et en pompage étant chacun égal à 85 % environ, le rendement global, qui est le produit, est égal environ à 72 %. Autrement dit, 100 kWh consommés en pompage permettent d'obtenir environ 72 kWh en heures pleines.

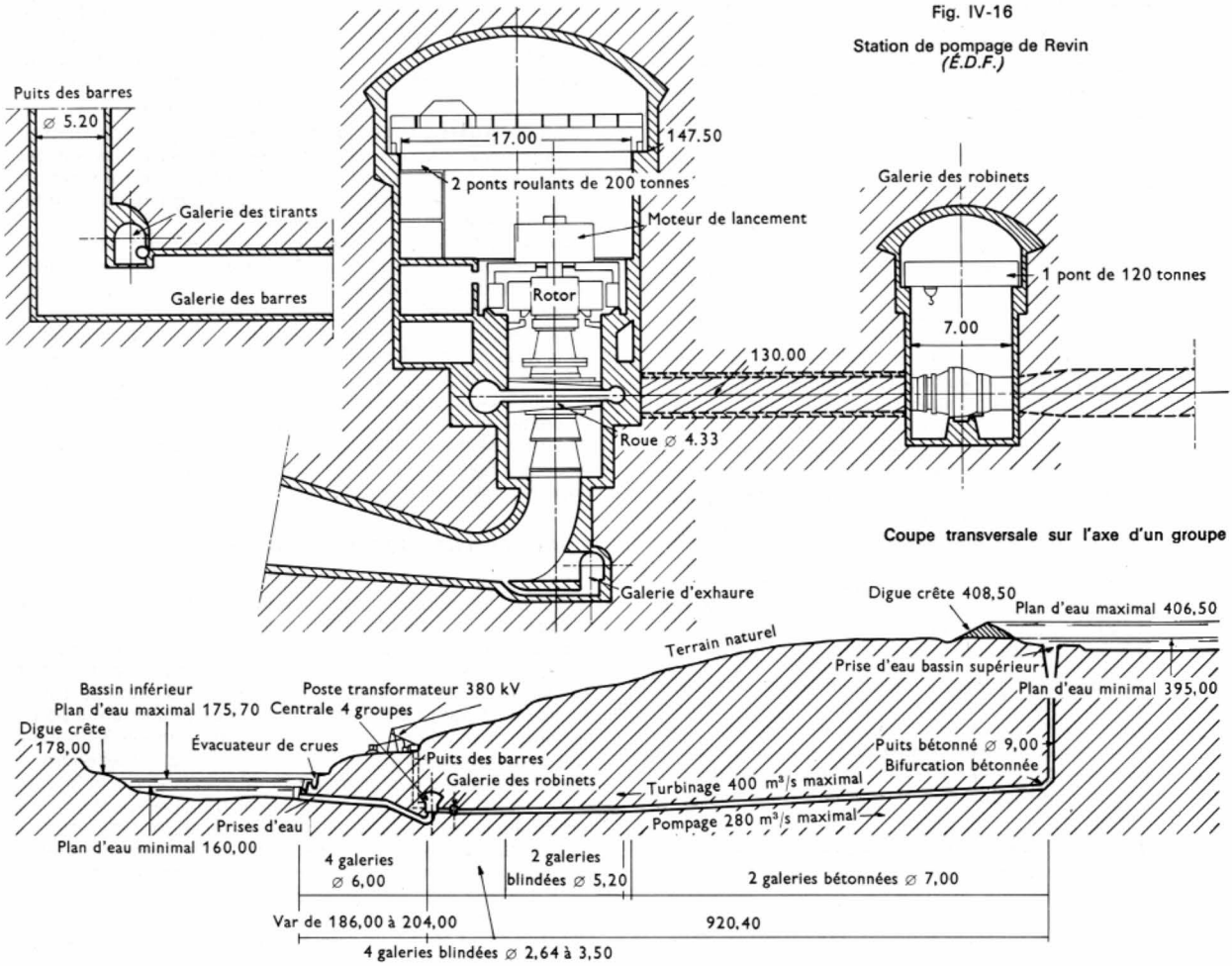
En principe, la capacité minimale de chaque réservoir correspond à un fonctionnement à pleine puissance, en pompage durant 7 à 8 h de nuit et en marche en turbines pendant 5 à 6 h en période de pointe. Ces durées, de même que les rendements, font qu'à plein débit, la puissance électrique installée (celle des alternateurs-moteurs et des lignes de transport) peut être pleinement utilisée soit en pompage, soit en turbinage. Dans ce cas, le débit en pompe est très voisin des trois quarts du débit turbiné.

En France, la première installation importante est celle des lac Blanc et lac Noir dans les Vosges avec 100 MW en groupes ternaires (1938) ; elle a été construite pour valoriser l'énergie d'heures creuses (peu vendable à l'époque) produite par l'usine au fil de l'eau de Kembs sur le Rhin.

La seconde doit être mise en service fin 1974 : c'est celle de Revin dans les Ardennes. Les réservoirs ont une capacité de 7 Mm³ chacun, la hauteur de chute moyenne est de 230 m et la puissance installée est de 800 MVA en 4 groupes réversibles (tournant à 300 tr/mn) avec moteurs auxiliaires électriques de lancement de 15 MW chacun environ

Fig. IV-16

Station de pompage de Revin
(É.D.F.)



(fréquence de rotation : 333 tr/mn au synchronisme). La durée de lancement en pompe est de quatre minutes (fig. IV-16).

Les nations à production thermique prédominante, telles que l'Allemagne, ou les États-Unis d'Amérique ont des installations importantes en service et d'autres en travaux. L'Écosse aménage ses lochs utilisés comme réservoirs inférieurs. L'Italie met en service la station du lac Delio en bordure du lac Majeur, lequel sert de réservoir inférieur, avec une puissance installée de 1 040 MW et une usine équipée de 8 groupes ternaires fonctionnant avec une chute d'eau de 750 m. Parfois, un estuaire de fleuve sert de réservoir inférieur : c'est le cas de la station américaine de Cornwall (2 100 MW) établie au bord de l'Hudson, à un endroit où l'eau est pratiquement douce, tout en étant soumise à une légère marée. On envisage aussi des stations en bordure de mer, mais cela pose des problèmes de corrosion du matériel et surtout de pollution saline des terrains avoisinants en cas de non-étanchéité absolue du réservoir supérieur.

Certains auteurs admettent que les aménagements hydrauliques à réservoir gravitaire ou pompage doivent représenter 15 à 20 % de la puissance installée d'un réseau. En de nombreux pays l'hydro-électricité classique gravitaire étant très limitée par les sites, il paraît probable que les transferts par pompage vont se généraliser pour servir de complément modulateur à une production croissante d'origine thermique et surtout nucléaire.

4.2. Autres installations de transfert par pompage. — Une installation de transfert peut être dite non classique ou plus que journalière lorsque la capacité d'eau en réserve, tout au moins celle du réservoir supérieur, correspond à un remplissage par pompage nécessitant une durée dépassant nettement 7 à 8 heures creuses de nuit. C'est le cas des stations à réservoirs saisonniers, où le pompage d'un cours d'eau en saison de forte hydraulicité sert à remplir un grand réservoir qui est ensuite déstocké en saison d'étiage et de forte demande de puissance. En France notamment, on envisage de remplir ainsi certains réservoirs saisonniers projetés en montagne, remplaçant ainsi certaines adductions gravitaires lointaines et coûteuses qui étaient seules envisagées autrefois. Cette formule doit d'ailleurs permettre de projeter de hautes chutes à réservoirs saisonniers qui n'auraient pas pû être envisagées autrefois, faute d'eau de remplissage par simple gravité. En très hautes chutes, cette solution devient économique par l'emploi de pompes réversibles multi-étages, ainsi que par le bas prix de l'énergie saisonnière utilisée au pompage.

CHAPITRE V

EXEMPLES D'AMÉNAGEMENTS RÉCENTS OU EN PROJET

1. AMÉNAGEMENT DU RHÔNE

L'aménagement du Rhône français est à buts multiples : production d'électricité, navigation, irrigation, lutte contre les inondations, aménagements de zones industrielles, agricoles et résidentielles, etc. Il est effectué par la Compagnie nationale du Rhône, fondée en 1933 ; les usines sont exploitées par Électricité de France.

Lorsque l'aménagement sera terminé, la production annuelle des usines de la Compagnie sera voisine de 16 TWh. De longues études ont été nécessaires pour la conception des ouvrages ; de nombreux problèmes se sont en effet posés du fait du charriage du fleuve d'une part et des nappes de la vallée d'autre part.

— *En amont de Lyon*, l'utilisation est encore uniquement hydro-électrique, avec essentiellement l'importante moyenne chute à réservoir journalier de Génissiat (datant de 1948) et son bassin de compensation de Seyssel équipé d'une usine (datant de 1951). Génissiat, avec une puissance de 380 MW et une production de 1 700 GWh/an, (donc une utilisation de cette puissance en 4 500 h par an) est la seule usine d'éclusées du Rhône français ; les éclusées sont compensées par Seyssel équipée à 40 MW et produisant 165 GWh. Génissiat est équipée de 6 turbines Francis sous 70 m de chute ; l'usine est incorporée en pied du barrage. Seyssel comporte 3 groupes Kaplan sous 8,7 m de chute.

— *En aval de Lyon*, les aménagements comportent tous des écluses pour la navigation et ce n'est que dans la partie la plus en aval du Rhône que l'irrigation prend une certaine importance. Chacun de ces aménagements (7 sont en service en 1970 sur un total de 12) est en général à faible chute, guère supérieure à 10 ou 15 m, sauf pour Châteauneuf avec 19 m et Bollène ou Donzère-Mondragon avec 26 m.

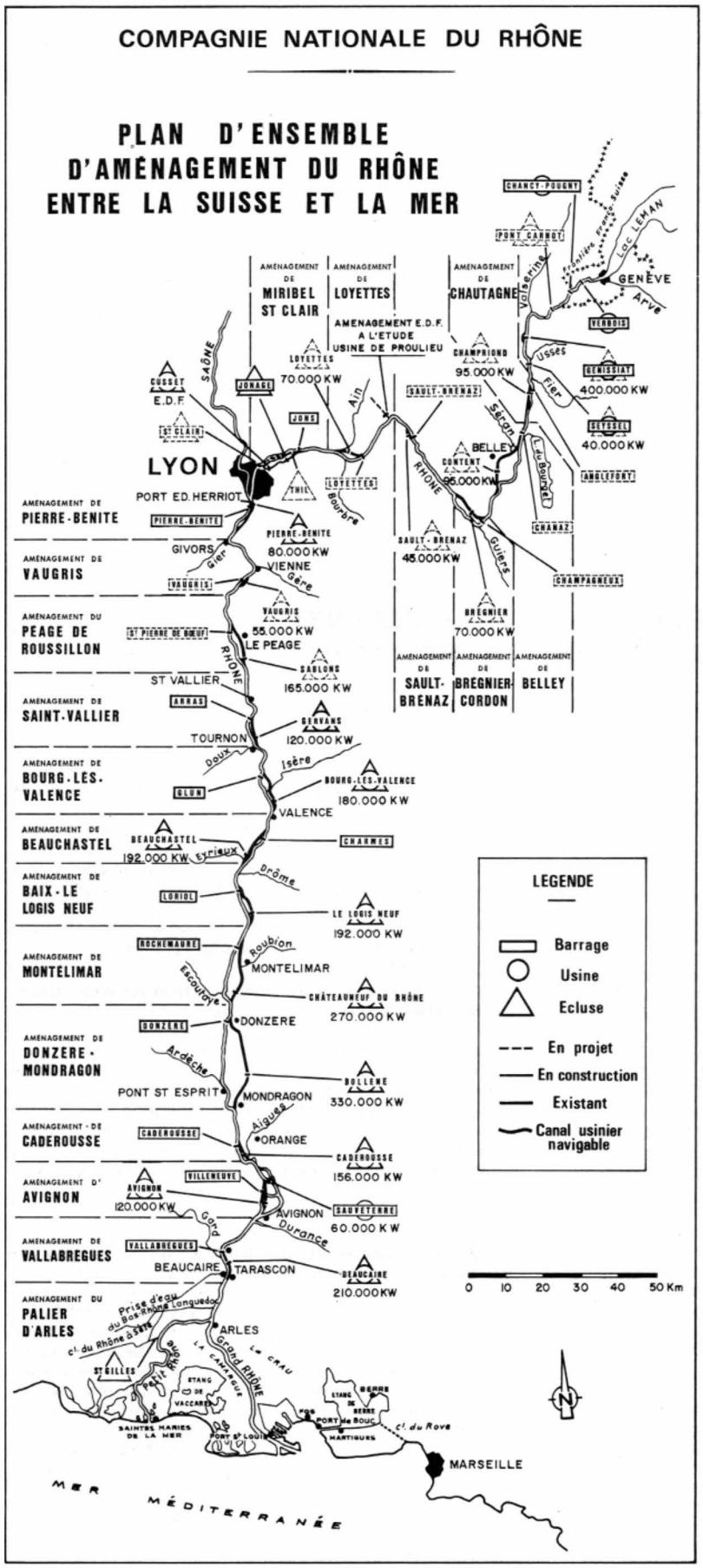
L'aménagement type comprend un barrage, à même le fleuve, constitué de plusieurs passes de crue équipées de vannes. En amont du barrage prend naissance un canal de dérivation alimentant l'usine hydro-électrique et la passe éclusière ; le canal aval, de restitution et de navigation, rejoint ensuite le Rhône à un niveau correspondant à la retenue créée par la chute en aval. Pratiquement, les usines sont au fil de l'eau et leur production annuelle correspond à l'utilisation de la puissance installée en 6 000 h par an, ou même un peu plus ; les contraintes diverses de niveaux, surtout celles concernant la navigation, s'opposent en effet aux variations de débit turbiné. Chaque usine est munie d'organes de décharge avec dissipateur d'énergie afin de ne pas perturber la navigation dans les canaux en cas d'arrêt du turbinage.

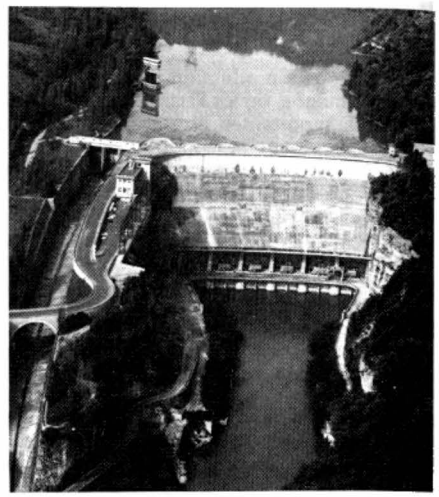
La hauteur de chute nette est maximale en basses eaux ; en règle générale elle est nettement réduite en hautes eaux, d'une part, pour ne pas surélever les niveaux en amont de la retenue, d'autre part, à cause de la restitution à plus haut niveau dans le fleuve.

La chute la plus puissante est celle de Donzère-Mondragon, celle de Vallabrègues est la plus récente.

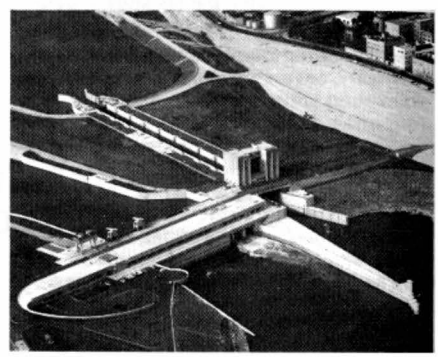
1.1. Aménagement de Donzère-Mondragon. Usine de Bollène (usine André Blondel). — Ce fut le premier aménagement réalisé en aval de Lyon et celui de plus forte production hydro-électrique avec 26 m de chute. Il a été mis en service en 1952 ; les travaux ont été parmi les premiers en France à être réalisés avec l'emploi des grands engins de terrassements et de manutention ; les canaux s'étendent sur une longueur de près de 30 km et ont imposé 45 Mm^3 de terrassement. L'usine est équipée de 6 groupes Kaplan à axe vertical tournant à 107 tr/mn, chacun de 50 MW, avec un débit de 255 m^3/s. La production moyenne annuelle est de 2 100 GWh.

1.2. Aménagement de Vallabrègues. Usine de Beaucaire. — Cet aménagement, mis en service en 1970, sera le dernier en aval puisque l'usine restitue en étiage à la cote + 1,00 m ; de ce fait, ses fondations descendent à 25 m sous le niveau de la mer. L'aménagement canalise le fleuve sur 34 km et bénéficie des derniers progrès technologiques, spécialement en ce qui concerne les groupes générateurs ; il comporte une longue retenue et une courte dérivation de 7 km au milieu de laquelle sont placées l'usine et l'écluse. Le barrage est composé de 8 passes mobiles, chacune équipée d'une vanne à segment de 14,6 m de hauteur sur 22 m de largeur, un volet déversant basculant occupe le sommet de la vanne. Le canal d'amenée à l'usine, long de 3 km, est pourvu d'un simple revêtement de batillage, son étanchéité est obtenue par les matériaux limoneux de corps de berge ; le drainage des terrains avoisinant est assuré par un

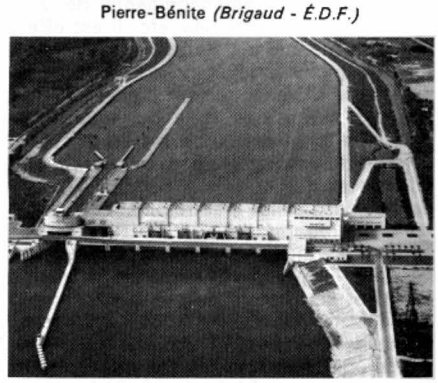




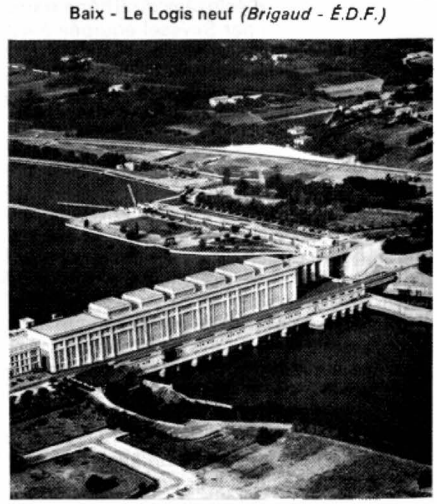
Génissiat *(Brigaud - É.D.F.)*



Pierre-Bénite *(Brigaud - É.D.F.)*



Baix - Le Logis neuf *(Brigaud - É.D.F.)*



Donzère-Mondragon *(Brigaud - É.D.F.)*

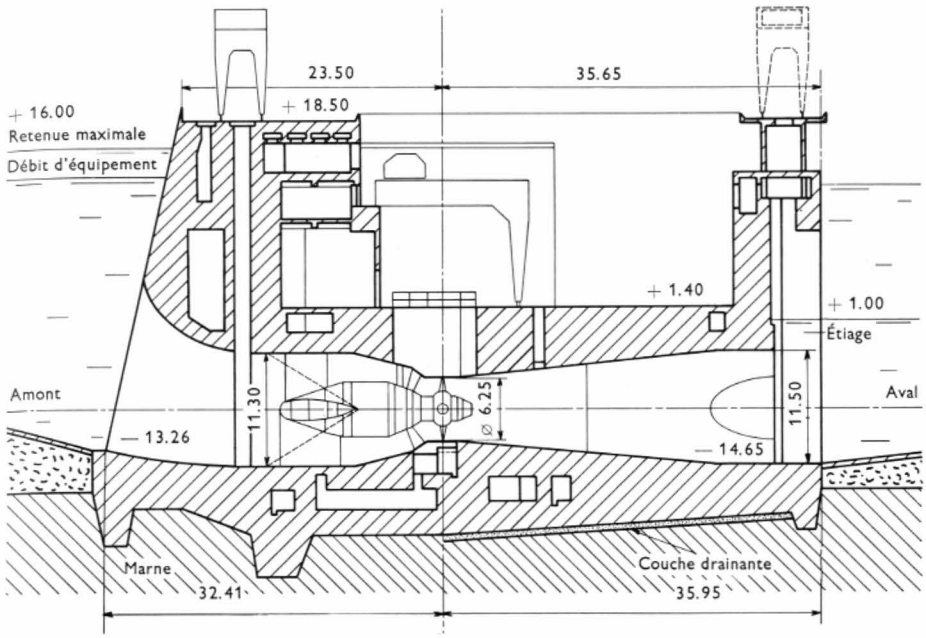


Fig. V-1

Aménagement de Vallabrègues sur le Rhône: coupe transversale de l'usine de Beaucaire *(É.D.F.)*

contre-canal sur chaque rive. La rive droite du canal, côté fleuve, comporte une digue déversante pour les grandes crues.

L'usine de Beaucaire est équipée de 6 groupes-bulbes de 35 MW utilisant un débit dérivé maximal de 2 490 m³/s; elle a une chute moyenne de 10,5 m (celle-ci sera portée à 11,5 m après les dragages prévus du palier d'Arles qui permettront d'atteindre une productibilité annuelle à 1 200 GWh). Chaque groupe tourne à 93,8 tr/mn et son alternateur est en atmosphère d'air surpressé à 3 bars absolus; la roue Kaplan est en aval du groupe et turbine au maximum 415 m³/s sous 8 m de chute, ou 356 m³/s sous 11,35 m (fig. V-1). La conception des groupes-bulbes (qui sont très puissants) a directement profité de nombreuses études faites peu d'années auparavant, en particulier pour l'usine marémotrice de la Rance.

Un déchargeur, ainsi qu'une écluse de 195 × 12 m, sont accolés à l'usine. Cependant, en cas de déclenchement, la majeure partie du débit dérivé est évacué par les turbines qui fonctionnent alors en déchargeur avec vannes-aval partiellement fermées; ainsi 280 m³/s peuvent être évacués par groupe.

Le plancher de l'usine, à la cote + 1,4, est à l'air libre il est partiellement abrité du vent (mistral) par le parement amont de l'usine. Le canal de fuite est long de 3 km. Les travaux ont nécessité 50 Mm³ de terrassement et 500 000 m³ de béton; ils ont également concerné divers aménagements annexes, en particulier la station de pompage de Champ-Fleury (16 m³/s), qui assainit le domaine de la Courtine au sud-ouest d'Avignon, et permet ainsi son urbanisation.

2. EXEMPLE D'AMÉNAGEMENT PROGRESSIF D'UNE VALLÉE DE MONTAGNE : L'ÉQUIPEMENT DE LA VALLÉE DE L'ARC (SAVOIE)

2.1. Généralités. — La vallée de l'Arc ou Maurienne est une des vallées alpines qui a les plus importantes possibilités hydro-électriques surtout du fait de sa forte pente. Par un paradoxe apparent, c'est celle dont l'équipement restait encore à réaliser en 1960, ou plutôt nécessitait un réaménagement; en effet, cette qualité même avait attiré les pionniers de l'hydro-électricité, à savoir les électrochimistes, qui avaient réalisé des chutes très importantes pour l'époque. Mais l'état de vétusté et de sous-équipement de ces chutes, ainsi que la régularisation apportée par le grand réservoir du Mont-Cenis, amenèrent à réaménager le cours de l'Arc par une série de chutes modernes en supprimant une partie des usines actuelles situées sur le cours moyen et en utilisant presque toute la dénivellation disponible. L'aménagement des affluents déjà commencé au début du siècle a été complété depuis (avant 1960) notamment par des équipements tels que la haute chute de Bissorte avec son réservoir de 40 Mm³ et l'ensemble d'Aussois avec ses deux réservoirs de 12 Mm³ au total (plan d'amont et plan d'aval). Dans l'avenir, il n'est guère prévu d'autres aménagements sur les affluents, sauf, au besoin, des suréquipements en pointe avec ou sans pompage à partir des réservoirs existants de Bissorte et d'Aussois.

2.2. Aménagement de la vallée de l'Arc. — Au point de vue hydro-électrique, le cours même de l'Arc, mis à part ses affluents, peut se décomposer en trois parties nettement différenciées:

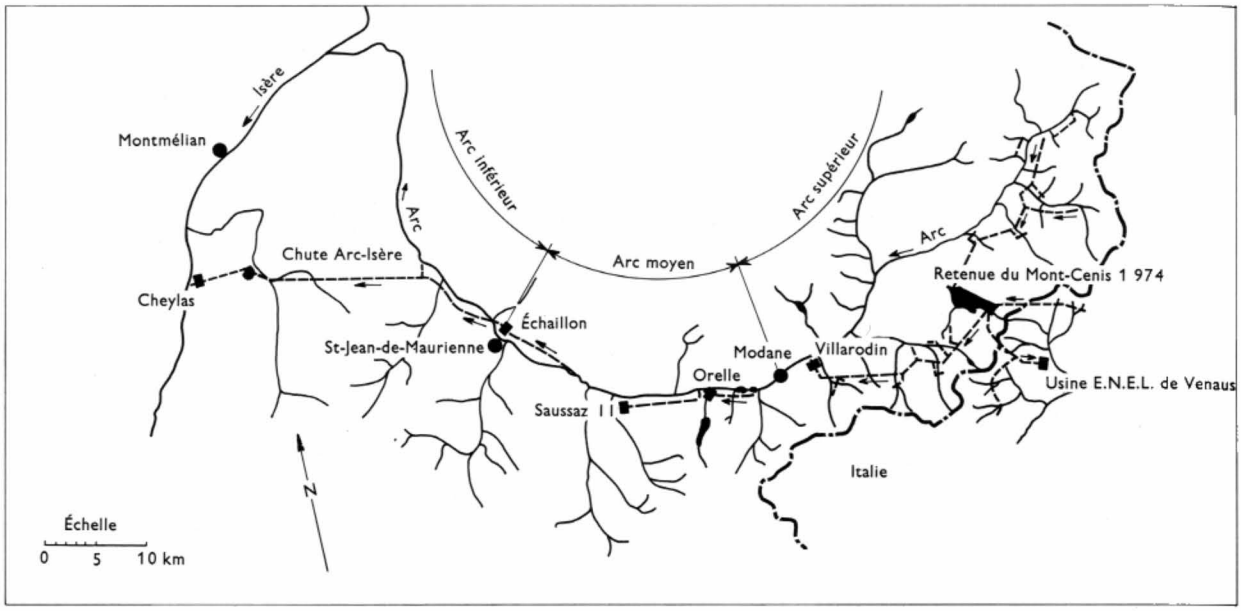
— Arc supérieur, en amont de Modane, équipé par la chute de 887 m du Mont-Cenis avec son usine à Villarodin et son réservoir saisonnier de 269,6 Mm³ utiles (part française);

— Arc moyen, entre Modane et Saint-Jean-de-Maurienne, actuellement pourvu de sept chutes, en général très anciennes (deux datant de 1897), qui seront supprimées; le réaménagement se fait en trois nouvelles chutes totalisant 488 m;

— Arc inférieur, en aval de Saint-Jean-de-Maurienne, qui doit être aménagé par la chute Arc-Isère de 285 m et son usine de pointe du Cheylas.

En 1960, a été mise en service la dérivation Arc-dans-Tignes sous le col de l'Iseran; en valorisant les usines de Tarentaise et en attendant le réaménagement de l'Arc, elle a permis une productibilité nouvelle d'environ 250 GWh. Après le réaménagement de l'Arc, lorsque l'eau sera mieux utilisée en Maurienne, les quantités d'eau ainsi dérivées seront réduites à celles complétant le remplissage du grand réservoir de Tignes. Cette dérivation est un exemple caractéristique d'aménagement fait pour une durée d'exploitation limitée durant laquelle son amortissement financier est largement assuré. Après son achèvement l'ensemble utilisera 1 668 m de dénivellation sur la hauteur de 1 734 m entre la retenue du Mont-Cenis et la restitution dans l'Isère. L'ensemble de la vallée produira 3,3 milliards de kilowattheures par an, dont près de la moitié en énergie d'hiver, cela avec une puissance installée dépassant 1,5 millions de kilowatts, qui pourrait même, dans l'avenir, être presque doublée à l'aide de pompages à partir de réservoirs existants.

2.2.1. Arc supérieur. — La chute du Mont-Cenis a été mise en service en 1968. Le barrage en enrochements du Mont-Cenis créé à la cote 1974 a une capacité utile de 321 Mm³ dont 270 pour la France et 51 pour l'Italie. Chaque nation conserve les quantités annuelles d'eau qui



Plan d'aménagement de l'Arc en cinq chutes : Villarodin, Orelle, Saussaz II, Échaillon et Cheylas *(É.D.F.)*

s'écoulaient naturellement sur son territoire ; de ce fait, la retenue alimente la nouvelle usine de Venaus en Italie avec 1 400 m de chute ainsi que celle de Villarodin en France avec 887 m. Les adductions françaises comprennent 35 km de galeries collectant par gravité des eaux en partie glaciaires.

La galerie en charge, sous un maximum de 130 m, a une longueur de 18 km et collecte au passage d'autres torrents. Toutes les prises d'eau sont entièrement automatisées. La conduite forcée de 3,7 km de long (diamètres compris entre 3,8 et 3,0 m) a une masse d'environ 10 000 t et est entièrement en galerie, non bloquée au rocher, donc visitable extérieurement.

L'usine de Villarodin, turbinant 51 m³/s sous 887 m de chute brute maximale est équipée de deux groupes Pelton à axe vertical tournant à 375 tr/mn, chacun de 182 MW (avec 6 jets). L'usine est pourvue d'un téléréglage ; sa productibilité est de 600 GWh obtenue avec 326 Mm³/an.

L'usine est liée hydrauliquement à haute pression avec la chute d'Aussois pour permettre des échanges d'eau et ainsi aider au remplissage du réservoir du Mont-Cenis, par siphonnage (fig. V-2).

2.2.2. Arc moyen. — Les trois nouvelles chutes en série sur l'Arc moyen, toutes à usines souterraines, comprennent :

— la chute d'Orelle de 119 m - 70 m³/s - 173 GWh/an ;
— la chute de la Saussaz de 212 m - 90 m³/s - 371 GWh/an ;
— la chute de l'Échaillon de 157 m - 90 m³/s - 360 GWh/an.

Cet ensemble, dont la mise en service s'étale de 1970 à 1975, est pourvu de réservoirs quotidiens et entraîne la suppression de 7 chutes au fil de l'eau, très vétustes (dont 6 construites entre 1897 et 1913) et dont l'équipement de 16 à 30 m³/s ne permettait pas d'utiliser les nouveaux et précieux débits d'hiver provenant du déstockage du Mont-Cenis.

2.2.3. Arc inférieur. — Le projet Arc-Isère, avec son usine souterraine du Cheylas dans la vallée du Grésivaudan, coupera le grande boucle que fait l'Arc à son confluent avec l'Isère. Il est homologue dans son principe à celui d'Isère-Arc dont l'usine de Randens a été mise en service en 1954 mais il sera mixte (gravitation et pompage).

À partir de la cote 527, ce projet comporte une longue dérivation en tunnel pouvant débiter 70 m³/s ; après une traversée transalpine de 18 km sous Belledonne, elle aboutirait à un bassin de 4,5 Mm³ près d'Allevard. De ce bassin (à la cote 498) partirait une dérivation en charge de 4 km qui se terminerait à l'usine du Cheylas, 258 m de chute avec un débit de 220 m³/s. Celle-ci serait équipée de deux groupes Francis réversibles en pompes (240 MW chacun). En heures creuses, le pompage sera assuré à partir d'un bassin à aménager à la cote 240 avant la restitution dans l'Isère. La productibilité serait de 700 GW/an (sans tenir compte du pompage), et l'énergie pourra être concentrée sur les heures de la journée où la demande est la plus forte.

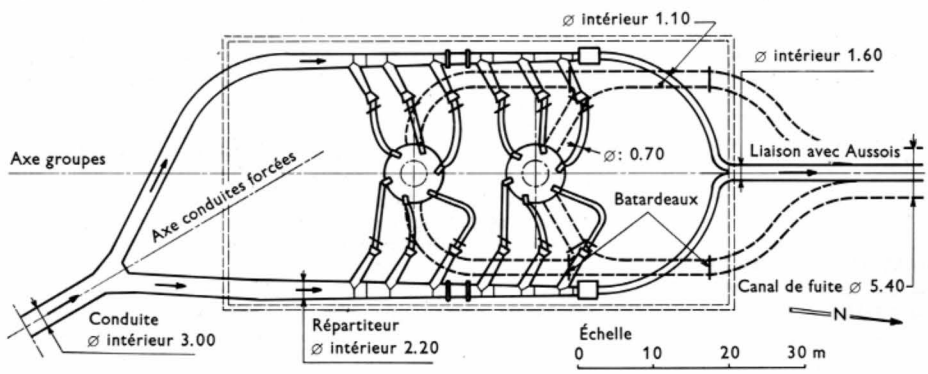


Fig. V-2
Plan de l'usine de Villarodin *(É.D.F.)*

3. USINE MARÉMOTRICE DE LA RANCE

À l'endroit où il est aménagé, l'estuaire de la Rance a une largeur de 750 m ; il isole de la mer un bassin de 22 km² dont le volume utile est de 184 Mm³ entre les cotes 0,0 et + 13,5 m représentant l'amplitude maximale en marée d'équinoxe. La marée moyenne est de 8,5 et celle de morte-eau moyenne de 6,5 m. La période est de 12 h 25 (fig. V-3).

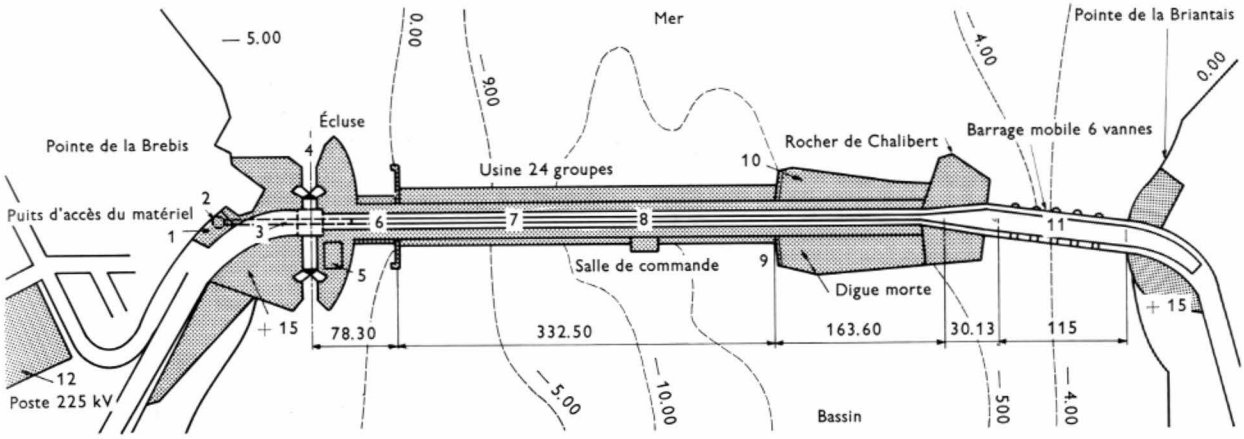


Fig. V-3

Aménagement marémoteur de la Rance *(É.D.F.)*

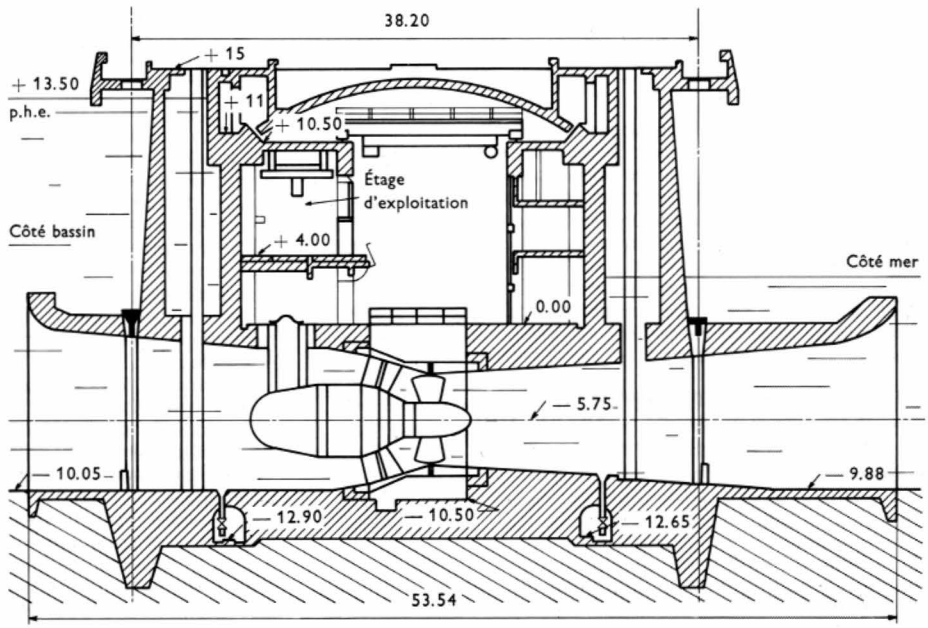


Fig. V-4

Coupe par une travée de groupe de l'usine de la Rance *(É.D.F.)*

En partant de la rive droite côté St-Malo, les ouvrages surmontés d'une double chaussée publique se composent d'un barrage à 6 passes mobiles de 15 m de largeur chacune, d'une digue morte, de l'usine de 332 m de long, ainsi que d'une écluse s'appuyant sur la rive gauche, côté Dinard. L'usine comprend 24 groupes semblables, type bulbe, à axe horizontal calé à la cote — 5,75 m et tournant à 93,75 tr/mn ; chacun d'eux a une puissance de 10 MW. Un groupe se compose d'une coque métallique en forme d'ogive contenant l'alternateur et d'une turbine Kaplan. La coque est fixée par un puits d'accès et 12 avant-directrices fixes. Le groupe fonctionne dans les deux sens de rotation, soit en turbine, soit en pompe et dans les deux sens du flux. Les roues sont du côté mer et le rendement en turbine est meilleur dans le sens bassin-mer que dans le sens opposé ; cette différence est due à la position des directrices, situées entre la turbine et le bassin. La turbine, type Kaplan à 4 pales orientables et à 24 directrices mobiles, a un diamètre de roue de 5,35 m. La vitesse d'emballement est de 380 tr/mn. Les alternateurs (à 32 paires de pôles), accouplés directement à la turbine et tournant dans l'air surpressé à 2 bars absolus ont une puissance de 10 MW (pour un facteur de puissance cos $\varphi = 1$) ; la tension entre les bornes est de 10,3 kV. Le refroidissement est obtenu au moyen d'une circulation d'air axiale et d'un ventilateur ; la chaleur est dissipée par les parties supérieure et intérieure de la coque sur laquelle sont soudées des ailettes de cuivre. Les alternateurs sont de construction spéciale dans le double but d'en réduire le diamètre et d'assurer leur refroidissement.

Fonctionnellement, l'usine est divisée en 6 tranches de chacune 4 groupes, ce qui fait que chacun des 4 groupes d'une tranche fonctionne au même régime ; en particulier, l'arrêt fortuit d'un groupe entraîne l'arrêt des 3 autres (fig. V-4). Pour cela, directrices et pales de roues sont synchronisées par une « came de conjugaison » électrique commune à une tranche de 4 groupes. De même, l'excitation est commune à une tranche.

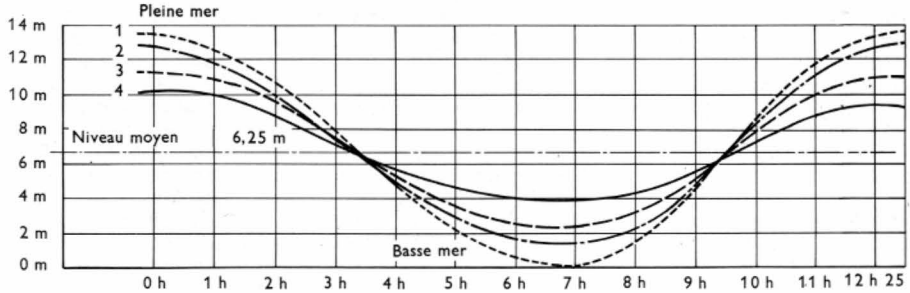


Fig. V-5

Marées de la Rance
1. Marée de vive eau d'équinoxe
2. Marée de vive eau moyenne
3. Marée moyenne
4. Marée de morte eau moyenne

3.1. Fonctionnement. — Le fonctionnement peut être à double effet, au remplissage et à la vidange du bassin ; il peut également être complété dans les deux sens par pompage durant la période d'attente. Ce pompage augmente la production d'énergie car il assure un surremplissage ou une survidange avec une dénivellation très faible et les volumes ainsi pompés seront, quelques heures après, turbinés avec une dénivellation bien plus grande, cela faisant plus que compenser les pertes de rendement du cycle pompage — turbinage. Parmi les multiples cycles que l'exploitant a à sa disposition, le choix doit se porter sur celui qui convient le mieux, selon l'horaire et l'amplitude de la marée et la valeur de l'énergie aux diverses heures de la journée. On conçoit ainsi (surtout si l'on songe que le cycle de la marée se décale de 50 minutes par jour solaire) que l'exploitation optimale doit changer chaque jour et être déterminée à l'aide d'un ordinateur. En revanche, il n'y a aucun aléa d'hydrologie et le cycle des marées est connu à l'avance avec une grande exactitude.

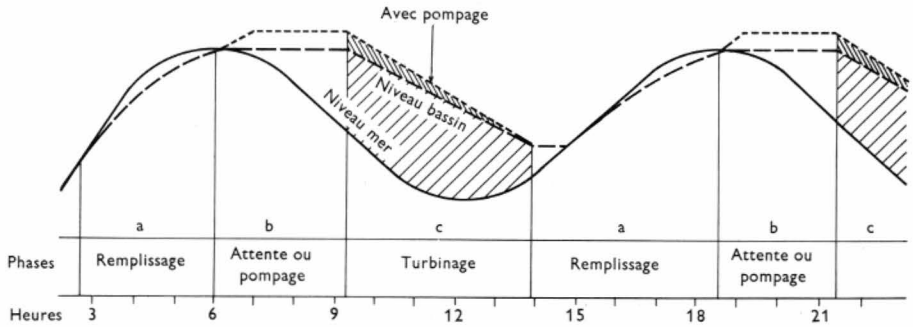


Fig. V-6

Exemple de cycle de fonctionnement de l'usine marémotrice de la Rance

3.2. Puissance et production

— Puissance installée : 24 × 10 : 240 MW
— Production annuelle nette : 544 GWh

se décomposant ainsi :

• sens bassin-mer	537,0 GWh
• sens mer-bassin	71,5 GWh
Total en génération	608,5 GWh
Consommation par le pompage	— 64,5 GWh
Énergie nette	544 GWh

Les premiers travaux ont débuté en 1960 et les premiers groupes ont été mis en service en 1966. Les groupes bulbes soumis à la corrosion de l'eau de mer ont fait l'objet de nombreuses études, y compris sur un modèle grandeur nature de 9 MW installé dans le port de Saint-Malo. Certaines turbines ont leur pales en acier inoxydable, d'autres en bronze d'aluminium.

4. PROJET D'AMÉNAGEMENT MIXTE : STATION DE POMPAGE ET ÉNERGIE GRAVITAIRE

Il s'agit de la *chute de la Coche* avec son usine de Sainte-Hélène près de Moûtiers, en Savoie (les travaux sont prévus entre 1972 et 1976). Le réservoir inférieur de 400 000 m³ sera constitué par la prise d'eau de l'aménagement existant d'Isère-Arc qui produit 500 GWh avec 152 m de chute (mis en service en 1954). Le réservoir supérieur sera constitué par la cuvette du lac de la Coche qui recevra un étanchement au bitume et un barrage de surélévation créant ainsi une capacité de 2 Mm³ à 1 400 m d'altitude. Ces deux réservoirs sont distants de moins de 3 km avec une dénivellation de 900 m ; ils seront reliés entre eux par des ouvrages presque entièrement souterrains comprenant une courte galerie en charge et sa cheminée d'équilibre, une conduite forcée en partie en galerie blindée inclinée et l'usine de Sainte-Hélène. Cette grande hauteur de chute comparée à la faible longueur de dérivation constitue la principale qualité du site.

Le réservoir supérieur de la Coche, en plus du pompage, sera alimenté par un réseau de 28 km de galeries qui lui amèneront annuellement 220 Mm³ d'eau prélevée gravitairement sur divers torrents avec un bassin versant total de 240 km² ; le débit de ce réseau sera au maximum de 20 m³/s avec une moyenne en hiver d'environ 3 m³/s. La productibilité obtenue avec ces eaux gravitaires est estimée à 460 GWh/an.

L'usine souterraine de Sainte-Hélène aura une puissance installée totale de 320 MW, correspondant à un débit de 40 m³/s en turbine et de 30 m³/s en pompe. L'usine comprendra 4 groupes verticaux binaires réversibles tournant à 600 tr/mn, de chacun un alternateur-moteur de 80 MW, accouplé à une pompe-turbine de 5 étages sans régulateur. Il est prévu que l'usine sera entièrement télécommandée et que le démarrage en pompe s'effectuera en asynchrone direct sur les alternateurs-moteurs et pompes noyées.

Ce système de démarrage impose l'emploi d'un alternateur-moteur de construction spéciale et il entraîne de brusques appels de puissance sur le réseau ; il a pu être projeté à cause de la proximité d'autres aménagements hydrauliques très puissants ayant de fortes possibilités de régulation.

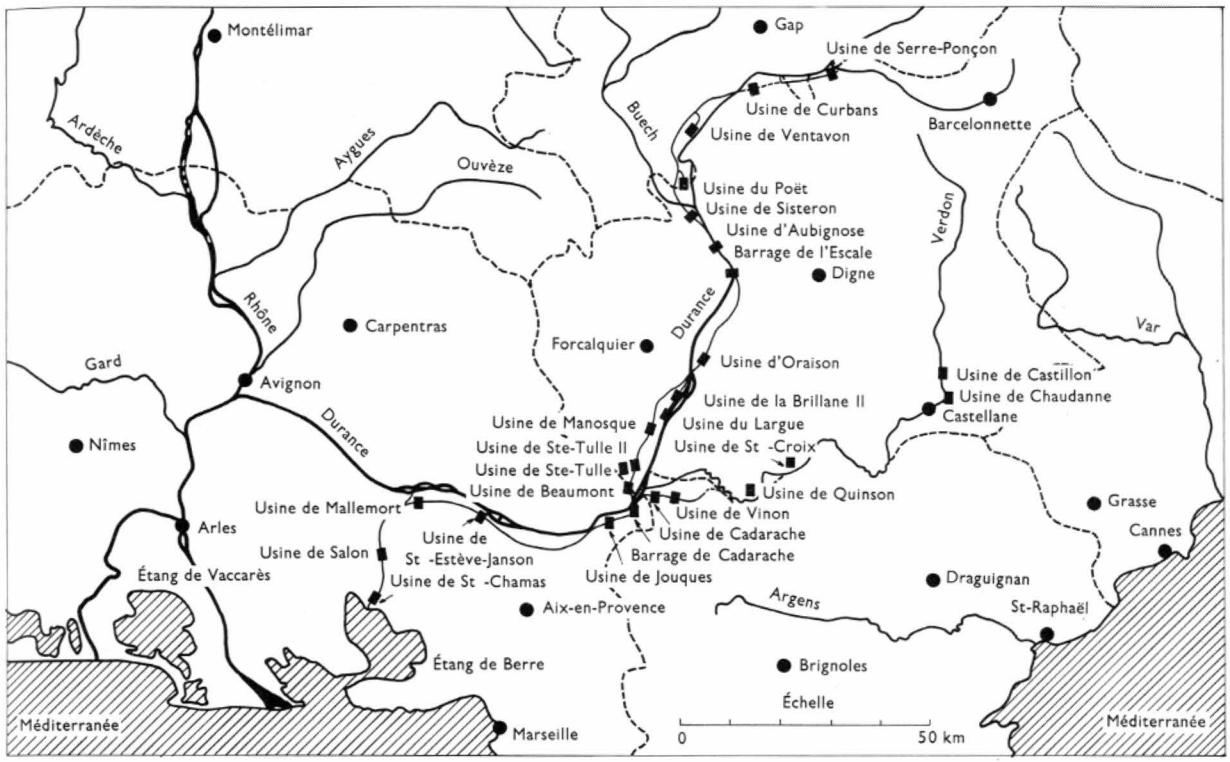
En principe, le pompage en heures creuses sera employé surtout en basses eaux d'hiver, et la plus grande partie de l'eau pompée sera prélevée, non dans le réservoir inférieur de 400 000 m³ dont la capacité est trop faible, mais sur les apports de l'Isère qui alimente ce réservoir. De ce fait, le pompage aura un effet bénéfique par report d'énergie sur la chute aval d'Isère-Arc dont l'équipement à 120 m³/s est actuellement surabondant en hiver, bien qu'il bénéficie déjà du déstockage du grand réservoir de Tignes.

La puissance maximale possible en génération (environ 300 MW) pourra être fournie pendant 10 h chaque jour ouvrable d'hiver. L'aménagement est conçu pour pouvoir être doublé en puissance par la suite lors d'une deuxième étape de travaux ; la puissance maximale (environ 600 MW) pourra être produite durant 8 h chaque jour ouvrable.

5. L'AMÉNAGEMENT DE LA MOYENNE ET BASSE DURANCE

Bien qu'étant un affluent du Rhône, la Durance, avec son principal affluent le Verdon, peut être considérée comme un véritable fleuve (très anciennement c'était effectivement un fleuve puisqu'elle se jetait en mer à l'Ouest de l'étang de Berre et qu'elle y est partiellement dérivée artificiellement depuis 1966 par des usines en aval de Salon et de Saint-Chamas). Les débits étant extrêmement irréguliers, c'est la mise en service en 1960 du grand réservoir de Serre-Ponçon, s'ajoutant à celle de Castillon sur le Verdon, qui a donné l'impulsion conduisant à l'aménagement progressif et quasi total de la vallée.

Avant 1960, les quelques aménagements existants produisaient seulement 0,9 TWh sur les 6,3 TWh que l'équipement final permettra d'obtenir avec une puissance installée de 1 850 MW. Ce nouvel équipement, commencé vers 1946, n'a été économiquement possible qu'à l'aide des grands engins de terrassement, employés d'abord au barrage de Serre-Ponçon (construit avec 14 Mm³ de matériaux alluvionnaires) et utilisés ensuite pour le terrassement des importants canaux dérivant en moyenne 250 m³/s. Ces canaux, constituant les ouvrages-maîtres des chutes aval, sont de section trapézoïdale, leur pente longitudinale est proche de 0,15 ‰ ; leur revêtement est soit en béton de ciment, soit en béton bitumineux suivant la tendance actuelle. En général les berges ont une pente de 50 %. Les



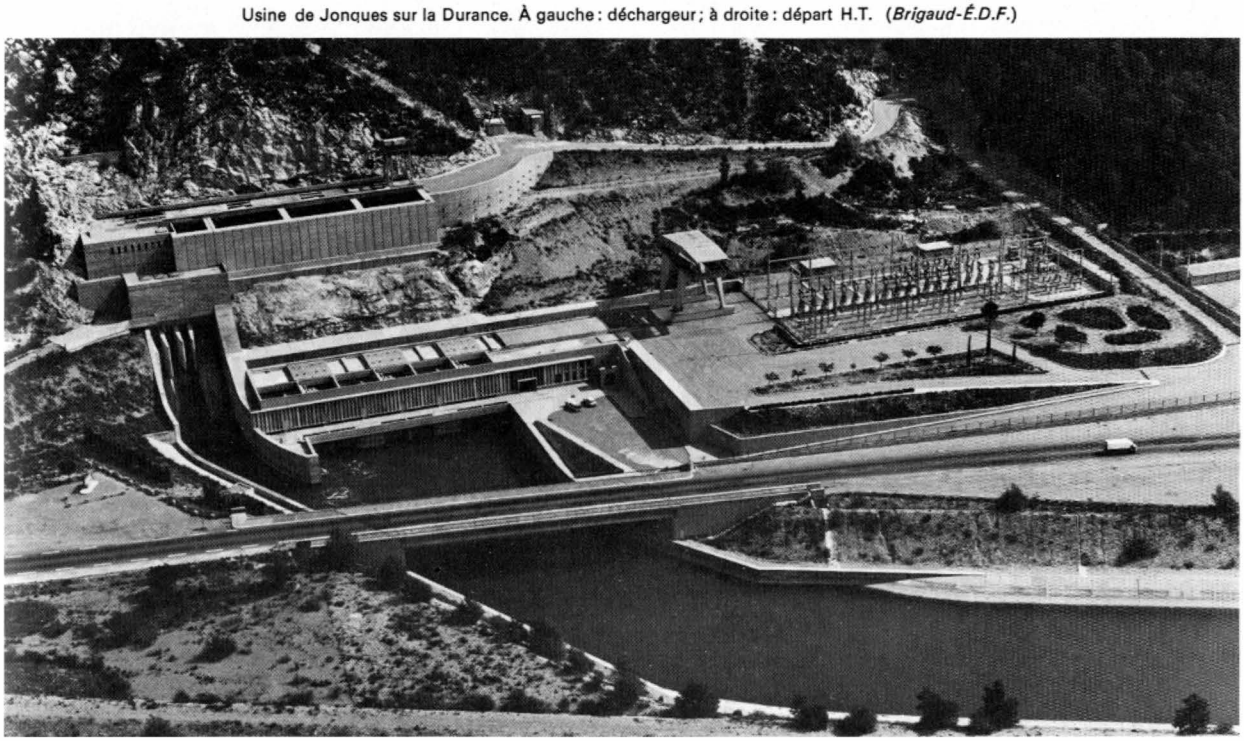
Plan d'ensemble d'aménagement de la moyenne et basse Durance *(É.D.F.)*

revêtements en béton de ciment sont constitués de dalles rectangulaires, préfabriquées ou coulées sur place, de 12 à 15 cm d'épaisseur, jointées entre elles au bitume. Les revêtements en béton bitumineux offrent l'important avantage de ne nécessiter aucun joint, du fait de leur souplesse.

L'aménagement est à buts multiples car, en plus de son intérêt énergétique, il sert également à la lutte contre les crues, et surtout aux adductions d'eau à usages agricole, industriel et domestique. C'est ainsi qu'environ un tiers des 6 milliards de mètres cubes écoulés par an seront dérivés pour ces usages; de même, une importante partie des 1 400 Mm^3 des réserves saisonnières sera réservée en lâchures d'été, aux usages agricoles et divers. On admet même que ces usages croîtront notablement dans l'avenir, au détriment de la production hydro-électrique.

Les barrages de prise sont moins nombreux que les usines, ce qui fait que parfois plusieurs usines sont en série sur la même prise; par exemple, la prise d'eau de Cadarache au

Usine de Jonques sur la Durance. À gauche : déchargeur; à droite : départ H.T. (*Brigaud-É.D.F.*)



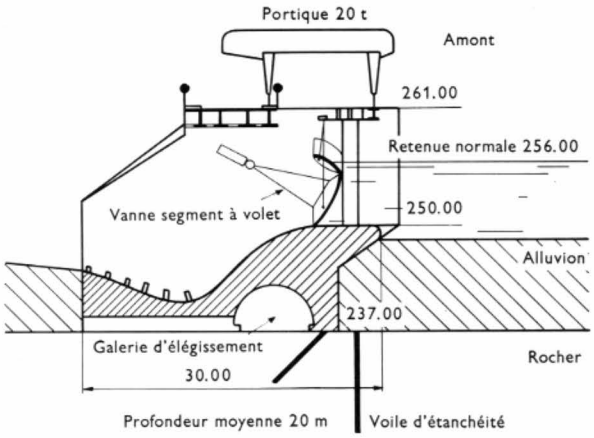


Fig. V-7 — Coupe du barrage de Cadarache

confluent du Verdon alimente l'usine de Jouques ainsi qu'en aval celles de Saint-Estève - Janson et de Mallemort. Le canal d'amenée de Jouques, à berges horizontales à 1,50 m au-dessus de la retenue normale, donne une capacité utile pour les éclusées. Les deux usines en aval ont des canaux d'amenée dont les berges sont en légère pente longitudinale ; normalement ils sont exploités à volume d'eau constant. Cette disposition nécessite que les trois usines soient en synchronisme, télécommandées depuis le poste centralisé situé à Mallemort, c'est-à-dire qu'elles doivent fonctionner simultanément chacune avec le même débit. Naturellement, chaque usine est « court-circuitée » par un déchargeur permettant d'assurer la continuité du débit en cas d'arrêt fortuit des groupes générateurs ; ce déchargeur évite également les intumescences dans le canal d'amenée.

Le palier aval de 117 m de dénivellation, entre la restitution de Mallemort et l'étang de Berre, est aménagé pour un débit de 235 m³/s et il comporte deux chutes en série : celle de Salon et celle de Saint-Chamas. Il a ceci de particulier qu'il coupe, par un trajet très court, la boucle que fait la Durance confluant avec le Rhône à Avignon.

Parmi les ouvrages caractéristiques des chutes sur la Durance, outre les grands canaux et leurs ouvrages de franchissement, il y a lieu de signaler les déchargeurs avec leur dissipateur d'énergie, ainsi que les répartiteurs de débit. Les déchargeurs, contrôlés par des vannes à segment, sont le plus souvent à l'air libre avec coursiers munis de dissipateurs d'énergie. Parfois, ils sont à vortex comme à Oraison où le débit d'un groupe, soit 80 m³/s peut être dérivé dans un puits de 7 m de diamètre et de 70 m de haut, pour être restitué au canal de fuite. Cet ouvrage, ne dérivant que le débit d'un seul des trois groupes générateurs, est néanmoins suffisant pour limiter à une valeur acceptable les ondes d'intumescence dans le canal d'amenée, mais insuffisant pour réalimenter complètement les chutes en aval.

Les répartiteurs de débit sont établis soit pour servir aux prélèvements d'eau d'irrigation, soit même pour alimenter en parallèle une chaîne d'usines anciennes conservées et une chaîne d'usines nouvelles. L'exploitation des répartiteurs, obéissant à des consignes assez diversifiées, est réalisée à l'aide de dispositifs automatiques et de télécommandes.

6. L'AMÉNAGEMENT DE CHURCHILL FALLS ET SON USINE EN LABRADOR

La chute de Churchill Falls (mise en service prévue à partir de 1972), mérite d'être citée car elle doit être la plus importante du monde. En effet, sa puissance installée sera de 5 225 MW et sa productibilité annuelle de 34,5 TWh, soit en une seule usine presque les deux tiers de la production hydraulique française.

Barrage de l'Escale de la chute d'Oraison avec la prise d'eau alimentant le canal, sur la rive gauche (*Brigaud-É.D.F.*)

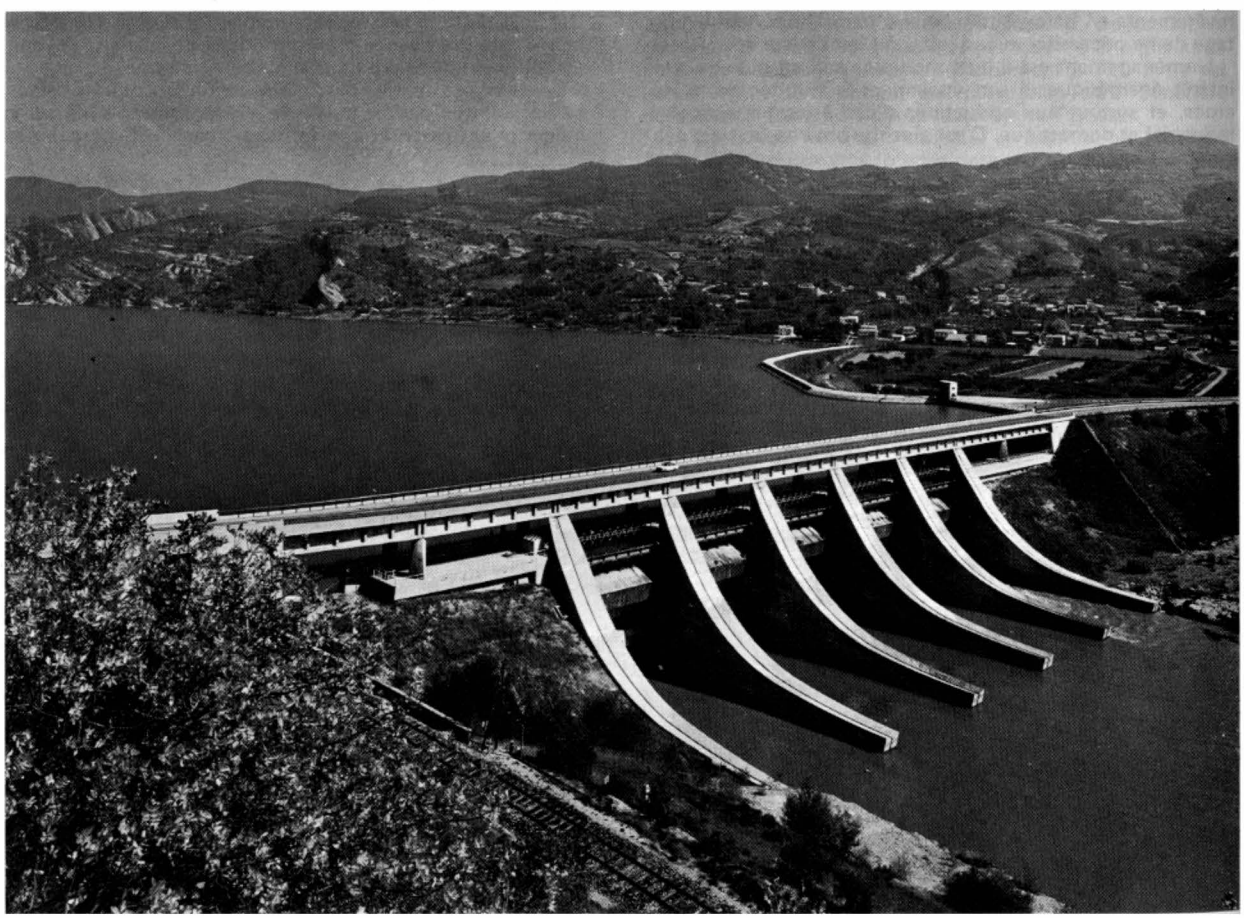
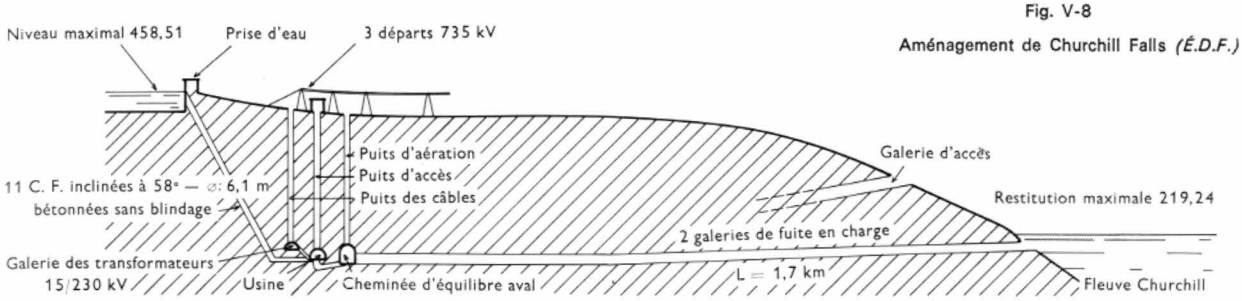


Fig. V-8

Aménagement de Churchill Falls *(É.D.F.)*



Sa conception et son exécution ont dû être adaptées à sa situation climatique tout à fait particulière dans le Nord canadien (sur le 54° parallèle Nord) et à son éloignement des centres habités. Les températures moyennes sont ainsi de — 23 °C en janvier et + 13 °C en juillet, moyenne annuelle de — 4 °C. Cet aménagement utilise un système de lacs dominant des rapides, le bassin versant capté est de 70 000 km² représentant environ le quart de la superficie de tout le Labrador. Le débit moyen régularisé à la prise est de 1 400 m³/s et la chute brute de 319 m est obtenue avec un circuit d'eau d'une longueur développée de 2,4 km entre la prise et la restitution en rivière Churchill ; cela constitue un rapport très avantageux entre la longueur en plan et la hauteur de chute.

Les conditions géologiques favorables ont permis de projeter tous les ouvrages en souterrain dans le gneiss granitique du « bouclier canadien ». On a ainsi une conception semblable à celle de nombreuses chutes suédoises, c'est-à-dire que l'usine souterraine est très peu en aval de la prise d'eau et que les deux galeries de fuite en charge ont chacune 1,7 km de longueur avec 13,7 m de largeur et 18,30 m de hauteur. L'excavation de l'usine a 300 m de long sur 24 m de largeur. Chacun des 11 groupes générateurs est équipé d'une turbine Francis de 475 MW à axe vertical tournant à 200 tr/mn ; des constructeurs français ont effectué les études de ces groupes. La très bonne qualité de la roche a permis de prévoir les piédroits et la voûte de l'usine ainsi que la plus grande partie des deux galeries de fuite sans revêtement de béton. Il faut également souligner que les 11 conduites forcées, une par groupe, ne seront blindées que sur les 43 derniers mètres (blindage d'épaisseur 44,5 mm, 4,42 m de diamètre). L'énorme puissance produite est évacuée au moyen de trois lignes triphasées à 735 kV, et deux à 230 kV.

CHAPITRE VI

AVENIR DE L'HYDRO-ÉLECTRICITÉ

En tant qu'investissement industriel à but productif direct, l'hydro-électricité a un caractère très accentué de pérennité. En effet, les ouvrages, tout au moins ceux de génie civil qui sont les plus coûteux, sont extrêmement durables ; ensuite, l'expérience a montré jusqu'à présent qu'il sont très peu sujets à l'obsolescence. On ne voit en effet presque jamais d'autres activités industrielles productrices dont l'outil de production se soit aussi peu démodé ; par exemple, certaines chutes d'eau datant de 50 à 70 ans ont encore des conditions économiques d'exploitation très acceptables ; leur renouvellement n'a guère concerné que le matériel et très peu le gros du génie civil. C'est un cas assez exceptionnel à notre époque de mutations rapides. Il faut également souligner les très faibles charges annuelles, autres que celles financières relatives à l'investissement initial, les très faibles indisponibilités et l'absence totale de pollution. Les obstacles opposés à la remontée des poissons migrateurs peuvent être surmontés par des dispositifs appropriés et par l'alevinage. L'esthétique des ouvrages est peu contestée ; il n'y a guère que la diminution des débits dans les torrents qui puisse être objectée à cet égard ; en revanche, des plans d'eau intéressant le tourisme et les voies de communication ont ainsi été créés et certaines crues éliminées.

Mais les conditions économiques de l'hydro-électricité sont actuellement très défavorisées par trois facteurs prépondérants, à savoir : l'élévation du taux d'intérêt des capitaux, la baisse du prix des combustibles ou ce qui revient au même les espoirs de l'énergie nucléaire, enfin l'épuisement des sites de production d'énergie gravitaire qui est très marqué dans les pays développés. (En revanche, il existe encore des sites offrant de très grandes possibilités dans certaines régions montagneuses, d'Asie et d'Afrique, par exemple, ainsi que sur les grands cours d'eau de ces régions, de même qu'en Amérique du Sud).

En ce qui concerne l'Europe occidentale et plus spécialement la France, l'aménagement du Rhin et du Rhône ne se poursuit que parce qu'il est à buts multiples. Il ne reste à équiper que quelques terawattheures, en majorité en chutes de montagnes, tout au moins dans les conditions économiques actuelles.

Cependant, certains font remarquer avec quelque pertinence que les taux d'actualisation imposés actuellement à l'hydro-électricité française seraient trop élevés, surtout eu égard à l'absence de pollution et à la faible sensibilité à l'obsolescence de cette activité.

De nombreux projets, jugés intéressants dans les années 1950, doivent en effet être considérés comme abandonnés car non compétitifs. Mais si la production d'énergie voit ainsi son avenir compromis, il n'en est pas de même en ce qui concerne la mise à disposition d'importantes puissances, facilement modulables, pour compléter une production de puissance de base d'origine thermique et surtout nucléaire. En effet, le fonctionnement des centrales nucléaires doit se faire à puissance pratiquement constante durant 7 à 8 000 heures par an, ce qui est peu compatible avec les fluctuations des puissances appelées par les consommateurs. Une certaine puissance, d'importance limitée, peut être obtenue par *le suréquipement* de chutes existantes à réservoirs. Par exemple, une chute équipée pour fournir sa puissance 16 heures par jour peut être doublée en puissance si son fonctionnement est limité à 8 heures par jour. Ce suréquipement ne nécessite pas de pompage et se fait donc sans perte d'énergie. Son coût est relativement faible car il ne nécessite en général que très peu de travaux de génie civil.

Mais des possibilités bien plus importantes existent avec les *installations de transfert par pompage* dont les sites possibles sont nombreux, sauf dans les régions de très faible relief. Actuellement, le seul concurrent sérieux de ces installations paraît être le générateur à turbine à gaz (V. t. 1 Centrales thermiques, chap. 6) dont l'investissement spécifique en francs par kilowatt est nettement plus faible que celui du thermique classique ; sa consommation de combustible par kilowattheure est relativement forte mais cet inconvénient est d'autant plus atténué que sa durée annuelle de fonctionnement est faible (durant les pointes seulement) ;

la souplesse de marche est assez grande. Il paraît probable que les turbines à gaz seront employées essentiellement dans les zones à forte consommation et à faible relief. Des batteries d'accumulateurs chimiques suffisamment puissantes et économiques seraient le concurrent le plus sérieux (mais ce n'est encore qu'un vieux rêve des électriciens qui ne paraît pas actuellement en voie de réalisation). Il est donc piquant de constater que l'accumulateur d'énergie électrique de grande puissance, le plus économique que l'on ait trouvé jusqu'à présent, doive ainsi utiliser le stockage gravitationnel de masses d'eau, cela malgré ses pertes énergétiques (25 à 30 %) et malgré son coût d'investissement.

Pour conclure, en ce qui concerne la France métropolitaine, on peut supputer que la production d'énergie hydraulique, ne dépassera guère 65 TWh (en 1970, elle atteignait déjà 56,6 TWh) ; en revanche, il paraît probable, pour plusieurs décennies que les installations de transfert par pompage devront intervenir pour environ 10 à 15 % des puissances nouvelles à installer. Cela intéressera des puissances relativement importantes tant que durera la loi actuelle du doublement en dix ans de la consommation (et par suite des moyens de production) et surtout tant que l'allure de la courbe de charge ne se modifiera pas notablement par étalement des puissances.

Sauf changements importants et difficilement prévisibles des conditions technico-économiques, on peut ainsi dire, tout au moins pour notre pays, que l'hydro-électricité aura eu son âge d'or. Il se prolongera un peu plus modestement sous la forme nouvelle des stations de transfert d'énergie par pompage. Mais, l'hydro-électricité est encore susceptible de très importantes réalisations dans les pays peu développés ou peu peuplés, surtout ceux au relief accentué, et à précipitations abondantes.

CENTRALES NUCLÉAIRES

Les combustibles fossiles (houilles, pétrole, gaz naturel) sont encore très abondants sur la Terre et, par conséquent, pendant longtemps la plus grande part de l'énergie électrique sera produite à partir de ces énergies primaires. Les réserves ne sont cependant pas inépuisables. Les spécialistes les estiment à 10^{16} thermies (1 th = 4,18 MJ) et d'autre part ils prévoient que la consommation mondiale sera proche de $2{,}5 . 10^{14}$ thermies par an en l'an 2000. Quarante ans de consommation comme celle de l'an 2000 entraîneraient donc l'épuisement de ces réserves. Ces spécialistes savent bien eux-mêmes que leurs estimations, basées sur les ressources connues, sont très grossières et que l'on trouve encore de nouveaux gisements. Mais corrélativement à l'épuisement des ressources naturelles, les difficultés d'exploitation des gisements croissent avec leur âge ; il arrive un moment où leur exploitation n'est plus rentable (c'est ce qui se produit avec les houillères d'Europe occidentale). Bien souvent de gros problèmes économiques précèdent l'épuisement complet de la mine ou de la nappe de pétrole (pompage) et imposent l'arrêt de l'exploitation. Il devient nécessaire d'utiliser au plus tôt de nouvelles sources d'énergie pour ne pas compromettre l'avenir.

Cette nécessité se ressent particulièrement dans les pays, comme la France, qui dépendent de plus en plus de l'étranger pour leur approvisionnement en énergie primaire. Par exemple, la production française, pour satisfaire la consommation en 1980, est estimée à 305 TWh (305.10^{12} Wh). À cette même époque la production hydraulique moyenne sera voisine de 63 TWh ; la différence devra donc être fournie par le thermique et le nucléaire. À ce moment-là, si le thermique assurait seul la production, cela exigerait une consommation de 92 millions de tonnes d'équivalent charbon (on dit 92 Mtec, la *tonne d'équivalent charbon* (symbole : tec) étant une tonne de charbon de référence fournissant 6,5 thermies (P.C.I.) par kilogramme) ; la majeure partie devrait être importée sous forme de fuel, de gaz naturel ou de houille.

Afin de prévoir une énergie de remplacement à l'énergie d'origine fossile et pour des raisons économiques, voire politiques et stratégiques, les grands pays industriels ont été amenés à développer la production d'énergie électrique à partir des produits fissiles. Cette forme d'énergie est plus communément appelée *énergie nucléaire*. En France, les premières *piles atomiques* ont été construites sous l'égide du Commissariat à l'Énergie Atomique (C.É.A.) à Marcoule. Celles-ci (G1, G2 et G3) avaient pour principale fonction de produire du plutonium à des fins militaires (bombe atomique). Néanmoins, avec l'aide d'Électricité de France, ces installations ont été complétées par des ensembles destinés à récupérer la chaleur extraite des piles pour leur refroidissement et à utiliser cette énergie calorifique pour produire de l'électricité. Ces premières réalisations (G1 est déclassée) utilisaient de l'uranium naturel comme combustible, du graphite comme *modérateur* et le gaz de refroidissement était du gaz carbonique (CO_2) — sauf pour G1 qui était refroidie à l'air. Elles ont donné naissance à ce qu'on a appelé la *filière uranium naturel - graphite - gaz*.

Ce choix initial du combustible nucléaire était justifié par des raisons économiques et politiques. En effet, on trouvait en France de l'uranium naturel en quantité suffisante et, d'autre part, on ne disposait pas d'usine d'enrichissement de l'uranium. Il aurait donc fallu importer ce combustible donc dépenser des devises fortes et risquer une dépendance éventuellement gênante pour notre développement nucléaire. Ces centrales qui étaient de faible puissance — G1, 5 750 kW ; G2 et G3, 40 000 kW — ont servi de banc d'essai.

La suite du programme français développé suivant cette filière s'est traduit par la construction d'une série de prototypes de puissances rapidement croissantes. Dans cette deuxième génération, les piles atomiques ont été appelées *réacteurs nucléaires de puissance*. Les centrales Chinon I (70 MW), Chinon II (200 MW) et Chinon III (480 MW) ont été construites par É.D.F. sur les bords de la Loire, aux environs de Chinon ; le C.É.A. restait responsable des études purement nucléaires.

La dernière phase, considérée comme la phase réellement industrielle, a été abordée avec la construction de la centrale de Saint-Laurent-des-Eaux, sur la Loire. Cette centrale comprend deux tranches ; la première d'une puissance électrique de 480 MW (couplée sur le réseau en 1969), la seconde d'une puissance de 515 MW. Ces deux réacteurs sont identiques, le surcroît de puissance du deuxième a été obtenu par une modification des éléments combustibles. Comme on peut encore améliorer les éléments combustibles et en augmenter la puissance spécifique, une sous-filière prototype, basée sur les dispositions générales de Saint-Laurent-des-Eaux, a été construite sur le Rhône près de Lyon : c'est la centrale du Bugey qui utilise un combustible de type *annulaire*.

Pendant que se développait la filière uranium naturel-graphite-gaz sur laquelle le C.É.A. et É.D.F. avaient porté tous leurs efforts (il s'agissait également pour Chinon I, II et III de produire du plutonium), d'autres filières étaient explorées et les études débouchaient sur la réalisation de réacteurs expérimentaux à l'échelle industrielle. C'est ainsi qu'en 1967, la centrale des Monts d'Arrée en Bretagne, étudiée sous le sigle EL 4, d'une puissance électrique de

70 MW, a été mise en service. Le réacteur de cette centrale a été réalisé par le C.É.A. et les installations de production d'énergie par É.D.F. Ce réacteur utilise de l'oxyde d'uranium légèrement enrichi comme combustible, de *l'eau lourde* comme modérateur et le fluide de refroidissement est du gaz carbonique.

Par ailleurs, dans le but d'expérimenter la filière à eau légère, choisie à l'origine par l'U.R.S.S. et les États-Unis d'Amérique, É.D.F. a participé à 50 % à la Société d'Énergie Nucléaire Franco-Belge des Ardennes (S.É.N.A.) chargée de la construction de la centrale de Chooz, près de Givet en territoire français. Le réacteur de cette centrale est du type à *eau sous pression*, très souvent appelé P.W.R. (*Pressurised Water Reactor*). Cette installation a été couplée au réseau en 1966. Désireuse d'accroître son expérience sur les filières à eau légère, É.D.F. a participé également à une étude avec la Suisse pour la construction de la centrale de Kaiseraugst, sur les bords du Rhin, en Suisse. Celle-ci est du type à *eau bouillante* ou B.W.R. (*Boiling Water Reactor*). Une centrale du type P.W.R. est également prévue, en France, à Fessenheim, sur le Rhin en Alsace.

Parmi les autres filières expérimentées ou à l'étude, il faut citer en bonne place celle des *surgénérateurs* ou *breeders* (couveuses). Dans un réacteur de ce type on produit plus de combustible qu'on en consomme, ce qui est évidemment intéressant et surtout rassurant en ce qui concerne l'avenir énergétique du monde. Cette filière, étudiée par le C.É.A., utilise du plutonium comme combustible et un métal liquide, le sodium, comme fluide de refroidissement. Cette étude s'est déjà concrétisée en France par la mise en service, en 1967, d'un premier réacteur d'essai : Rapsodie (d'une puissance de 20 MW), suivie de la construction, sur le site de Marcoule, du réacteur Phénix, d'une puissance électrique de 250 MW. Les études et les travaux, qui ont débuté en 1969, sont réalisés par une société d'économie mixte constituée par : le C.É.A., É.D.F. et le G.A.A.A. (Groupement Atomique Alsacienne Atlantique).

On peut encore citer parmi les recherches actuellement en cours, celles d'abord entreprises en Grande-Bretagne, sur la filière dite H.T.G.R. (*High Temperature Gas-cooled Reactor :* réacteur à gaz de refroidissement à haute température). On y utilise de l'uranium enrichi ou du thorium, de l'hélium comme fluide de refroidissement et du graphite comme modérateur. Un des buts des recherches effectuées dans cette voie est la suppression des échangeurs de chaleur : on ne passerait pas par l'intermédiaire de la vapeur d'eau et on utiliserait directement le gaz chaud sortant du réacteur dans des turbines à gaz (cycle direct).

Après ce rapide tour d'horizon des réalisations et des projets dans le domaine de l'utilisation de l'énergie nucléaire, on va étudier plus précisément le fonctionnement de ces différentes filières en s'appuyant le plus possible sur des réalisations existantes ou sur le point de l'être. Cependant, il nous semble utile de faire un rappel succinct des différentes notions de physique nucléaire pour mieux comprendre les problèmes qui se posent sur le plan théorique et surtout sur le plan technologique.

Remarque générale : Dans ce chapitre traitant des centrales nucléaires, on a été contraint d'employer un certain nombre de termes anglais. Ce n'est pas pour céder à la mode ; la technique nucléaire a pris son essor aux États-Unis d'Amérique et en Grande-Bretagne avant de se développer en France (cela à cause de la guerre de 1939-1945) et les techniciens français utilisent de nombreux documents anglais. Malheureusement ils ne cherchent pas toujours les équivalents français, pourtant faciles à trouver, et réemploient ces termes anglais entre eux ou dans leurs écrits, formant ainsi un jargon technique qu'il convient de comprendre à défaut de pouvoir l'éviter.

CHAPITRE PREMIER

RÉACTIONS NUCLÉAIRES

1. RAPPELS SOMMAIRES DE NOTIONS DE PHYSIQUE NUCLÉAIRE

1.1. Structure de la matière. — (V. t. 1, Physique nucléaire).

Il y a autant d'électrons dans un atome que de protons dans le noyau, si bien que l'atome est électriquement neutre. S'il contient Z électrons (de charge électrique $-e$) son noyau porte une charge électrique $+Ze$; c'est la charge du noyau qui définit la nature chimique de l'élément. Si l'atome perd un, deux ou n électrons périphériques, sa charge devient $+e$, $+2e$ ou $+ne$: c'est alors un *ion positif*. Inversement, si provisoirement un ou plusieurs électrons se fixent sur l'atome, on obtient un *ion négatif*. Ce nombre Z est le *nombre de charge* de l'élément ; il correspond au *numéro atomique* de l'élément. Tous les atomes ayant le même numéro atomique ont les mêmes propriétés chimiques.

Certains corps ayant le même numéro atomique n'ont pas le même nombre de neutrons ; ils n'ont donc pas la même masse. Ces corps sont appelés *isotopes*. Les isotopes d'un même élément ne possèdent pas les mêmes propriétés physiques ou nucléaires. C'est pourquoi on caractérise l'atome d'un élément simple par son numéro atomique Z et par un deuxième nombre, le *nombre de masse* A : il représente le nombre total des protons et des neutrons du noyau. Ainsi, un corps simple est représenté par son symbole chimique et par deux indices placés à sa gauche : un indice supérieur qui est égal au nombre de masse A et un indice inférieur qui est égal au numéro atomique Z.

Exemples :

$^{1}_{1}\mathrm{H}$ = hydrogène, $^{2}_{1}\mathrm{H}$ = deutérium, $^{3}_{1}\mathrm{H}$ = tritium,

$^{235}_{92}\mathrm{U}$ = uranium 235, $^{238}_{92}\mathrm{U}$ = uranium 238.

On dénombre 325 isotopes naturels, toujours présents dans les mêmes proportions dans le même élément. Par exemple, l'uranium naturel est formé de deux isotopes l'uranium 235 $\left(^{235}_{92}\mathrm{U}\right)$ et l'uranium 238 $\left(^{238}_{92}\mathrm{U}\right)$ dans la proportion constante d'un atome d'uranium 235 pour cent trente-neuf atomes d'uranium 238 (soit 0,7 % de $^{235}_{92}\mathrm{U}$ pour 99,3 % de $^{238}_{92}\mathrm{U}$). On a créé par réactions nucléaires artificielles 1 200 isotopes.

1.2. Radioactivité. Réactions nucléaires. — Au sein du noyau la cohésion des nucléons est la résultante de forces internucléaires très grandes s'exerçant à des distances voisines de 10^{-15} m ; leur action disparaît lorsque les distances deviennent supérieures à 10^{-12} m puisqu'on explique fort bien le mouvement des électrons sans faire appel à leur existence. Cependant, si leur origine est mal connue, il n'en est pas de même pour l'énergie de liaisons des nucléons dans le noyau.

La stabilité des noyaux naturels est généralement très grande mais certains atomes sont instables et se transforment spontanément en d'autres atomes ; cette transformation est indépendante des électrons. Ainsi, par une série de transformations intermédiaires, le noyau d'uranium tend vers une forme stable : le plomb 206. Ce phénomène de *radioactivité naturelle* a été découvert par Becquerel. C'est Irène et Frédéric Joliot-Curie qui ont réussi à créer le premier élément radioactif, ou *radioélément artificiel*.

Rutherford a réalisé la première transformation artificielle. Il a obtenu des atomes d'oxygène et d'hydrogène en bombardant des atomes d'azote avec des noyaux d'hélium (particule α). Cette transformation ou **transmutation** (que l'on appelle couramment *désintégration* bien que le

terme soit impropre) se représente symboliquement de la façon suivante :

$$^{14}_{7}N + \underset{\text{(particules } \alpha)}{^{4}_{2}He} \rightarrow {}^{17}_{8}O + {}^{1}_{1}H$$

Irène et Frédéric Joliot-Curie effectuèrent la transmutation d'atomes d'aluminium en atomes de phosphore en les bombardant avec des noyaux d'hélium.

$$^{27}_{13}Al + \underset{\text{(particules } \alpha)}{^{4}_{2}He} \rightarrow {}^{30}_{15}P + {}^{1}_{0}n \text{ (neutron)}$$

Les atomes de phosphore ainsi obtenus sont radioactifs et ils se transforment spontanément en silicium stable $\left(^{30}_{14}Si\right)$ avec émission d'un électron positif (radioactivité β^+) :

$$^{30}_{15}P \rightarrow {}^{30}_{14}Si + e^+ \text{ (positon)}$$

Au cours des transmutations il y a *libération de particules* avec, dans la majorité des cas, émission d'un spectre de photons constituant le *rayonnement* γ.

Classification des transmutations		Variation de Z	Variation de A
	Particule émise		
Transmutation alpha	particule α ou noyau d'hélium $\left(^{4}_{2}He\right)$	— 2	— 4
Transmutation bêta $^-$	particule β^- (électron) + neutrino	+ 1	0
Transmutation bêta +	particule β^+ (positon) + neutrino	— 1	0
Capture électronique	photon X + neutrino	— 1	0
Conversion interne	photon γ	0	0
Neutron	neutron $\left(^{0}_{1}n\right)$	0	— 1

1.3. L'énergie nucléaire. — Le noyau de l'atome est composé de neutrons électriquement neutres et de protons ayant tous la même charge positive. Ces protons devraient donc se repousser les uns les autres ; comme il n'en est rien, il faut admettre l'existence de forces maintenant la cohésion des nucléons. De plus, on constate expérimentalement que la masse du noyau est très légèrement inférieure à la somme des masses de chacun des constituants. D'après le principe de l'équivalence entre masse et énergie, on a conclu que la cohésion des nucléons avait nécessité la libération d'une certaine quantité d'énergie correspondant à ce *défaut de masse ;* celui-ci représente donc l'*énergie de liaison*. En conséquence si l'on fournit de l'énergie à un noyau pour compenser son défaut de masse, on détruit sa cohésion et il y a dissociation des particules.

Si l'on appelle Δm le défaut de masse, et c_0 la vitesse de la lumière dans le vide ($c_0 = 2{,}997\,929 \times 10^8$ m/s), l'énergie de liaison ΔE est égale à : $\Delta E = \Delta m\, c_0^2$. C'est cette énergie qu'il faut fournir au noyau pour le dissocier. Elle varie avec la nature des noyaux atomiques ; elle est d'autant plus importante que le défaut de masse est plus grand. Relativement faible pour les noyaux légers comme l'hydrogène, elle est maximale pour les noyaux de masse moyenne, tel le fer, et redevient plus faible pour les noyaux lourds comme l'uranium.

Pour libérer de l'*énergie nucléaire* il faut donc créer un défaut de masse. On obtient ce résultat à partir d'un élément présentant un faible défaut de masse ; on provoque une transmutation qui produit des noyaux de masse moyenne donc un défaut de masse maximal. Deux types de réactions peuvent être mis en œuvre : la *fusion* et la *fission*.

1.3.1. La fusion. — C'est l'agglomération de noyaux légers pour créer un noyau plus lourd et produire une perte de masse qui s'accompagne d'un dégagement d'énergie. Ainsi deux noyaux de deutérium peuvent fusionner en un noyau d'hélium 3 avec expulsion d'un neutron et dégagement d'énergie :

$$^{2}_{1}H + {}^{2}_{1}H \rightarrow {}^{3}_{2}He + {}^{1}_{0}n + \text{énergie} \quad (3{,}3 \text{ MeV})$$

Ce type de réaction, réalisé naturellement au sein du soleil et des étoiles, ou artificiellement dans la bombe thermonucléaire ou bombe à hydrogène, exige l'utilisation de plasmas à des températures de plusieurs millions de degrés. En effet, comme les noyaux ont tous une charge électrique positive, ils se repoussent les uns les autres ; pour qu'ils puissent s'approcher jusqu'à fusionner ils doivent posséder une très grande énergie cinétique qui leur est communiquée en créant une très grande agitation thermique. Cette possibilité d'obtenir de l'énergie qui serait très intéressante puisqu'on dispose de réserves d'hydrogène pratiquement illimitées (avec l'eau), n'est réalisée actuellement qu'en laboratoire dans des expériences de fusion contrôlée. Malheureusement le phénomène ne s'entretient que pendant des temps inférieurs à la microseconde.

1.3.2. La fission. — La fission est mise en œuvre dans les réacteurs nucléaires de toutes les filières développées dans le but de produire de l'énergie nucléaire. Cette énergie est obtenue par l'éclatement du noyau d'un élément lourd ; cela se produit lorsque le noyau lourd capture un *neutron libre :* au sein du noyau il y a alors un déséquilibre énergétique qui entraîne une désintégration en noyaux plus légers avec expulsion de neutrons libres et dégagement d'énergie (rayonnement) et notamment de chaleur. Les neutrons étant des particules neutres, ils n'ont besoin que d'une faible énergie cinétique pour pénétrer dans le noyau. Ainsi, certains corps, peu stables, peuvent subir une fission par capture de neutrons lents (2 km/s) ou *neutrons thermiques*. Ils sont dits *fissiles*. C'est le cas de l'uranium 235 :

$$\underset{\text{(neutron)}}{^{235}_{92}U + {}^{1}_{0}n} = {}^{94}_{38}Sr + {}^{140}_{54}Xe + 2\,{}^{1}_{0}n + \text{énergie } (\gamma)$$

Le strontium et le xénon ainsi produits sont des noyaux instables qui donnent naissance à d'autres *produits de fission*. Il existe d'autres corps, beaucoup plus stables, qui sont fissiles sous l'action de *neutrons rapides* (20 000 km/s). Avec les neutrons lents ces corps ne sont pas fissiles ; des captures de neutrons peuvent avoir lieu cependant et par une série de transformations on peut aboutir à une nouvelle matière fissile. Par exemple :

$$^{238}_{92}U + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{239}_{92}U + \gamma$$

Ce nouveau noyau est instable et émet une particule β^- ($_{-1}\beta$) :

$$^{239}_{92}U \rightarrow {}^{239}_{93}Np + {}_{-1}\beta$$

Le neptunium ainsi créé est également instable et émet aussi une particule β^- :

$$^{239}_{93}Np \rightarrow {}^{239}_{94}Pu + {}_{-1}\beta$$

Le plutonium est également instable, il émet une particule α, mais cette désintégration s'effectue avec une *période* très grande, environ 24 000 ans, si bien qu'elle est négligeable à l'échelle de la vie humaine.

Le plutonium est fissile et il sert de combustible nucléaire. Comme il est pratiquement inexistant à l'état naturel il est fabriqué dans les réacteurs, à uranium naturel par exemple.

Une autre réaction intéressante est obtenue en utilisant comme corps initial le thorium :

$$^{232}_{90}Th + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{233}_{90}Th + \gamma$$

$$^{233}_{90}\text{Th} \rightarrow {}^{233}_{91}\text{Pa} + {}_{-1}\beta$$
(proactinium)
$$^{233}_{91}\text{Pa} \rightarrow {}^{233}_{92}\text{U} + {}_{-1}\beta$$
(uranium 233)

Comme le plutonium 239, cet uranium 233, qui n'existe pas dans la nature, est une matière fissile utilisée dans des réacteurs.

L'uranium 238 et le thorium 232, qui donnent naissance à des produits fissiles, sont appelés *matières fertiles*.

1.3.3. La réaction en chaîne. — On a vu que la fission est due à la capture d'un neutron libre et que cette fission expulse des neutrons : si ces neutrons vont à leur tour produire d'autres fissions, on obtient une *réaction en chaîne*. Toutefois, tous les neutrons rendus libres ne produisent pas des réactions de fission : il y a des pertes. Par exemple, dans un réacteur à uranium naturel, où les fissions sont dues à des neutrons thermiques, ces pertes de neutrons sont dues à des captures dans l'uranium 235, dans les produits de fission et dans le modérateur, tandis que d'autres peuvent s'échapper du réacteur. Pour que l'entretien de la réaction soit possible, il est donc nécessaire de rassembler une *masse critique* contenant sous un certain volume un nombre suffisant de noyaux fissiles. Dans un réacteur à neutrons thermiques, on estime qu'en moyenne 2,5 neutrons s'échappent du noyau lors d'une fission. Quand on calcule un réacteur il faut donc dresser un bilan neutronique. À partir d'un certain nombre de neutrons rapides libérés par des fissions on peut approximativement résumer ainsi ce bilan (valable pour un réacteur de petite taille modéré au graphite) :

— 5 % s'échappent du cœur pendant le ralentissement ;
— 10 % sont capturés par l'uranium 238.

Parvenus à l'état thermique après ralentissement dans le modérateur :

— 5 % s'échappent du cœur ;
— 33 % sont capturés par l'uranium 238, par le modérateur, les structures, etc. ;
— 7 % sont capturés par l'uranium 235 sans produire de fission ;
— 40 % produisent des fissions.

Si ces fissions produisent autant de neutrons rapides qu'il y en avait dans la génération précédente, la réaction est auto-entretenue à puissance constante : la *réactivité* est nulle. C'est ce que l'on réalise dans un réacteur de centrale nucléaire.

La fission libère une très grande quantité d'énergie thermique à partir d'un combustible présentant un volume très faible par rapport à celui d'un combustible fossile dégageant la même énergie. Un gramme d'uranium 235 suffit pour alimenter pendant une journée le réacteur d'une centrale d'un millier de mégawatts.

À propos de l'expression *combustible nucléaire*, il convient de remarquer que la fission n'est pas une combustion : en effet la combustion est un phénomène purement chimique. Cependant, cette expression est imagée et commode pour une comparaison avec le combustible fossile puisque dans les deux cas le but final est l'obtention d'énergie calorifique. La consommation de ce combustible nucléaire est très lente puisqu'une charge d'un réacteur peut durer plusieurs mois, voire plusieurs années. On n'exprime pas (comme c'est d'usage dans le thermique classique) le pouvoir calorifique du combustible nucléaire en thermies : on parle plus justement de mégawattheures par tonne. C'est d'ailleurs pour éviter toute confusion entre la puissance thermique du réacteur et la puissance électrique de la centrale que les techniciens parlent de mégawatts thermiques ou de mégawatts électriques (bien que ces expressions soient incorrectes puisqu'il est interdit d'ajouter un qualificatif à une unité). La production d'un réacteur est donnée en mégawatts-jours par tonne (symbole : MWj/t ; 1 MWj = 24 MWh).

2. LE MODÉRATEUR

Dans un réacteur utilisant de l'uranium naturel, ou de l'uranium faiblement enrichi en uranium 235, ce sont les neutrons thermiques qui engendrent la fission, cause de la production de neutrons rapides. Le rôle du *modérateur* est de réaliser le ralentissement ou *thermalisation*. Le modérateur est un corps solide ou liquide (il pourrait être gazeux si la concentration des atomes était suffisante), constitué d'atomes de noyaux très légers sur lesquels les neutrons viennent rebondir ; à chaque choc ils perdent une partie de leur énergie cinétique et ainsi ils atteignent le seuil d'énergie convenable pour être capturés par le noyau d'uranium 235. Les modérateurs les plus employés dans les réacteurs industriels sont :

— *Le carbone* $\left(^{12}_{6}\text{C}\right)$, sous forme de graphite ;

— *L'eau lourde* (D_2O) composée d'un atome d'oxygène et de deux atomes de deutérium $\left(\text{isotope } \left(^{2}_{1}\text{H}\right) \text{ de l'hydrogène } \left(^{1}_{1}\text{H}\right)\right)$

— *L'eau ordinaire* (H_2O), généralement appelée dans l'industrie nucléaire *eau légère* par opposition à l'eau lourde ;

— Certains *produits organiques*.

Un corps est modérateur quand un petit nombre de chocs des neutrons sur ses noyaux suffisent pour l'obtention de la vitesse requise. Plus il est léger, plus la quantité d'énergie cinétique perdue en moyenne par le neutron incident lors d'un choc est grande : en effet quand un neutron frappe un noyau léger ce dernier est mis en mouvement et absorbe ainsi de l'énergie cinétique. Un noyau très lourd n'est pas mis en mouvement (ou plus exactement son mouvement n'est guère affecté par le choc) et le neutron incident rebondit en ne perdant que très peu d'énergie.

Le tableau ci-après donne le nombre moyen de chocs nécessaires pour réduire l'énergie d'un neutron de 2 MeV (vitesse correspondante : 19 500 km/s) à 0,03 eV (2,4 km/s) suivant la nature du corps modérateur ($1\text{eV} = 0{,}16 \cdot 10^{-18}$ J) :

Hydrogène	18
Eau ordinaire	19
Hydrogène lourd	25
Eau lourde	38
Béryllium	86
Glucine (BeO)	103
Carbone	114

À titre de comparaison, il faut 2 172 chocs pour obtenir le même ralentissement avec des noyaux d'uranium 238.

Une des qualités principales d'un modérateur est de capturer le moins de neutrons possible. On donnera plus de détails sur les modérateurs en traitant des différentes filières.

3. LES SECTIONS EFFICACES DE RÉACTIONS

Le diamètre d'un noyau est proche de 10^{-12} cm et la distance séparant deux noyaux dans une molécule est d'environ 10^{-8} cm. On peut donc dire qu'à l'échelle microscopique il y a plus de vide que de matière dans un volume élémentaire d'un corps donné. Pour mieux saisir l'ampleur de ce vide on peut ramener la dimension du noyau à une échelle humaine : si le diamètre du noyau est de 1 m par exemple, le noyau le plus voisin est alors placé à une distance de 10^4 m soit 10 kilomètres. On comprend donc qu'une particule élémentaire, lancée dans un tel milieu, a peu de chance de rencontrer un noyau s'il n'y a pas des interactions entre les particules qui font que celles-ci ont plus ou moins d'aptitude à participer à des réactions nucléaires.

On admet qu'en une seconde, le nombre de réactions probables dues à des neutrons, dans un centimètre cube de matière, est proportionnel au nombre de noyaux, au nombre de neutrons et à la vitesse des neutrons. Le coefficient de proportionnalité, homogène à une surface, est appelé *section efficace de réaction*. Cette section efficace est mesurée en *barns* (un barn est égal à 10^{-24} cm^2). Elle est d'autant plus grande que la probabilité de réaction est grande.

On distingue :
— Une section efficace de diffusion élastique, σ_e.
— Une section efficace de diffusion inélastique, σ_{in}.
— Une section efficace de capture radiative donnant une réaction (n, γ).
— Une section efficace de fission σ_f.
— Une section efficace d'absorption par le noyau σ_a donnant des réactions (n, γ), $(n, 2n)$, $(n, 3n)$, (n,f).
— Une section efficace de réaction $\sigma_r = \sigma_{in} + \sigma_a$.
— Une section efficace totale $\sigma_t = \sigma_e + \sigma_r$.

Ces sections sont les *sections efficaces microscopiques*.

On utilise aussi une grandeur plus commode, car elle caractérise à la fois la concentration des noyaux et la nature de la réaction, c'est la *section efficace macroscopique* Σ. Cette section est le produit σN, N étant le nombre de noyaux par centimètre cube (Σ est donc homogène à l'inverse d'une longueur et peut être exprimée en centimètres à la puissance moins un). La section efficace d'une réaction pour les noyaux d'un corps varie avec l'énergie des neutrons incidents.

CHAPITRE II

MOYENS D'UTILISATION DE L'ÉNERGIE NUCLÉAIRE

1. IMPLANTATION D'UNE CENTRALE NUCLÉAIRE

Les problèmes posés par le choix d'un site pour l'implantation d'une centrale nucléaire sont un peu différents de ceux posés par l'implantation d'une centrale thermique (V. t. 1, Centrales thermiques, chap. 1).

Certaines restrictions, tel le manque de moyens de communication par voies ferrées ou fluviales ou l'éloignement de la source d'énergie primaire, disparaissent. En effet, le combustible nucléaire ayant un faible volume et son renouvellement étant rare, son transport n'a pratiquement pas d'influence sur la localisation de la centrale.

La possibilité de raccordement au réseau général de transport d'électricité demeure un point très important.

Le besoin d'un débit suffisant pour l'eau de réfrigération est encore plus difficile à satisfaire avec une centrale nucléaire qu'avec une centrale thermique. Dans l'état actuel des techniques nucléaires, les températures obtenues, sont beaucoup plus basses et conduisent à un cycle thermodynamique tel qu'à puissance électrique égale, il faut rejeter à la source froide une quantité de chaleur environ une et demie à deux fois plus grande que pour une centrale thermique. Le débit d'eau doit donc être augmenté dans le même rapport.

D'autre part, bien que les centrales nucléaires n'entraînent pas de pollution atmosphérique et bien que toutes les dispositions soient prises pour la sécurité de l'environnement, pour des raisons psychologiques, on ne les érige pas près des grands centres urbains. Tout ce qui est nucléaire impressionne encore l'opinion publique qui a tendance à faire un rapprochement avec la bombe atomique.

2. SCHÉMA DE PRINCIPE D'UNE CENTRALE NUCLÉAIRE

2.1. Le réacteur (V. t. 1, Physique nucléaire, chap. 3). — Les réactions de fission dégagent de la chaleur et par conséquent, comme dans une centrale thermique, on transforme de l'énergie calorifique en énergie mécanique puis en énergie électrique. L'ensemble du réacteur nucléaire et du générateur de vapeur qui lui est associé peut donc être considéré, et c'est d'ailleurs ainsi qu'on le nomme souvent, comme une *chaudière nucléaire*. Le réacteur est principalement composé ;

— d'une *partie active* ou **cœur,** sorte de foyer sans flammes, où les éléments combustibles (placés à l'intérieur du modérateur pour les réacteurs à neutrons thermiques) sont balayés par un fluide de refroidissement ou **fluide caloporteur ;** celui-ci s'échauffe et généralement il est ensuite dirigé vers des échangeurs de chaleur où l'énergie calorifique est prélevée (V. t. 1, Physique nucléaire, fig. III-10) ;

— d'un *dispositif de réglage et de sécurité* qui contrôle la réactivité. Il est essentiellement composé de barres fabriquées dans des matériaux ayant des sections efficaces de capture très importantes pour les neutrons. Ces barres sont de deux sortes : les **barres de contrôle** dont l'enfoncement plus ou moins important dans le cœur permet de contrôler la réaction en chaîne et les **barres de sécurité** qui stoppent la réaction nucléaire en cas d'incident. Ces dernières peuvent pénétrer à l'intérieur du cœur en un temps extrêmement court, soit sous l'action de leur poids propre, soit sous l'impulsion d'un mécanisme. *Leur nombre est suffisamment grand pour éliminer tout risque de non fonctionnement simultané ;*

— d'un *dispositif de chargement et de déchargement du combustible*. Le chargement des éléments combustibles neufs ne pose pratiquement pas de problème de radioprotection puisqu'ils ne sont que peu radioactifs. En revanche, après un certain temps d'utilisation, le *combustible irradié* doit être remplacé alors qu'il est très fortement radioactif et que sa température très élevée rend la manœuvre délicate. Cette opération est d'autant plus complexe que dans certains réacteurs elle doit être faite sans arrêter le fonctionnement de la centrale.

2.2. Les échangeurs de chaleur. — Dans les échangeurs de chaleur le fluide caloporteur transfère à un circuit eau-vapeur l'énergie calorifique acquise en passant dans le cœur. Ils ont une fonction comparable à celle des écrans vaporisateurs et des surchauffeurs dans une chaudière de centrale thermique classique : les gaz de combustion sont remplacés par le fluide caloporteur.

Les échangeurs peuvent être placés dans la même enceinte que le cœur, ce qui permet de supprimer les tuyauteries ou gaines de raccordement du réacteur aux échangeurs et d'augmenter la sécurité. Avec cette disposition on a affaire à un *réacteur intégré*.

La circulation du fluide caloporteur dans le cœur et dans les échangeurs est assurée par des *pompes* ou des *turbosoufflantes*.

2.3. Le groupe turbo-alternateur. — La vapeur produite dans les échangeurs va se détendre dans les différents étages de la turbine, produisant une puissance mécanique disponible sur l'arbre. Dans les centrales nucléaires à caractère industriel, actuellement en service, l'étage haute pression correspond sensiblement à l'étage moyenne pression des turbines des centrales thermiques (du fait des caractéristiques de vapeur) et les étages à basse pression ont des échappements beaucoup plus importants à cause du débit de vapeur à condenser qui est une fois et demie à deux fois plus grand. Il y a généralement moins de soutirages de vapeur et le poste d'eau est plus simple ; cependant, toujours à puissance comparable, un volume d'eau utilisé est bien plus grand.

L'alternateur qui transforme l'énergie mécanique disponible sur l'arbre de la turbine en énergie électrique est exactement le même que celui d'une centrale thermique.

3. LES FILIÈRES

Avec le choix du combustible nucléaire, du modérateur et du fluide caloporteur on peut concevoir une série de réalisations basées sur les mêmes options. Ces options de base ou **filières** vont être abordées avec plus de détails en examinant des réalisations déjà en exploitation ou en projets très avancés.

CHAPITRE III

LA FILIÈRE URANIUM NATUREL, GRAPHITE, GAZ CARBONIQUE

Cette filière, qui a été d'abord développée en Grande-Bretagne, a réellement atteint en France le stade industriel avec la construction de la centrale de Saint-Laurent-des-Eaux. Celle-ci servira de modèle pour illustrer les solutions apportées aux différents problèmes complexes posés par la réalisation et l'exploitation d'un réacteur, pièce maîtresse d'une centrale nucléaire.

1. L'ÉLÉMENT COMBUSTIBLE (fig. III-1)

1.1. La matière fissile

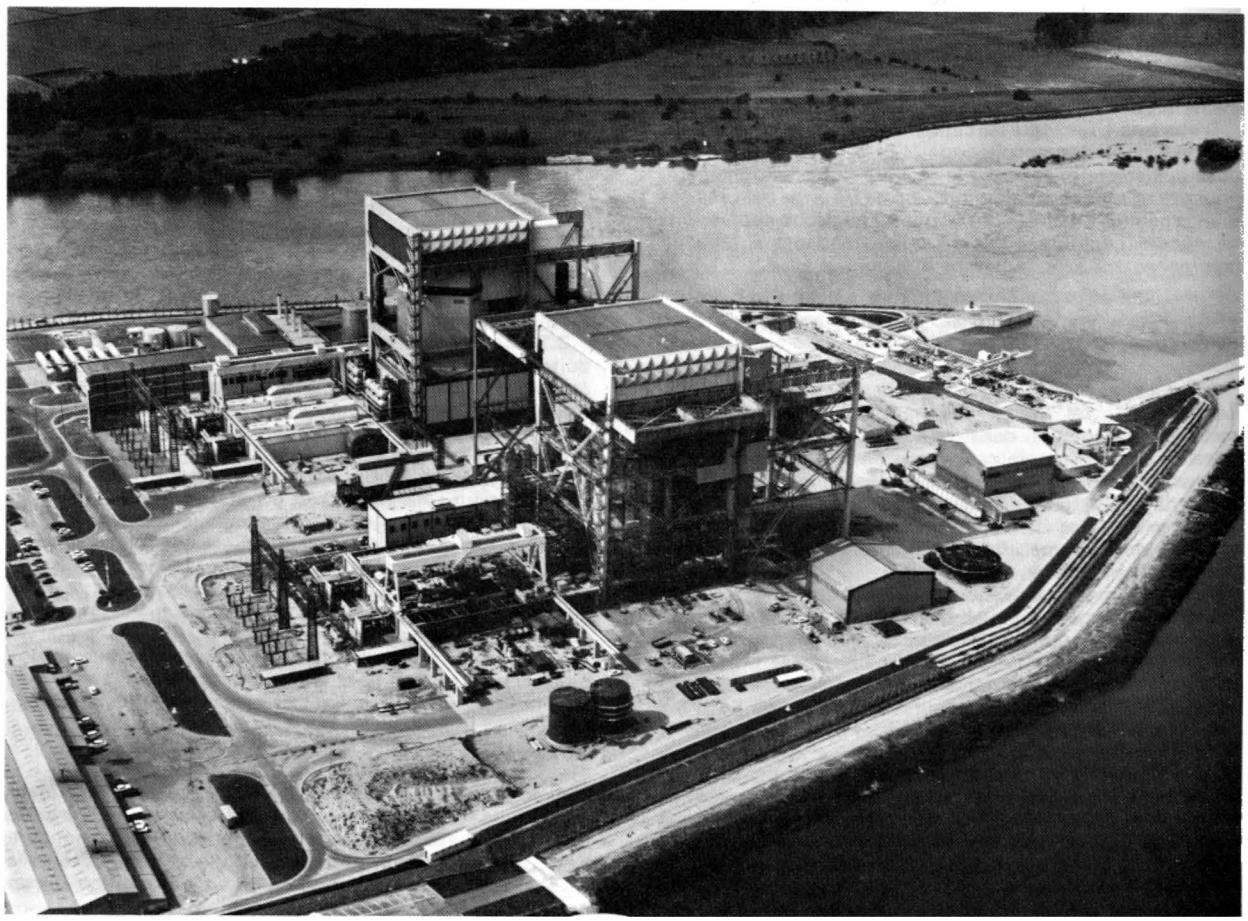
L'uranium est très répandu dans la nature mais il est mêlé à d'autres corps et dans des proportions généralement faibles. On exploite un gisement si la teneur du minerai en uranium est au moins de 1 à 2 °/₀₀. Lorsqu'on a traité le minerai dans des usines spéciales pour obtenir un métal très pur, la proportion de matière fissile est encore très faible car seul l'uranium 235 est fissile par des neutrons thermiques et il ne se trouve dans l'uranium naturel qu'à raison de 0,7 % (pour 99,3 % d'uranium 238). Pour obtenir la masse critique d'uranium 235 il est donc nécessaire de réunir une masse importante d'uranium naturel.

L'uranium métal se déforme considérablement sous l'action combinée de la température et des neutrons. En ce qui concerne la température il ne faut pas dépasser 650 °C car il y a changement de phase du métal (phase β). Quant aux neutrons, s'ils produisent la transmutation de l'uranium 235, ils perturbent également la structure du réseau cristallin. De plus, la fission libérant des produits de fission gazeux, il se crée au sein du réseau cristallin des pressions internes considérables qui produisent à la longue un gonflement du métal. Il faut donc également limiter le taux d'irradiation pour cette raison. Afin de réduire ces déformations on utilise l'uranium-métal sous forme d'alliage. Malheureusement, les alliages possibles ont des sections efficaces de capture de neutrons importantes.

L'alliage utilisé à Saint-Laurent-des-Eaux est de l'uranium-molybdène à 1,1 % de molybdène. Il se présente sous la forme d'un tube cannelé extérieurement (d'où le nom d'*élément tubulaire* donné à ce type d'élément combustible), d'un diamètre intérieur de 23 mm, d'un diamètre extérieur de 43 mm et d'une longueur de 536,5 mm. Lors de la fission, des produits de fission, fort absorbeurs de neutrons, sont libérés. Si les barreaux d'uranium étaient placés dans le réacteur sans précautions spéciales, ces produits de fission se répandraient dans tous les circuits (soufflantes, échangeurs, etc.) et petit à petit le réacteur serait entièrement contaminé car ces produits sont radioactifs. De plus, la réaction en chaîne ne pourrait plus avoir lieu à cause des fortes sections de capture de neutrons de ces produits.

1.2. La gaine. — Pour éviter ces inconvénients on place le barreau d'uranium dans une gaine étanche qui retient les

Centrale de Saint-Laurent-des-Eaux (*Brigaud-É.D.F.*)



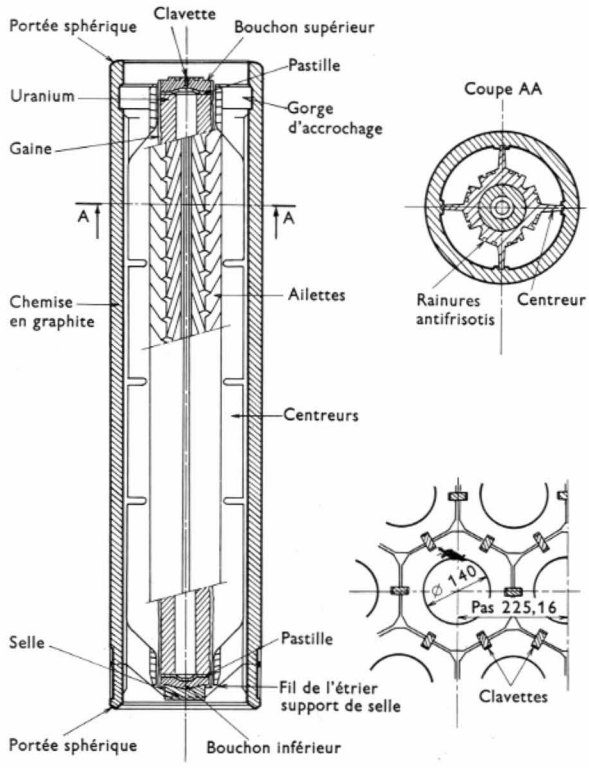


Fig. III-1 — Élément combustible (*É.D.F.*)

produits de fission et augmente la tenue mécanique du barreau. Mais comme l'uranium naturel est pauvre en élément fissile et que l'on doit éviter les absorptions parasites de neutrons, il est impératif de choisir un matériau de gainage ayant la section de capture de neutrons la plus faible possible. Le matériau de cette gaine doit posséder, en même temps, des propriétés telles que sa tenue mécanique reste bonne malgré la température et le bombardement neutronique et que sa conductibilité thermique permette de bien évacuer la chaleur engendrée au sein de l'uranium par les fissions. La gaine doit aussi protéger l'uranium de toute attaque corrosive due au fluide caloporteur.

Une des grandes difficultés rencontrées dans le choix du matériau de gainage et dans la réalisation des gaines résulte de la différence des coefficients de dilatation des deux métaux car le contact gaine-uranium est important pour l'évacuation de la chaleur. De plus, le métal de gainage et l'uranium ne doivent pas présenter d'eutectique dans le domaine des températures atteintes (un eutectique de deux métaux est une combinaison qui fond à une température bien déterminée, inférieure au point de fusion de chacun des constituants).

Le métal choisi est un alliage de magnésium et de zirconium (Mg, 0,6 % Zr). Ce matériau se travaille très bien et possède une grande ductilité : sans rupture, il peut supporter des déformations importantes du tube d'uranium. Il se soude bien sous argon. Sa température d'inflammation dans le gaz carbonique est supérieure à 750 °C.

La gaine se présente sous la forme d'un tube dont l'intérieur épouse les cannelures du tube d'uranium et dont l'extérieur est aileté en chevrons suivant un dessin complexe qui a été étudié pour optimiser la surface d'échange tout en créant les pertes de charges minimales pour l'écoulement du gaz carbonique utilisé ici comme fluide caloporteur. En outre la gaine comprend quatre grandes ailettes longitudinales intégrées, diamétralement opposées deux à deux, qui servent de centreurs à l'élément combustible pour son positionnement dans la chemise en graphite. Les deux extrémités de la gaine sont fermées à l'aide de deux *bouchons* soudés.

1.3. La chemise de graphite. — Dans la première centrale de Chinon, les éléments combustibles sont placés verticalement dans des canaux et reposent directement les uns sur les autres. Les éléments inférieurs supportent donc des charges importantes et risquent de subir des déformations gênantes ou des ruptures de gaines. De plus, lors de la manutention de chargement ou de déchargement, le *grappin* avec lequel ils sont saisis, leur fait subir des contraintes supplémentaires qui peuvent les endommager (surtout au déchargement quand le métal est fragilisé par l'irradiation).

Pour remédier à ces inconvénients on a modifié la conception du support des éléments combustibles à partir de Chinon II. L'élément gainé est placé au centre d'un tube de graphite de 109 mm de diamètre intérieur et 137 mm de diamètre extérieur, que l'on appelle **chemise.** Une de ses extrémités repose sur un petit bloc cylindrique de graphite ou *selle* maintenue à la partie inférieure du cylindre par quatre *étriers* en fil d'acier inoxydable. Les centreurs de la gaine sont glissés dans des rainures longitudinales ménagées à cet effet à l'intérieur de la chemise de graphite. Cette chemise, d'une hauteur de 603,1 mm, présente à l'intérieur, dans sa partie supérieure, une gorge circulaire dans laquelle viennent se loger les griffes du grappin lors de la manutention. L'élément combustible ainsi réalisé pèse 17,250 kg. La puissance spécifique maximale d'un élément combustible est de 6 MW/t.

Ainsi ce sont les chemises de graphite qui sont empilées les unes sur les autres et qui supportent les contraintes dues au poids et à la pression résultant de l'écoulement du gaz carbonique, dirigé de haut en bas dans le canal (Saint-Laurent-des-Eaux).

Dans la sous-filière Inca, concrétisée dans la réalisation de la centrale du Bugey (sur les bords du Rhône vers le confluent de l'Ain), l'élément combustible a été modifié : le tube d'uranium a des diamètres intérieur et extérieur beaucoup plus grands (77 et 95 mm) et il est également gainé à l'intérieur. Il présente ainsi deux canaux pour la circulation du gaz, l'un extérieur et l'autre intérieur au combustible. Cet élément a été appelé *annulaire* pour le différencier de l'élément tubulaire.

2. LE MODÉRATEUR

2.1. Le matériau. — Le modérateur utilisé dans cette filière est le graphite qui est une forme du carbone ; il possède un pouvoir modérateur relativement faible si on le compare à l'eau lourde ou à l'eau ordinaire et l'on est donc obligé d'en utiliser un volume important.

Pour le graphite pur la section efficace de capture des neutrons est faible ($3{,}2 \cdot 10^{-3}$ barn). Ce résultat est profondément modifié si le graphite contient des impuretés (bore, fer, calcium, vanadium, etc.) qui ont des sections efficaces de capture neutronique importantes. En particulier, un noyau de bore est aussi absorbant que 200 000 noyaux de carbone. On conçoit alors qu'il faille obtenir un materiau d'une très grande pureté : les doses d'impuretés sont limitées à quelques parties par millions (p.p.m.).

Le graphite est obtenu à partir de coke de pétrole, résidu de la distillation du pétrole, mêlé à des liants à base d'hydrocarbures. Mis en forme par filage sous pression, il est cuit à 2 000 °C dans des fours électriques. Pendant cette opération de *graphitation*, les composés hydrogénés et les sels contenant les impuretés se volatilisent.

Le graphite est un matériau poreux (le carbone ne représente que 80 % du volume total) ayant une densité de 1,7. Sa structure cristalline se présente sous forme lamellaire, les atomes de carbone étant placés aux sommets d'hexagones dans des plans liés entre eux par des forces faibles. Cette disposition confère des caractéristiques anisotropes. Sous l'effet du bombardement neutronique de nombreux noyaux, chassés de leur position initiale, s'insèrent entre ces plans et provoquent un gonflement pouvant atteindre 2 à 3 % dans le sens perpendiculaire au filage et une contraction de 0,1 à 1 % dans le sens longitudinal. Ce gonflement est lié à l'emmagasinage au sein du graphite d'une très forte énergie qui peut se libérer spontanément à partir d'un certain taux d'irradiation, si le graphite est chauffé à une température supérieure à sa température d'irradiation. Ce phénomène connu sous le nom d'*effet Wigner* a eu une illustration spectaculaire dans le réacteur de Windscale en

Grande-Bretagne en 1957. Au cours d'une opération de *recuit* de l'empilement, c'est-à-dire de chauffage du graphite pour que les noyaux reprennent leur position initiale, la réaction a été mal contrôlée et l'énergie emmagasinée a été brutalement libérée : le feu a pris dans les canaux et il a fallu noyer le réacteur. Depuis on connaît mieux le phénomène ; il se produit avec le plus de force lorsque la température d'irradiation est basse. Les températures et les taux d'irradiation sont maintenant adaptés pour que la restauration du graphite s'opère d'une façon continue, au fur et à mesure que des perturbations se produisent dans le réseau cristallin.

Un autre phénomène provoque la destruction progressive du graphite : c'est la *corrosion radiolytique* liée à l'action du gaz carbonique, à l'humidité de ce gaz et à la porosité du graphite. Sous l'effet de l'irradiation (γ principalement) un certain nombre de molécules de gaz carbonique est détruit et il y a création d'*oxygène actif* qui réagit avec le graphite de l'empilement ; il se produit de l'oxyde de carbone suivant la réaction schématisée ci-après :

$$CO_2 + \gamma + C \text{ (graphite)} \rightarrow CO + O^* \text{ (actif)} + C \rightarrow 2\,CO$$

Ainsi, s'il se forme deux molécules d'oxyde de carbone, cela signifie qu'il y a eu un atome de carbone qui a été arraché à l'empilement. *On contrôle donc la destruction du graphite en mesurant le taux d'oxyde de carbone dans le gaz carbonique.*

S'il se produit une fuite aux échangeurs de chaleur, de l'eau pénètre dans le circuit du gaz ; sous l'influence des rayons γ cette eau (H_2O) subit une *dismutation* analogue à celle du gaz carbonique et il y a encore création d'oxyde de carbone par action de l'oxygène actif sur le graphite de l'empilement. Dans ce cas on trouve de l'hydrogène (H_2) dans le gaz carbonique.

La corrosion radiolytique du graphite est surtout importante dans les pores du graphite (porosité ouverte). En effet, la durée de vie d'un atome d'oxygène excité est très brève (et, par conséquent, la distance qu'il peut parcourir avant de se recombiner pour former une molécule quelconque est très faible) et c'est dans les pores de très petits diamètres que la probabilité de combinaison avec du graphite est la plus grande.

Cette corrosion radiolytique est d'autant plus importante que la température du gaz et la puissance spécifique du combustible sont grandes. Il peut donc y avoir des cas où la corrosion du graphite peut compromettre le pouvoir modérateur et la tenue mécanique de l'empilement de graphite (après plusieurs années d'utilisation notamment). Pour empêcher ce phénomène d'atteindre des proportions gênantes on procède à l'injection d'un *inhibiteur* de la réaction dans le circuit du gaz caloporteur. On emploie du *méthane* (CH_4) : mêlé intimement au gaz carbonique, il se dismute sous l'action des radiations γ et les atomes de carbone et d'hydrogène ainsi libérés fixent les atomes d'oxygène actif qui sont alors moins nombreux pour se combiner au graphite. Il se forme encore de l'oxyde de carbone et de l'hydrogène ; il y a aussi formation d'eau qu'il faut retirer du circuit en épurant le gaz.

En ce qui concerne la *corrosion thermique* du graphite, elle ne commence à se faire sentir de façon sensible qu'au-dessus de 600 °C : elle est donc négligeable dans les réacteurs de cette filière.

2.2. L'empilement (fig. III-2). — Après usinage, le graphite se présente sous forme de barres prismatiques à base hexagonale, ou *briques*. Les barres devant recevoir un élément combustible sont percées suivant leur axe longitudinal. Une rainure est creusée au milieu de chacune des six faces extérieures de chaque barre (longitudinalement et sur toute la hauteur) ; on y dispose une clavette pour solidariser la barre avec les barres adjacentes.

L'empilement est constitué par un ensemble de colonnes, c'est-à-dire de barres posées verticalement les unes sur les autres. Le système de clavetage permet le déplacement des colonnes mais uniquement perpendiculairement à leurs faces latérales. Une colonne ne peut se déplacer sans entraîner le déplacement des autres colonnes ; dans le plan horizontal, on a alors un réseau de sections hexagonales homothétique du réseau initial. L'empilement peut donc « respirer » et suivre les déformations du platelage (V. ci-après) sur lequel il est posé, tout en conservant sa forme initiale à une homothétie près. La distance entre les axes de deux canaux adjacents est le *pas* d'implantation des éléments combustibles.

La partie active de l'empilement est divisée en zones comprenant un certain nombre de canaux, dans lesquels sont empilés les éléments combustibles, groupés autour d'une colonne dans laquelle peut circuler verticalement une barre de contrôle ou une barre de sécurité. Autour de cette partie active se trouve un certain nombre de couronnes de colonnes de graphite non percées, qui constituent le *réflecteur*. Grâce au réflecteur, caractérisé par son pouvoir de réflexion ou *albédo*, les neutrons qui pourraient s'échapper sont renvoyés vers le cœur.

Le pourtour extérieur de l'empilement de graphite est constitué par des colonnes d'acier formant le *bouclier thermique;* dans ces colonnes sont placés des poteaux maintenus à leur partie inférieure (sur le platelage) par une articulation à rotule et reliés les uns aux autres à leur partie supérieure au moyen de plaques d'acier. Ces poteaux forment le *corset* qui assure la stabilité de l'ensemble de l'empilement.

Le dessus de l'empilement est recouvert de pavés hexagonaux en acier posés sur les colonnes de graphite, qui forment l'écran thermique supérieur. Il est surmonté du *transformateur de réseau* qui assure la continuité du parcours des grappins utilisés pour le chargement et le déchargement des cartouches de combustible ; il empêche également le déplacement des pavés par le bras de chargement.

À leur partie inférieure, les colonnes de graphite s'appuient sur le platelage par l'intermédiaire des *plots supports*. Ces plots sont utilisés pour le centrage des colonnes et ont un rôle d'étanchéité. Ils sont placés sur une plaque qui permet le réglage de l'horizontalité des faces d'appui des colonnes.

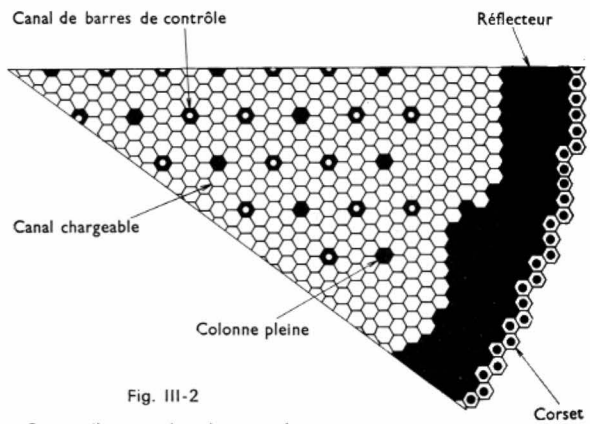


Fig. III-2

Coupe d'une portion du cœur du réacteur (*É.D.F.*)

L'empilement du réacteur de Saint-Laurent-des-Eaux comprend (fig. III-2) :

— 3 288 colonnes, percées au diamètre de 140 mm, qui recoivent les éléments combustibles ·

— 211 colonnes, percées au diamètre de 82 mm, pour recevoir les barres de contrôle ;

— 1 164 colonnes non percées, dont 1 062 dans le réflecteur et 102 dans le noyau actif.

Une colonne est formée par la superposition de neuf barres de graphite (de 568 mm ou 1 074 mm de longueur) et sept de 1 223 mm de long. Les différences sur la hauteur des lits (couches de barres) sont fonction des zones de flux neutronique et de la température du graphite ; elles sont calculées en tenant compte des déformations dues à l'effet Wigner. L'entr'axe de deux colonnes est de 225,16 mm.

Caractéristiques principales de l'empilement :

Hauteur totale	10,2 m
Diamètre hors tout	16,2 m
Diamètre actif	14 m
Hauteur active	9 m

Épaisseur du réflecteur	1 m
Nombre de poteaux du corset	252
Masse de l'empilement	2 580 t
Nombre total de canaux	3 264
Nombre de canaux chargeables	2 874
Diamètre du canal	140 mm
Nombre de canaux pour barres de contrôle	211
Diamètre du canal	84 mm
Nombre d'éléments combustibles par canal	15
Nombre total d'éléments combustibles	43 110
Masse totale d'uranium	444,9 t

2.3. Éléments de support de l'empilement

2.3.1. Le platelage. — Le platelage sur lequel vient reposer l'empilement (par l'intermédiaire des plots-supports) est composé de 37 plaques rectifiées ou *marbres*, dont les formes variables sont imposées par la géométrie du cœur. Elles sont disposées sur deux ou trois colonnes-supports de longueur réglable (à l'aide d'un système vis-écrou) qui permettent d'ajuster le niveau et l'horizontabilité du platelage. Ces marbres sont percés pour recevoir les plots-supports et laisser passer le panier ou *poubelle* qui (fig. III-3) est placé en bas de chaque canal ; il sert à récupérer les débris d'éléments combustibles qui pourraient éventuellement tomber en cas de mauvais fonctionnement du grappin pendant les opérations de chargement ou de déchargement. Ces poubelles peuvent être retirées, par le haut, au moyen du grappin. Le gaz caloporteur sort de la poubelle par des ouvertures situées à sa périphérie.

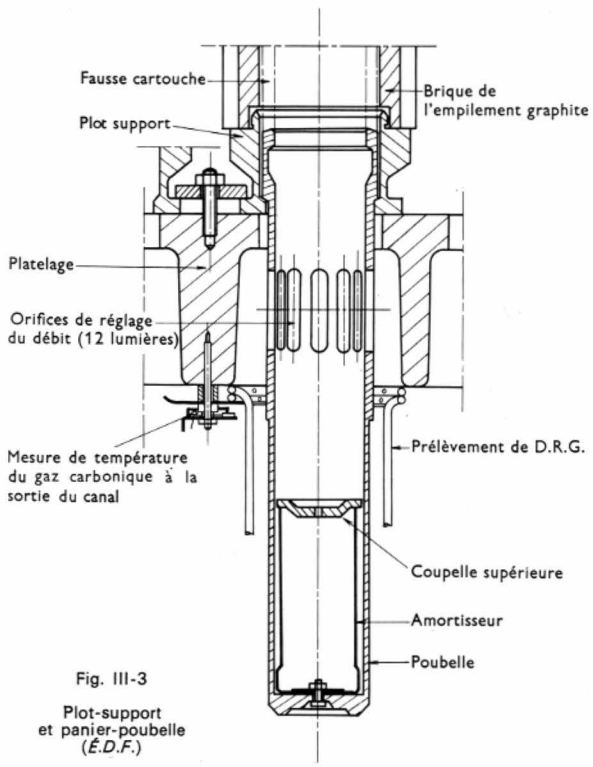


Fig. III-3

Plot-support et panier-poubelle (*É.D.F.*)

2.3.2. L'aire-support ou sole (fig. III-4). — L'aire-support est un plancher circulaire composé de poutres formant une grille à mailles rectangulaires. Chaque maille forme un alvéole dont les parois verticales sont constituées par les âmes des poutres. Cette aire-support a un diamètre de 17,6 m et une hauteur de 2,70 m.

Par l'intermédiaire des colonnes supports du platelage, ce plancher supporte tout l'empilement et il est aussi soumis aux efforts dus à l'écoulement du gaz dans les canaux et à travers lui-même (ce qui est équivalent au poids d'une masse de 10 000 t environ).

Dans les alvéoles, sur toute la hauteur de la poutre, sont disposés des rondins de graphite ; ils laissent passer le gaz mais stoppent les neutrons et le rayonnement γ du cœur ainsi que celui dû à l'activité du platelage et de la

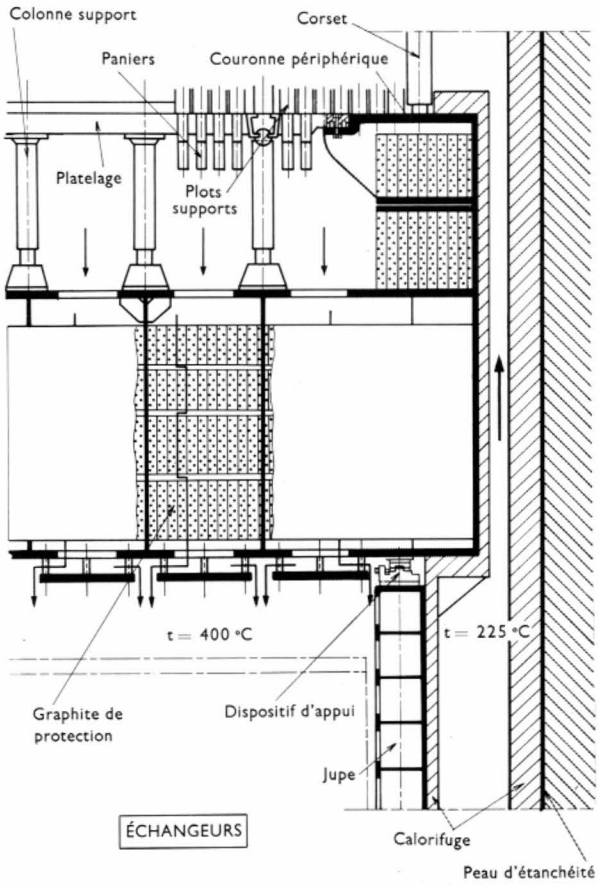


Fig. III-4 — Platelage. Aire-support et graphite de protection biologique (*É.D.F.*)

partie supérieure de la sole elle-même. Cet ensemble forme un écran biologique et, moyennant certaines précautions toutefois, il est ainsi possible de pénétrer dans la salle des échangeurs qui se trouvent situés au-dessous de la sole.

Problèmes métallurgiques posés par les structures métalliques dans les réacteurs. — La conception et la situation particulière de l'aire-support posent de délicats problèmes métallurgiques.

Tout d'abord, il y a ceux qui sont dus aux opérations de soudage, qui créent en bordure des soudures des contraintes internes résiduelles importantes et surtout de valeurs inconnues. Il convient de les faire disparaître en pratiquant un détentionnement du métal par recuit.

Outre ce phénomène, dû au principe même de la soudure, viennent s'ajouter les problèmes dus à l'irradiation. On sait (effet Wigner) que des matériaux soumis à un bombardement neutronique subissent des dommages qui modifient leur structure cristalline et par conséquent leurs caractéristiques physiques. En particulier, pour l'acier, la résistance à la rupture augmente en même temps que la limite élastique qui va jusqu'à se confondre avec la limite de rupture : ayant perdu toute *ductilité*, c'est-à-dire toute capacité de déformation, le métal devient *fragile*. Cette fragilité est fonction de la quantité de neutrons reçue et de la température d'irradiation ; celle-ci détermine l'ampleur de la *restauration* de la structure cristalline donc des caractéristiques mécaniques du métal. La fragilité d'un métal est caractérisée par la *température de transition :* au-dessus de cette température le métal est ductile donc susceptible de se déformer et au-dessous il est fragile. Sous l'effet de certaines concentrations de contraintes, toujours importantes autour des fissures qui peuvent exister au sein du métal (inclusions de gaz, scories, défauts de laminage, etc.), ou de certaines contraintes internes de soudage, le métal peut libérer brutalement toute son énergie interne et, sans aucune adaptation, se rompre. La température de transition se dé-

termine par plusieurs essais, les plus connus étant l'essai Charpy (mouton de Charpy) et l'essai Pellini.

On comprend que si l'on veut pénétrer dans l'enceinte des échangeurs, pour réparer une fuite par exemple, il faut laisser refroidir suffisamment les structures internes et plus particulièrement l'aire-support. Le métal de celle-ci doit donc avoir une température de transition inférieure à la température minimale admissible pour l'accès aux échangeurs. En effet, dans le cas contraire, le métal étant fragile, sous l'action d'un choc (relaxation brutale due au refroidissement du métal d'un appui qui aurait grippé, par exemple), il peut se rompre. La difficulté du choix du métal apparaît d'autant plus lorsque l'on sait qu'un métal courant, au bout d'une irradiation de quelques années par des neutrons rapides, atteint facilement une température de transition de 100 °C.

Ce qui vient d'être dit pour la sole s'applique évidemment au platelage, à la peau d'étanchéité du caisson et aux caissons métalliques (comme ceux réalisés à Chinon I, Chinon II ou dans les centrales à eaux légères).

2.3.3. La jupe. — C'est une structure cylindrique de 14 m de hauteur qui a un diamètre intérieur de 15,600 m. L'épaisseur des éléments qui la constituent est de 0,470 m. Chaque élément forme une maille carrée à nervure en forme de I. Sur cette structure maillée est soudée une tôle d'étanchéité.

La partie supérieure de la jupe porte l'aire-support par l'intermédiaire de 54 dispositifs d'appui ; ils permettent la libre flexion de l'aire-support sans entraîner de déformation ou de moment de flexion dans la jupe.

En plus de son rôle de support, la jupe forme la paroi de la salle des échangeurs qui sont placés dans son enceinte. D'autre part, avec la paroi cylindrique du caisson qui l'entoure, la jupe délimite une zone annulaire servant de gaine pour le passage du gaz caloporteur. Celui-ci venant des échangeurs remonte le long de la jupe et de l'empilement pour arriver à la partie supérieure de ce dernier et se répartir dans les canaux ; il redescend ensuite à travers les canaux, les poubelles, l'aire-support et les échangeurs.

Lorsque le gaz remonte le long de la partie externe de la jupe, sa température est de 225 °C alors que lorsqu'il descend à l'intérieur elle atteint 400 °C. Pour éviter des contraintes importantes (à cause du gradient thermique) dans la jupe et dans la virole périphérique de l'aire-support, celles-ci sont calorifugées ; le calorifuge est à base de laine de roche pour la jupe et il est formé d'un empilement de tôles en acier inoxydable pour la virole périphérique.

La partie inférieure de la jupe est percée de six ouvertures de 2 m de diamètre, quatre ouvertures pour l'emplacement des soufflantes et deux pour l'accès à l'intérieur de la salle des échangeurs.

La jupe repose sur la dalle inférieure du caisson au moyen de 54 dispositifs d'appui identiques permettant la libre dilatation de la jupe chaude (225 °C) par rapport au caisson froid (50 °C). Chaque dispositif est principalement composé de deux pièces d'appui, l'une fixée sous la jupe et l'autre reposant sur le béton, séparées par un galet de 0,800 m de diamètre et de 0,500 m de longueur.

3. LE CAISSON

Les cœurs des réacteurs Chinon I et Chinon II ont été placés dans une enceinte métallique, appelée aussi *cuve* du réacteur ou *caisson*. Par la suite, les dimensions du cœur augmentant avec la puissance, il fallait des tôles d'épaisseur très grande pour réaliser ces enceintes (l'épaisseur est liée au diamètre et à la pression du gaz caloporteur) et les problèmes de soudure et de fragilisation devenaient très difficiles à résoudre. D'autre part, les expériences, faites à Marcoule avec les caissons des réacteurs G 2 et G 3, ont montré que l'utilisation du béton précontraint donnait des résultats satisfaisants (malgré la rupture par corrosion de quelques armatures de précontrainte placées dans des gaines sans coulis d'injection pour les protéger ; les causes de corrosion ont été éliminées à la suite de ces incidents). C'est pourquoi à partir de Chinon III les caissons ont été fabriqués en béton précontraint.

Une enceinte soumise à une pression intérieure travaille essentiellement en traction. Le béton est un matériau qui n'admet que de faibles contraintes de traction alors qu'il peut supporter de très grandes contraintes de compression (les règlements s'opposent d'ailleurs à la prise en compte dans les calculs de la résistance à la traction). La précontrainte consiste donc à comprimer très fortement le béton, au moyen d'armatures de précontrainte tendues. Les contraintes de compression à l'intérieur du matériau sont supérieures ou au moins égales aux tractions maximales auxquelles il sera ultérieurement soumis : cette compression donne donc artificiellement au béton une certaine résistance à la traction.

Un caisson réalisé en béton précontraint ne subit pas uniquement des efforts de traction dus à la pression interne : ses parois sont également le siège de sollicitations d'origine thermique très importantes. En effet, malgré le calorifuge et le refroidissement du béton au niveau de la peau d'étanchéité (V. ci-après) il y a un gradient de température de plusieurs dizaines de degrés entre la face interne et la face externe des parois du caisson.

Ce gradient thermique engendre des contraintes de compression sur la face interne et des contraintes de traction sur la face externe ; celles-ci doivent être équilibrées par une précontrainte appropriée.

Pour les caissons, si l'épaisseur de la tôle constitue une difficulté majeure, il n'y a par contre aucune limitation technique à l'épaisseur de parois en béton précontraint. Seules des considérations économiques peuvent limiter les dimensions de l'ouvrage.

L'utilisation du béton précontraint présente également un grand intérêt du point de vue sécurité. En effet, de par la précontrainte, les matériaux mis en œuvre subissent leur épreuve de sécurité. Les armatures de précontraintes sont mises à une tension supérieure à celle qui sera la leur en service puisque par la suite cette tension sera plus faible du fait du phénomène de relaxation du métal et de fluage du béton. Quant au béton, les contraintes qu'il subit avant que tous les efforts soient appliqués sont généralement supérieures aux contraintes en service. Sous l'action de la chaleur, les contraintes de compression internes s'ajoutent à celles de la précontrainte mais la pression interne du gaz a une action qui se retranche de ces contraintes. C'est dire que le cas de charge le plus défavorable se produit lorsqu'il y a absence de pression donc à un moment où une rupture a moins de conséquences qu'une rupture en pression. De plus, la précontrainte étant réalisée au moyen d'un très grand nombre de câbles, la rupture d'un de ceux-ci ne peut avoir qu'une incidence négligeable.

Si la résistance du caisson s'amenuisait par suite de la rupture d'un grand nombre d'armatures (ce que l'on ne peut pas constater directement puisque leurs gaines sont noyées dans un coulis de ciment pour éviter le phénomène de corrosion des armatures) ou du fait d'une relaxation beaucoup plus grande que prévue de la tension des armatures, l'auscultation quasi permanente de l'ouvrage (notamment les mesures de déformation) permettrait d'intervenir bien avant qu'un accident puisse se produire. Il faut ajouter que la zone éventuellement tendue se trouve sur la face extérieure des parois et l'apparition de fissures serait le premier avertissement (elle se produirait bien avant une rupture brutale et même avant une perte d'étanchéité.

Le caisson a la forme d'un prisme à section droite hexagonale comportant une cavité cylindrique. Les extrémités sont fermées par deux dalles d'épaisseurs constantes. La dalle supérieure est traversée par les puits qui mettent en communication les canaux de l'empilement et la machine de chargement-déchargement des éléments combustibles. La dalle inférieure comprend également un certain nombre de traversées pour le passage des tuyauteries du circuit eau-vapeur, des tubes du système de détection de rupture de gaine, et des systèmes d'appuis de la jupe et des échangeurs de chaleur. Les parois verticales du caisson sont percées à leur base, à 3,10 m au-dessus du fond, de six ouvertures ; quatre sont réservées aux turbosoufflantes et sont prolongées vers l'extérieur par une console de 6 m de long pour supporter les turbines d'entraînement des soufflantes ; deux servent de trous d'accès.

Les parois latérales comportent des câbles de précontrainte verticaux pour équilibrer les efforts de la pression sur les fonds et six groupes de câbles horizontaux épousant

la courbure de l'enceinte. Chacun de ces groupes est ancré sur deux faces opposées pour former des parties de cercles et s'opposer aux efforts tangentiels que la pression interne développe dans la paroi cylindrique. Les dalles inférieure et supérieure sont précontraintes par trois familles de câbles formant un réseau triangulaire courbé dans le plan vertical et par des câbles formant ceinture et dont le tracé est identique à celui des câbles horizontaux de la partie cylindrique (fig. III-5).

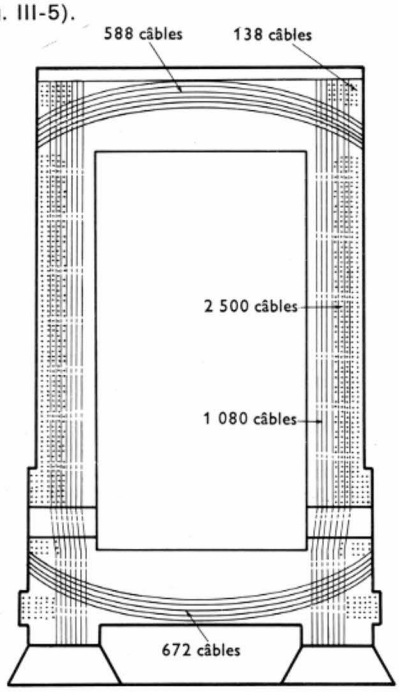


Fig. III-5

Représentation schématique montrant la disposition des câbles dans le béton (*É.D.F.*)

Caractéristiques principales du caisson :

Pression maximale admissible	30 bars (30.10^5 N/m²)
Dimensions intérieures :	
— hauteur	36,5 m
— diamètre	19 m
Dimensions extérieures : hauteur	48 m
Double apothème de l'hexagone	28,5 m
Diamètre des ouvertures dans le fût	2,7 m
Épaisseur de la dalle supérieure	5,7 m
Nombre d'ouvertures ($\varnothing$ = 0,39 — 0,27 m)	211
Épaisseur de la dalle inférieure	6 m
Nombre d'ouvertures ($\varnothing$ = 0,40 m)	211
Volume de béton	25 000 m³
Nombre de câbles de précontrainte	5 182
dont : verticaux	1 080
horizontaux	2 826
dans les dalles	1 260
dans les consoles des soufflante	16
Capacité unitaire	225 t
Longueur totale	180 km
Masse totale (y compris gaine et ancrages)	3 200 t
Masse totale du caisson (y compris calorifuge et peau d'étanchéité)	70 000 t

Le caisson repose sur sa fondation par l'intermédiaire de 24 massifs de béton armé répartis sur sa périphérie. Pour permettre au caisson de se déformer sous l'action de la précontrainte et sous l'action de la pression intérieure et cela indépendamment des fondations, des plaques de néoprène fretté, de deux centimètres d'épaisseur, sont intercalées entre les massifs et le caisson.

4. LA PEAU D'ÉTANCHÉITÉ ET LE SYSTÈME DE REFROIDISSEMENT

Le béton précontraint n'est pas étanche au gaz et la face interne du caisson doit être revêtue d'une tôle métallique

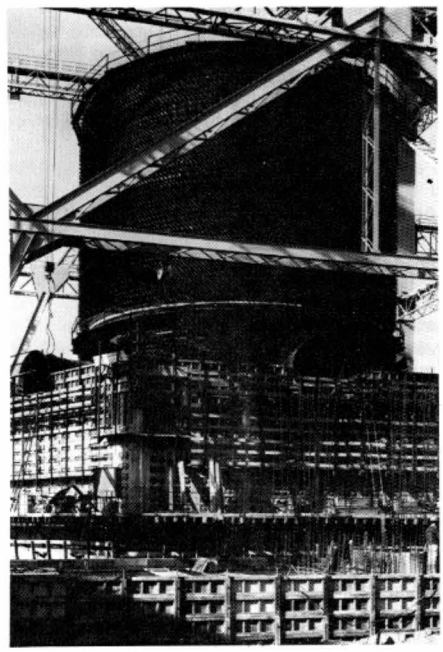


Fig. III-6

Saint-Laurent-des-Eaux : la peau d'étanchéité avant le coulage du béton (*Brigaud-É.D.F.*)

que l'on a désignée du nom de *peau d'étanchéité* (fig. III-6). Elle est évidemment raccordée par soudure à tous les tubes formant coffrage des traversées. Pour que l'étanchéité soit assurée, quelles que soient les déformations, il est nécessaire que le métal utilisé ait une très grande ductilité : on a choisi de l'acier doux.

La peau d'étanchéité et le béton dans lequel elle est ancrée doivent être maintenus à une température assez basse sinon des contraintes thermiques inadmissibles peuvent prendre naissance et la peau peut cloquer. Pour cela, derrière la peau d'étanchéité et soudé à elle, se trouve un circuit de refroidissement parcouru par de l'eau déminéralisée. Le pas du système de refroidissement est suffisamment faible pour que la température maximale du béton ne dépasse pas 70 °C. Ce circuit de refroidissement est noyé dans le béton et il est doublé pour des raisons de sécurité.

La peau d'étanchéité a une épaisseur de 35 mm sur les dalles inférieure et supérieure et de 25 mm sur les parois internes du fût ; sa masse est d'environ 1 800 t. La température d'entrée de l'eau est de 25 °C et son échauffement est de 5 °C environ.

5. LE CALORIFUGE (fig. III-7)

Si le gaz à la température de 225 °C était en contact direct avec la peau d'étanchéité il faudrait absorber une grande quantité de chaleur pour limiter la température du béton. Or, d'une part, on a intérêt à réduire le plus possible les pertes thermiques et, d'autre part, il y a lieu de maintenir la puissance du circuit de refroidissement dans des limites raisonnables. C'est pourquoi on a interposé entre la peau d'étanchéité et le gaz, un calorifuge en *béton de ponce* qui est maintenu en place et protégé par une tôle métallique de protection (*casing*). Aux essais, qui avaient été effectués déjà pour l'étude de Chinon III, les calorifuges couramment utilisés dans l'industrie s'étaient révélés inefficaces. En effet, dans le cas d'un gaz soumis à une forte pression, les qualités de *conduction* du matériau ne sont pas des critères suffisants et à l'intérieur du calorifuge les phénomènes de *convection* sont très intenses (cela explique l'inefficacité, dans ce cas, des calorifuges excellents utilisés habituellement à la pression atmosphérique). Par ailleurs, le calorifuge doit conserver son pouvoir isolant pendant toute la vie de la centrale car il est impossible d'aller le changer en raison de l'activation des matériaux. Les matériaux sélectionnés doivent être stables dans les conditions de fonctionnement.

La pierre ponce qui est employée comme agrégat est une pierre volcanique poreuse, légère et très dure. Elle

provient des îles Lipari, au nord de la Sicile car elle est très régulière et peu altérée en cet endroit. Le liant est un ciment Portland artificiel à haute teneur en silice dont les divers constituants ont été très soigneusement définis et contrôlés afin d'éviter les accidents, dus à la présence d'aluminates et de sulfates qui se produisent lorsque ce liant est porté à haute température.

Le calorifuge est constitué de pavés de béton de ponce fixés à la peau d'étanchéité par des boulons. Les pavés adhèrent à la peau d'étanchéité à l'aide d'un mortier de ponce qui sert également à les jointoyer. Préalablement à leur montage, les pavés de ponce ont subi un traitement en température (description de cycles thermiques) pour assurer leur parfaite stabilité en température. Les caractéristiques du matériau (résistances à la compression et à la traction élevées, module d'élasticité et coefficient de dilatation les moins élevés possibles) lui permettent de supporter les contraintes thermiques dues à son monolithisme (il ne peut donc pas se dilater).

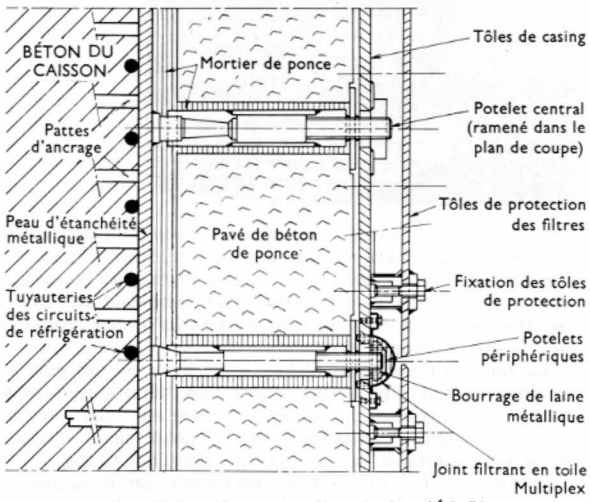


Fig. III-7 — Coupe calorifuge-casing (*É.D.F.*)

L'épaisseur du calorifuge est de 30 cm sur le fond inférieur, de 43 cm sur le fond supérieur, et de 20 cm sur la paroi cylindrique du fût. Les plus grandes dimensions des pavés sont de 1 m sur la paroi du fût, et de 1,50 m sur les fonds. Le casing de protection du calorifuge est constitué de tôles et de profilés en acier doux, et est librement dilatable. Dans l'espace de dilatation ménagé entre les tôles se trouvent des filtres en laine de verre maintenus en place par des toiles métalliques en acier inoxydable à faible teneur en cobalt. Ces filtres ont pour but d'éviter l'introduction de poussières de ponce dans la pile; elles pourraient être produites lors des cycles de température et de pression que le calorifuge subit pendant la vie de la centrale. Ce casing n'est pas étanche (contrairement à celui de Chinon III) car il faut prendre alors des précautions rigoureuses. En effet, si à la suite d'une fissuration du casing la pression s'établit entre lui et le calorifuge et si l'on effectue une dépressurisation rapide du caisson, l'espace interne au calorifuge ne peut pas se dépressuriser assez vite (à cause des pertes de charge dans la fissure), et le casing, soumis à une pression importante, est arraché du calorifuge. Dans le cas de Chinon III le casing a été spécialement étudié pour éviter qu'un pareil incident soit possible mais la solution, très complexe, a été jugée trop onéreuse pour être reconduite à Saint-Laurent-des-Eaux (le casing étanche de Chinon III est composé de tôles en acier inoxydable spécialement profilées pour présenter une succession de pointes de diamant permettant une libre dilatation dans tous les sens).

La surface des filtres du casing de Saint-Laurent a été également déterminée pour que les pertes de charge soient telles que la pression établie dans le calorifuge soit minime (ainsi aucun danger ne résulte d'une dépressurisation rapide du caisson). Ils maintiennent seulement une pression différentielle de 1 bar lorsque les pressions absolues décroissent de 0,10 bar par seconde.

6. LE GÉNÉRATEUR DE VAPEUR

Dans son principe général le générateur de vapeur d'une centrale de la filière uranium naturel-graphite-gaz est identique à celui d'une centrale utilisant un combustible fossile. Le réacteur étant un générateur de chaleur il joue le même rôle que le foyer d'une chaudière de centrale thermique. La chaleur en est extraite au moyen du fluide caloporteur, ici l'anhydride carbonique CO_2; il circule dans le *circuit primaire* et transfère ensuite la chaleur dans le générateur de vapeur à de l'eau qui se vaporise. Cette vapeur, ayant recueilli la chaleur de la source chaude, produit de l'énergie mécanique en se détendant dans une turbine et cède la chaleur restante à la source froide (condenseur). Le circuit eau-vapeur est appelé *circuit secondaire*.

Malgré cette identité dans le principe, la disposition intégrée, qui impose d'adapter les dimensions du générateur de vapeur à celle du réacteur, ainsi que les températures disponibles sur les gaines des éléments combustibles créent des sujétions particulières; elles ont une influence profonde aussi bien du point de vue thermodynamique que du point de vue construction.

6.1. Cycle thermodynamique. — L'objectif principal est la diminution du coût global de l'énergie produite. Cependant lorsque la part du combustible est faible dans le coût du kilowatt-heure, ce qui est le cas du combustible nucléaire, on peut se satisfaire d'un rendement thermodynamique moindre et prévoir des installations moins élaborées, ce qui permet de réduire dans des proportions notables le coût de la puissance installée. Corrélativement, une simplification des circuits accroît la sécurité de l'exploitation et augmente la disponibilité de l'installation.

Cette idée directrice de simplification et de sécurité de fonctionnement a donc conduit à l'intégration du générateur de vapeur et des soufflantes dans le caisson qui contient déjà les matériels du circuit primaire. D'autre part il est impératif, dans un caisson en béton précontraint, de limiter au minimum le nombre de pénétrations nécessaires aux conduites d'eau d'alimentation et de vapeur. C'est pourquoi la resurchauffe de la vapeur en cours de détente (adoptée à Chinon III) a été abandonnée. Le cycle utilisé à Saint-Laurent-des-Eaux est limité à une seule pression de vapeur, 33,6 bars à l'admission des turbines; pour l'érosion des derniers aubages mobiles des turbines (du fait de l'humidité de la vapeur détendue) c'est la pression maximale admissible, compatible avec la température de vapeur maximale possible (390 °C) obtenue à partir d'une température de 400 °C au circuit primaire.

Pour une température d'eau de refroidissement de 11 °C et un énorme débit de vapeur de 9 000 m³/s, à travers un échappement de 27,7 m², la pression au condenseur est de 40 mbar. La température de l'eau d'alimentation est de 88 °C.

6.2. Schéma du circuit eau-vapeur (V. dépliant hors-texte). — La conception de l'échangeur était liée aux possibilités de montage et au planning de construction du réacteur. L'échangeur étant situé dans la partie inférieure du caisson, dans un emplacement relativement étroit et laissant peu de possibilité de manutention d'éléments encombrants (d'autant plus que les ouvertures de montage étaient très réduites), sa construction in situ était pratiquement impossible. On a donc construit en usine des éléments préfabriqués pouvant être facilement mis en place par le haut du caisson, avant que la dalle supérieure soit coulée et avant mise en place de la sole et exécution de l'empilement. Ces éléments ne devaient nécessiter qu'un minimum de soudures pour leur raccordement aux traversées. C'est pourquoi l'échangeur de chaleur de Saint-Laurent-des-Eaux comprend 26 tours d'échangeur « standard » et 4 demi-tours indépendantes à l'intérieur du caisson; les raccordements ont été faits à l'extérieur.

Le circuit primaire est à un seul passage: la totalité du gaz traverse donc l'échangeur. Ce gaz doit être refroidi d'une façon homogène car on ne peut pas admettre de points chauds dans le réacteur. En revanche, il y a deux circuits secondaires eau-vapeur alimentant chacun une turbine principale. Si l'une des turbines est arrêtée, le

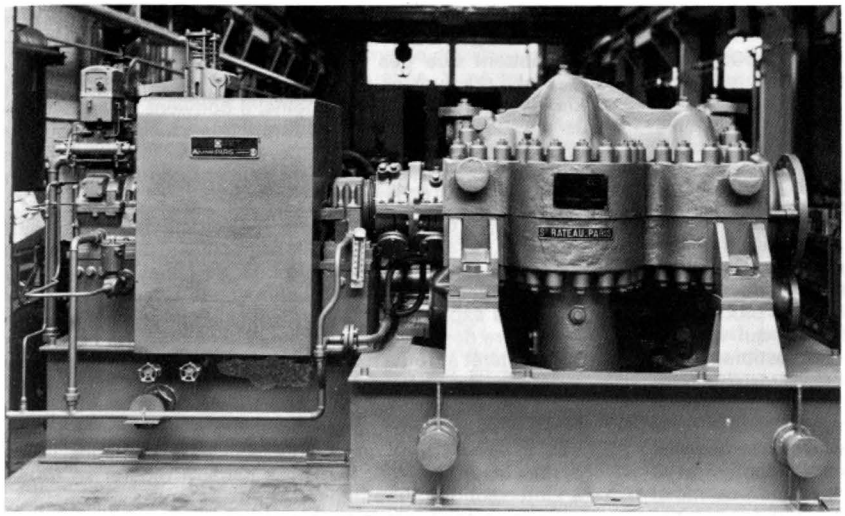


Fig. III-8

Turbine d'entraînement d'une soufflante
(*Alsthom-Rateau*)

circuit eau-vapeur de l'autre turbine doit pouvoir refroidir tout le gaz, le réacteur fonctionnant alors à puissance réduite. Pour que le refroidissement soit encore homogène, l'échangeur a été divisé en quatre parties symétriques, chacune d'elles comprenant les surfaces d'échanges des deux circuits secondaires imbriqués.

Pour réduire l'encombrement, ces deux échangeurs de chaleur imbriqués ne possèdent pas de ballon et sont du type à circulation forcée.

L'échangeur de chaleur, qui est le point froid du circuit primaire, étant situé sous le réacteur qui en est le point chaud, la circulation des gaz par thermosiphon n'est pas possible. On doit donc produire une circulation forcée du fluide caloporteur. Cette circulation est assurée au moyen de quatre soufflantes (fig. III-8), de type axial, entraînées par quatre turbines à condensation placées sur une console à l'extérieur du caisson. La soufflante et sa turbine sont reliées par un arbre qui traverse la paroi du caisson. Chacune de ces turbines est alimentée par un circuit eau-vapeur, indépendant côté secondaire, mais imbriqué aux autres côté primaire. Le rôle de ces soufflantes est primordial pour la sécurité du réacteur: outre la circulation du fluide caloporteur, qu'elles assurent pendant le fonctionnement normal du réacteur, elles doivent, d'une façon impérative, pouvoir assurer le refroidissement de celui-ci pendant son arrêt et permettre l'évacuation de la puissance résiduelle des éléments combustibles. C'est pourquoi, outre son alimentation en vapeur par l'un des quatre circuits particuliers du générateur de vapeur principal, en secours chaque turbine peut être alimentée par de la vapeur produite par une centrale auxiliaire. Chacune d'elles possède son condenseur, ses pompes d'extraction et ses pompes alimentaires.

Caractéristiques des soufflantes :

Puissance absorbée	16 MW
Vitesse de rotation	0 à 2 850 tr/mn
Débit	2 160 kg/s
Pression d'aspiration	25 bar absolus
Rapport de compression	1,072
Température d'aspiration	220 °C

Le réglage du débit s'effectue par réglage simultané des vitesses des quatre soufflantes.

Quant aux deux turbines principales, elles sont indépendantes l'une de l'autre. Chacune, alimentée en vapeur par deux quarts d'échangeur, possède son propre poste d'eau et ses auxiliaires normaux: condenseurs, pompes d'extraction, bâches et pompes alimentaires. Leur condenseur est équipé d'un dispositif de détente de la vapeur surchauffée afin d'évacuer la puissance calorifique excédentaire que fournit le réacteur pendant les régimes transitoires.

6.3. Description du générateur de vapeur (ou échangeur de chaleur). — L'ensemble des vingt-quatre tours standard et des quatre demi-tours repose sur sept poutres métalliques réunies par des entretoises formant un châssis. Par l'intermédiaire de rouleaux, ce châssis est placé sur des appuis ancrés dans la dalle inférieure du caisson. Un point fixe, situé au centre de l'ensemble, en permet la libre dilatation radiale.

Dans chaque tour, les faisceaux tubulaires sont maintenus en place par les parois qui servent à la fois de support et de gaine pour guider le gaz caloporteur. Ces parois sont constituées par des tôles ondulées afin d'augmenter leur rigidité sans avoir recours à des raidisseurs. Les systèmes de fixation des tubes et de transfert des charges sur les parois ont été spécialement étudiés pour permettre leur dilatation spaciale et réduire au minimum les contraintes thermiques dans les tubes. Des amortisseurs de vibration ont été incorporés à ces systèmes de fixation; ils évitent la mise en vibration des tubes par l'écoulement turbulent du gaz caloporteur.

La simplicité du cycle adopté a permis d'utiliser un faisceau tubulaire très simple formé par un unique tube continu entre le distributeur d'eau et le collecteur de vapeur. Ce faisceau *monotubulaire* est composé d'éléments droits de tube aileté réunis entre eux à chaque extrémité par des coudes (cannes).

L'économiseur, l'évaporateur et le surchauffeur, qui constituent les trois parties en série d'un générateur de vapeur, sont composés de la même façon; ils sont formés de panneaux du même tube et ils ont le même maillage. Ce choix technologique, même s'il ne donne pas la solution optimale du point de vue thermodynamique, a permis de réduire le prix de l'échangeur; la limitation du nombre des éléments constitutifs différents a permis de beaucoup simplifier la fabrication.

Caractéristiques principales du générateur de vapeur :

a) *Circuit primaire (circuit du gaz) :*

Puissance thermique	1 702 MW
Débit du gaz (CO_2)	8 720 kg/s
Masse du gaz (CO_2)	185 t
Température du gaz:	
— à l'entrée	400 °C
— à la sortie	219 °C
Pression du gaz à la sortie de l'échangeur	25,6 bar
Perte de charge	400 mbar

b) *Côté secondaire (circuit eau-vapeur) :*

Débit de vapeur	600 kg/s
Pression de la vapeur	35,3 bar
Température de la vapeur	390 °C
Température de l'eau d'alimentation	88 °C
Perte de charge	8 bar
Nombre de tubes élémentaires	1 374
Longueur totale des tubes ailetés	241 km
Diamètre extérieur du tube de base	38 mm
Épaisseur du tube de base	3,6 mm
Hauteur des ailettes	9 mm
Nombre d'ailettes par mètre	210

Hauteur d'une tour standard	9,5 m
Nombre de pénétrations pour l'eau d'alimentation	30
Nombre de pénétrations pour la vapeur surchauffée	112
Masse totale de l'échangeur	2 385 t

7. DISPOSITIF POUR LA DÉTECTION DES RUPTURES DE GAINE (D.R.G.)

Lors de la fission il y a création de produits de fission radioactifs dont la diffusion à l'intérieur du réacteur et de ses circuits entraînerait « l'empoisonnement » du réacteur et sa condamnation rapide. Normalement ces produits de fission sont retenus dans la gaine étanche qui entoure l'uranium. Cependant, les éléments combustibles étant portés à des températures élevées, très voisines des températures critiques des matériaux, sous l'effet de contraintes très sévères il peut se produire des ruptures brutales de la gaine ou simplement des microfissures. Dans ce premier cas, de grandes surfaces d'uranium étant en contact avec l'anhydride carbonique, il s'en suit une corrosion du métal à évolution très rapide avec libération de grande quantité de produits radioactifs et parfois inflammation de l'élément. Il est donc important d'éliminer très rapidement l'élément endommagé. Dans le deuxième cas, les microfissures ne permettent que des contacts de peu d'étendue entre le gaz et l'uranium et par conséquent elles sont beaucoup moins dangereuses. Néanmoins, il convient de les détecter le plus tôt possible car il se forme très souvent des poches d'oxyde d'uranium ; leur rupture entraîne la pollution des circuits et elle peut également causer la combustion de la cartouche.

Principe de la détection. — La détection de rupture de gaine se fait en mesurant la radioactivité d'un échantillon de gaz prélevé à la sortie de chaque canal. Sachant que dans le réacteur de Saint-Laurent-des-Eaux il y a 3 264 canaux à explorer et que l'on veut réduire le plus possible le nombre des traversées à travers le caisson, on comprend tout l'intérêt à trouver d'un système de prélèvement (et de repérage du prélèvement) ne nécessitant qu'un minimum de tuyauteries. Ce dispositif est basé sur le groupage d'un certain nombre de canaux de façon à former des *matrices* dont on explore successivement les lignes et les colonnes (fig. III-9). Le canal à repérer se trouve à l'intersection d'une ligne et d'une colonne.

Chaque canal est muni à sa base de deux chambres de prélèvement du gaz. Ce sont des couronnes extérieures au

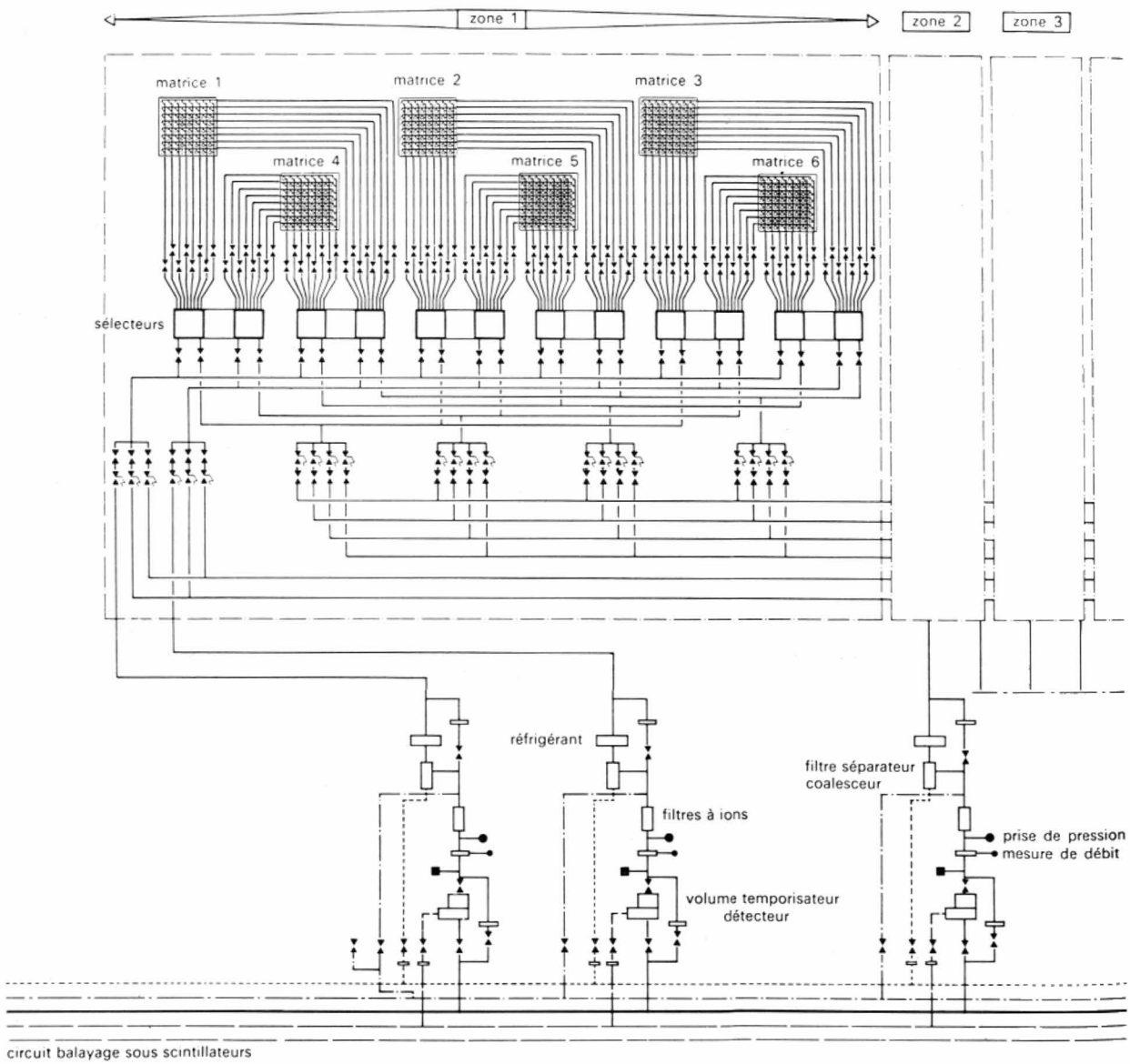


Fig. III-9 — Schéma de principe pour la détection des ruptures de gaine (*É.D.F.*)

canal avec lequel elles communiquent par des trous percés perpendiculairement à la veine gazeuse; elles sont fixées sur les supports de poubelles. Chacune de ces deux chambres, c'est-à-dire chaque canal, est reliée, l'une au « collecteur-lignes », l'autre au « collecteur-colonnes ». Chaque matrice groupe soixante-quatre canaux; il y a donc huit tubes de prélèvement de lignes et huit tubes de prélèvement de colonnes. Les matrices sont formées entre les supports des poubelles, le peignage des tubes occupant une hauteur de 200 mm entre l'aire-support et le platelage.

Le cœur est divisé en huit zones de six matrices et une zone de trois matrices. Chaque matrice est reliée à deux sélecteurs, un pour les lignes, l'autre pour les colonnes. Chaque sélecteur de lignes (ou de colonnes) met en communication une ligne (ou une colonne) avec un collecteur général de lignes (ou de colonnes) commun à six matrices, c'est-à-dire à une zone. Il y a en tout 816 collecteurs, qui cheminent sous le platelage, traversent l'aire support sans rompre l'écran biologique constitué par les rondins de graphite qui y sont placés, puis descendent le long de la jupe et viennent se répartir sur 16 bulbes constituant les traversées étanches du caisson. Chaque bulbe assure le passage de 53 collecteurs à travers la dalle inférieure du caisson; chacun des deux collecteurs d'une zone aboutit à un détecteur de radioactivité appelé *prospecteur*. Avant d'arriver dans les appareils de mesure, le gaz passe dans des réfrigérants car la température du gaz prélevé est de 400 °C. Si l'évolution de l'activité d'un canal atteint une certaine valeur un second détecteur, appelé *suiveur*, le prend en charge automatiquement; la radioactivité mesurée chaque minute est communiquée au conducteur de la centrale qui peut décider le déchargement du canal incriminé.

Le programme cyclique de la commutation pneumatique pour la prospection des canaux (les collecteurs lignes ou colonnes d'une zone de six matrices sont analysés en 48 minutes), la mesure de l'évolution de l'activité du gaz entre deux prélèvements, l'identification des canaux endommagés et leur branchement sur l'un des quatre suiveurs pour une analyse permanente, sont entièrement automatiques. Les informations sont traitées par un calculateur électronique.

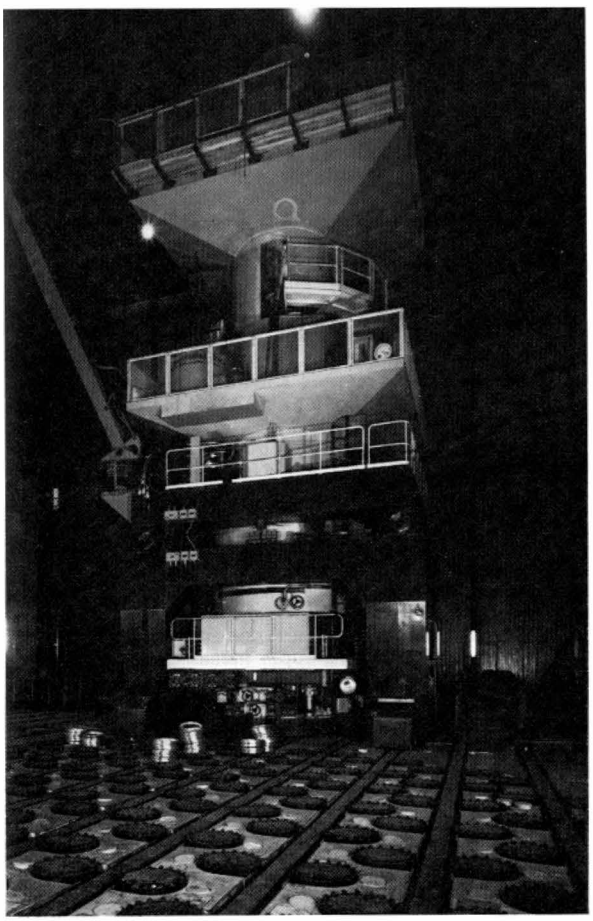


Fig. III-10 — Saint-Laurent-des-Eaux: machine de chargement sur la dalle supérieure (*Brigaud-É.D.F.*)

8. LA MANUTENTION DU COMBUSTIBLE

Dans une centrale de la filière uranium naturel-graphite-gaz, l'ensemble des installations pour la manutention des éléments combustibles a une très grosse importance. On doit pouvoir introduire du combustible dans le réacteur et aussi extraire le combustible irradié; il faut aussi le stocker en attendant qu'il perde en partie son activité et sa chaleur résiduelle avant de l'expédier dans une usine de traitement (extraction du plutonium). L'importance des installations apparaît plus nettement quand on sait que les 2 874 canaux chargeables contiennent 43 110 éléments combustibles et que l'on en manipule à peu près le tiers en une année, dans l'hypothèse d'une irradiation limitée à 3 500 MWj/t. Cela représente environ 1 500 heures de fonctionnement de l'ensemble de manutention par an. De plus, pour ne pas perturber la marche de la centrale et diminuer sa disponibilité, les installations sont conçues pour que le renouvellement du combustible nucléaire puisse être effectué à pleine puissance du réacteur.

L'ensemble des installations comprend le dispositif principal de manutention (D.P.M.) et le bâtiment du combustible irradié (B.C.I.).

Avant de décrire la machine de chargement-déchargement (D.P.M.) on va rappeler que le cœur du réacteur est formé de canaux groupés en cellules hexagonales. Aux six sommets de ces cellules on trouve trois colonnes de graphite pleine et trois barres de contrôle. Au centre d'une telle cellule se trouve également une barre de contrôle. Il y a 33 canaux chargeables par cellule et chacun d'eux comprend de bas en haut:

— une poubelle qui peut être extraite du canal et qui permet de récupérer d'éventuels débris; elle est percée de lumières pour le passage du gaz et sert à en régler le débit;
— une fausse cartouche en graphite de 600 mm de hauteur qui fait fonction de réflecteur inférieur de neutrons;
— quinze éléments combustibles;
— une fausse cartouche.

Chaque colonne de graphite supporte une plaque d'acier de 200 mm d'épaisseur qui constitue un bouclier thermique et qui atténue le rayonnement sur le caisson; il reçoit le transformateur de réseau pour le guidage du bras de chargement et pour son raccordement au canal.

L'accès aux canaux s'effectue à travers la dalle supérieure du caisson: elle est traversée par des fourreaux ou puits de chargement-déchargement. Ces puits sont normalement obturés par des *bouchons d'étanchéité* qui assurent également la protection biologique puisqu'ils forment un écran protecteur contre les radiations qui pourraient passer par les puits (la circulation des personnes sur la dalle supérieure est ainsi possible). Les bouchons des puits des barres de contrôle contiennent de plus les treuils de manœuvre de ces barres de contrôle.

Il y a 109 puits de chargement directement placés au-dessus de canaux et 102 puits, ou tubes-tunnels, placés à l'aplomb des barres de contrôle.

8.1. Le dispositif principal de manutention a deux fonctions principales (fig. III-10):

8.1.1. Préparer le puits, c'est-à-dire, enlever et stocker le bouchon d'étanchéité, éventuellement enlever et stocker une barre de contrôle et son treuil et mettre en place le bras de manutention articulé qui assure la continuité de la liaison entre la machine et un canal. Ce bras de chargement est un tube articulé dans lequel circule le grappin et le matériel qu'il manutentionne. Tournant autour d'un pivot axé sous le puits, il peut décrire des cercles concentriques; la machine étant raccordée à un puits, cela permet de desservir plusieurs canaux (fig. III-11).

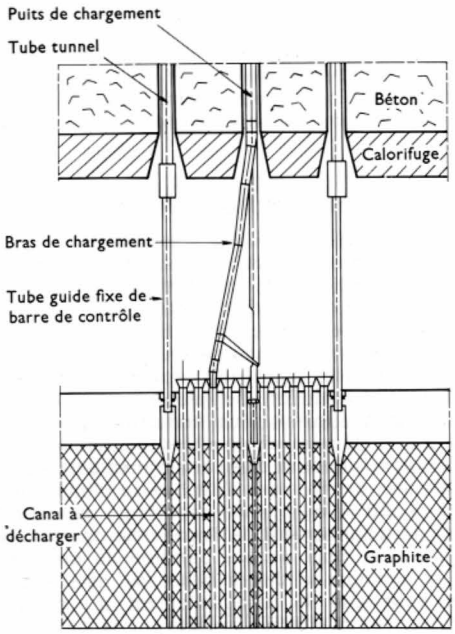


Fig. III-11 — Bras de chargement *(C.É.A.)*

8.1.2. Manutentionner le combustible, ces opérations pouvant être faites à pleine charge du réacteur, cela impose :

— qu'il puisse supporter la pression du gaz caloporteur (il est timbré à 36 bars) ;

— qu'il puisse assurer son propre refroidissement (le gaz dans la partie supérieure du réacteur est à 220 °C) ;

— qu'il puisse assurer une protection biologique efficace (les éléments combustibles irradiés émettent à leur sortie du réacteur des rayons gamma mais aussi des *neutrons retardés*).

Cette machine comprend

1° *Une partie inférieure amovible* fixée sous le corps principal de la machine par des boulons ; elle forme un caisson annulaire dans l'épaisseur duquel se trouve la protection biologique. Celle-ci est réalisée avec un matériau lourd (béton d'une densité de 5,4 environ) composé d'éléments légers (hydrogène) et absorbants (bore) qui assurent l'arrêt des neutrons par ralentissements successifs et d'éléments lourds (fer) pour l'arrêt des rayons gamma. Les éléments légers sont contenus sous forme d'eau dans un agrégat de colemanite ou de pandermite et les éléments lourds sont constitués par des riblons d'acier.

À son extrémité inférieure, cette partie comporte une jupe amovible qui est posée sur la dalle à l'aide de vérins et qui assure l'étanchéité nucléaire.

Cette partie inférieure est traversée par un conduit principal et un conduit à étuis :

— Le *conduit principal* permet le raccordement de la machine au puits et il est lui-même divisé en trois parties :

a) l'extrémité supérieure, la liaison au corps principal de la machine, est réalisée à l'aide d'une vanne à opercule tournant et à double étanchéité ; elle permet le passage des éléments combustibles et des matériels entre celle-ci et le puits ;

b) la partie médiane contient les divers mécanismes nécessaires à la mise en place, à la rotation, au soulèvement ou au verrouillage du bras de chargement articulé ;

c) la partie inférieure assure la liaison étanche avec le puits à l'aide d'un joint à soufflets métalliques qui absorbe les dilatations et permet de rattraper de très légers écarts de positionnement.

— Le *conduit à étuis* est semblable au conduit principal mais il ne comporte pas de mécanisme de manœuvre du bras. Ce conduit sert à relier la machine aux *pondoirs* du bâtiment du combustible irradié.

Dans la partie inférieure, situé entre les deux conduits, on trouve un système de palpage qui permet le positionnement de la machine sur le puits à desservir.

En cas d'incident rendant impossible la remise en état normal d'un puits de chargement, en attendant une intervention ultérieure, on peut laisser cette partie amovible sur la dalle et la séparer du reste de la machine puisqu'elle peut assurer l'étanchéité du puits.

2° *Le corps principal* est une enceinte étanche qui surmonte la partie amovible et qui est entourée de caissons métalliques contenant du béton lourd pour former un écran biologique. Cette enceinte contient deux *barillets* concentriques pouvant tourner autour de leur axe.

Le barillet principal, situé au centre, comporte six alvéoles de diamètres différents et de dix mètres de hauteur environ. Ces alvéoles sont prévus pour le stockage du bras de déchargement, de bouchons de puits, de tube-guide d'élément combustible, de tube-guide de barre de contrôle, de barre de contrôle, d'amortisseur de barre de contrôle, de bouchons de cimetières (les cimetières sont des puits, non traversants, situés dans la dalle supérieure du caisson et dans lesquels on entrepose des cartouches endommagées ou des matériels qui ne peuvent suivre la filière normale de déchargement ; on les y laisse perdre la plus grande partie de leur activité afin de pouvoir les manutentionner ultérieurement).

Le barillet extérieur, ou *barillet à cartouches*, comporte 24 alvéoles identiques et de trois mètres de hauteur. Il sert à stocker les éléments combustibles, les fausses cartouches et les poubelles. Les éléments combustibles ne sont pas directement placés dans les alvéoles ; ils sont disposés par groupes de cinq dans des étuis qui eux sont logés dans les alvéoles.

Au-dessus du barillet à cartouches il y a un aiguilleur qui guide le grappin à cartouche et permet le transfert des cartouches du canal dans le barillet et réciproquement.

À sa partie inférieure, le corps principal comporte deux orifices qui se raccordent, l'un au conduit principal de la partie amovible, l'autre au conduit d'accouplement aux pondoirs du B.C.I.

À sa partie supérieure, on trouve également deux orifices, obturables par des vannes à opercule tournant, qui la relient, l'un à l'enceinte principale des treuils (ou à une enceinte de secours), l'autre à l'enceinte du treuil à étui (ou à un château de secours).

Les organes intérieurs sont munis de deux commandes ; une *commande normale* et une *commande de secours* qui agit directement sur l'organe intéressé après débrayage de la commande normale.

Le caisson métallique central reporte tout le poids de la machine sur son chariot porteur.

Entre l'enceinte étanche et les caissons métalliques qui l'entourent, il y a un espace annulaire où circule l'air de refroidissement, avec un débit de 12 000 m³/h, à l'aide de deux ventilateurs.

Le corps principal est entouré de passerelles de circulation pour l'accès aux commandes ; elles supportent les armoires électriques.

3° *L'enceinte principale des treuils* est située sur le corps principal de la machine de chargement. Elle est également étanche et elle constitue un écran biologique contre l'activité des filins des treuils. Cette enceinte contient en effet deux treuils : un treuil principal et un treuil auxiliaire.

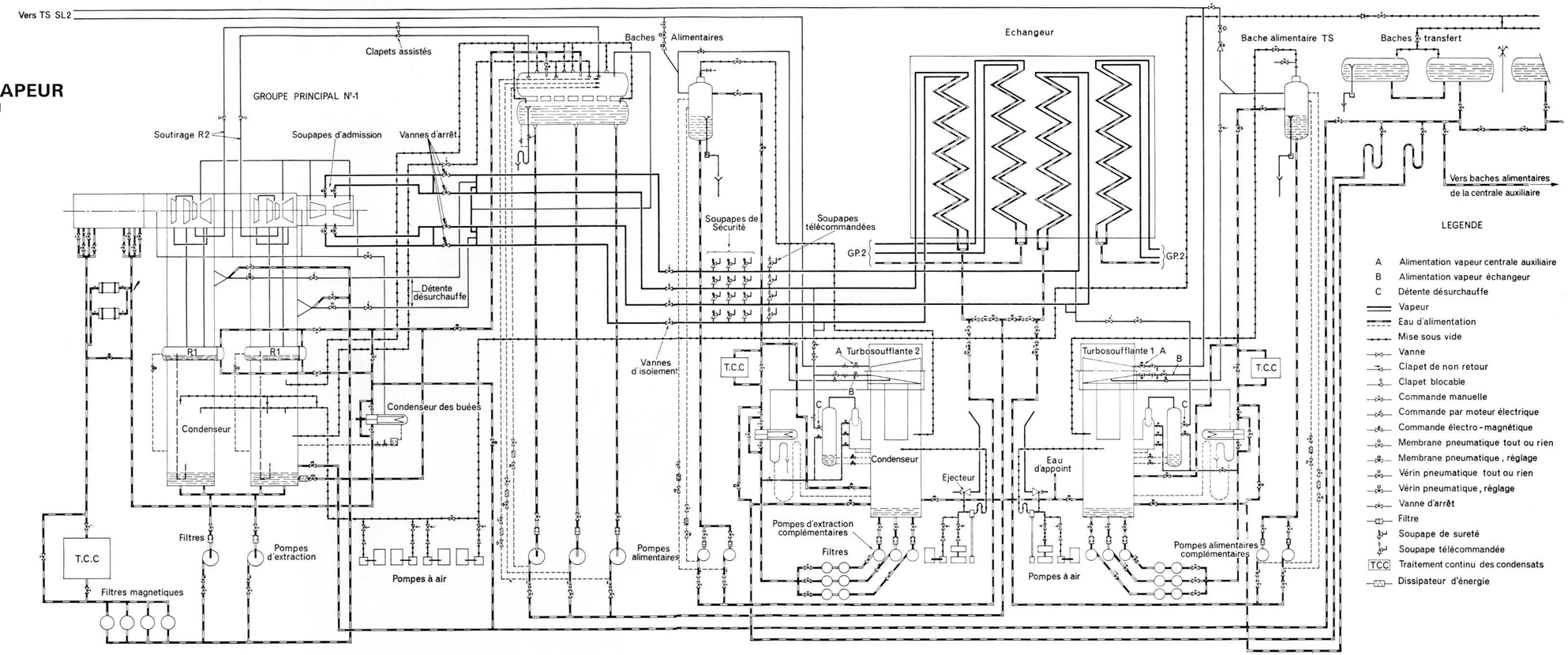
— Le *treuil principal*, axé sur le conduit de raccordement au puits, est équipé d'un grappin mécanique, ou grappin principal, d'une force de levage de 35 000 N. Le tambour de ce treuil principal peut se déplacer latéralement au fur et à mesure que s'effectue l'enroulement pour que le câble soit toujours dans un même plan vertical. Les vitesses de levage sont comprises entre 0,15 m/s et 0,035 m/s. Ce treuil est équipé d'un système de pesage permettant la détection des surtensions ou des sous-tensions du câble.

Ce treuil sert à la manutention du bras de chargement, du tube-guide d'éléments combustibles, des tubes-guides des barres de contrôle, des bouchons et des éléments combustibles.

— Le *treuil auxiliaire*, d'une force de 2 000 N, a deux vitesses de levage : 0,18 m/s et 0,04 m/s ; il peut être équipé de grappins appropriés aux matériels à manipuler : barres

CIRCUITS EAU-VAPEUR

schéma général



Document : É.D.F.

de contrôle et leurs amortisseurs, bouchons de cimetières, étuis de dépannage, etc.

4° *L'enceinte du treuil à étuis*, placée sur le corps principal, est aussi étanche et sa paroi assure la protection biologique. Elle contient un treuil axé sur le conduit de raccordement au pondoir. Celui-ci est équipé d'un grappin mécanique pour manipuler les étuis contenant les cartouches entre la machine et le sas du B.C.I. Les vitesses de levage possibles sont : 0,50 m/s et 0,125 m/s ; ce treuil est également muni d'un système de détection de surtension ou de sous-tension du câble.

Si la machine est en position de travail et s'il y a un incident sur les treuils, grâce aux vannes signalées plus haut, on peut maintenir la machine en pression et enlever les enceintes des treuils. On peut remplacer l'enceinte du treuil à étuis par un château de secours pour vider la machine des éléments combustibles irradiés qu'elle contient (une décompression préalable est nécessaire).

Ce château de secours est équipé d'un treuil, d'un grappin électrique et d'un barillet à six alvéoles. Il est directement raccordable au pondoir du B.C.I. et est déplacé de la machine au pondoir à l'aide du pont roulant de service.

5° *Circulation et alimentation de la machine.* — Le *chariot porteur de la machine* se déplace sur la dalle supérieure du caisson sur un réseau de rails parallèles. Il peut se déplacer aux vitesses suivantes : 5 mm/s, 1,25 mm/s avec une précision de $\pm$ 5 mm sur l'arrêt, et 0,12 mm/s avec une précision de $\pm$ 2 mm sur l'arrêt.

Pour passer d'une voie à une autre voie parallèle, la machine utilise un pont transbordeur placé entre le caisson et le bâtiment du combustible irradié et qui permet aussi de passer de la dalle du caisson à la dalle supérieure du B.C.I.

La machine est alimentée en énergie électrique et en fluide (CO_2) par des chariots qui se déplacent de chaque côté de la dalle, parallèlement aux voies, et qui lui sont reliés par des bras pantographes. Avec ce système à pantographe on peut maintenir l'alimentation de la machine lors d'un déplacement transversal sur le pont transbordeur. Les chariots sont eux-mêmes alimentés par des chaînes porte-câbles articulées.

Le dispositif principal de manutention, avec son chariot, a une masse de 630 t ; il a une hauteur totale de 16,60 m et une section hors tout de 6,20 m $\times$ 6,20 m.

8.2. Le bâtiment du combustible irradié (fig. III-12). — Ce bâtiment se dresse parallèlement au caisson du réacteur. Sa dalle de couverture est au même niveau que la dalle supérieure du caisson et sa dalle inférieure est située au-dessus d'une partie de la piscine de désactivation où sont entreposés les éléments combustibles irradiés. Entre ces deux dalles il y a différents planchers qui délimitent différentes salles.

Ce bâtiment comprend deux ensembles de manutention complets identiques permettant, soit le chargement de combustible neuf, soit le déchargement des éléments combustibles irradiés.

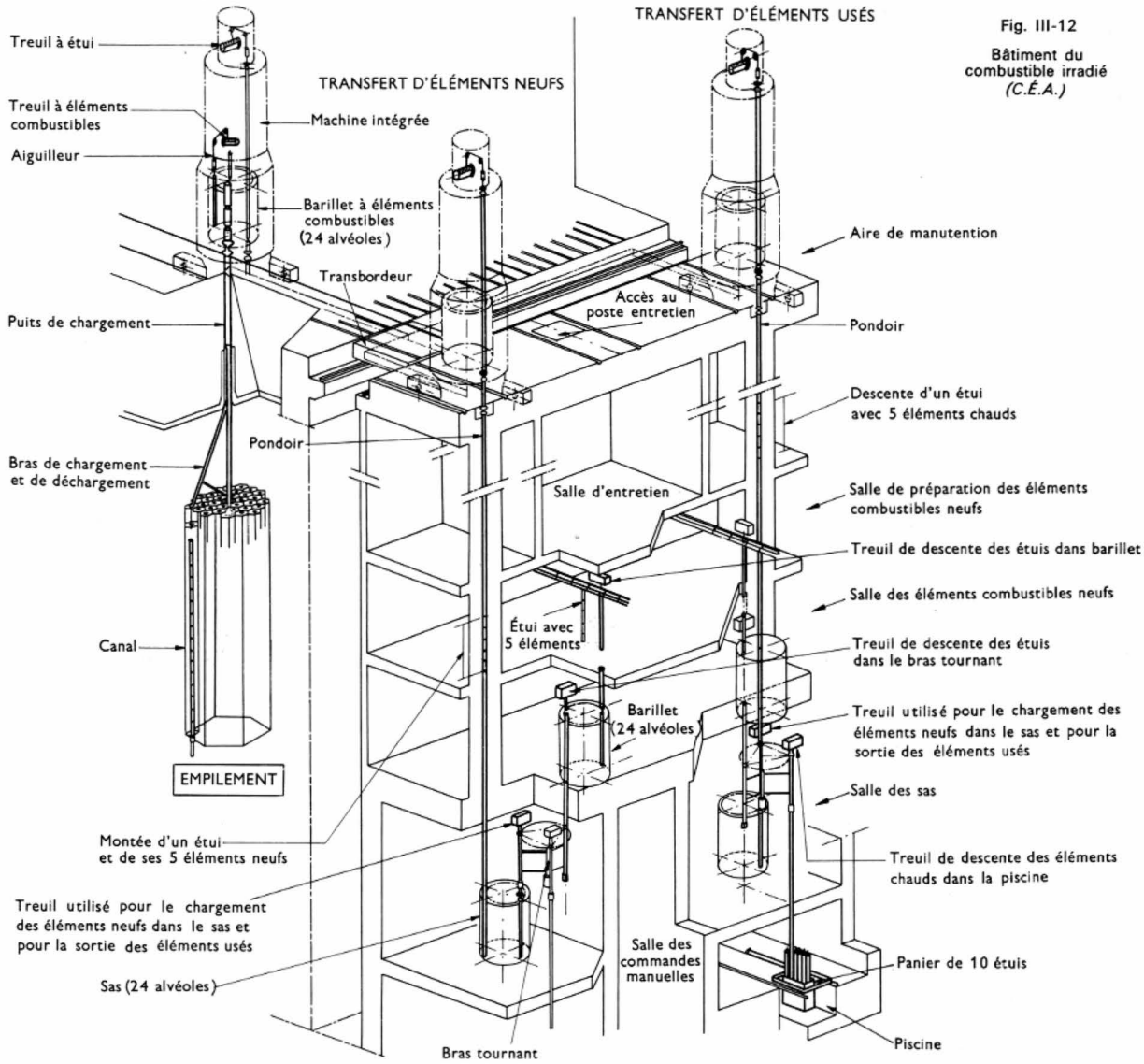


Fig. III-12

Bâtiment du combustible irradié *(C.É.A.)*

Un ensemble de manutention du B.C.I. est essentiellement composé d'un tube vertical ou pondoir; il est entouré d'une protection biologique et il débouche sur la dalle supérieure du bâtiment par un orifice sur lequel vient se placer le D.P.M. L'extrémité inférieure du tube arrive dans la *salle des sas* et est reliée à un sas, c'est-à-dire à une enceinte étanche sous pression, équipée d'un barillet identique à celui de la machine. Ce barillet peut être chargé en éléments combustibles neufs par un bras tournant situé dans la salle des sas et lui-même alimenté par un barillet placé dans une salle située au-dessus de la salle des sas et appelée *salle des éléments neufs*. Le barillet de la salle des éléments neufs est lui-même alimenté à partir d'une salle placée au-dessus de lui, la salle de préparation des éléments combustibles neufs.

Lorsque le barillet du sas est plein d'éléments neufs (répartis par cinq dans les alvéoles) on peut alimenter le barillet du D.P.M. à l'aide de son treuil à étuis. Inversement, dans le cas de déchargement de combustibles irradiés, le treuil à étuis descend les éléments irradiés dans le barillet du sas d'où ils sont repris par le bras tournant et descendus dans la piscine. Il y a lieu de noter, qu'en fait, le bras tournant comprend deux tubes dans lesquels circulent des grappins, réservés, l'un au combustible neuf, l'autre au combustible irradié. Les opérations de chargement et de déchargement peuvent être alternées. C'est-à-dire que lorsque le treuil à étuis du D.P.M. a retiré tous les éléments neufs d'un alvéole du barillet du sas, il peut le remplir avec des éléments combustibles irradiés.

S'il y a des éléments qui ont subi une rupture de gaine, avant la descente en piscine, ils sont déroutés sur une cellule, mis en conteneur, puis généralement expédiés pour être examinés dans une « cellule chaude » de l'atelier des matériaux irradiés (A.M.I. situé à la centrale de Chinon).

8.2.1. La piscine. — À leur arrivée en piscine, les éléments combustibles passent dans une machine immergée dans de l'eau et qui sépare l'élément combustible proprement dit et la chemise en graphite. Ces éléments nus sont placés dans des paniers; ceux-ci sont ensuite rangés dans la piscine à l'aide d'un pont roulant équipé d'un bras télescopique et d'un grappin spécial.

La piscine est conçue pour permettre d'entreposer des éléments combustibles équivalant à une charge et demie du réacteur, ce qui représente 16 000 étuis de cinq éléments.

Les gaines en magnésium-zirconium (Mg-Zr) des éléments combustibles sont directement en contact avec l'eau de la piscine. C'est pourquoi cette eau est spécialement traitée pour éviter toute corrosion du métal susceptible d'entraîner des ruptures de gaine et donc une contamination de l'eau par les produits de fission. De plus, l'étanchéité de cette piscine est tout particulièrement étudiée pour que, dans l'éventualité d'une contamination de l'eau, cette dernière n'aille pas polluer le sol et l'eau de la nappe phréatique.

8.2.2. Automatisme et télécommande de la manutention. — Suivant leur position dans le cœur, milieu ou périphérie, l'usure des éléments combustibles est assez différente, et pour les utiliser d'une façon homogène on les change périodiquement de position. Ces opérations s'ajoutant aux opérations de renouvellement font que le D.P.M. est une machine très utilisée, d'autant plus que le nombre des éléments combustibles est important. Les opérations de manutention étant très nombreuses et s'effectuant de plus d'une manière totalement aveugle, il est absolument nécessaire de disposer d'un ensemble au fonctionnement très sûr, et cela en toute sécurité. C'est pourquoi la commande et le contrôle des principales opérations, notamment celles du renouvellement du combustible et de la manutention des barres de contrôle et de leurs treuils, sont entièrement automatisés.

On peut schématiquement décomposer la télécommande en quatre parties:

1° *Un pupitre de préparation des ordres.* — C'est une machine à écrire qui délivre des bandes perforées et permet de transcrire sous une forme codée tous les ordres nécessaires à l'exécution de différents cycles d'opérations élémentaires. La succession de ces ordres constitue le programme du travail à effectuer.

2° *Un automatisme centralisé de commande et de contrôle*, qui comprend:

a) *un lecteur de bandes perforées,*

b) *une mémoire centrale* réalisée sous forme d'un tambour magnétique. Sur ce tambour sont enregistrés en permanence tous les sous-programmes, c'est-à-dire l'ensemble des ordres correspondant au cycle complet d'une opération élémentaire. Dans chaque cycle élémentaire se trouvent les ordres pour la commande des organes à manœuvrer et les ordres pour contrôler cette exécution et éventuellement détecter et signaler les organes défaillants.

3° *Des chaînes de relayage électromécanique.* — Ces chaînes, constituées par du matériel de relayage classique (relais, contacteurs) réalisent les liaisons entre l'automatisme central et les organes électromécaniques ou pneumatiques (moteurs, vérins pneumatiques). Les conducteurs utilisés sont groupés en faisceaux de fils mis sous forme de matrice de telle sorte que toute mise en service d'un appareil, d'un contacteur par exemple, est le résultat de la mise sous tension d'une ligne et d'une colonne d'une *matrice de commande.*

Le bon fonctionnement d'un organe est vérifié au moyen d'un contact « fin de course » qui est lui-même relié à l'automatisme central par une *matrice d'analyse;* cela permet un contrôle permanent du bon déroulement des opérations.

4° *Une imprimante.* — L'ensemble des opérations est traduit en langage clair sur une *imprimante* qui, avec le lecteur de bande et le panneau de contrôle (marche, arrêt, commande pas à pas, dépannage), est installée dans la salle de commande de la centrale. Quant au matériel électronique, il est placé dans des armoires situées dans le bâtiment électrique.

8.2.3. Le bâtiment du réacteur. — L'ensemble du caisson et du bâtiment du combustible irradié est placé entre les pieds d'un immense portique de plus de 75 mètres de hauteur qui supporte la toiture. Dans la partie supérieure, les quatre faces verticales sont revêtues par un bardage; au-dessus du caisson et du B.C.I. se trouve une grande salle qui abrite le dispositif principal de manutention.

Ce portique n'a pas été prévu pour servir uniquement de bâtiment; son rôle a été primordial pendant la construction du réacteur et il a été à la base de toute l'organisation du chantier. En effet, il supportait des engins de levage et en particulier deux ponts roulants de 3 000 kN chacun. Ces deux derniers ont notamment servi à la manutention des pièces lourdes telles: le bloc tubulaire inférieur (540 t), la jupe support (625 t), les tours de l'échangeur, l'aire-support et ses annexes (648 t) et le bloc tubulaire supérieur (610 t).

Cette manutention a été imposée par la disposition intégrée car pour des raisons de durée de chantier (donc pour raison d'économie) il a fallu réaliser des chantiers locaux séparés pour préfabriquer ces pièces pendant la construction du caisson lui-même. Ces pièces furent introduites, à des époques bien précises, par le haut du caisson avant coulage de la dalle supérieure. Pour empiler ce matériel dans le caisson il était nécessaire d'avoir une hauteur libre de 61 m sous crochet.

Ces ponts servirent également à mettre en place la dalle supérieure du bâtiment du combustible irradié qui avait été préfabriquée au sol en trois éléments de 200 t. L'ossature métallique était alors plus importante car il fallait desservir des aires de manutention adjacentes à l'ouvrage; seule ce qu'on a appelé la *nef-pile* a été conservée.

9. LES GROUPES TURBO-ALTERNATEURS

Au sens du terme, il n'y a pas de salle des machines. En effet les deux groupes turbo-alternateurs sont du type extérieur, c'est-à-dire qu'ils sont simplement protégés par un capotage métallique (V. planche hors-texte). Ils sont placés perpendiculairement au bâtiment du réacteur, du côté opposé au bâtiment du combustible irradié (fig. III-13).

Les installations de transformation d'énergie thermique en énergie mécanique et en énergie électrique ne sont pas fondamentalement différentes de celles des centrales thermiques (V. t. 1, Centrales thermiques).

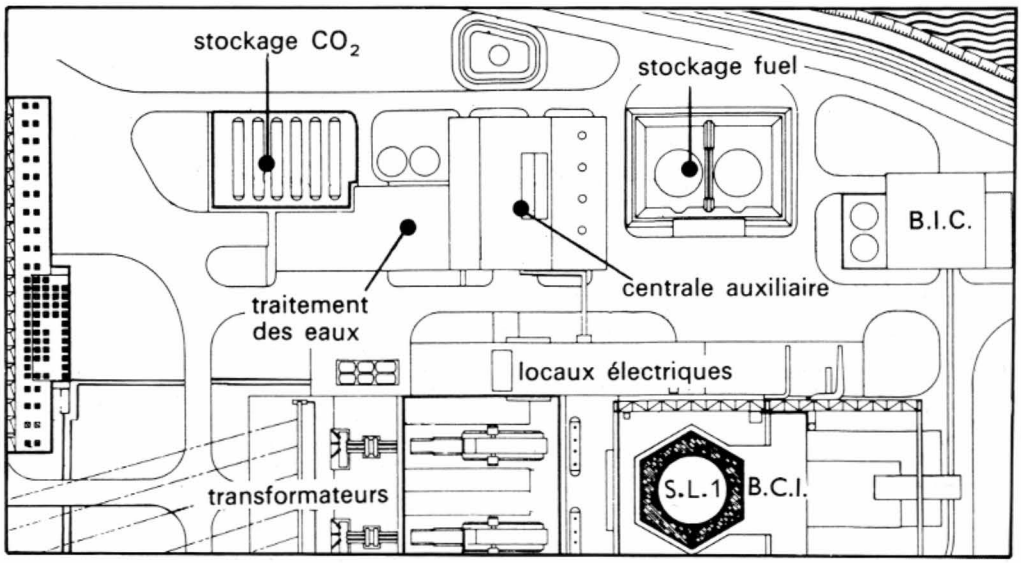


Fig. III-13
Plan de Saint-Laurent-des-Eaux 1 (É.D.F.)

9.1. La turbine. — La température et la pression de la vapeur sont ici très inférieures à celles de la vapeur à l'entrée d'une turbine d'une centrale thermique. De plus, dans une centrale nucléaire de ce type, à puissance égale le débit de vapeur est supérieur de 50 % à l'admission et de 60 % à l'échappement. C'est pourquoi le constructeur de la turbine a dû adopter certaines dispositions différentes de celles qu'il utilise dans le thermique classique de même puissance. Ainsi la veine de vapeur à l'admission a été dédoublée ; de même, l'adoption de boîtes d'échappement à trois flux au lieu de deux a permis d'éviter un allongement de la ligne d'arbre (deux corps basse pression au lieu de trois), tout en ayant des aubages mobiles de hauteur raisonnable (cela est très important car les effets d'érosion sont proportionnels à la quatrième puissance de la vitesse tangentielle). De plus, pour empêcher l'érosion sur les aubes placées dans les zones de vapeur humide, le constructeur a tracé sur leurs extrados des rainures radiales qui recueillent l'eau et la drainent par centrifugation vers des chambres situées en périphérie.

La turbine est du type à action, à arbre horizontal. Elle comprend :

— un corps à haute pression dédoublé en 2 × 8 étages ; la chute de pression est obtenue en huit détentes ;

— deux corps en basse pression de 12 étages chacun ; la chute de pression est réalisée en cinq détentes.

La vapeur, venant des échangeurs par quatre tuyauteries, traverse quatre vannes d'arrêt et quatre soupapes principales avant son admission dans le corps haute pression.

9.2. La régulation. — Le réglage de la puissance est fait par laminage total sur l'ensemble de la section d'admission. Les vannes d'arrêt et les soupapes de régulation sont équipées chacune d'un dispositif de commande ; leur réglage est entièrement automatique (régulation électronique) et elles sont contrôlées en permanence par des chaînes de sécurité électriques. C'est ainsi que les masses de survitesse des dispositifs classiques sont remplacées par des alternateurs à fréquence variable alimentant des filtres. Ces dispositifs électriques confèrent à la régulation une très grande souplesse ; les fonctions de sécurité peuvent être essayées et contrôlées, donnant ainsi une très grande sécurité d'exploitation.

Les circuits de régulation et de graissage sont séparés. Les servomoteurs hydrauliques commandés par la régulation électronique sont alimentés par un fluide spécial. Quant aux pompes de circulation d'huile de graissage, elles sont entraînées par des moteurs alimentés par un alternateur spécial de 60 kVA à excitation statique entraîné par la turbine ou bien par le réseau électrique auxiliaire de la centrale.

9.3. Le condenseur. — En plus de son rôle normal qui est de condenser quelque 900 tonnes par heure de vapeur s'échappant des corps basse pression de la turbine, le condenseur est équipé de deux détendeurs désurchauffeurs (du type mélangeur) qui peuvent être utilisés pour détendre et désurchauffer de la vapeur à 33,6 bars et à 390 °C avec un débit de 300 t/h. Cela permet de contourner la turbine et de faire débiter le générateur de vapeur directement dans le condenseur, en particulier lorsque les caractéristiques de la vapeur ne sont pas satisfaisantes.

Il faut noter à ce propos que les condenseurs des turbines des soufflantes sont également pourvus d'un détendeur désurchauffeur permettant de détendre et de désurchauffer 100 t/h de vapeur à 43 bars et à 400 °C, le débit de la turbosoufflante étant ramené dans ce cas à 4 t/h (le débit normal de la turbosoufflante est de 64 t/h).

À l'intérieur de la manchette d'un condenseur principal se trouvent deux demi-réchauffeurs du poste d'eau qui élèvent de 20 °C environ la température de l'eau d'extraction (eau condensée) avant qu'elle soit introduite dans le réchauffeur dégazeur.

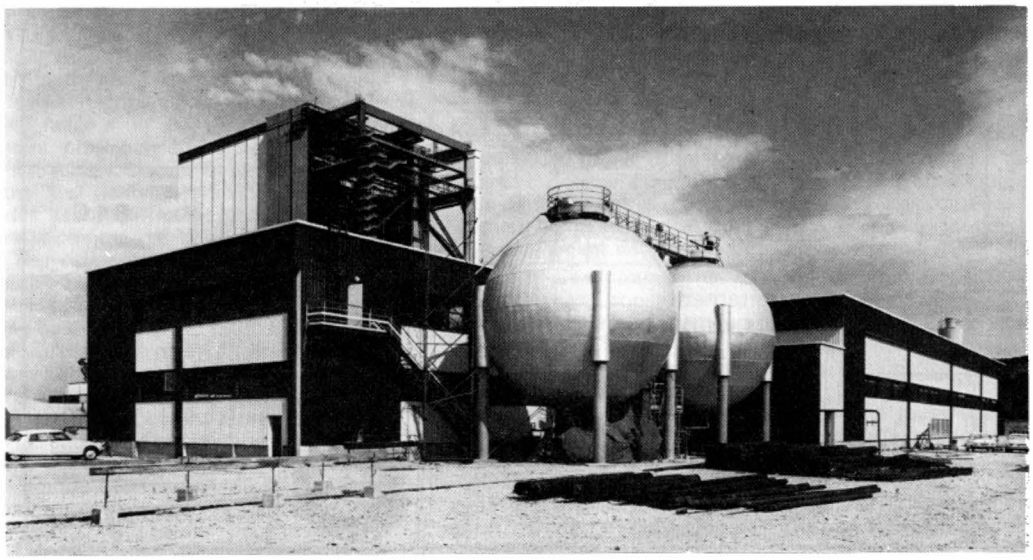
La surface totale d'échange des tubes du condenseur est de 14 400 m² et le débit d'eau de circulation (eau de refroidissement) est de 12 m³/s.

9.4. L'alternateur. — L'alternateur entraîné directement par la turbine est en tout point semblable à ceux, de même puissance, que l'on peut trouver dans les centrales thermiques classiques. Les bobinages du stator sont refroidis par de l'hydrogène. En bout d'arbre se trouve un réducteur de vitesse de 3 000 tr/mn à 1 000 tr/mn qui entraîne l'excitatrice.

Caractéristiques principales des groupes turbo-alternateurs :

Nombre de groupes	2
Vitesse de rotation	3 000 tr/mn
Turbine :	
Pression de la vapeur à l'admission	33,6 bar
Température de la vapeur à l'admission	390 °C
Débit de la vapeur	900 t/h
Pression au condenseur	35 à 40 mbar
Nombre de soutirages	2
Alternateur :	
Nombre de phases	3
Fréquence	50 Hz
Puissance apparente	290 MVA
Puissance active nominale	250 MW
Facteur de puissance (cos φ)	0,85
Tension aux bornes	20 kV

9.5. Évacuation de l'énergie électrique. — Chaque alternateur est relié à un transformateur au moyen d'un jeu de barres, sous gaines coaxiales, pouvant supporter un courant de 10 000 A. Chaque transformateur principal est relié à un poste à haute tension par une ligne à 380 kV équipée de câbles aluminium acier de 595 mm² de section.



Centrale du Bugey : stockage du gaz carbonique (*Bérenger-É.D.F.*)

Sur le jeu de barres 20 kV est branché, au moyen d'un interrupteur-enclencheur (coupleur) à couplage automatique, un transformateur de soutirage pour l'alimentation des auxiliaires.

Caractéristiques des transformateurs :

Transformateurs principaux :

Nombre	2
Puissance	290 MVA
Rapport de transformation	20/405 ± 3,5 %

Transformateurs de soutirage :

Nombre	2
Puissance	12 MVA
Rapport de transformation	20/5,77

10. LES AUXILIAIRES DE LA CENTRALE

Une centrale nucléaire, comme Saint-Laurent-des-Eaux, dispose d'un certain nombre d'installations ou de circuits auxiliaires ; ils ne sont pas fondamentalement différents de ceux que l'on peut trouver dans une centrale thermique classique, ni dans les idées directrices de leur conception, ni dans leur réalisation. C'est pourquoi on ne les citera que pour mémoire. Ce sont principalement :

— les installations de traitement continu de l'eau d'alimentation des échangeurs ;
— les circuits des auxiliaires électriques ;
— les circuits de l'eau de réfrigération pour les différents réfrigérants ;
— les circuits d'eau brute et circuits d'eau d'incendie ;
— le circuit d'eau de circulation (réfrigération des condenseurs principaux et des condenseurs des turbosoufflantes).

Pour ce qui est de ce dernier circuit on rappellera cependant que, compte tenu des caractéristiques de vapeur, le cycle thermodynamique impose de dissiper au condenseur deux fois plus de chaleur environ qu'avec un cycle thermodynamique du thermique classique. Par conséquent pour un même échauffement de l'eau de circulation son débit doit être environ le double de celui d'une tranche thermique de même puissance.

En plus des auxiliaires que l'on vient de citer, on trouve d'autres installations auxiliaires, particulières à la centrale de Saint-Laurent-des-Eaux :

— Les circuits auxiliaires de l'anhydride carbonique.
— La centrale auxiliaire.

10.1. Les circuits auxiliaires de l'anhydride carbonique (CO_2). — L'anhydride carbonique est le fluide de refroidissement ; la centrale dispose d'un poste de stockage d'anhydride carbonique épuré. Celui-ci, étant stocké sous forme liquide, est maintenu à une température de 5 °C et à une pression de 40 bars. Le poste de stockage, commun aux deux tranches, a une capacité de 600 t.

Le remplissage du caisson en anhydride carbonique gazeux s'effectue en réchauffant l'anhydride carbonique liquide dans une installation de vaporisation.

Le circuit principal contient environ 187 t de CO_2 ; celui-ci est mis en circulation dans le caisson par les turbosoufflantes avec un débit nominal de 8 720 kg/s. Pendant cette circulation le gaz se charge de poussières de graphite et d'humidité (V. ci-dessus § 2.1) et également de traces d'huile (cette huile vient des fuites aux paliers des soufflantes). On a d'ailleurs constaté que cette huile subit en partie une modification dans le réacteur ; elle est principalement transformée en méthane (CH_4). Pour éliminer ces impuretés, à la base du bâtiment du combustible irradié, on a placé des installations de traitement du gaz formées de deux circuits d'épuration (fig. III-14).

a) *Le circuit de filtration « gros débit » :* par deux circuits de dérivation, montés en parallèle, le gaz est pris en aval des soufflantes, passe dans deux dépoussiéreurs du type cyclone, et revient à la base du caisson en amont des soufflantes. C'est la différence de pression entre l'amont et l'aval qui assure la circulation du gaz. Les caractéristiques de filtration sont telles que les particules de diamètre supérieur à 5 μm et les particules de diamètre inférieur à 5 μm sont retenues respectivement à 99 % et à 80 %. Le débit du gaz filtré est de 300 t/h, soit environ 1 % du débit nominal total.

b) *Le circuit de filtration et d'épuration « petit débit » :* le gaz, pris en aval des soufflantes, passe dans des filtres fins (papier et laine de verre) qui arrêtent 100 % des particules de poussières d'un diamètre supérieur à 0,25 μm ; il est ensuite refroidi pour pouvoir passer dans trois chaînes de dessiccation montées en parallèle. Le refroidissement et les pertes de charges ayant fait baisser la pression, le gaz est repris par des surpresseurs puis renvoyé à la base du caisson, en aval des soufflantes. Le débit de gaz épuré en continu est de 40 t/h.

Les circuits auxiliaires de gaz carbonique alimentent aussi le système de refroidissement du dispositif principal de manutention.

c) *Les circuits de ventilation à l'arrêt :* on trouve également des circuits pour la vidange à l'air du réacteur (ceux-ci sont équipés de filtres fins et de pièges à l'iode). En effet, en cas de nécessité d'intervention de personnel dans le réacteur (réparations sur un échangeur par exemple) il faut pouvoir assurer la ventilation du réacteur à l'arrêt (fig. III-15). Dans ce but, on trouve un circuit pour l'air : il comprend principalement un ventilateur (50 kg/s), des filtres en papier et des réfrigérants. L'entrée et la sortie de l'air se font par deux tunnels, identiques à ceux qui servent de logement pour les soufflantes. Le personnel et le matériel pénètrent par le tunnel réservé à l'entrée de l'air.

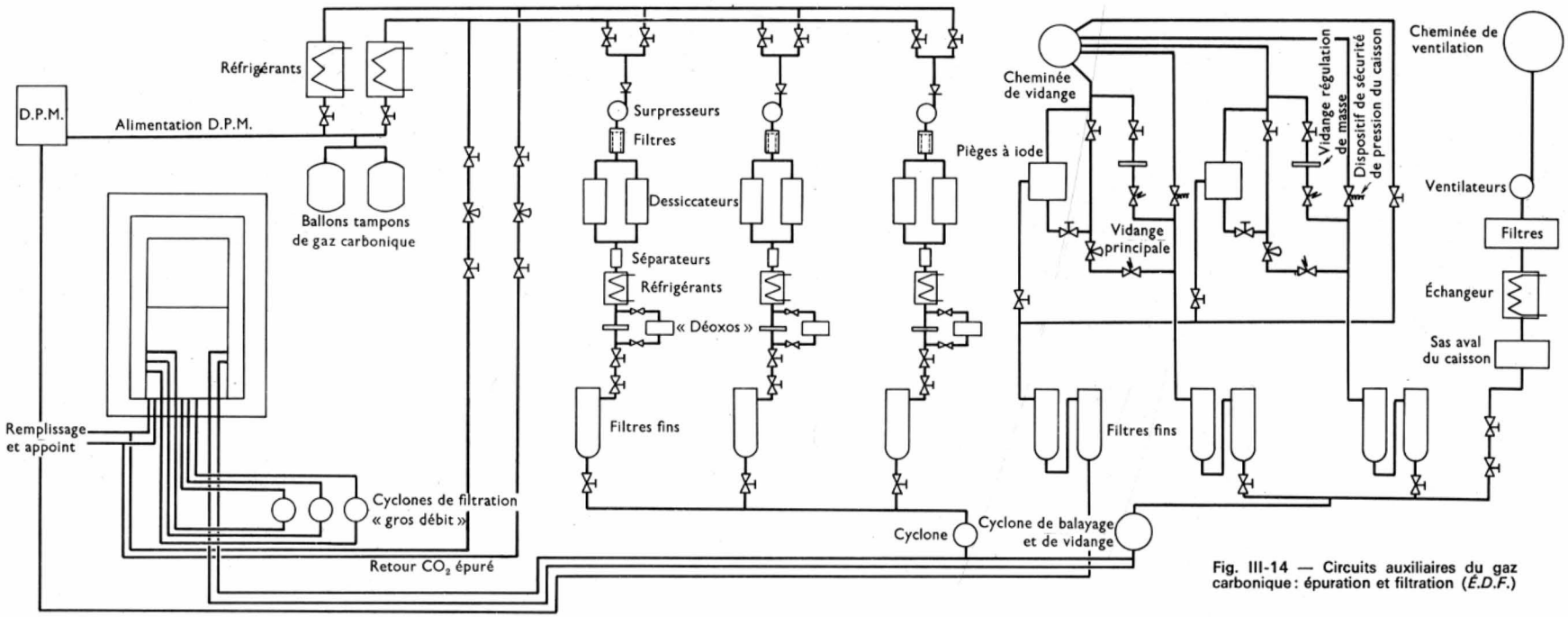
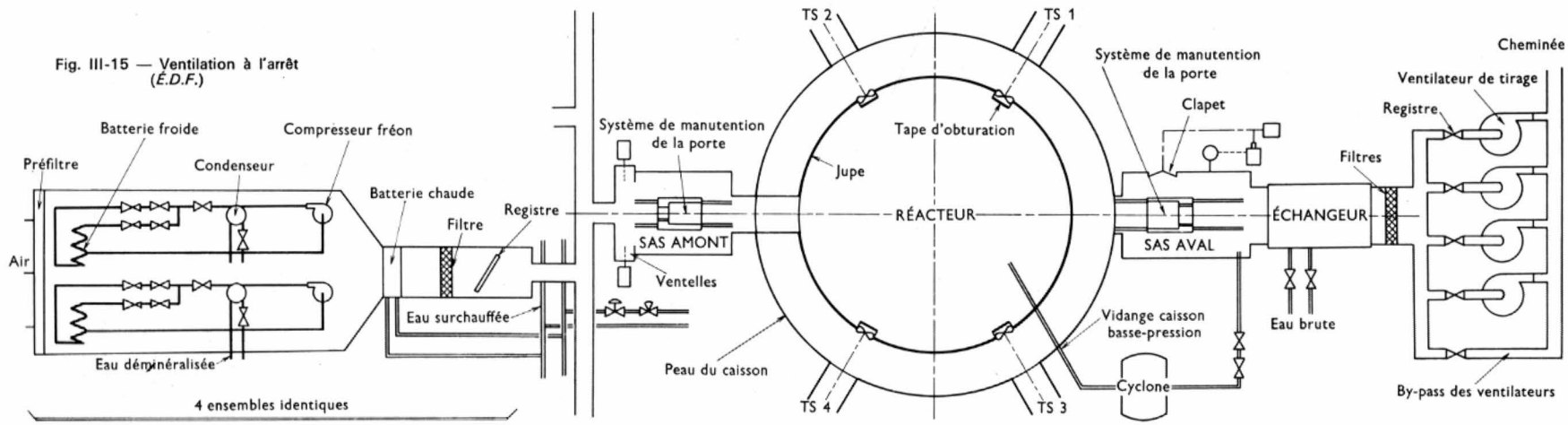


Fig. III-14 — Circuits auxiliaires du gaz carbonique : épuration et filtration (*É.D.F.*)

Fig. III-15 — Ventilation à l'arrêt (*É.D.F.*)



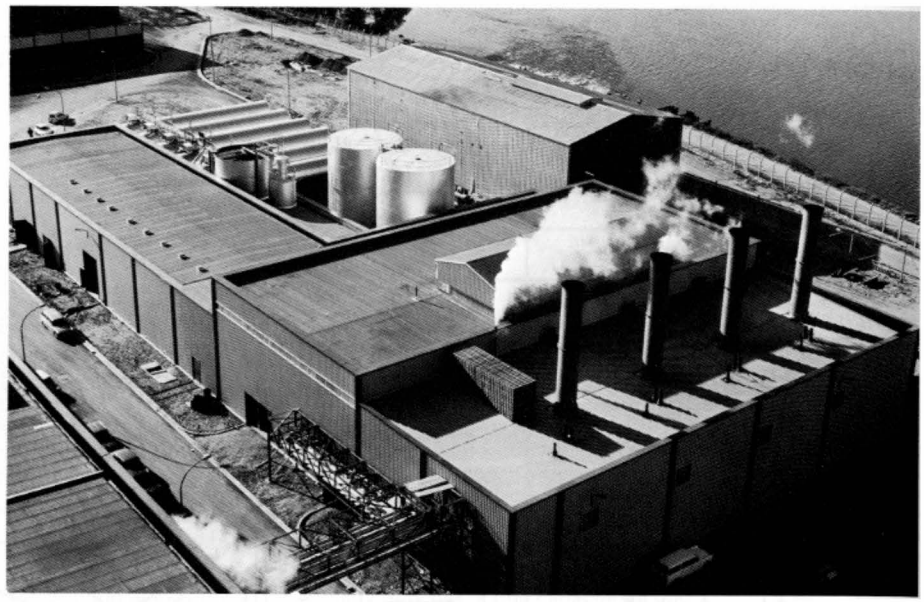


Fig. III-16

Centrale auxiliaire de Saint-Laurent-des-Eaux (*Brigaud-É.D.F.*)

10.2. La centrale auxiliaire (fig. III-16). — La puissance nécessaire pour assurer la circulation du gaz caloporteur pendant le fonctionnement du réacteur est si importante qu'il est plus économique et surtout plus sûr d'entraîner les soufflantes par des turbines plutôt que par des moteurs électriques. Toutefois, comme il est impératif de pouvoir assurer le refroidissement du réacteur à l'arrêt, alors que le générateur de vapeur ne fonctionne plus, on doit disposer d'une source de vapeur indépendante pour alimenter ces turbines. En effet, le positionnement de l'échangeur sous le cœur du réacteur ne permet pas le refroidissement de celui-ci par circulation naturelle de gaz suivant le principe du thermosiphon. C'est pourquoi, sur le site de Saint-Laurent-des-Eaux, on trouve une centrale auxiliaire de production de vapeur. On a profité de la présence de cette installation pour lui faire produire également l'énergie électrique indispensable pour assurer l'alimentation des auxiliaires électriques vitaux de la centrale (les autres auxiliaires, qui tolèrent une interruption d'alimentation sans préjudices graves pour le fonctionnement de la centrale ou pour l'état du matériel, sont alimentés par les transformateurs auxiliaires de soutirage).

Cette centrale auxiliaire a été conçue pour alimenter deux tranches pouvant fournir chacune une puissance électrique de 500 MW. Elle est composée de quatre chaudières et de quatre groupes turbo-alternateurs.

a) *Les chaudières.* — Alimentée en fuel domestique, chaque chaudière est du type automatique à démarrage rapide. À charge réduite, elle produit 15 t/h de vapeur pour l'alimentation de la turbine du groupe auxiliaire. À pleine charge elle peut fournir 35 t/h de vapeur pour alimenter, la turbine et deux turbosoufflantes fonctionnant à environ 12 % de leur puissance nominale. Par mesure de sécurité elle dispose de deux pompes d'alimentation en fuel. De plus, elle possède un brûleur à faible débit : en exploitation normale, il permet de tenir la chaudière en température pendant les périodes où elle est en réserve.

Il faut remarquer qu'après la chute des barres du réacteur, l'échangeur principal peut encore alimenter les turbosoufflantes pendant une demi-heure environ.

Chaque chaudière possède sa propre pompe alimentaire et est indépendante des autres. Toutefois, en cas d'indisponibilité, pour prendre le relais l'une de l'autre, chaque chaudière est reliée aux quatre tuyauteries de vapeur d'alimentation des turbosoufflantes, les diverses tuyauteries formant ainsi une véritable grille à mailles carrées. À chaque nœud de la grille se trouve une vanne à commande manuelle. Les positions ouverte ou fermée des vannes sont telles qu'en fonctionnement normal on peut réaliser quatre schémas-blocs entièrement indépendants.

En cas d'indisponibilité d'un matériel autonome (un groupe auxiliaire et sa pompe d'extraction ou une turbosoufflante et sa pompe d'extraction forment des groupes de matériels autonomes), à l'aide de ces vannes, on peut modifier le schéma initial et composer autant de schémas indépendants que de chaudières disponibles.

Les caractéristiques de la vapeur sont évidemment les mêmes que celles de la vapeur du circuit principal (390 °C et 36,5 bars) puisqu'en fonctionnement normal les turbosoufflantes sont alimentées en vapeur par l'échangeur principal.

b) *Les groupes turbo-alternateurs auxiliaires.* — Chacun des quatre groupes turbo-alternateurs auxiliaires possède son condenseur et sa pompe d'extraction d'eau condensée (doublée par mesure de sécurité). D'une puissance de 4 MW, l'alternateur alimente un jeu de barres triphasé sous une tension de 5,5 kV ; c'est sur ce jeu de barres que sont branchés tous les auxiliaires essentiels des deux tranches.

L'ensemble des installations de cette centrale auxiliaire, dont le fonctionnement à puissance réduite est permanent (afin d'assurer un secours rapide) est situé dans un bâtiment unique indépendant du reste de la centrale.

11. CONTRÔLE-COMMANDE DE LA CENTRALE (fig. III-17 et III-18).

Si l'on dresse un inventaire rapide et approximatif des principaux matériels à exploiter on trouve notamment :

— deux groupes turbo-alternateurs de 250 MW et leurs auxiliaires ;
— quatre turbosoufflantes de 16 MW et leurs auxiliaires ;
— dix-huit motopompes de graissage ;
— quatorze motopompes alimentaires ;
— seize motopompes d'extraction d'eau des condenseurs ;
— douze motopompes d'extraction d'air ;
— cent trente-huit treuils de barre de contrôle ;
— cinq cents électrovannes pour le circuit de la détection de rupture de gaine des éléments combustibles.

Sachant qu'il faut plusieurs centaines d'opérations uniquement pour effectuer et contrôler un démarrage ou un arrêt de la centrale et sachant d'autre part que l'exploitation, que l'on veut sûre, est dirigée à partir d'une salle de commande unique par un seul conducteur, assisté de rondiers, on conçoit qu'il faille faire appel à un automatisme très poussé. La commande et le contrôle des automatismes sont réalisés avec l'aide d'un calculateur numérique. Toutefois, l'utilisation de ce calculateur est limitée en tenant compte des impératifs suivants :

— en cas de panne du calculateur, la centrale doit pouvoir rester dans l'état de fonctionnement où elle se trouve à l'apparition de la panne ;

— pendant une telle panne, il peut survenir un défaut et sans l'aide du calculateur l'on doit pouvoir ramener le

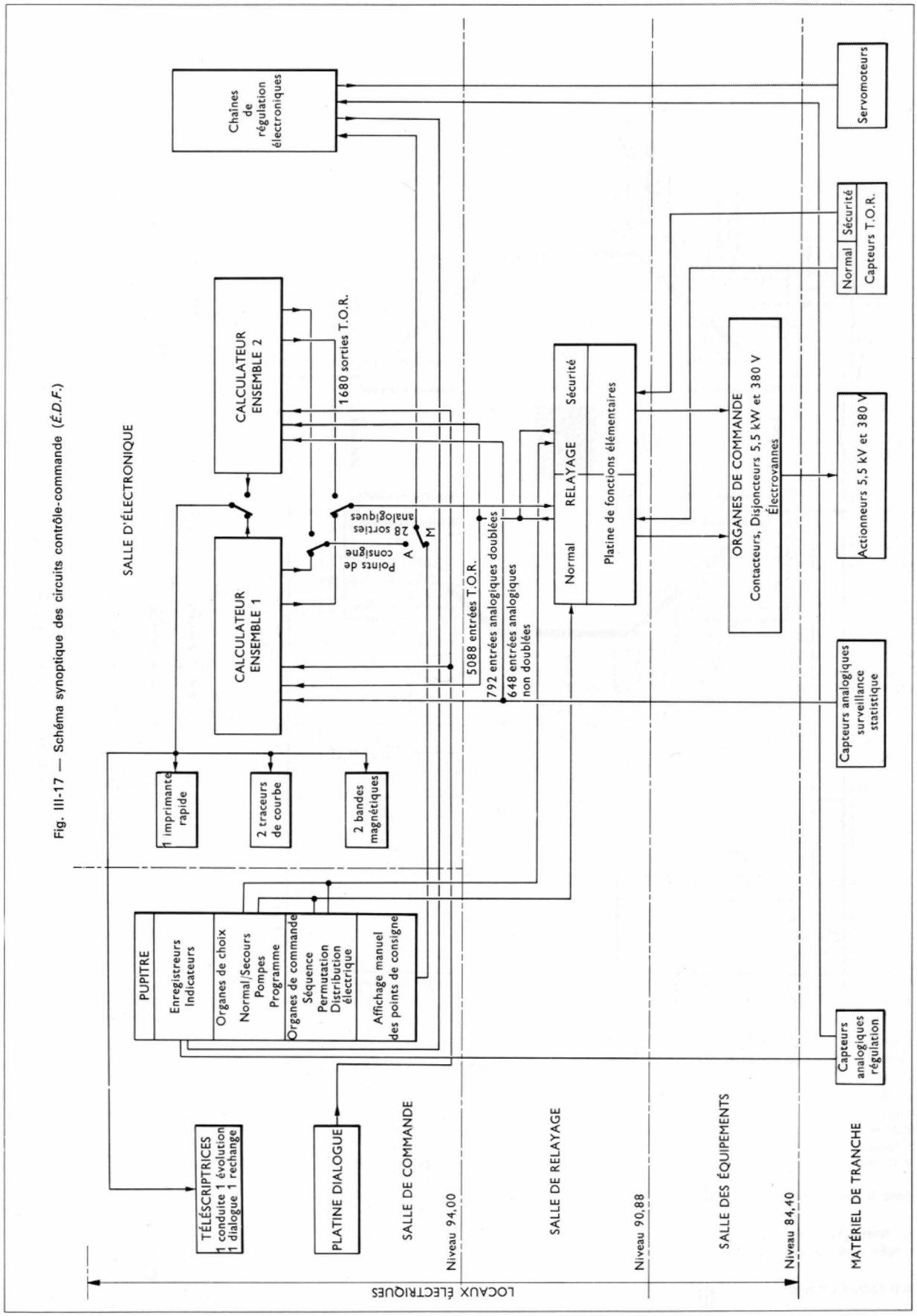


Fig. III-17 — Schéma synoptique des circuits contrôle-commande (*É.D.F.*)

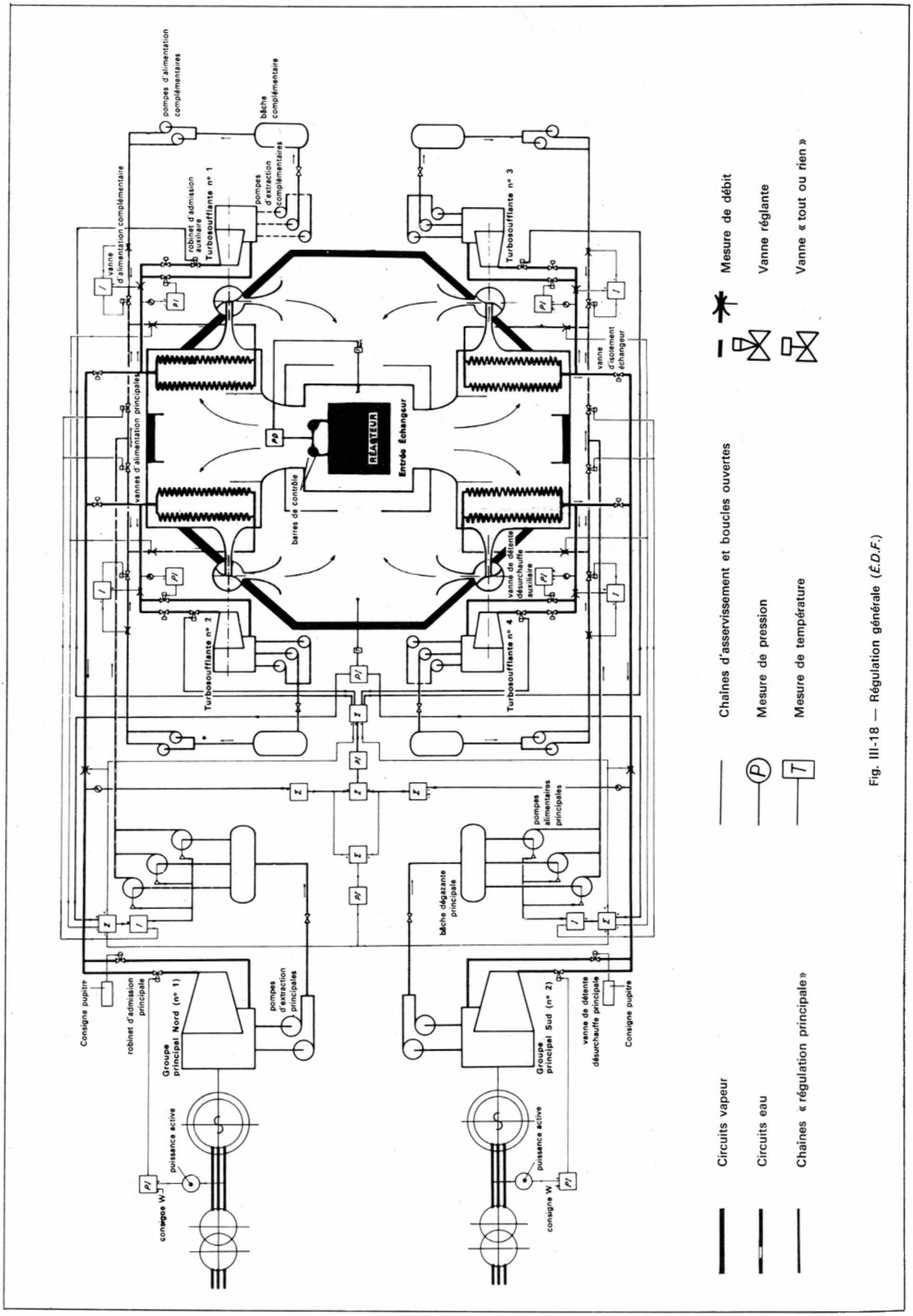


Fig. III-18 — Régulation générale (*É.D.F.*)

fonctionnement de la centrale à un état compatible avec l'existence de ce défaut; pour cette raison les régulations sont indépendantes du calculateur.

Elles sont commandées par des *automatismes câblés*. On désigne sous ce nom tout dispositif électronique, électromécanique où pneumatique qui provoque automatiquement certaines actions à la suite de certaines sollicitations et cela suivant un processus logique fixé à l'avance. Les divers composants de cet automatisme sont reliés entre eux par des connexions mises en place une fois pour toutes. De par leur rigidité ils sont donc différents des *automatismes programmés*.

Pour augmenter la sûreté de fonctionnement des automatismes, ceux-ci sont raccordés à deux calculateurs identiques indépendants l'un de l'autre et travaillant en parallèle. Les ordres ne sont donnés que par le seul *calculateur pilote :* simultanément l'autre calculateur, tenu en réserve, traite tous les programmes afin de pouvoir prendre instantanément et automatiquement le relais en cas de panne du calculateur pilote.

11.1. Principe d'organisation des automatismes. — Pour démarrer une centrale, influer sur son fonctionnement suivant un certain programme caractérisé par des *points de consigne*, ou bien arrêter volontairement ou non cette centrale, il faut agir sur un certain nombre de matériels. Ces matériels à commander (disjoncteur pour mettre un moteur en service, contacteur-inverseur pour agir sur une électrovanne, etc.) sont appelés *actionneurs*. Des capteurs de mesures, ou des capteurs « tout ou rien », renseignent, soit sur des valeurs de certains paramètres (températures, débits, etc.) qui permettent d'agir sur des actionneurs, soit sur la position des actionneurs.

Devant la multitude de ces actionneurs et pour simplifier les schémas de commande, les actionneurs sont regroupés par *fonction élémentaire ;* on aura ainsi la fonction « graissage du groupe », la fonction « mise du groupe sur vireur », etc. À la centrale de Saint-Laurent-des-Eaux on distingue plus de quatre cents fonctions élémentaires. Chaque fonction élémentaire possède un automatisme séquentiel autonome, si bien que du point de vue de l'étude des automatismes, elle peut être considérée comme une entité. À chacune d'elle sont associées une *séquence de mise en service* et une *séquence de mise hors service*. (Une séquence est constituée d'un enchaînement, toujours dans le même ordre, de plusieurs sous-séquences). L'enchaînement des séquences, permettant de passer d'un état de fonctionnement à un autre, est réalisé à l'aide d'un programme. Il existe un certain nombre de programmes directeurs qui peuvent être choisis par l'automate lui-même en fonction des conditions de marche de la centrale. C'est le calculateur qui transmet les ordres d'exécution des séquences suivant un ordre déterminé par le programme. Après qu'il y ait eu vérification automatique que toutes les conditions nécessaires à l'exécution d'une sous-séquence sont bien remplies, les opérations prévues dans la sous-séquence sont alors effectuées grâce à l'automatisme câblé ; après exécution de la sous-séquence, le calculateur est utilisé pour vérifier cette exécution et également pour contrôler sa durée. Le conducteur de la centrale est immédiatement averti de toute anomalie.

11.1.1. Traitement automatique des défauts. — Pour ce qui concerne le traitement des défauts il existe aussi deux sortes d'automatisme :

— *Les automatismes de sécurité* qui sont réalisés par des chaînes de relayage câblées, indépendantes du calculateur. Ils sont prioritaires pour agir sur les actionneurs et sont alimentés sous une tension de contrôle (48 V) indépendante de celle utilisée pour le reste de la fonction élémentaire.

— *Les automatismes normaux* dont les chaînes sont réalisées par le calculateur qui agit sur les sous-séquences de déclenchement ou d'enclenchement des actionneurs.

Les alarmes, les reprises en secours, les déclenchements, pour chaque fonction élémentaire sont groupés en sous-séquences de « traitement de défauts » ; elles sont mises en service lors de l'apparition d'un défaut. Dans ce cas, il y a changement d'état de capteurs (ou dépassement d'un niveau de mesure) et le calculateur permet d'analyser ces changements (il peut y en avoir plusieurs centaines) et détermine l'opération à accomplir. Il y a alors neutralisation des informations normales et envoi des ordres nécessaires ; en même temps le conducteur est informé.

11.1.2. Traitement automatique des mesures. — Le calculateur peut traiter un nombre de mesures voisin de 2 000. Suivant leur importance, elles sont réalisées à des cadences diverses (une seconde, cinq secondes, une minute). Ce sont principalement des mesures de températures, pressions, débits, niveaux, grandeurs nucléaires, grandeurs électriques, grandeurs mécaniques, analyses de fluide (D.R.G. par exemple), etc.

Ces nombreuses mesures permettent la surveillance des installations, l'établissement de statistiques et de bilans. Pour ce qui est de la surveillance, pour ne pas « noyer » le personnel sous un flot d'informations qu'il n'est d'ailleurs pas nécessaire de connaître en permanence, seul un petit nombre de renseignements primordiaux sont fournis. Toutefois, à tout instant, le conducteur a la possibilité d'obtenir le renseignement qu'il désire parmi les nombreuses informations disponibles. Tous ces renseignements sont chronologiquement mis en mémoire sur bande magnétique et un certain nombre d'entre eux sont transcrits en clair à l'aide d'une imprimante rapide qui frappe le *journal de bord*. Sur celui-ci l'opérateur peut voir tous les défauts, tous les ordres qu'il a donnés, les informations élaborées par le calculateur et les changements d'états des actionneurs qui en ont résulté.

11.2. Matériels utilisés. — Le matériel utilisé comprend principalement :

a) *Deux calculateurs numériques* (C 90-40 de la Compagnie Internationale pour l'Informatique), chacun d'eux étant composé de :

— une unité centrale, ou mémoire à tores de ferrite à accès rapide (0,7 μs), de 24 576 mots de 24 bits. En cas de coupure de l'alimentation, un dispositif de protection sauvegarde les informations en mémoire normalement accessibles par programmation. La durée des opérations, avec l'indexation et l'accès en mémoire, est de 3,5 μs pour l'addition, 7 μs pour la multiplication, 17,5 μs pour la division ;

— une mémoire auxiliaire à accès lent (temps moyen 25 ms) de 96 030 mots constituée par un tambour magnétique ;

— une horloge en temps réel accessible au programmeur ;

— un télétype ;

— un lecteur-perforateur de ruban de papier (bande perforée) ;

— une unité de ruban magnétique.

b) *Des unités périphériques* en temps réel, pour chaque calculateur :

— une unité d'acquisition des mesures (U.A.M.) composée d'un ensemble de filtres commutés, d'un ensemble d'amplificateurs avec logique de commande de gains et d'un convertisseur des grandeurs analogiques en grandeurs numériques. Les grandeurs analogiques étant des tensions continues dans les gammes suivantes : 0 à $\pm$ 10 mV, 0 à $\pm$ 40 mV, 0 à $\pm$ 100 mV et 0 à $\pm$ 10 V.

La vitesse maximale de scrutation des mesures est de 80 points par seconde et il y a environ 1 800 entrées,

— un équipement d'acquisition des données « tout ou rien » composé d'un ensemble de relais d'isolement et d'un ensemble de lignes d'entrées numériques qui, sur demande du calculateur, enregistre 24 états booléens à chaque appel. Une entrée est caractérisée par son adresse composée de son rang dans la ligne et du numéro de cette ligne. Il y a 5 088 relais d'entrée ;

— un organe de commande des relais de sorties d'ordres « tout ou rien » ou de sorties analogiques.

Pour les deux calculateurs 1 680 relais délivrent ces ordres et 28 sorties analogiques sont reliées aux régulations.

c) *Des organes périphériques* électromécaniques communs aux deux calculateurs :

— Situés en salle de commande :

• une téléscriptrice de conduite sur laquelle sortent les informations élaborées par les programmes d'automatismes ;

• deux téléscriptrices d'évolution pouvant imprimer chacune 23 mesures distinctes toutes les deux minutes ;

• deux enregistreurs bicourbes banalisés ;

• un traceur de courbes numérique pouvant tracer simultanément cinq courbes $y = f(t)$.

— Situés dans la salle des calculateurs :

• une imprimante rapide (800 lignes par minute) qui imprime les statistiques et certains tableaux ;

• deux unités de bandes magnétiques pour le stockage des informations destinées à être exploitées à long terme ;

• un traceur de courbe $y = f(x)$;

• une téléscriptrice de rechange.

De plus, on trouve dans la salle de commande une « platine-dialogue » qui permet au conducteur de la centrale de donner des ordres aux calculateurs ou de leur demander des informations. Cette platine, qui comprend une soixantaine de touches ou de commutateurs, est associée à une téléscriptrice sur laquelle sont transcrits en clair les ordres donnés ou les informations reçues.

CHAPITRE IV

FILIÈRE URANIUM ENRICHI (LÉGÈREMENT), EAU LOURDE, GAZ CARBONIQUE

Les matériaux susceptibles d'être utilisés comme ralentisseurs de neutrons sont assez rares. Parmi eux on trouve « l'eau lourde » ($^{2}_{1}H_2O$ ou D_2O) dont les faibles nombres de masse des constituants et la faible section de capture des neutrons (pour D) en font un modérateur très supérieur au graphite. Toujours dans le domaine des neutrons thermiques (0,025 eV), l'eau lourde permet une meilleure utilisation de l'uranium. En tirant parti du plutonium produit au cours de l'irradiation, on peut obtenir des taux de combustions trois fois plus grands que dans le cas des réacteurs modérés au graphite. Par tonne de combustible et par mètre cube de réacteur on atteint donc des puissances très supérieures.

C'est pourquoi, dans un but d'expérimentation, le Commissariat à l'Énergie Atomique et Électricité de France ont construit et exploitent en commun la centrale des Monts d'Arrée près de Brennilis, au cœur de la Bretagne. Cette centrale, connue également sous le sigle EL 4, produit une puissance électrique de 73 MW à partir d'un réacteur d'une puissance thermique de 242 MW.

1. LE COMBUSTIBLE

Le combustible utilisé est de l'oxyde d'uranium (UO_2). L'oxyde d'uranium a été choisi pour simplifier les problèmes métallurgiques car les oxydes présentent une plus grande stabilité que les métaux aux changements de températures. Il présente en outre des avantages du point de vue sécurité ; au contact de l'anhydride carbonique il ne s'enflamme pas. En revanche, il retient bien moins les gaz de fission que l'uranium et, pour des puissances spécifiques élevées, il libère une fraction importante des gaz formés ce qui produit des pressions élevées à l'intérieur des gaines. La conductibilité thermique des oxydes est moins bonne que celle des alliages ou des métaux et c'est pourquoi on donne à ce type d'élément combustible les dimensions transversales les plus réduites possibles pour le fractionner et faciliter ainsi l'évacuation de la chaleur.

Cet oxyde d'uranium, fritté, se présente sous la forme de pastilles, empilées dans une gaine (en acier inoxydable) pour former un « crayon ». L'acier inoxydable a été choisi comme gainage pour sa résistance mécanique élevée et

Centrale des Monts d'Arrée près de Brennilis (*Baranger*)

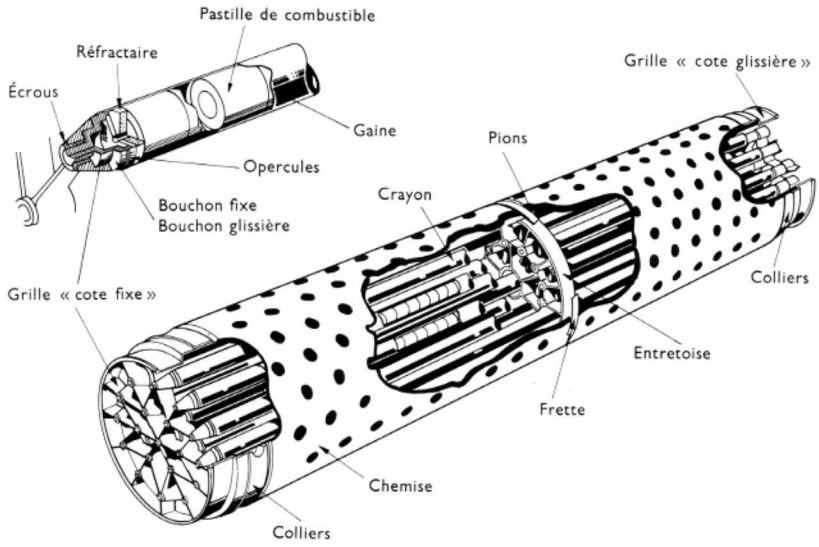


Fig. IV-1
Élément combustible « grappe » (*É.D.F.*)

pour sa bonne tenue à la corrosion. Malheureusement, il possède une assez forte section de capture de neutrons; la faible épaisseur de la gaine (0,4 mm) est le résultat d'un compromis entre la résistance mécanique et l'absorption neutronique.

Pour pouvoir disposer du nombre de neutrons nécessaire à l'auto-entretien de la réaction en chaîne, il faut enrichir légèrement l'uranium (1,6 % d'uranium 235 au lieu de 0,7 % contenu dans l'uranium naturel), d'autant plus que des neutrons sont capturés par l'oxygène de l'oxyde d'uranium lui-même. La gaine, réalisée en acier inoxydable stabilisé au niobium (20 % Cr — 25 % Ni), contient 40 pastilles d'oxyde d'uranium (diamètre: 11 mm); à chaque extrémité, deux pastilles réfractaires en alumine isolent les bouchons d'extrémités qui sont soudés latéralement et ferment la gaine. Celle-ci contient également de l'hélium pour améliorer la chute de température au contact. Un volume libre (3 %) est réservé pour les produits de fission.

Un élément combustible est composé d'une « grappe » de 19 crayons identiques, répartis en trois couches circulaires, placée dans une chemise en graphite et maintenue en place par deux grilles d'extrémité et une entretoise centrale (fig. IV-1). Le dessin de ces grilles a été étudié pour limiter au minimum les pertes de charges dans le circuit du gaz caloporteur. Les crayons sont fixés rigidement à une grille à l'aide d'un écrou soudé et peuvent se dilater librement à l'autre extrémité dans des glissières portées par la deuxième grille. L'entretoise centrale a pour but de limiter la flèche des crayons.

La chemise en graphite, à grains fins doublement imprégnés, forme un cylindre d'un diamètre intérieur de 78 mm et d'une épaisseur de 8,6 mm. Elle est percée de 328 trous de 8 mm de diamètre pour permettre la circulation du gaz de refroidissement lorsque le combustible obstrue les arrivées et les sorties du gaz dans le canal pendant la manutention de l'élément qui s'effectue à l'aide de collerettes fixées sur les grilles.

L'élément combustible, d'une longueur de 500 mm a une masse de 11 kg environ se décomposant comme suit:

— oxyde d'uranium: 8,4 kg
— acier inoxydable: 1,5 kg
— graphite et alumine: 1,1 kg

Ces éléments combustibles sont conçus pour dégager des puissances spécifiques de 30 MW par tonne et peuvent atteindre des taux de combustion (*burn-up*) de 10 000 MWj/t.

Ils atteignent les températures suivantes:

1 700 °C environ au cœur de l'oxyde d'uranium;
650 °C au maximum sur la gaine;
630 °C en moyenne sur la gaine.

La température maximale admissible sur la gaine (point chaud) est de 700 °C.

Le cœur du réacteur contient 1 944 éléments combustibles placés horizontalement dans 216 canaux groupés en une zone octogonale. Le pas du réseau est de 234 mm. Chaque canal, d'un diamètre de 110 mm environ, contient 9 éléments combustibles.

2. LES CANAUX

Les canaux dans lesquels sont placés les éléments combustibles constituent une partie du circuit du gaz caloporteur, tout au moins entre les deux lanternes d'amenée et de départ du gaz. Les prolongements des canaux au-delà des lanternes ne servent que de conduits pour la manutention du combustible. Ils traversent horizontalement le bloc réacteur de part en part et ils débouchent à chaque extrémité dans les salles de manutention.

Chaque canal est constitué par:

— *une tubulure extérieure,* ou *tube de force,* qui est conçue pour résister à la pression interne du gaz (60 bars). Les tubes de force participent également à la tenue de la cuve et de ce fait supportent des forces axiales de traction non négligeables (120 kN au maximum). La partie centrale du tube de force, située dans le cœur du réacteur et baignant dans l'eau lourde, doit être neutroniquement peu absorbante, aussi est-elle constituée d'un tube en zircaloy 2 à 950 p.p.m. d'oxygène. Ce tube a un diamètre intérieur de 107 mm et une épaisseur de 3,2 mm. De part et d'autre de cette partie centrale, dans des zones soumises aux fortes radiations du cœur, le tube de force est réalisé en acier inoxydable austénitique qui résiste bien à ces irradiations. Le reste du canal, dans les parties plus froides et protégées par les écrans biologiques (eau ordinaire et béton), est en acier ordinaire A 42;

— *une tubulure interne,* concentrique à la précédente, sert de tube de guidage. Elle est résistante à la corrosion à chaud et a de bonnes caractéristiques de frottement pour permettre une circulation aisée des éléments combustibles. La partie centrale de ce tube est en zircaloy 30;

— *un isolant thermique.* Pour éviter au tube de force, soumis à la pression, d'avoir à subir les effets de la température et pour éviter surtout les pertes calorifiques dans l'eau lourde, un isolant thermique est placé entre le tube de force et le tube-guide. Deux types d'isolants ont été expérimentés: un isolant à base de magnésie et un isolant à lames gazeuses réalisé en zircaloy gaufré.

La tubulure interne et l'isolant thermique sont amovibles et peuvent être retirés en cas d'incidents durant la vie de la centrale.

— *des éléments internes amovibles.*

Des bouchons de verrouillage et des bouchons biologiques assurent l'étanchéité au gaz et, par leur masse, font obstacle aux rayonnements. Des vannes sphériques parfont l'étanchéité et augmentent la sécurité.

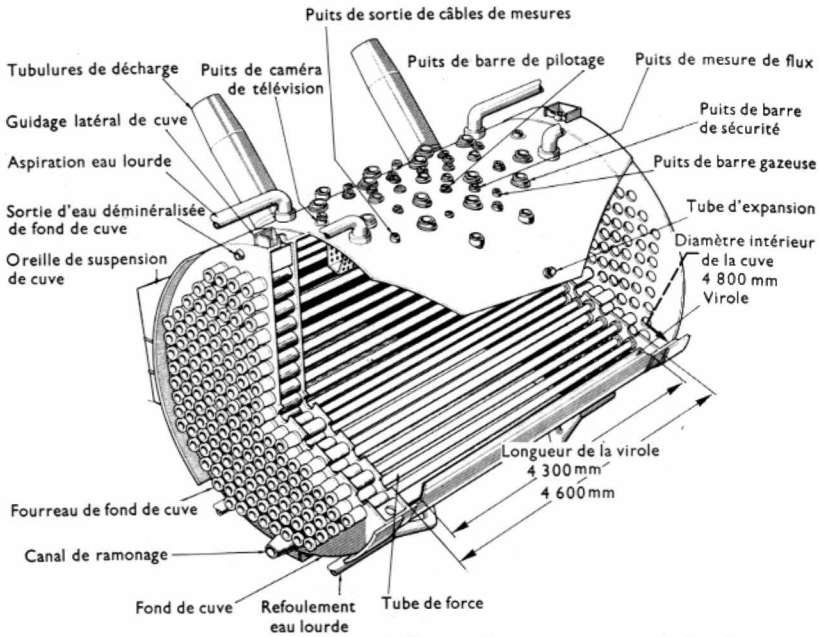


Fig. IV-2

Schéma de la cuve (*É.D.F.*)

3. LA CUVE (fig. IV-2)

Pièce centrale du réacteur, la cuve assume deux fonctions :

1° Comme *structure permanente du cœur*, elle assure à ce titre le *positionnement* des canaux (suivant un réseau régulier) et des barres de contrôle et plus particulièrement le positionnement des barres de sécurité qui doivent pouvoir passer entre les tubes de force, perpendiculairement à ceux-ci, sans aucune gêne. On conçoit donc toute la précision qu'il a fallu obtenir pour réaliser cet ensemble de grande dimension, tant du point de vue chaudronnerie que du point de vue génie civil.

2° Comme *récipient pour l'eau lourde*, elle doit être étanche et résister à la corrosion et à la fragilisation due à l'effet Wigner. Elle doit pouvoir également résister à une surpression de l'ordre de 13 bars (valeur déterminée à la suite d'essais sur des modèles à l'échelle 1/10 et 1/2) en cas d'explosion d'un tube de force, bien qu'elle ne supporte pas normalement de pression. Dans le cas d'un tel accident, l'eau lourde est éjectée du cœur par le gaz et récupérée dans un réservoir.

La cuve est un cylinde horizontal à base circulaire dont les deux doubles fonds sont reliés rigidement entre eux par les tubes de force. Elle comprend :

— une virole cylindrique en acier inoxydable au molybdène à faible teneur en carbone ; cette virole, d'une longueur de 4 300 mm, a un diamètre intérieur de 4 800 mm et une épaisseur de 30 mm ;

— deux doubles fonds en acier inoxydable au molybdène constitués chacun par deux plaques d'un diamètre de 4 740 mm et de 35 mm d'épaisseur.

Ces deux plaques sont maintenues espacées de 380 mm par 216 fourreaux en acier inoxydable, qui permettent le passage des canaux, et par des entretoises sur leur périphérie. Ces deux fonds sont fermés par une virole en acier inoxydable à faible teneur en carbone. Ces doubles fonds sont refroidis par une circulation d'eau et jouent le rôle d'un écran thermique protégeant les jonctions des tubes de force.

La virole de la cuve est traversée dans la partie supérieure par les pénétrations pour les barres de contrôle (33) et pour les mesures de flux. La cuve se trouve placée au milieu d'une enceinte en béton qui sert de protection biologique.

Des écrans thermiques sont interposés entre la cuve et l'enceinte pour protéger le béton de la chaleur. Il y a deux types d'écran thermique : les écrans axiaux et les écrans latéraux. Les *écrans axiaux* sont constitués par des caissons étanches en tôle de 15 mm enfermant une lame d'eau en circulation de 400 mm. Ces écrans servent à refroidir les prolongements des canaux avant la traversée du béton des faces de chargement. Les rayonnements ayant eu déjà à traverser le fond de cuve, le flux thermique résiduel est très faible près de l'écran axial. Les *écrans latéraux* vus suivant l'axe de la cuve ont la forme d'un hexagone irrégulier. Ils entourent le réacteur et, tout en complétant la protection biologique, ils assurent la protection thermique du béton. Formés par deux caissons symétriques, en tôle de 30 mm, avec une épaisseur d'eau de 340 mm, ils limitent le flux thermique sur le béton à 25 mW/cm². Ces écrans latéraux servent aussi de support pour la cuve. En effet, celle-ci y est suspendue par quatre biellettes à rotules, deux au niveau de chaque fond. Un des fonds étant maintenu fixe par des butées, l'autre fond peut se déplacer longitudinalement afin de permettre la libre dilatation de la cuve suivant son axe horizontal.

4. LES BARRES DE CONTRÔLE

Les barres de contrôle, situées sur le dessus du réacteur, traversent le béton et l'écran thermique supérieur par l'intermédiaire du bloc tubulaire. Elles permettent :

— la compensation des variations de réactivité ;
— la régulation de la puissance neutronique ;
— le respect des conditions de sécurité en marche et à l'arrêt.

Les barres de contrôle sont au nombre de 33 et sont de trois types :

— *21 barres de sécurité et de compensation* (type S). L'élément absorbant est du carbure de bore fritté gainé d'acier inoxydable. Manœuvrées par des treuils à câbles, elles assurent une antiréactivité totale de 7 000 p.c.m. (pour cent mille) variant à raison de 3 p.c.m./s en moyenne. Les variations de radioactivité sont évaluées en centmillième et on les note p.c.m. La réactivité ρ est égale à $\rho = \frac{K - 1}{K}$ la lettre K représentant le facteur de multiplications des neutrons dans une réaction en chaîne.

Elles sont refroidies par une circulation ascendante d'eau lourde prise en dérivation sur le circuit principal de refroidissement du modérateur. D'une longueur totale de 4 350 mm elles ont une longueur active de 3 070 mm et une section de (60 × 80) mm².

Placées en position haute, elles assurent les fonctions de sécurité en pouvant fonctionner en chute libre. La compensation de l'effet xénon au démarrage peut se faire à l'aide d'un dispositif d'empoisonnement homogène du modérateur par un sel de cadmium ou de bore (le xénon (135 Xe) est le plus important des produits de fission à

forte section efficace ($2{,}71 \cdot 10^6$ barns) et il est nécessaire de prévoir un excédent initial de réactivité pour obtenir un fonctionnement correct du réacteur).

— *4 barres de pilotage* (type P). Elles sont en acier inoxydable et ont chacune une longueur de 3 480 mm pour une section de (23×25) mm². Elles sont manœuvrées par des treuils à chaîne équilibrés par contrepoids. Ces barres, moins absorbantes (2 000 p.c.m.) et plus légères que les barres S, ont des temps de réponse très courts.

— *8 barres de compensation gazeuses* (type C). Ces barres complètent l'action des barres P pendant le fonctionnement à haute puissance. Le principe de leur action consiste à faire varier la pression d'un gaz absorbant dans un tube fixe (en zircaloy dans la cuve) traversant la totalité du cœur. Le gaz utilisé est l'isotope 3 de l'hélium. C'est un moyen de contrôle très souple qui n'introduit que de faibles distorsions du flux. Ces barres gazeuses peuvent en outre jouer le rôle de barres de sécurité en augmentant brusquement la pression, donc le nombre d'atomes par unité de volume, du gaz absorbant.

5. LE MODÉRATEUR

5.1. Propriétés et intérêt de l'eau lourde. — L'eau lourde est un excellent modérateur. Elle se différencie de l'eau ordinaire par la présence, dans sa molécule, d'atomes de deutérium ($^2_1$H ou D) à la place des atomes d'hydrogène ($^1_1$H). Le deutérium étant un isotope de l'hydrogène a les mêmes propriétés chimiques que ce corps. Il n'y a donc aucune différence fondamentale entre les propriétés chimiques de l'eau lourde et celles de l'eau ordinaire. L'eau lourde existe dans la nature mélangée à l'eau ordinaire dans la proportion de 6 pour 10 000 et du fait de la similitude des propriétés chimiques il est très difficile de les séparer. Il existe des méthodes pour y parvenir (électrolyse, échange catalytique) mais elles sont toutes très onéreuses et l'eau lourde est un liquide extrêmement cher.

C'est principalement le prix élevé de l'eau lourde qui amplifie ou crée certains problèmes. On peut en distinguer de trois sortes :

1° Celui de la *conservation de l'eau lourde.* — En principe il n'y a pas de consommation d'eau lourde dans ce type de réacteur mais l'action des rayonnements γ provoque la dissociation du deutérium en hydrogène et en neutron (phénomène de *radiolyse*). Il s'ensuit une série de réactions chimiques avec formation d'oxygène et il pourrait y avoir formation d'un mélange explosif. On élimine ce risque en entraînant le mélange deutérium-oxygène à l'aide du gaz inerte constituant l'atmosphère du réacteur (hélium) ; grâce à une recombinaison catalytique, l'eau lourde est ensuite reformée et est renvoyée dans le circuit principal d'eau lourde.

2° Celui de la *pollution isotopique par introduction d'eau ordinaire dans l'eau lourde.* — Cette pollution revient à diminuer la concentration de l'eau lourde donc à réduire ses qualités modératrices. À part l'introduction accidentelle d'eau par fuite aux échangeurs de chaleur, cette pollution peut se produire lorsque l'eau lourde est mise en contact avec des matériaux préalablement exposés à l'atmosphère humide ; ce problème se pose surtout lors de la mise en service du réacteur.

Cette pollution peut encore se produire par contact de l'eau lourde avec des matériaux contenant de l'hydrogène, tels que les élastomères constituant la plupart des joints d'étanchéité. Cela impose un choix de matériaux présentant des vitesses d'échange d'ions très faibles.

La cause principale de cette pollution résulte de la présence des résines échangeuses d'ions dans les circuits d'épuration de l'eau lourde.

3° Celui de la *radioactivation de l'eau lourde.* — Pendant le fonctionnement du réacteur, les atomes de deutérium de l'eau lourde sont soumis au bombardement des neutrons et au rayonnement γ et, par capture de neutrons, ils donnent naissance à des noyaux de tritium $^3_1$H qui présentent une radioactivité d'une période de 12,4 ans.

$$^2_1\mathrm{H} + \mathrm{n} \rightarrow {}^3_1\mathrm{H}$$

La présence de ce tritium impose donc des mesures de protection spéciales.

L'utilisation de l'eau lourde présente d'autre part des avantages du point de vue de la sécurité. Du fait de sa masse calorifique importante, elle peut absorber l'énergie résiduelle du combustible passant à travers l'isolement thermique et le tube de force quand il n'existe plus de refroidissement par suite d'un incident pendant l'arrêt du réacteur (le circuit de refroidissement de l'eau lourde est indépendant de celui du gaz).

D'autre part elle constitue un excellent filtre pour certains produits de fission qui pourraient s'échapper par suite de la rupture d'un tube de force.

5.2. Le circuit de refroidissement du modérateur

5.2.1. Circuit principal de refroidissement de l'eau lourde. — La circulation de l'eau lourde est assurée par trois ensembles ou « casemates », deux en service, un en secours, comprenant chacun :

— une pompe de circulation d'un débit de 1 280 m³/h ;
— un échangeur permettant un débit de 1 180 m³/h.

La cuve est alimentée en partie basse par un collecteur « froid » et quatre tuyaux d'un diamètre de 200 mm chacun. À la partie supérieure de la cuve, l'eau lourde est évacuée par un collecteur chaud et renvoyée aux casemates. Les trois boucles de refroidissement permettent de maintenir le modérateur à une température de 60 °C en cédant la chaleur à un circuit secondaire d'eau déminéralisée, lui-même refroidi par un circuit d'eau brute.

Il y a environ 41 tonnes d'eau lourde dans le cœur et 40 tonnes dans le réflecteur qui l'entoure. Le niveau libre de l'eau lourde est surmonté par une atmosphère d'hélium.

Un circuit de dérivation, muni de vannes à commande manuelle et de clapets anti-retour, est pris au refoulement des pompes pour alimenter les installations de dégazage. Le retour s'effectue au collecteur chaud.

5.2.2. Circuit de dégazage. — Il a pour but d'éliminer, les gaz de radiolyse de l'eau lourde (5 cm³ par kilowatt-heure à température et pression normales) par pulvérisation sous vide. Les gaz dilués dans la vapeur d'eau lourde sont extraits dans la partie haute du dégazeur par un éjecteur qui entretient le vide et est alimenté par un circuit spécial d'eau lourde. Cette eau lourde provoque la condensation des vapeurs du dégazeur et elle les entraîne vers un séparateur d'où un courant d'hélium frais les entraîne vers les installations de recombinaison.

5.2.3. Circuits annexes. — On trouve encore d'autres circuits tels que :

— le circuit d'épuration de l'hélium ;
— le circuit d'épuration de l'eau lourde dont le but est de maintenir le taux des impuretés à une valeur faible ;
— le circuit de stockage de l'eau lourde ;
— le circuit de récupération de l'eau lourde en cas d'explosion d'un tube de force.

6. LA MANUTENTION DU COMBUSTIBLE

La pleine utilisation du réacteur nécessite que la manutention se fasse pendant la marche du réacteur à pleine puissance. Les extrémités des prolongations des canaux débouchent dans deux salles de manutention du combustible où sont installées deux machines identiques, une par salle, pouvant s'accoupler sur l'orifice des canaux, appliquer sur le bouchon une pression de gaz carbonique pour équilibrer celle qui existe dans le tube de force, enlever le bouchon et introduire ou enlever des éléments combustibles. Les machines assurent le refroidissement des éléments pendant leur manutention et elles peuvent permettre le stockage et le refroidissement des neuf éléments irradiés d'un barillet (fig. IV-3).

Chaque élément combustible neuf est introduit du côté chaud du canal pendant que l'on en retire un à l'autre extrémité, du côté froid. Pendant sa durée d'irradiation qui est d'environ un an, l'élément combustible est déplacé le long du canal.

Afin d'éviter des déformations importantes de flux, la circulation du gaz carbonique de refroidissement et celle

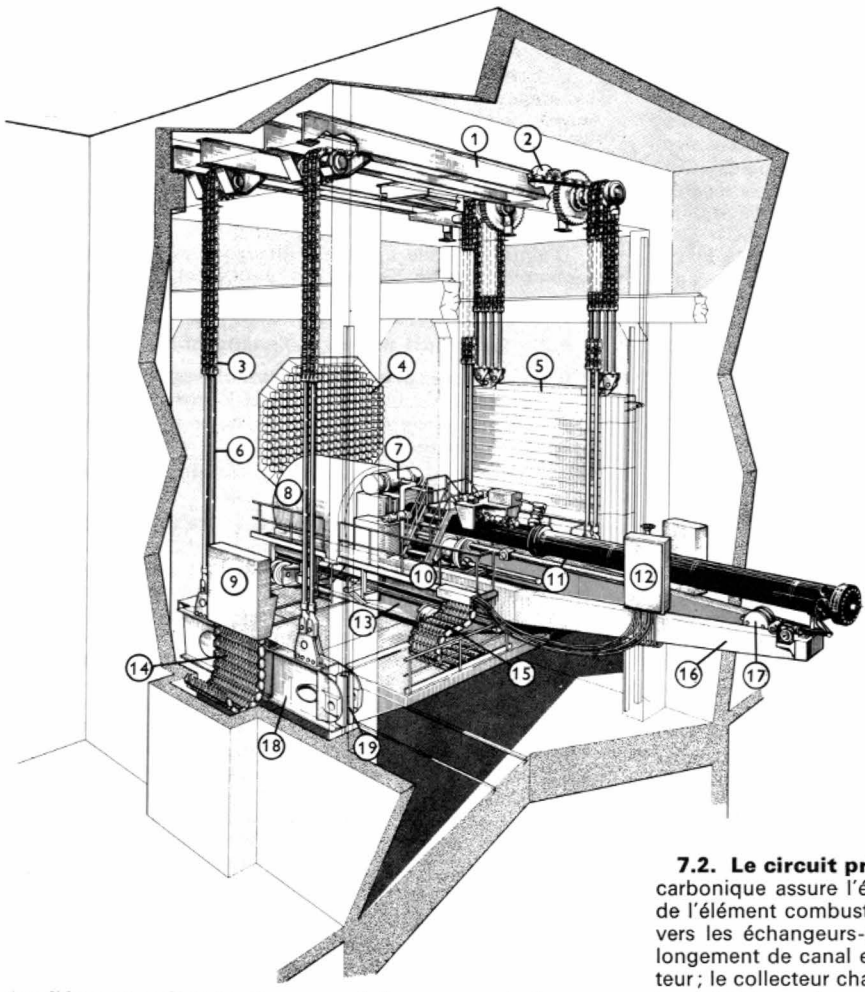


Fig. IV-3

Machine de manutention sur supports

1. Charpente du treuil de levage
2. Mécanisme de levage
3. Chaîne de levage
4. Face de réacteur
5. Contrepoids
6. Tirant de suspension
7. Échangeur gaz carbonique-eau
8. Protection entourant le barillet principal
9. Pupitre local de commande du support
10. Barillet d'éléments neufs
11. Bidon du bâti
12. Armoire électrique
13. Chariot
14. Système d'entraînement de levage
15. Système d'entraînement de translation
16. Berceau
17. Contrepoids
18. Support
19. Guidage vertical

(*É.D.F.*)

des éléments se font en sens opposé d'une nappe horizontale de canaux à la suivante.

Les éléments irradiés sont envoyés par deux circuits d'évacuation hydrauliques (un par salle de manutention) vers une piscine de stockage située à une vingtaine de mètres du bâtiment du réacteur. Les deux machines jouent le rôle de sas en décomprimant les éléments combustibles de 60 bars à 1 bar et en permettant leur passage dans les circuits hydrauliques. Exceptionnellement, des éléments irradiés peuvent être stockés sous pression, avec circulation du gaz de refroidissement dans six canaux situés hors de la cuve. Ces canaux peuvent contenir vingt éléments.

Les cadences maximales de chargement sont de seize éléments par jour, le déchargement d'un canal complet durant quatre heures.

7. LE CIRCUIT PRIMAIRE DE REFROIDISSEMENT

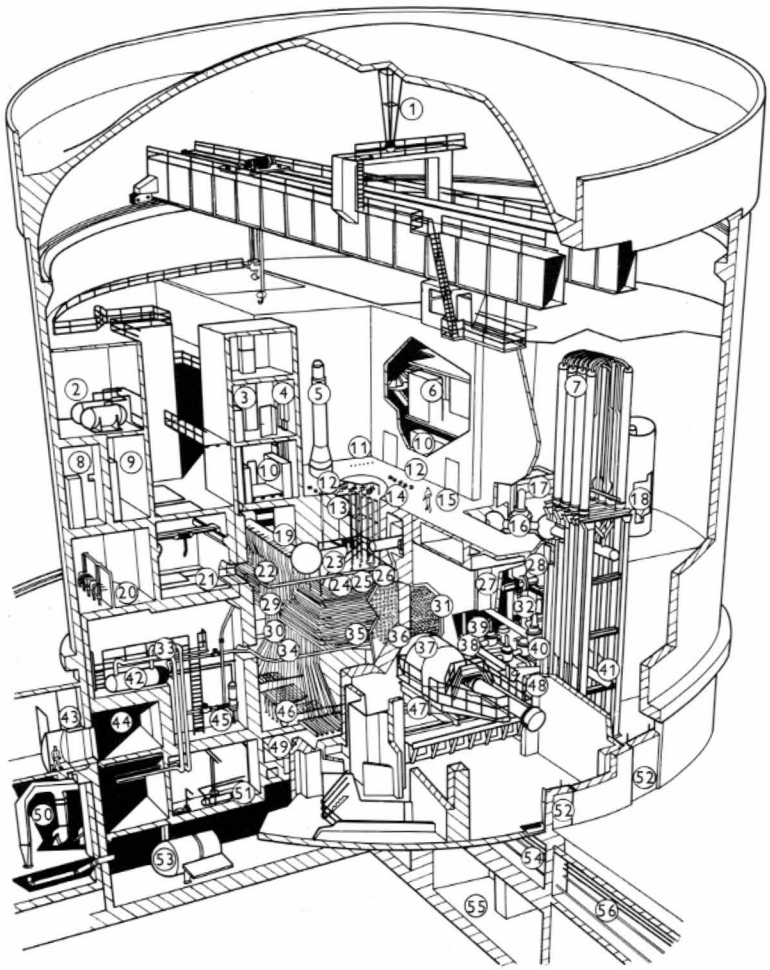
7.1. Le gaz caloporteur. — L'énergie calorifique dégagée au sein de l'uranium par les réactions de fission est extraite par un courant de gaz carbonique circulant à travers les éléments combustibles. Le choix de l'anhydride carbonique comme fluide caloporteur résulte de l'expérience que le C.É.A. a acquise dans les réalisations de piles expérimentales et dans celles des réacteurs industriels de puissance. Le gaz passe souvent pour être un mauvais refroidisseur mais si on l'utilise sous de fortes pressions (de façon à disposer du plus grand nombre possible de molécules par unité de volume) et si l'on peut accepter des écarts de température importants entre la gaine de l'élément et le gaz, il est possible d'extraire toute la puissance compatible avec la tenue du combustible. Les densités de puissance permises par le gaz, et cela sans nuire au bilan neutronique, permettent d'obtenir dans le circuit eau-vapeur une vapeur de caractéristiques très proches de celle utilisée dans une centrale thermique classique.

7.2. Le circuit primaire. — Le circuit principal de gaz carbonique assure l'évacuation de la puissance thermique de l'élément combustible et le transfert de cette puissance vers les échangeurs-générateurs de vapeur. Chaque prolongement de canal est relié par une tubulure à un collecteur ; le collecteur chaud est situé sous la cuve et le collecteur froid au-dessus. Au niveau du collecteur froid, c'est-à-dire à l'arrivée du gaz, la tubulure comporte un organe de réglage qui permet d'ajuster le débit du gaz dans le canal.

La circulation du gaz est assurée par trois turbosoufflantes montées en parallèle. Toutefois, deux machines seulement suffisent pour assurer le débit du gaz (880 kg/s à 60 bars) pour la puissance thermique nominale du réacteur. Ces turbosoufflantes, d'une puissance totale de 17 MW, sont alimentées en vapeur vive par le circuit vapeur de l'installation de production pendant la marche normale, et par une chaudière auxiliaire pendant les démarrages. Disposant d'un étage à action et de vingt-deux étages à réaction, elles ont un échappement à contre-pression qui permet le renvoi de la vapeur dans l'étage basse pression de la turbine principale. Chaque groupe de turbosoufflante comporte ses auxiliaires propres.

Entre le collecteur chaud et le collecteur commun d'aspiration des turbosoufflantes sont installés les deux échangeurs gaz-vapeur de l'installation de production d'énergie (I.P.E.).

7.3. Échangeurs-générateurs de vapeur. — Les échangeurs sont du type à circulation forcée (« once through ») constitués par des doubles tubes droits disposés en parallèle entre, d'une part les sous-collecteurs sphériques d'eau d'alimentation et, d'autre part, les sous-collecteurs de vapeur surchauffée. Le tout est contenu dans des enveloppes ou *bouteilles*. Chaque échangeur est constitué de huit bouteilles de 1 m de diamètre et de 18,60 m de hauteur. Chaque bouteille comporte 151 tubes en parallèle sur une longueur utile de 16 m et renferme de bas en haut l'économiseur, le vaporiseur et le surchauffeur. L'anhydride carbonique circulant à l'extérieur des tubes entre dans les échangeurs à une température de 500 °C et en sort à 241 °C.



1. Support de l'alimentation électrique pont tournant
2. Gazomètre hélium
3. Transmetteurs mesures thermodynamiques CO_2 (gaz carbonique)
4. Échangeur du circuit de refroidissement du combustible irradié
5. Machine de manutention des barres de contrôle
6. Commandes des vannes du circuit principal CO_2
7. Échangeurs principaux CO_2 vapeur
8. Épuration hélium : absorbeurs
9. Épuration hélium : tableaux de commande
10. Détection de rupture de gaine
11. Puits de stockage des barres de contrôle
12. Puits pour chambre d'ionisation
13. Barres de contrôle
14. Puits pour caméras de télévision
15. Puits de démontage des barres de contrôle
16. Vanne d'isolement amont échangeurs
17. Canalisations décharge D_2O (eau lourde)
18. Séparateur récupérateur D_2O
19. Collecteur CO_2 chaud
20. Recombinaison eau lourde
21. Évacuation du matériel eau lourde
22. Circuit D_2O sortie cuve
23. Écran d'eau (protection thermique)
24. Cuve du réacteur
25. Double fond de la cuve
26. Prolongement des canaux et tubulures CO_2
27. Compensateur de dilatation du circuit CO_2
28. Soufflantes
29. Nappes tubulures chaudes
30. Nappes tubulures froides
31. Face de chargement
32. Vanne d'isolement aval échangeurs
33. Circuit de refroidissement du D_2O
34. Circuit D_2O - Entrée cuve
35. Écran d'eau (protection thermique)
36. Prolongement de canal
37. Machine de manutention du combustible
38. Bretelle de refoulement soufflantes
39. Vannes d'isolement aval soufflantes
40. Clapets anti-retour
41. Bretelle d'aspiration soufflantes
42. Échangeurs circuit principal D_2O
43. Sas entrée personnel
44. Couloir
45. Pompes circuit principal D_2O
46. Collecteur CO_2 froid
47. Support machine manutention combustible
48. Circuit eau vapeur
49. Réglage de débit individuel de CO_2 des canaux
50. Ventilation
51. Échangeurs circuits écrans d'eau
52. Panneaux démontables
53. Réservoirs stockage D_2O
54. Galerie d'évacuation du combustible irradié
55. Radier de l'enceinte étanche
56. Évacuation effluents

Fig. IV-4 — Écorché du bâtiment du réacteur (*É.D.F.*)

7.4. Les circuits annexes. — Le circuit primaire de refroidissement est complété par un certain nombre de circuits annexes tels que :

— *Circuit d'épuration continue* de l'anhydride carbonique ayant pour rôle d'éliminer les poussières radioactives, les vapeurs d'eau et d'huile (venant des fuites des paliers des soufflantes) du gaz carbonique du circuit principal. Il comprend une boucle de filtration principale (débit de 10 kg/s) et une boucle de déshuilage et de séchage avec filtres et régénération des sécheurs.

— *Circuit de stockage et de préparation* d'anhydride carbonique « neuf ».

— *Boucles de refroidissement* des canaux de stockage. Elles sont destinées à refroidir les éléments combustibles à l'intérieur de six canaux de stockage.

— *Rejets d'effluents gazeux*. Ce circuit évacue à la cheminée les effluents gazeux de différents circuits ou appareils par l'intermédiaire de la chambre de refroidissement de l'enceinte.

8. LE BÂTIMENT DU RÉACTEUR

L'ensemble des principales installations que l'on vient de décrire est contenu dans un bâtiment spécial (fig. IV-4). Il a été conçu pour résister à une surpression relative interne de 0,59 bar en cas de rupture accidentelle du circuit primaire de refroidissement. Simultanément le bâtiment peut être soumis à une élévation *transitoire* de température de 150 °C *stabilisée* à 80 °C par pulvérisation d'eau. Ce bâtiment, désigné du nom d'*enceinte étanche*, pour des raisons de sécurité doit pouvoir retenir les gaz pollués par des poussières ou des produits radioactifs ; il n'est toléré qu'un taux de fuite de 1 % du volume libre par jour (700 m^3/j).

Les conditions de calcul de cette enceinte découlent de ce qu'on appelle l'*accident maximal hypothétique*. Elle a été calculée pour résister à des sollicitations sismiques pour un séisme d'intensité 7 de l'échelle M.S.K. (Metvedev, Sponhauer, Karnik).

L'enceinte étanche est composée :

1° *D'un radier polygonal* à 16 côtés, inscrit dans un cercle de 25,30 m de rayon et d'épaisseur constante de 1,40 m. Ce radier est en béton précontraint par 404 câbles suivant un double réseau orthogonal. Les câbles sont formés de 12 torons de 7 fils de 4,1 mm de diamètre. Lors de la mise en précontrainte le diamètre de l'ouvrage diminue ; pour faciliter ce déplacement un feutre bitumé a été intercalé entre le radier et le béton de propreté du fond de fouille.

2° *D'une partie cylindrique*. — La paroi cylindrique est constituée d'un voile en béton précontraint de 0,60 m d'épaisseur et de 46 m de diamètre intérieur. La précontrainte est exercée par des câbles identiques à ceux du radier. La précontrainte horizontale est obtenue à l'aide de 128 groupes de quatre câbles horizontaux, chaque câble couvrant un quart de la circonférence. Ils sont disposés dans la paroi et dans les deux ceintures de renfort situées au-dessus et au-dessous des panneaux démontables. La précontrainte verticale, solidarisant le radier et la coupole de couverture avec la paroi cylindrique est obtenue à l'aide de 128 câbles verticaux répartis à peu près uniformément sur le pourtour en tenant évidemment compte des pénétrations diverses.

La paroi cylindrique est articulée sur le radier par une articulation classique (type Freyssinet) réalisée en réduisant l'épaisseur normale de 0,60 m de la paroi à un noyau central fretté de 0,20 m traversé par les câbles verticaux de précontrainte.

Intérieurement, la paroi cylindrique est renforcée à sa partie supérieure par une poutre circulaire servant de

chemin de roulement à un pont tournant principal de 45 t permettant les manutentions de matériel à l'intérieur de l'enceinte.

3° *D'une coupole.* — La coupole couvrant l'enceinte a pour intrados une calotte sphérique de 35 m de rayon raccordée à la paroi cylindrique par un rayon de 5 m. L'épaisseur de 0,60 m en partie courante est portée progressivement à 0,90 m au voisinage de la retombée. La précontrainte de la coupole est assurée par trois familles de 53 câbles, identiques aux précédents, se coupant à 120°. Sur son pourtour, la coupole est bordée par une ceinture épaisse limitant les déformations radiales de la jonction cylindre-coupole. La hauteur totale du bâtiment est de 56 m.

Deux sas à personnel, deux sas à matériel et quatre panneaux démontables permettent d'accéder dans l'enceinte.

Ventilation de l'enceinte étanche. — Les locaux de l'enceinte étanche sont classés en trois zones suivant les contaminations possibles.

— *Zone inactive* : elle comprend les halls, les couloirs de dégagement où circule le personnel et les pièces où le dégagement des gaz radioactifs ou chimiquement nocifs est improbable.

— *Zone semi-active* : elle comprend les locaux où il y a des risques de fuites de gaz carbonique ou de tritium.

— *Zone active* : c'est l'intérieur du bloc réacteur.

La ventilation assure :

— d'une part la *mise en dépression des salles où il y a risques d'émanations* de gaz actifs ou nocifs par rapport aux salles où ces risques n'existent pas ;

— d'autre part le *maintien d'une température acceptable dans les locaux* soit pour une occupation permanente par du personnel, soit pour le bon fonctionnement des appareillages.

La ventilation s'effectue en cascade au point de vue dépression. Un volume de 27 700 m³ d'air préalablement traité passe dans les zones inactives (taux de renouvellement : 20) puis dans les zones semi-actives (taux de renouvellement : 3), et enfin dans les zones actives (taux de renouvellement : 2). En fin de circuit l'air traverse un ensemble de filtres absolus et de filtres à iode avant d'être rejeté à l'atmosphère par une cheminée de 70 m de hauteur. Les filtres absolus sont des filtres en papier incombustible retenant à 99,95 % les particules de dimensions supérieures ou égales à 0,3 micromètre. Les filtres à iode radiocatif sont formés de 210 cartouches contenant chacune 13 500 cm³ de charbon actif placé entre deux cylindres coaxiaux en tôle perforée.

En cas d'incident sur le circuit primaire, le débit de 150 000 m³/h de gaz carbonique à la température maximale de 475 °C est ramené à une température de 200 °C en passant dans une chambre de refroidissement placée en amont des filtres à iode (un filtre à iode ne peut tolérer qu'une température maximale de 200 °C). Cet abaissement de température est obtenu en faisant passer le gaz sur des tôles de fonte de 20 mm qui s'échauffent entre 60 et 100 °C. La masse totale de fonte est d'environ 115 tonnes.

L'air rejeté contient toujours du gaz carbonique, car on estime que les fuites normales du circuit primaire représentent une consommation de 1 à 2 tonnes d'anhydride carbonique par jour.

9. LES INSTALLATIONS DE PRODUCTION D'ÉLECTRICITÉ

9.1. Le circuit secondaire eau-vapeur. — Ce circuit est composé des éléments suivants :

— Deux échangeurs de chaleur produisant 344 tonnes par heure de vapeur surchauffée à 490 °C et à 83 bars pour la température de sortie maximale de 500 °C du gaz carbonique.

— Trois turbines à contre-pression pour l'entraînement des soufflantes.

— Un groupe turbo-alternateur principal comportant un corps haute pression alimenté par cette vapeur et un corps basse pression dans lequel on récupère en outre la vapeur des turbosoufflantes.

— Un condenseur principal qui, compte tenu de l'agressivité de l'eau de circulation, possède des plaques tubulaires et des tubes en laiton. En cas de déclenchement du groupe turbo-alternateur, un poste principal de détente-désurchauffe permet d'évacuer la vapeur vive vers le condenseur principal.

— Les pompes principales d'extraction.

— Le réfrigérant de l'hydrogène de l'alternateur.

— Le poste d'eau comprenant :

- Trois réchauffeurs basse pression à surface, alimentés en vapeur par des soutirages pris sur la turbine.
- Un réchauffeur-dégazeur alimenté en marche normale par un soutirage pris sur le collecteur d'échappement des turbosoufflantes.
- Une bâche alimentaire de 50 m³ et une bâche de transfert de 20 m³ recevant l'eau d'appoint venant du poste de déminéralisation.

— Trois pompes alimentaires. L'eau d'alimentation arrive dans les échangeurs à la température de 150 °C.

— Un condenseur auxiliaire à la pression atmosphérique peut recevoir la vapeur produite dans les échangeurs par l'intermédiaire d'un poste de détente-désurchauffe. Ce dispositif permet de dissiper la chaleur produite par le réacteur fonctionnant jusqu'à 20 % de sa puissance nominale lorsque le groupe turbo-alternateur est à l'arrêt.

9.2. L'alternateur. — L'alternateur est d'un type classique 115-125 MW, à rotor refroidi par hydrogène. Fournissant une puissance maximale de 77,1 MW, il tourne à 3 000 tr/mn et entraîne à la même vitesse un groupe d'excitation placé en bout d'arbre.

9.3. Le transformateur principal. — L'alternateur fournit sa puissance sous une tension de 15,5 kV et il est relié au transformateur principal par un jeu de barres, sous gaines coaxiales, pouvant être traversé par un courant de 5 500 A.

Un interrupteur-coupleur, d'un pouvoir de fermeture de 100 000 A, est placé sur le jeu de barres.

Le transformateur principal a les caractéristiques suivantes :

— puissance nominale : 100 MVA ;

— rapport de transformation à vide : 15,5/235 kV $\pm$ 5 % ;

— neutre haute tension sorti et mis à la terre par un court-circuiteur ;

— refroidissement dans l'huile à circulation forcée dans des aérofrigérants.

9.4. Alimentation des auxiliaires électriques. — En marche normale les auxiliaires électriques sont alimentés par un transformateur auxiliaire de tranche pris en soutirage sur le jeu de barres en aval du coupleur.

Au démarrage, le coupleur étant ouvert, ils sont alimentés par ce même transformateur qui est lui-même alimenté par le réseau haute tension par l'intermédiaire du transformateur principal.

Les caractéristiques du transformateur auxiliaire sont :

— puissance nominale : 8 MVA ;

— rapport de transformation à vide : 15,5 $\pm$ 5 %/5,75 kV ;

— refroidissement d'huile, circulation naturelle.

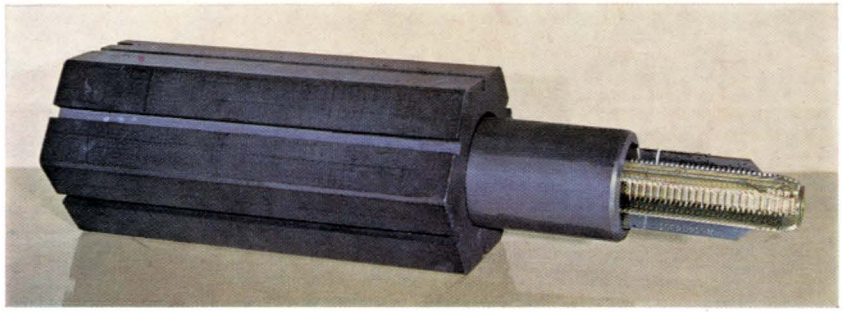
En cas d'indisponibilité du transformateur principal ou du transformateur auxiliaire de tranche, il faut que les auxiliaires électriques soient quand même alimentés car on doit pouvoir évacuer la puissance calorifique résiduelle du réacteur qui est égale à 20 % de sa puissance nominale. Pour cela, on utilise un transformateur dit des « auxiliaires secourus » de 8 MVA alimenté par un réseau extérieur sous une tension de 63 kV.

Les auxiliaires généraux sont alimentés sous une tension de 5,6 kV par un transformateur de 3 MVA (63 $\pm$ 5 % 5,6 kV).

En ultime secours, certains auxiliaires vitaux peuvent être alimentés, en 10 secondes, par deux groupes électrogènes diesel de 2 MW environ.

9.5. Le poste d'évacuation de l'énergie électrique. — Le transformateur principal alimente un jeu de barres

Centrales nucléaires

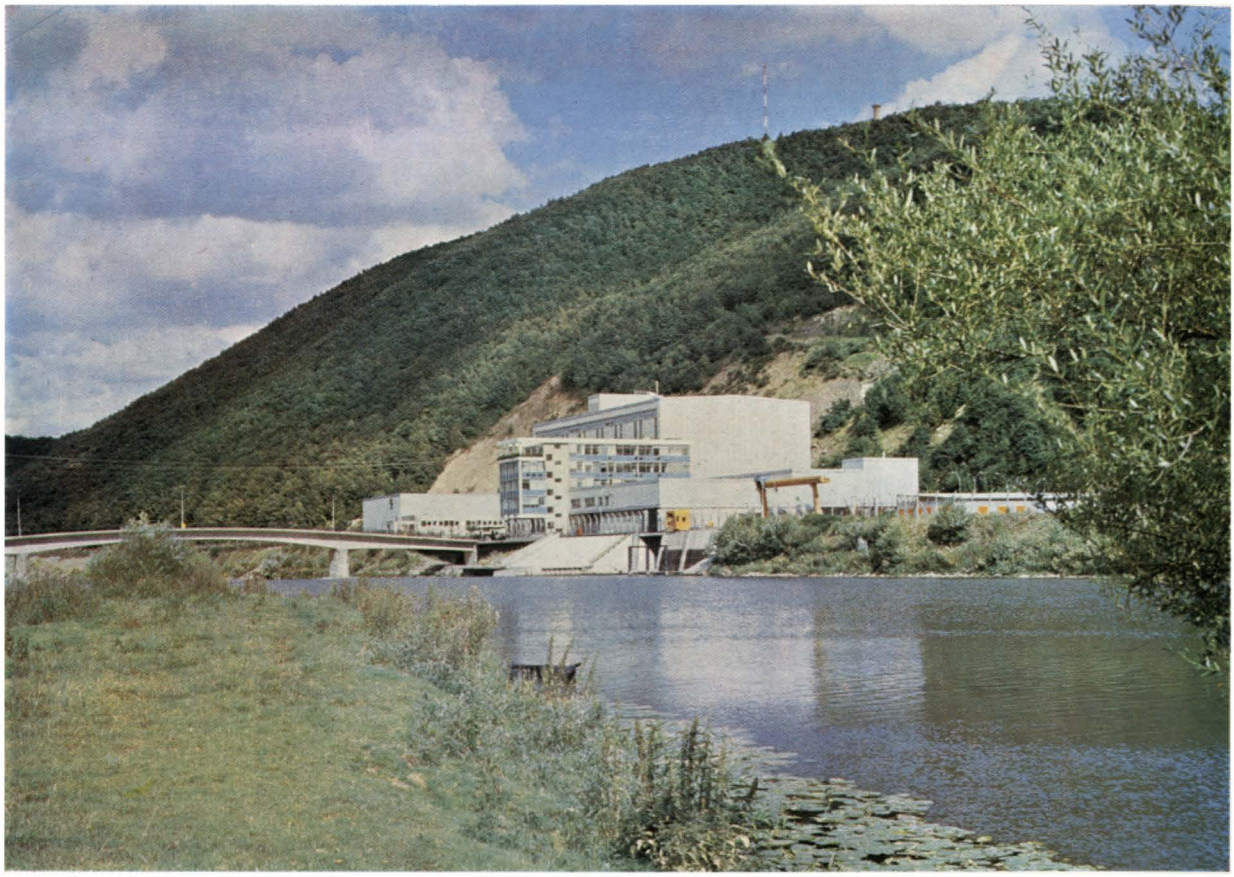


Ci-dessus, centrale nucléaire de **Chinon** (Indre-et-Loire) utilisant de l'uranium naturel.

À gauche, barre d'uranium.

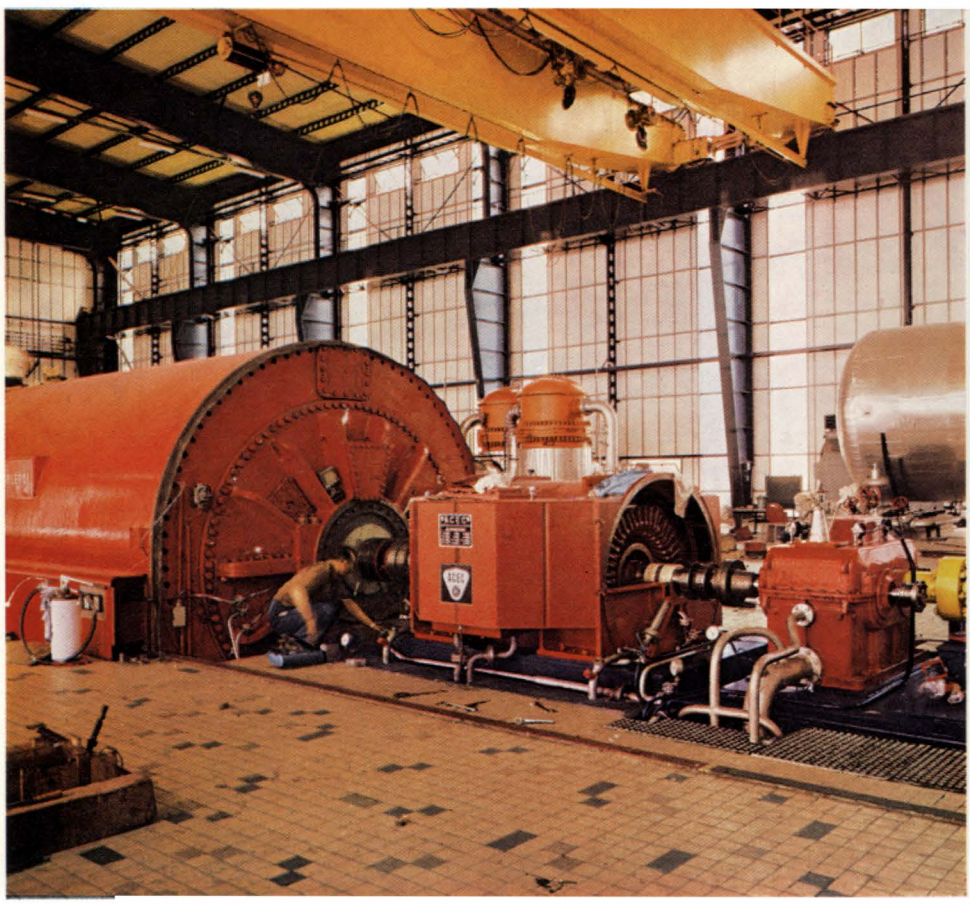
Ci-dessous, centrale nucléaire de **Saint-Laurent-des-Eaux** (Loir-et-Cher) utilisant de l'uranium naturel.

Photothèque E.D.F., photos : M. Brigaud, M. Morceau.



Centrale nucléaire franco-belge de **Chooz** (Ardennes), utilisant de l'uranium enrichi.

Ci-dessus, vue générale ; *à droite*, détail de la salle des machines : alternateur principal et alternateur auxiliaire.



Photothèque E.D.F., photos : G. Walusinski.

sous une tension de 225 kV qui permet d'évacuer l'énergie en direction des postes de « La Rance » et de « Landerneau ».

La ligne 63 kV Saint-Herbot-Rumengol entre en coupure dans le poste pour alimenter les transformateurs des auxiliaires secourus et des auxiliaires généraux.

10. CONTRÔLE-COMMANDE DE LA CENTRALE

Pendant le fonctionnement de la centrale il n'y a pas de personnel en permanence dans l'enceinte étanche, seuls des rondiers y circulent de façon périodique. Pour conduire cette centrale il est donc nécessaire de disposer d'un automatisme très poussé reposant sur l'existence de circuits de régulation élaborés et de circuits d'automatismes pour adapter le schéma des circuits de la centrale aux variations de marche prévues ou imprévues. Les principes de base du contrôle-commande de la centrale EL 4 sont semblables à ceux décrits à propos de la centrale Saint-Laurent 1.

Les commandes et les signalisations sont regroupées dans une salle de commande sur un tableau secondaire; l'enchaînement programmé des mises en service ou hors service est réalisé par un calculateur numérique commandé à partir du pupitre principal.

Ce calculateur est également utilisé pour regrouper et exploiter les nombreuses mesures et signalisations (par exemple, il traite les informations de la D.R.G.).

L'ensemble des équipements de distribution électrique, les appareils électroniques et la salle de commande sont rassemblés dans un bâtiment situé à côté de la salle des machines.

La France n'est pas la seule à avoir expérimenté l'eau lourde comme modérateur pour les réacteurs. En particulier, au Canada et en Suède on a réalisé des réacteurs non seulement modérés à l'eau lourde mais dans lesquels l'eau lourde sert de fluide caloporteur, soit en transférant la chaleur dans des échangeurs de chaleur eau lourde — eau vapeur, soit en cycle direct en transformant l'eau lourde en vapeur (réacteur bouillant) utilisée ensuite dans une turbine.

Euratom, organisme européen de recherche atomique comprenant, le Benelux, la France, l'Italie et la République Fédérale Allemande, a réalisé sur les bords du lac Majeur à Ispra, en Italie, le réacteur Orgel, modéré à l'eau lourde et refroidi par un produit organique (polyphényles).

CHAPITRE V

LA FILIÈRE URANIUM ENRICHI - EAU LÉGÈRE

L'eau lourde est un bon modérateur et surtout elle a une faible section efficace de capture de neutrons. Lorsque la filière à eau lourde fut lancée en France, de nombreux essais permettaient alors d'espérer que l'on pourrait utiliser directement de l'uranium naturel comme combustible dans ce type de réacteur. Cette possibilité compensait alors largement le prix élevé de l'eau lourde et c'est pourquoi les efforts ont porté sur la mise au point de métaux ou d'alliages ayant de faibles sections de capture pour les structures internes telles que les tubes de force. En même temps, on essayait d'utiliser pour le gainage des éléments combustibles, un métal à faible capture: le *béryllium;* malheureusement les essais métallurgiques n'ont pas donné les résultats escomptés et il a fallu utiliser de l'acier inoxydable, ce qui impose l'emploi d'uranium enrichi dont le prix est bien plus élevé. La filière ne fut donc pas développée après l'expérience EL 4.

Entre temps le développement de la technique des réacteurs à *eau légère* (eau ordinaire: H_2O) par les puissantes sociétés américaines que sont, principalement, Westinghouse et General Electric (Géco) a pesé lourdement sur les conditions économiques dans le monde en matière nucléaire, si bien que la politique française de l'énergie nucléaire a changé d'orientation.

La France a alors décidé d'abandonner les filières uranium naturel-gaz-graphite et uranium enrichi-gaz-eau lourde, pour porter son effort dans la construction de réacteurs uranium enrichi-eau légère.

Comparée au graphite, l'eau légère possède une section efficace de capture trois fois plus grande, ce qui impose l'utilisation d'uranium enrichi. En revanche, son pouvoir de ralentissement est vingt fois plus grand: en utilisant des éléments combustibles de forte puissance spécifique, on pourra donc construire des cœurs de très faible volume par rapport à ceux de la filière graphite-gaz. De plus *l'eau sert aussi de fluide caloporteur.*

Il existe deux types de réacteurs à eau légère dont la différence tient à la manière dont l'eau est utilisée:

— Le **réacteur à eau sous pression** ou P.W.R. (Pressurized Water Reactor);

— Le **réacteur à eau bouillante** ou B.W.R. (Boiling Water Reactor).

RÉACTEUR À EAU SOUS PRESSION (P.W.R.)

Dans cette technique, les éléments combustibles, formés de crayons d'uranium enrichi enrobé dans une gaine en zircaloy, sont plongés dans de l'eau contenue dans une cuve en acier (fig. V-1). Cette eau, qui joue à la fois le rôle de modérateur et de fluide caloporteur, circule à l'intérieur des éléments combustibles d'où elle extrait la chaleur de fission. Pour la maintenir en phase liquide on la soumet à une pression appropriée.

Dans ce réacteur la pression est proche de 140 bars et la température de l'eau à la sortie du cœur atteint 300 °C environ. L'eau est ensuite dirigée vers un échangeur de chaleur où elle cède sa chaleur à l'eau et à la vapeur circulant dans un deuxième circuit qui alimente en vapeur la turbine du groupe turbo-alternateur. Après avoir cédé sa chaleur, l'eau du circuit primaire retourne dans le cœur. On voit immédiatement que le circuit primaire où circule l'eau de refroidissement du cœur (et qui de ce fait devient radioactive) est indépendant du circuit secondaire eau-vapeur de la turbine.

Dans les hypothèses les plus pessimistes d'accident il est admis qu'il puisse y avoir une rupture du circuit primaire entraînant la dépressurisation rapide du cœur et la rupture de toutes les gaines avec libération des produits de fission (l'intervention des circuits de sauvegarde empêche que se produise une fusion du cœur). C'est pourquoi la cuve et les échangeurs sont enfermés dans une enceinte étanche (parfois même dans une double enceinte) qui est prévue pour résister à la pression résiduelle et à la température et pour avoir un taux de fuite extrêmement faible afin d'éviter toute contamination de l'environnement immédiat.

Les caractéristiques de vapeur que l'on peut obtenir avec ce type de réacteur sont assez médiocres (environ 50 bars et 270 °C) si on les compare à celles des chaudières thermiques classiques. On doit donc disposer de turbines ayant des corps basse pression et des condenseurs de très grands volumes nécessitant de gros débits d'eau de circulation.

L'investissement de capitaux nécessaires à la construction des réacteurs nucléaires étant lourd (il est compensé dans le prix de revient du kilowattheure par un prix de combustible faible), on a intérêt à construire des unités de très forte puissance pour bénéficier de l'*effet de taille.* Les groupes turbo-alternateurs actuellement en cours de

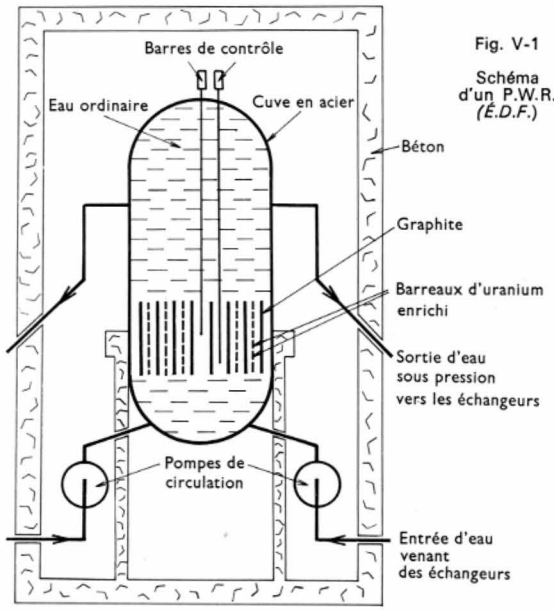


Fig. V-1

Schéma d'un P.W.R. *(É.D.F.)*

réalisation ou en étude pour ces centrales sont des unités de 950 à 1 200 MW dont les dimensions sont telles qu'on est revenu à des vitesses de rotation de 1500 tr/mn (alternateurs à 4 pôles).

À titre d'exemple on va étudier la centrale des Ardennes qui met en œuvre cette filière.

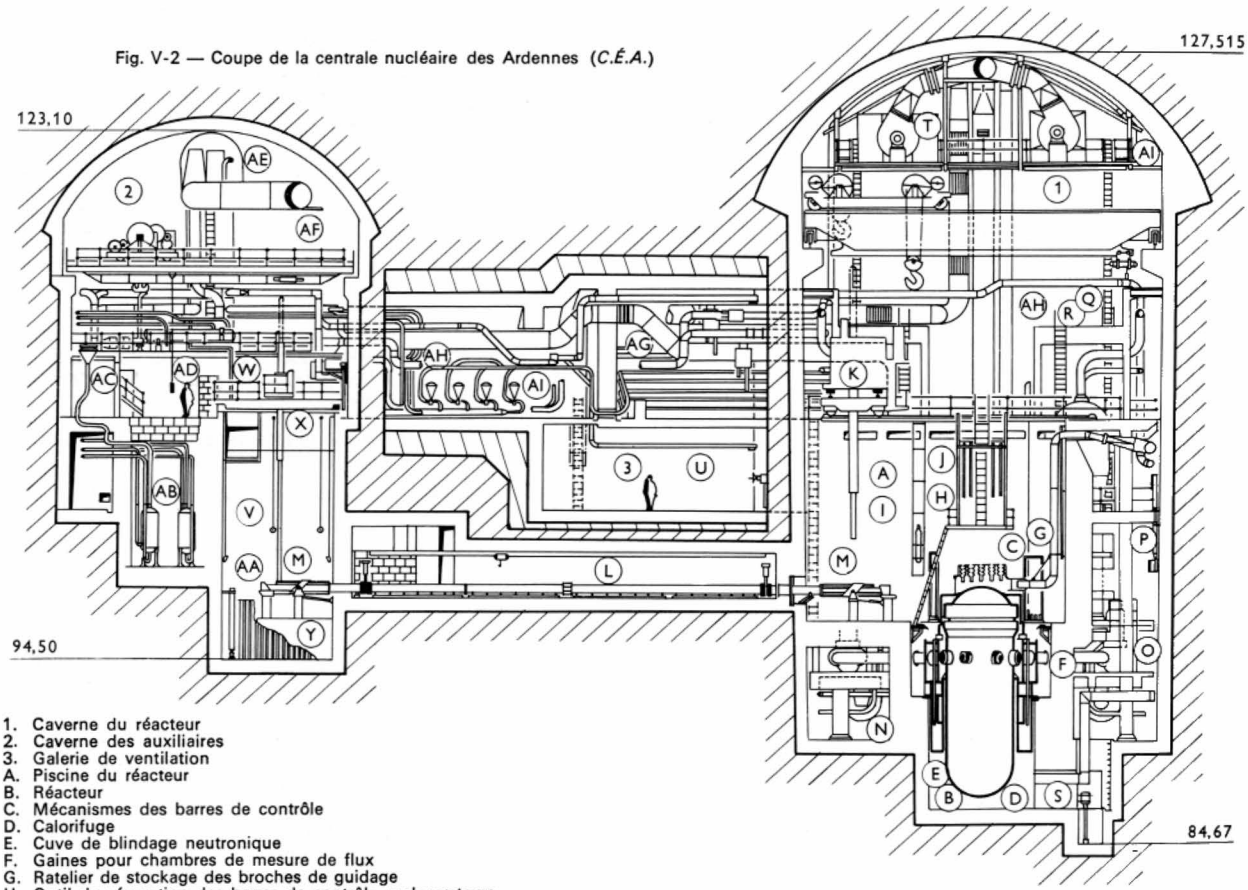
1. PRÉSENTATION DE LA CENTRALE NUCLÉAIRE P.W.R. DES ARDENNES (CHOOZ)

Bien avant de prendre la décision de modifier sa politique nucléaire, É.D.F. avait cherché à acquérir une expérience dans la filière eau légère. Avec la société anonyme belge Centre et Sud (constituée par les principales sociétés privées belges de production et de distribution d'électricité) elle avait constitué la société d'énergie nucléaire franco-belge des Ardennes (S.É.N.A.) en vue de réaliser la centrale de Chooz construite de 1962 à 1967 sur la base de l'égalité des participations financières et techniques.

Cette centrale est construite en France, dans le département des Ardennes, sur les bords de la Meuse (au sud de Givet) à proximité de la frontière belge. Elle présente l'originalité (pour une centrale nucléaire) d'être en partie souterraine. La disposition particulière du site et la qualité du rocher ont permis de remplacer l'enceinte étanche de sécurité par une caverne creusée dans le rocher (fig. V-2).

Il y a en fait deux cavernes distantes de 25 mètres, à environ 100 mètres à l'intérieur du rocher. La première

Fig. V-2 — Coupe de la centrale nucléaire des Ardennes *(C.É.A.)*



1. Caverne du réacteur
2. Caverne des auxiliaires
3. Galerie de ventilation
A. Piscine du réacteur
B. Réacteur
C. Mécanismes des barres de contrôle
D. Calorifuge
E. Cuve de blindage neutronique
F. Gaines pour chambres de mesure de flux
G. Ratelier de stockage des broches de guidage
H. Outil de séparation des barres de contrôle-prolongateurs
I. Station de dépôt pour élément combustible neuf
J. Passerelle de support de câbles
K. Pont de manutention du combustible
L. Tube de transfert du combustible
M. Mécanismes basculants pour tube de transfert
N. Tuyauterie du circuit primaire
O. Pompe du circuit primaire
P. Générateur de vapeur
Q. Tuyauterie de vapeur vive
R. Tuyauterie d'eau alimentaire
S. Pompe d'épuisement du puisard
T. Ventilation interne de la caverne du réacteur
U. Sas de secours
V. Piscine de désactivation du combustible irradié
W. Pompe de la piscine de désactivation
X. Passerelle de manutention du combustible
Y. Râtelier de stockage pour barres de contrôle et éléments irradiés
AA. Cellules de lavage pour éléments avariés
AB. Déminéralisateurs
AC. Réservoir de remplissage des déminéralisateurs
AD. Réfrigérant de la piscine de désactivation
AE. Collecteur de reprise d'air de ventilation
AF. Rejets gazeux de la station de traitement des effluents
AG. Ventilation de balayage de la caverne du réacteur
AH. Ventilation permanente de la caverne du réacteur
AI. Injection de sécurité et aspersion

(É.D.F.)

contient le réacteur, les quatre échangeurs de chaleur et le pressuriseur. Elle a une longueur de 41 m, une largeur de 18,50 m et une hauteur de 42,80 m. L'étanchéité est assurée par un revêtement continu de plaques d'acier au carbone soudées sur des profilés de renfort. La deuxième caverne contient les équipements des divers circuits auxiliaires. D'une longueur de 49 m, d'une largeur de 15 m et de 42 m de hauteur, elle abrite aussi la piscine de désactivation des éléments combustibles irradiés. Un système de transfert hydraulique du combustible irradié relie la piscine du réacteur à la piscine de désactivation.

Une troisième caverne de 25 m de long, 5,10 m de large et 12,50 m de haut, regroupe un nombre important d'appareillages électriques.

En revanche, la salle des machines qui abrite le groupe turbo-alternateur, l'alternateur auxiliaire et le poste d'eau est située, avec la salle de commande centralisée, dans un bâtiment extérieur.

2. LE COMBUSTIBLE

Le cœur est formé de 112 éléments combustibles, chacun étant constitué par un faisceau de 200 tubes minces (en acier inoxydable de 0,38 mm d'épaisseur) contenant des pastilles d'oxyde d'uranium (UO_2) ; à présent les éléments combustibles des réacteurs P.W.R. sont gainés avec du zircaloy qui remplace l'acier inoxydable. Enfilées dans ces tubes, elles présentent des ménisques concaves aux deux faces d'extrémités permettant ainsi une déformation longitudinale due à de longues irradiations (fig. V-3).

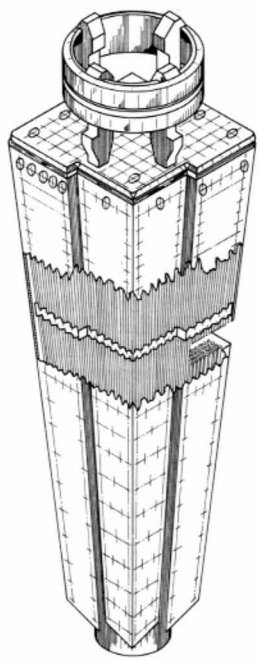


Fig. V-3

Élément combustible Westinghouse

Les pastilles ont un diamètre de 8,9 mm et les tubes ont une longueur active de 2,68 m. Les 200 tubes de chaque élément sont placés dans des boîtiers de tôle d'acier inoxydable à parois percées, auxquelles sont soudées, à intervalle régulier, des grilles de guidage. Le dispositif d'assemblage permet la manutention individuelle de chaque élément.

La charge complète du réacteur correspond à une masse de 41 tonnes d'uranium, enrichi en moyenne à 3,5 % en uranium 235.

3. LA CUVE

La cuve dans laquelle se trouve le cœur est formée d'un cylindre vertical fermé à ses deux extrémités par une calotte sphérique (fig. V-4). La calotte supérieure ou couvercle est démontable. Cette cuve, qui peut résister à une pression intérieure de 150 bars, a un diamètre intérieur de 3,20 m pour une hauteur totale d'environ 11,21 m. Elle pèse 320 t. Sa partie cylindrique est formée de viroles d'acier soudées entre elles ; elle a une épaisseur maximale de 200 mm. La

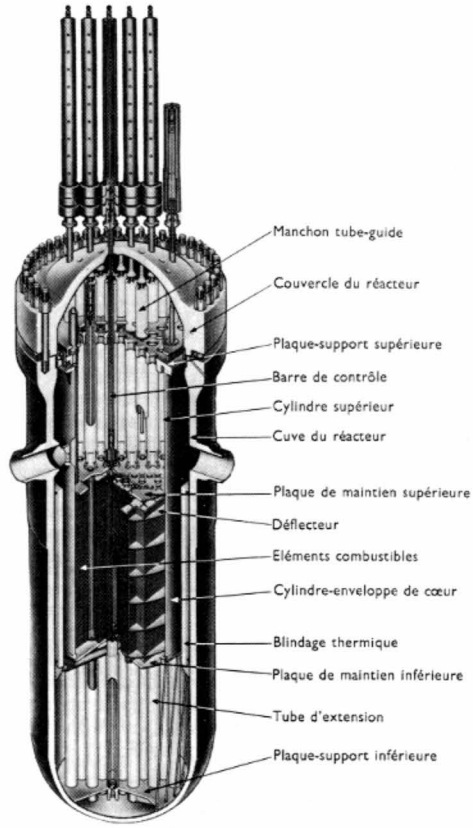


Fig. V-4 — Coupe de la cuve de réacteur de Chooz (*Morceau-É.D.F.*)

cuve est entourée d'une protection biologique formée par un réservoir circulaire d'eau refroidie par un système auxiliaire de réfrigération et complétée par une enceinte en béton de 1 m d'épaisseur.

Les tuyauteries d'amenée d'eau « froide » et de départ de l'eau chaude sont réparties autour de la cuve, sur une même circonférence, au tiers supérieur de la partie verticale.

Un cylindre enveloppe le cœur et guide l'eau froide vers le bas de la cuve créant ainsi un anneau d'eau « froide » entre le cœur et la cuve. Cette eau remonte ensuite à travers les éléments combustibles avant de ressortir de la cuve pour aller aux échangeurs.

Le couvercle comporte les orifices de pénétration des barres de contrôle.

4. LES BARRES DE CONTRÔLE

Elles sont au nombre de 30 et ont une section cruciforme. Elles s'engagent dans des vides de même forme ménagés entre les éléments combustibles de section carrée.

La partie absorbante est constituée d'un alliage (80 % d'argent, 15 % d'indium, 5 % de cadmium) et est gainée dans un tube d'acier inoxydable pour éviter toute corrosion de l'alliage. À leur partie inférieure, ces barres comportent des prolongateurs contenant du combustible qui vient ajouter son effet à celui du cœur lorsque les barres sont relevées. La masse d'une barre est de 138 kg. Elles sont actionnées par un mécanisme à cliquet mû par des électroaimants. Ces barres jouent un triple rôle. Elles permettent :

— d'absorber l'excès de réactivité ;

— de maintenir le réacteur au niveau de puissance désiré ;

— d'assurer l'arrêt d'urgence en cas de nécessité.

Indépendamment de ces barres, le contrôle de la réactivité est obtenu à l'aide d'un absorbant soluble (« poison » chimique) qui est de l'acide borique : il est en solution dans le modérateur. L'ajustement de la concentration de cette solution demande un certain temps, aussi l'absorbant soluble n'est-il utilisé que pour la compensation des variations lentes de réactivité. Le bore peut être éliminé par un système d'épuration de l'eau.

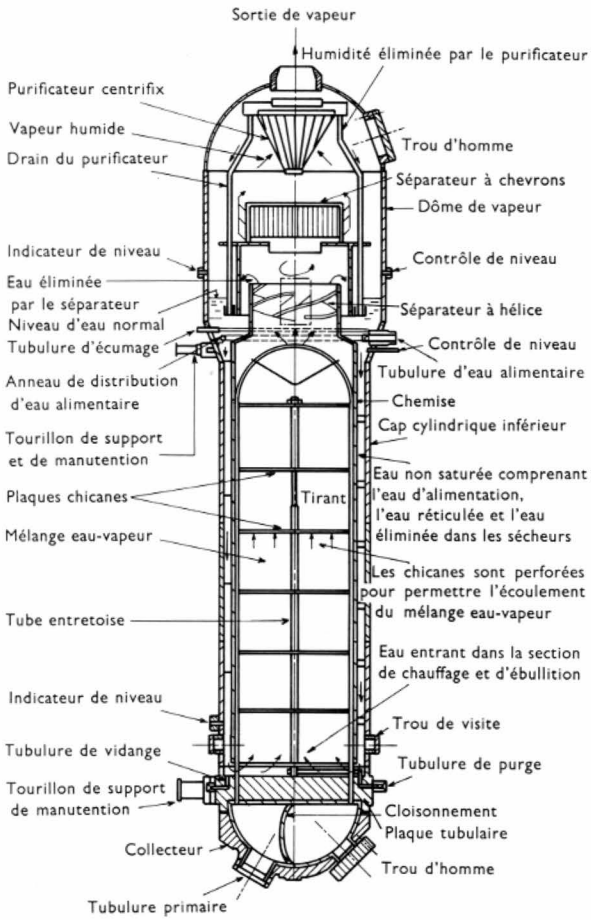


Fig. V-5 — Générateur de vapeur (*C.É.A.*)

5. LE CIRCUIT PRIMAIRE, LES ÉCHANGEURS

L'eau sortant de la cuve à une température de 300 °C circule dans quatre boucles primaires indépendantes à l'aide de quatre pompes hermétiques à moteur gainé et à axe vertical (puissance unitaire : 1 270 kW). La pression est de 140,6 bars effectifs, le débit total est de 5 240 kg/s pour un volume de 142,7 m³. Quelles que soient les variations de charges, la pression est maintenue constante dans le circuit primaire par un système de chauffage électrique et d'aspersion d'un *pressuriseur*. Les quatre générateurs de vapeur sont du type vertical avec faisceaux de tubes en U placés dans une enveloppe sous pression de 12 m de haut et de 2,36 m de diamètre (fig. V-5). Le fluide caloporteur circule dans les tubes ; la surface d'échange de chaleur est de 1 385 m².

L'ensemble du circuit primaire est réalisé en acier inoxydable, y compris les tubes des générateurs de vapeur, en raison des risques de corrosion. La cuve et le pressuriseur sont en acier au carbone avec un revêtement intérieur d'acier inoxydable soudé.

6. LE CIRCUIT SECONDAIRE (EAU-VAPEUR)

La vapeur est produite dans les enveloppes des générateurs, à l'extérieur des tubes. Dans la partie supérieure de chaque générateur il y a un séparateur d'humidité. La pression de vapeur atteint 34,1 bars à la température de 241,7 °C ; l'humidité relative est égale à 0,25 % et le débit est voisin de 1 573 t/h. Avant d'être admise dans la turbine la vapeur est répartie entre quatre séparateurs centrifuges d'humidité à haute pression, à axe vertical, et est surchauffée dans seize surchauffeurs par vapeur vive.

En cas de délestage brutal du groupe turbo-alternateur, la vapeur excédentaire est dérivée vers un système détendeur évacuant au condenseur, ou vers un système de condensation auxiliaire.

7. LE GROUPE TURBO-ALTERNATEUR

Le groupe est unique et a une puissance brute de 285 MW. La turbine est composée de quatre corps placés sur la même ligne d'arbre. Elle comprend :

— *Un corps haute pression*, à quatre sections d'admission de vapeur contrôlées par des soupapes de réglage. À partir d'un séparateur chacune d'elles est alimentée par un collecteur comportant une vanne d'arrêt à fermeture rapide. Ce corps est muni d'un soutirage pour alimenter le dégazeur du poste d'eau.

À la sortie du corps haute pression, la vapeur va dans quatre séparateurs statiques moyenne pression, montés en parallèle. En amont de ces séparateurs, de la vapeur est soutirée pour alimenter des réchauffeurs moyenne pression du poste d'eau. La vapeur séchée va ensuite dans les seize surchauffeurs alimentés en vapeur vive haute pression, puis elle est reprise dans un collecteur et elle traverse une vanne d'interception à fermeture rapide et une vanne de réglage pour aboutir aux corps basse pression.

— *Trois corps basse pression* à double flux comportant chacun deux soutirages de vapeur pour l'alimentation des réchauffeurs de l'eau d'alimentation.

Les échappements des corps basse pression déversent la vapeur dans un condenseur à double corps soumis à une pression de 34 millibars absolus. Ce condenseur, dans lequel le débit de l'eau de refroidissement est de 21,1 m³/s, possède une surface d'échange de 26 000 m².

Un alternateur, d'une puissance de 295 MVA, est entraîné par la turbine. Son stator et son rotor sont refroidis par de l'hydrogène sous pression.

Sur la même ligne d'arbre, en plus de l'excitation principale et de l'excitatrice pilote, on trouve un alternateur auxiliaire qui a pour rôle de fournir une puissance de secours pendant le temps très court qui sépare la perte de la source normale d'alimentation des auxiliaires vitaux et la reprise en secours par trois groupes électrogènes diesels.

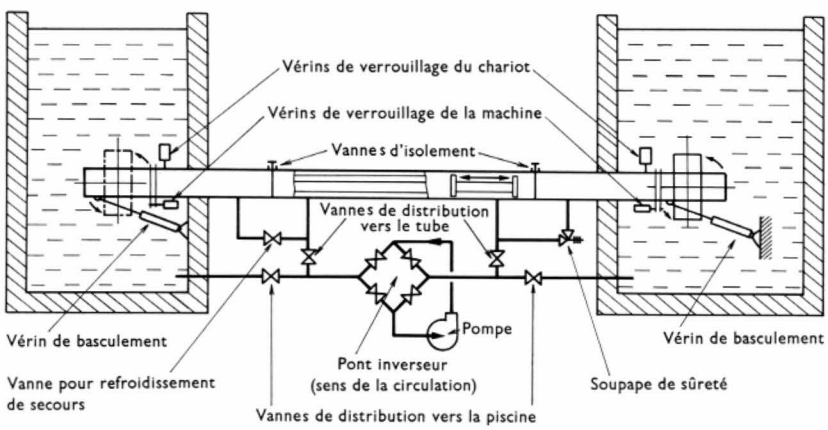


Fig. V-6

Dispositif de transfert des éléments combustibles par tube et piston libre (*É.D.F.*)

8. LA MANUTENTION DU COMBUSTIBLE

Le rechargement du réacteur s'effectue par tiers de cœur. Les éléments « neufs » sont placés en zone périphérique et les éléments partiellement irradiés sont répartis dans la zone intermédiaire et dans la zone centrale, le combustible usé ayant été retiré de ces deux dernières zones. La manutention s'effectue lorsque le réacteur est à l'arrêt. On estime que la perte de production pour le rechargement est compensée par la simplicité du matériel et par un investissement moins onéreux.

La partie supérieure de la cuve du réacteur débouche dans le fond de la *piscine du réacteur*.

Lorsqu'on désire manutentionner le combustible, le couvercle du réacteur, avec le mécanisme des barres de contrôle, est désolidarisé de la cuve puis soulevé avec le pont roulant de service. Au fur et à mesure que le bouchon est soulevé on remplit la piscine d'eau de façon à recouvrir le cœur pour faire un écran biologique entre celui-ci et le personnel de conduite du pont roulant d'abord et le personnel de conduite du pont de manutention du combustible par la suite. Sur une aire de service, le couvercle est stocké sur un massif spécial en béton qui arrête le rayonnement γ émis par l'intérieur du couvercle qui est radioactif.

Le combustible irradié est envoyé par un dispositif de transfert hydraulique dans la piscine de désactivation, qui se trouve dans l'autre caverne. Il y séjournera plusieurs mois pour perdre la plus grande partie de son activité avant d'être expédié, dans des récipients spéciaux, vers une usine de traitement du combustible. Le dispositif de transfert comporte un tube de 0,40 m de diamètre dans lequel circule un chariot mû par deux pistons (fig. V-6). Le mouvement est obtenu par différence de pression entre les deux piscines dont les vannes d'isolement sont ouvertes à tour de rôle. Un mécanisme de basculement par vérin, situé à chaque extrémité du tube, place l'élément combustible en position d'introduction ou d'extraction.

9. TRAITEMENT DES EFFLUENTS RADIOACTIFS

Comme toutes les centrales nucléaires, celle de Chooz possède les installations nécessaires pour traiter les produits de rejets radioactifs. Ils se présentent sous forme solide, liquide ou gazeuse. Les liquides sont traités par un procédé physico-chimique, les gaz par filtration. On peut également séparer les produits radioactifs des solides par incinération.

Les produits rejetés localement sont donc sans danger pour les populations environnantes. Quant aux résidus radioactifs ils sont évacués dans des récipients appropriés.

RÉACTEUR À EAU BOUILLANTE (B.W.R.)

En France, il n'y a pas encore de réacteur nucléaire à eau bouillante. Pour acquérir une expérience dans ce domaine, É.D.F. s'est rapprochée de sociétés privées suisses et allemandes et a formé avec celles-ci la Société d'énergie nucléaire de Kaiseraugst (E.N.K.) dans le but de participer aux études et à la construction d'une centrale ayant un réacteur de ce type. Cette centrale, dont une partie de la production revient à la France, est construite en Suisse à Kaiseraugst sur les bords du Rhin à une vingtaine de kilomètres en amont de Bâle.

Le réacteur alimente en vapeur un groupe turbo-alternateur d'une puissance de 950 MW.

1. PRINCIPE DU RÉACTEUR À EAU BOUILLANTE

Dans ce paragraphe on ne donnera qu'une description du principe de fonctionnement de ce type de réacteur, en essayant de montrer les principaux avantages et les difficultés à surmonter (fig. V-7).

Le réacteur à eau bouillante est vraiment une « *chaudière nucléaire* ». Comme dans le cas précédent, les éléments combustibles sont des « crayons » formés de pastilles d'uranium (UO_2) placées dans une gaine en zircaloy 2 (dans les premières réalisations on utilisait de l'acier inoxydable). Ils sont également plongés dans une cuve (fig. V-8) contenant de l'eau légère qui sert de modérateur ; dans ce cas on la laisse entrer en ébullition sous l'effet de la chaleur dégagée par les réactions de fission. C'est *la vapeur saturée produite par cette ébullition qui est directement utilisée dans la turbine après séparation et séchage.*

Contrairement au réacteur à eau sous pression qui nécessite l'emploi d'un échangeur de chaleur pour produire de la vapeur, le réacteur à eau bouillante produit lui-même la vapeur, sans intermédiaire. Cette production directe de vapeur présente l'avantage de la simplicité : elle permet la suppression de l'échangeur de chaleur entre le fluide de refroidissement et le fluide moteur. Une notable réduction du volume de l'enceinte primaire est ainsi possible.

D'autre part, la pression dans le réacteur est égale à la pression d'ébullition de l'eau correspondant à la température atteinte (aux pertes de charge près, c'est aussi la pression à l'admission du corps haute pression de la turbine). Par conséquent, la cuve est soumise à une pression interne bien moins forte que dans le cas d'un réacteur à eau sous pression. Cela est très important du point de vue de la construction de la cuve.

Cette simplification du circuit ne présente pas que des avantages. En effet, la vapeur rendue radioactive par son passage dans le cœur, sort de l'enceinte étanche et reste radioactive jusque dans la turbine et dans le condenseur. Bien que cette radioactivité décroisse rapidement, il faut prendre des précautions spéciales. C'est pourquoi les tuyauteries, les sécheurs de vapeur, la turbine, le condenseur, les pompes, le poste de réchauffage de l'eau, sont placés derrière d'encombrants écrans biologiques en béton. De plus, lors de son trajet dans le circuit eau-vapeur, l'eau peut se charger d'impuretés (oxydes dus à la corrosion par exemple) qui s'activent en passant dans le cœur et peuvent se déposer et s'accumuler en certains points ; les problèmes de protection ou de décontamination des matériels pour leur entretien est plus compliqué et il faut prévoir un filtrage très efficace sur le circuit. Celui-ci peut comprendre, en plus, un poste de déminéralisation, en série, à la sortie du condenseur.

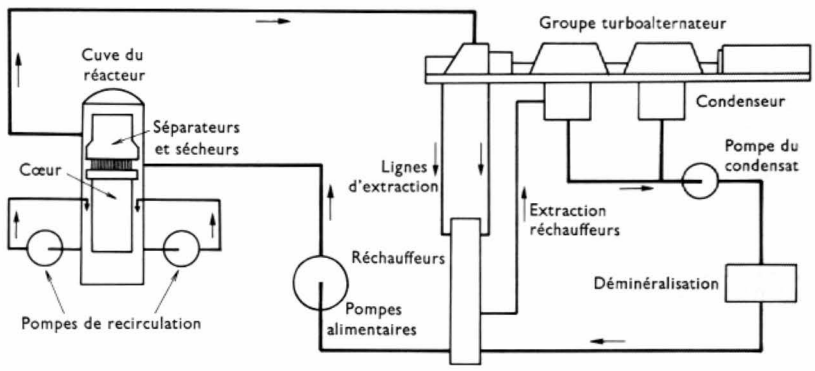


Fig. V-7

Schéma de principe d'une centrale équipée d'un réacteur à eau bouillante (B.W.R.) à cycle direct (*É.D.F.*)

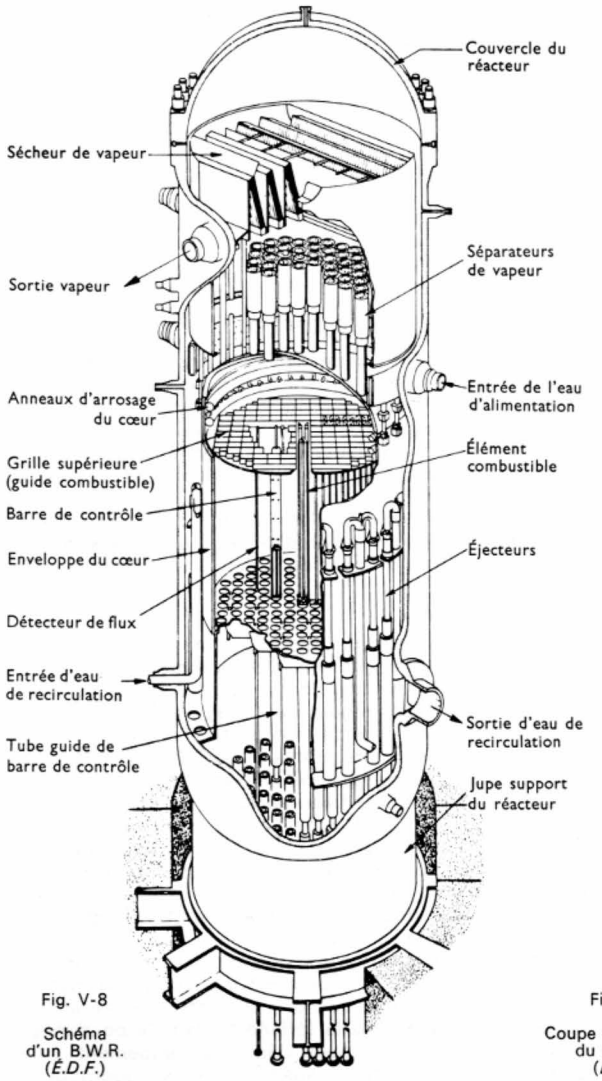


Fig. V-8

Schéma d'un B.W.R. (*É.D.F.*)

Pour éviter une contamination par de l'eau radioactive, en cas de rupture du circuit eau-vapeur, des vannes automatiques à fermeture rapide sont insérées dans ce circuit afin d'isoler la partie interne de l'enceinte étanche et la partie extérieure (en fait, il y a deux enceintes étanches, une enceinte primaire dans laquelle se trouve le réacteur, et une enceinte secondaire de sécurité). Si une rupture du circuit eau-vapeur se produisait dans l'enceinte primaire, celle-ci se trouverait soumise à une surpression intérieure importante, d'autant plus grande que son volume peut être relativement faible puisqu'il n'y a pas d'échangeur de chaleur. Pour limiter cette pression et ne pas avoir à surdimensionner les parois de l'enceinte, à l'intérieur de celle-ci, il y a un grand réservoir d'eau froide, appelé *piscine de suppression de pression ;* la vapeur libérée et guidée par des tubes plongeant dans le réservoir, vient barboter et se condenser dans celui-ci, ce qui diminue le volume de la vapeur, donc la pression (fig. V-9).

En ce qui concerne la sécurité, on peut signaler qu'en cas de rupture du circuit eau-vapeur, l'intérieur de la cuve est arrosé au moyen d'un anneau d'arrosage avec de l'eau à haute pression (circuit H.P.C.S. : *high pressure core spray*) pour éviter une fusion éventuelle du cœur (fig. V-10). Il y a aussi un circuit d'empoisonnement du cœur.

2. RÉGULATION DE LA PUISSANCE THERMIQUE DU RÉACTEUR

Dès les premières études relatives à la production d'énergie par des réacteurs nucléaires, la possibilité du refroidissement du cœur par l'eau bouillante avait posé le problème de la compatibilité de l'ébullition de l'eau et de la stabilité de fonctionnement du réacteur. On craignait qu'il y ait des risques d'emballement de la réaction en chaîne. Or, il n'en est rien. En effet, la formation de bulles dans l'eau, autour des éléments combustibles, produit un effet régulateur.

L'eau joue ici le rôle de modérateur, c'est-à-dire qu'elle ralentit les neutrons rapides, les « thermalise » en leur donnant un seuil d'énergie qui permet l'entretien de la réaction en chaîne. Si la puissance thermique croît par suite d'une augmentation de réactivité, l'ébullition devient alors plus importante et il y a formation d'un plus grand nombre de bulles (volume « vide », en première approximation) et par suite le volume de modérateur est plus faible. Il y a alors moins de ralentissement et les neutrons sont capturés par l'uranium sans libération de nouveaux neutrons. La réaction a alors tendance à décroître, la puissance thermique diminue et avec elle la formation de bulles. Si cette diminution du volume des bulles est grande, l'eau retrouve alors son pouvoir modérateur et la réaction en chaîne s'amplifie. On voit donc qu'il suffit de faire varier le débit de l'eau, au moyen de pompes de recirculation, pour régler la puissance thermique du réacteur ; on agit sur ce que l'on appelle le *coefficient négatif de température.*

Ce réacteur est tout de même équipé de barres de contrôle et de sécurité qui sont placées verticalement dans la partie inférieure de la cuve, la partie supérieure étant réservée à la vapeur, aux séparateurs de vapeur et au sécheur.

Le refroidissement par l'eau bouillante présente un autre avantage : la chaleur de vaporisation de l'eau est très grande et avec l'eau à l'état vapeur on extrait beaucoup plus de chaleur qu'avec l'eau à l'état liquide. Cependant, le volume massique de la vapeur étant beaucoup plus grand que celui de l'eau, cela entraîne une augmentation du volume de l'enceinte. À puissance égale, les dimensions de la cuve d'un réacteur à eau bouillante sont sensiblement plus grandes que celles du réacteur à eau sous pression.

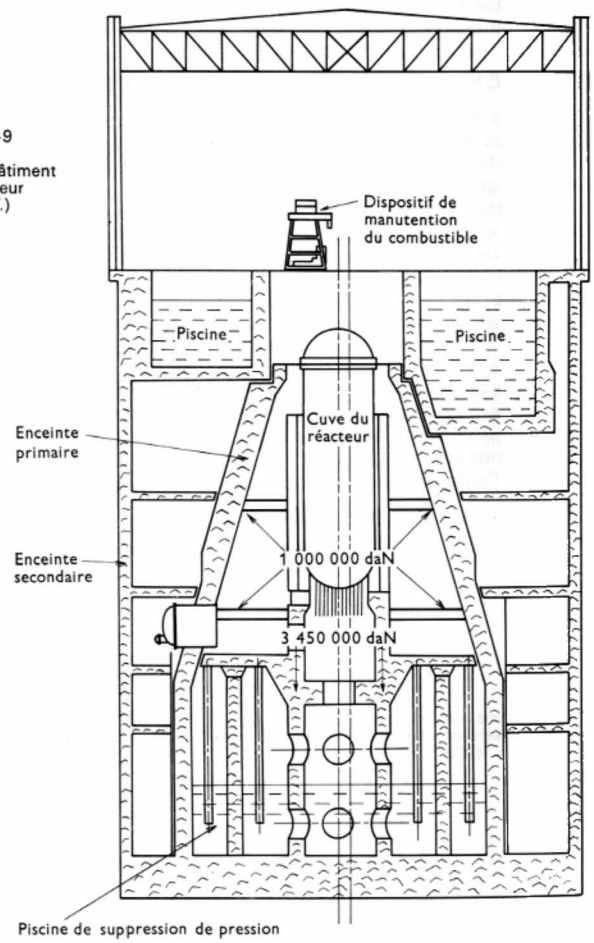


Fig. V-9

Coupe du bâtiment du réacteur (*É.D.F.*)

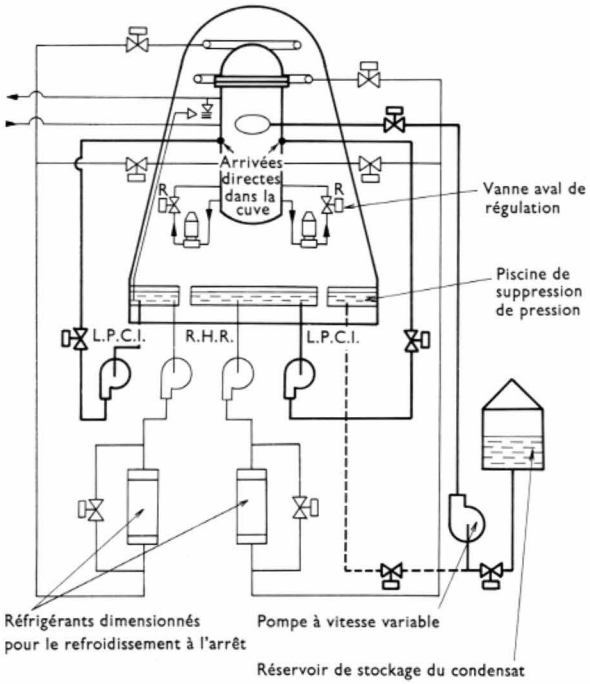


Fig. V-10 — Schéma du circuit H.P.C.S. (*É.D.F.*)

3. MANUTENTION DU COMBUSTIBLE

Dans une cuve en acier, relativement petite, il est difficile de prévoir un trop grand nombre de traversées sans en compromettre sa solidité. En effet, les problèmes de soudure (préchauffage, contraintes de retrait, fragilisation, recuit, etc.) sont très délicats et l'on préfère limiter le nombre de ces traversées et ne pas réserver de passage pour les éléments combustibles à travers la paroi de la cuve. Comme pour les réacteurs à eau sous pression il faut donc arrêter le réacteur pour effectuer toutes les opérations de chargement et de déchargement.

Celles-ci sont réalisées sous une hauteur d'eau suffisante pour former un écran biologique. C'est pourquoi au-dessus de la cuve du réacteur à eau bouillante on trouve également une piscine qui permet de recouvrir le réacteur d'eau, de stocker les séparateurs de vapeur et le couvercle et d'y entreposer les éléments combustibles irradiés pour leur permettre de se désactiver avant d'être expédiés vers une usine de traitement. Cette piscine, contenant des éléments irradiés (d'où peuvent s'échapper quelques produits de fission) renferme une eau contaminée. Elle doit donc être parfaitement étanche, et posséder des parois épaisses pour faire écran aux radiations. Elle est très lourde et, étant placée au sommet de l'enceinte primaire, à l'intérieur de l'enceinte secondaire, elle pose d'assez délicats problèmes de génie civil.

4. CARACTÉRISTIQUES TECHNIQUES PRINCIPALES D'UNE CENTRALE B.W.R.

À titre d'information on va donner les principales caractéristiques d'une centrale pouvant fournir une puissance électrique de 850 MW.

Le réacteur est à cycle direct avec recirculation de l'eau dans le cœur à l'aide de pompes placées en dehors de la cuve. Le débit de recirculation qui est variable peut atteindre le tiers du débit total.

La cuve a les dimensions approximatives suivantes (fig. V-11) :

Hauteur totale	22,40 m
Diamètre intérieur	5,530 m
Épaisseur de la paroi	140 mm
Masse de la cuve avec son couvercle	585 t

Cette cuve est supportée par une colonne cylindrique en béton, le tout étant placé dans l'enceinte primaire. Cette dernière comprend deux parties :

— La partie inférieure, contenant la piscine de suppression de pression, forme un cylindre à base circulaire :

Hauteur du cylindre	16 m
Diamètre intérieur du cylindre	24,5 m

— La partie supérieure continuant le cylindre a la forme d'un tronc de cône :

Diamètre de la base supérieure du tronc de cône	7,5 m
Hauteur du tronc de cône	26 m

Les parties tronconiques et cylindriques sont séparées par un plancher étanche et sont mises en communication par une série de tubes plongeant dans la piscine de façon que la vapeur qui, éventuellement, envahirait l'enceinte tronconique, aille obligatoirement barboter dans l'eau.

Le haut de la cuve débouche, en haut du tronc de cône, dans un bassin situé entre la piscine de désactivation des éléments combustibles et la piscine de stockage du couvercle et des structures internes (celles qu'il faut enlever pour permettre la manutention du combustible). Ce bassin est mis en communication avec les deux piscines en enlevant des bâtardeaux qui les séparent.

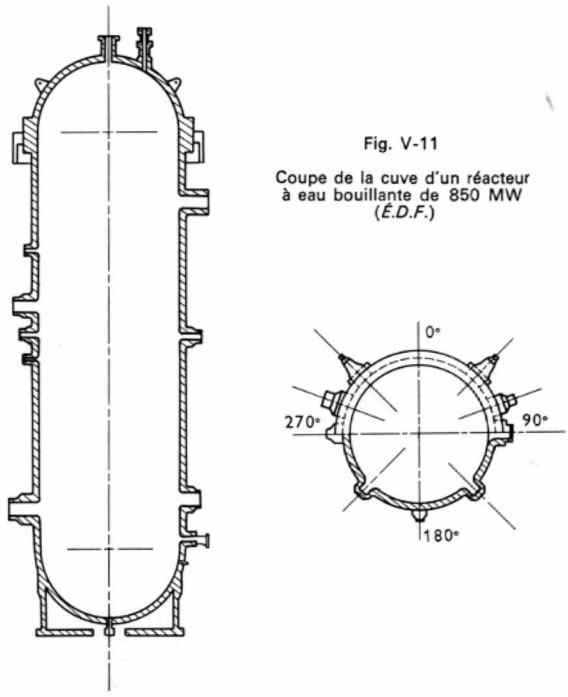


Fig. V-11

Coupe de la cuve d'un réacteur à eau bouillante de 850 MW (*É.D.F.*)

L'enceinte primaire et les piscines sont placées dans une enceinte secondaire en béton ou métallique.

Diamètre intérieur de l'enceinte secondaire	37 m
Hauteur totale au-dessus du radier	72 m

Caractéristiques générales :

Puissance thermique du cœur du réacteur	2 436 MW
Pression de sortie de la vapeur	68 bar (absolus)
Humidité relative maximale de la vapeur à la sortie	0,3 %
Débit de vapeur	4 757 t/h
Pression à l'entrée de l'eau alimentaire	77,5 bar (absolus)
Débit de l'eau alimentaire	4 757 t/h
Pression au condenseur	35 bar (absolus)
Puissance de l'alternateur	862,8 MW
Puissance des auxiliaires de la centrale	18,3 MW
Puissance nette	844,5 MW
Consommation de chaleur spécifique nette	2 480 mth/kWh (1 mth = 4,18 kJ)

CHAPITRE VI

FILIÈRE DES RÉACTEURS À HAUTE TEMPÉRATURE (H.T.R.)

La recherche continuelle d'une meilleure utilisation du combustible nucléaire et d'une augmentation du rendement, grâce à des températures élevées du fluide caloporteur, a conduit, par un développement logique de la filière uranium-graphite-gaz, à la filière H.T.G.R. ou H.T.R. (*High Temperature Gas-cooled Reactor*). Cette filière a fait l'objet d'études et de quelques réalisations aux États-Unis d'Amérique, en Grande-Bretagne et en République Fédérale Allemande. La France a seulement contribué aux études britanniques du projet Dragon par l'intermédiaire de l'O.C.D.É. Bien que cette technique présente un intérêt certain et malgré une riche expérience dans le domaine graphite-gaz, les options prises en France, pour le développement de l'énergie nucléaire, ne permettent pas d'envisager actuellement un développement national des réacteurs à haute température.

1. CARACTÉRISTIQUES PRINCIPALES DE LA FILIÈRE

Pour obtenir de hautes températures dans un réacteur (températures supérieures à 750 °C), on est obligé d'abandonner les gainages métalliques des éléments combustibles pour utiliser des produits réfractaires pour le combustible et pour le modérateur. Plus la température est élevée plus les phénomènes de corrosion sont activés; il faut donc disposer d'un fluide caloporteur non corrosif et, aussi, qui soit peu sensible à la radiolyse.

D'autre part, si l'on veut atteindre des densités de puissance élevées avec le combustible, pour avoir des cœurs très compacts et des structures plus économiques, il faut réaliser une large dispersion du combustible au sein du modérateur. Il y a plusieurs solutions à ces problèmes mais tous les réacteurs à hautes températures actuellement en service utilisent le graphite comme modérateur, l'hélium comme fluide réfrigérant et le dicarbure mixte d'uranium enrichi et de thorium comme combustible.

On va montrer quels sont les principaux problèmes posés par l'utilisation de ces trois constituants.

2. LE MODÉRATEUR

Aux températures de fonctionnement de ces réacteurs (plus de 750 °C) et sous l'effet des très fortes doses de neutrons qu'il reçoit, le graphite subit des déformations (effet Wigner) si importantes qu'il semble exclu qu'il puisse être maintenu en place pendant toute la vie d'un réacteur (30 ans). C'est pourquoi les réalisations actuelles et les projets sont conçus pour que le combustible soit intimement lié au graphite et que celui-ci soit renouvelé en même temps que le combustible. Cet impératif du renouvellement du graphite a donné naissance à deux conceptions des éléments combustibles, celle des éléments prismatiques (anglaise et américaine) et celle des éléments sphériques (allemande). On envisage aussi d'utiliser de l'oxyde de béryllium pour le modérateur.

3. LE FLUIDE CALOPORTEUR

L'hélium $\left({}^{4}_{2}\mathrm{He}\right)$ est un gaz chimiquement inerte qui présente de très bonnes propriétés thermiques. C'est un gaz rare, donc cher, que l'on trouve principalement dans le gaz naturel. Les principaux producteurs d'hélium sont américains et canadiens. Cependant on trouve de l'hélium en Europe dans les gisements de gaz naturel de la mer du Nord (dans la proportion de 0,6 % environ). Le traitement de ce gaz permet d'envisager une réduction de la moitié du prix (un réacteur de 500 MW utiliserait de 2 à 4 tonnes d'hélium soit 12 à 24 000 m³).

Il faut prévoir une très bonne étanchéité des circuits pour limiter le taux de fuite au minimum, d'autant plus que l'hélium, qui n'est pas lui-même activé par l'irradiation, contient sous forme d'impureté (dans la proportion de 15 °/₀₀) un isotope $\left({}^{3}_{2}\mathrm{He}\right)$ qui est transformé partiellement en tritium ${}^{3}_{1}\mathrm{H}$ par irradiation. C'est pourquoi, pour éviter notamment les fuites des presse-étoupe, on a réalisé des soufflantes intégrées. Elles ont posé par ailleurs des problèmes de lubrification des paliers qui ont été résolus en employant des paliers à gaz dont les parties tournantes sont recouvertes par un film de bisulfure de molybdène (MoS_2).

Il convient aussi de procéder à une épuration continue de l'hélium pour enlever toute trace d'humidité qui peut provenir du graphite ou de fuites des tubes du générateur de vapeur. En effet, à ces hautes températures, la présence d'eau entraîne une corrosion radiolytique du graphite très intense; en plus de la destruction du graphite, il peut y avoir un phénomène de transfert de masse avec modification des propriétés de surface des métaux des échangeurs et des soufflantes.

4. LE COMBUSTIBLE

L'absence de matériaux de structure à fortes sections de capture de neutrons confère à ce type de réacteur un très bon bilan neutronique. Cela permet de le faire fonctionner en *convertisseur*, c'est-à-dire que la matière fissile « ensemence » une matière *fertile* qui deviendra fissile. Quand le taux de conversion est inférieur à 1, c'est-à-dire quand la consommation de combustible est supérieure à la production de nouveau combustible, le réacteur est appelé convertisseur; quand le taux de conversion est supérieur à 1, il est dit *surgénérateur*.

On a envisagé plusieurs cycles combustibles combinant un matériau fissile et un matériau fertile par exemple:

— le cycle thorium-uranium: ${}^{232}\mathrm{Th} \rightarrow {}^{233}\mathrm{U}$.

— le cycle uranium-plutonium: ${}^{238}\mathrm{U} \rightarrow {}^{239}\mathrm{Pu}$.

Le taux de conversion du premier cycle (amorcé avec l'aide d'une charge complémentaire d'uranium 235 enrichi), en tenant compte du recyclage de l'uranium 233 dans le réacteur où il est produit, est bien plus grand que celui du second cycle. De plus, le thorium est un corps dont les réserves mondiales sont du même ordre de grandeur que celles de l'uranium. Toutefois, devant les difficultés technologiques rencontrées, toutes les réalisations actuelles utilisent le cycle direct uranium 235-thorium sans recyclage de l'uranium 233.

Tous les combustibles utilisés dans les réacteurs à haute température en service sont constitués par des particules sphériques de carbure d'uranium ou de thorium de 300 à 800 micromètres de diamètre. Ces particules sont entourées (*coated-particles*) d'un certain nombre de couches de graphite pyrolytique (ou pyrocarbone) et de carbure de silicium étanche, de façon à retenir captifs les produits de fission.

5. LE CŒUR DU RÉACTEUR

Selon la technique anglaise ou américaine, le combustible est placé dans des canaux percés dans des blocs prismatiques de graphite. Ces blocs, empilés les uns à côté des autres en plusieurs couches, forment le cœur du réacteur. L'empilement est conçu de telle façon que les blocs peuvent être retirés du cœur par la machine de chargement. Ainsi le graphite modérateur devient un produit consommable comme le combustible (fig. VI-1).

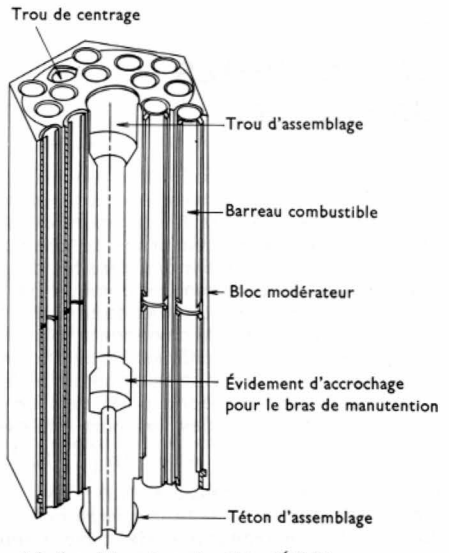


Fig. VI-1

Écorché d'un élément combustible (*É.D.F.*)

Le réflecteur latéral peut également être remplacé si les phénomènes physico-chimiques dont le graphite est le siège produisent des dommages nécessitant ce remplacement.

Le défaut de ce type de cœur est de ne pas posséder de structures de maintien suffisantes et sous l'action de la température et de l'irradiation, les blocs de graphite peuvent se déformer d'une façon importante. Il faut donc tenir compte de cette instabilité pour garder un bon fonctionnement des barres de contrôle et de sécurité.

La technique allemande est plus originale. Le cœur du réacteur est formé d'un empilement de boulets de 6 cm de diamètre, qui contiennent le modérateur et le combustible. On réalise ainsi une très grande dispersion du combustible. Les boulets sont contenus dans une sorte de silo en graphite muni à sa base d'un orifice par lequel on les soutire (fig. VI-2). Après soutirage ils passent dans différents

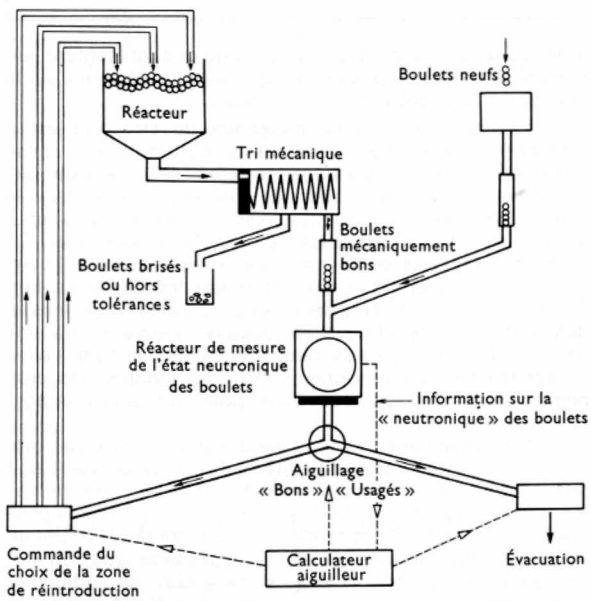


Fig. VI-2 — Dispositif de contrôle et de circulation des boulets (*É.D.F.*)

postes où leurs états neutroniques et physiques sont contrôlés. Les éléments sains sont renvoyés dans le silo et les éléments endommagés (cassés) ou bien ayant atteint leur taux maximal d'irradiation sont retirés du circuit (fig. VI-3). Cette circulation quasi continue du combustible permet d'optimiser le cycle.

Ce système pose de nouveaux problèmes, en particulier ceux liés à la bonne circulation des boulets. En effet, les phénomènes d'écoulement sont fort complexes dans ce cas et doivent être étudiés sur des modèles réduits. Malgré les résultats de tels essais, il reste toujours une incertitude sur la validité de leur extrapolation à des ouvrages de grandes dimensions. On peut également prévoir des difficultés pour l'introduction de barres de sécurité au sein d'un tel cœur.

Pour fixer les idées sur cette réalisation originale on va donner les principales caractéristiques du cœur du réacteur à boulets construit à Jülich près d'Aix-la-Chapelle en République Fédérale Allemande (réacteur A.V.R.) :

Puissance thermique . . . . . 46 MW
Puissance électrique nette . . . . . 15 MW

Cycle du combustible : uranium enrichi (à 93 % d'uranium 235) et thorium.
Combustible : particules enrobées à base de carbure d'uranium et de thorium.

Puissance spécifique . . . . . 73 kW/kg
Taux moyen d'irradiation . . . . . 90 000 MWj/t

Élément combustible : le boulet est constitué d'une coquille en graphite de 1 cm d'épaisseur et de 6 cm de diamètre extérieur contenant les particules enrobées incluses dans une matière en graphite.

Température au centre du boulet . . . . . 1 250 °C
Température à la surface du boulet . . . . 1 050 °C

Chaque boulet contient 1,11 g d'uranium enrichi à 93 % d'uranium 235 et 10,3 g de thorium.
Cœur : il est constitué d'un empilement de 100 000 boulets.

Hauteur . . . . . 4,3 m
Diamètre . . . . . 3 m

Réflecteur : le cœur est entouré d'une structure en graphite (50 cm d'épaisseur) et d'une couche de carbone amorphe. Le réflecteur inférieur a la forme d'un entonnoir, avec une pente de 30°, au centre duquel se trouve le tube de soutirage. Ce réflecteur est percé de canaux pour le passage de l'hélium.

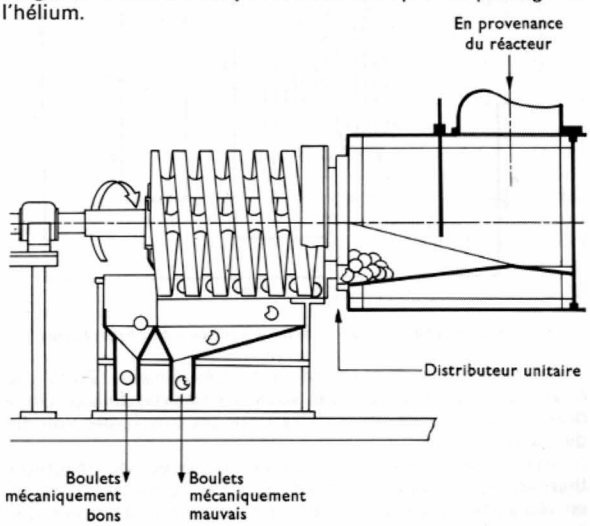


Fig. VI-3 — Dispositif pour tri mécanique d'un réacteur à boulets (*É.D.F.*)

6. RÉCUPÉRATION DE L'ÉNERGIE DE FISSION

Tous les réacteurs à haute température en service, électrogènes ou non, récupèrent la chaleur de fission transportée par l'hélium par l'intermédiaire de générateurs de vapeur, intégrés ou non dans la même enceinte que le cœur. Cependant, certains projets, en particulier allemands, prévoient l'utilisation directe de l'hélium dans des turbines à gaz. L'association d'une turbine à gaz avec un réacteur à haute température permet d'espérer des rendements plus élevés, constants quelle que soit la charge. D'autre part, la suppression des générateurs de vapeur élimine les risques d'entrée d'eau dans le réacteur.

L'emploi d'une turbine à gaz présente un autre avantage important qui est le faible besoin d'eau de réfrigération pour cette machine. Les problèmes d'implantation des centrales sont ainsi grandement facilités.

CHAPITRE VII

FILIÈRE À NEUTRONS RAPIDES LES SURGÉNÉRATEURS

1. PRINCIPE

Le principe de fonctionnement des réacteurs à neutrons rapides est très différent de celui des réacteurs à neutrons thermiques (fig. VII-1). On utilise alors directement les neutrons de fission à hautes énergies, sans les ralentir. Dans ce type de réacteur il n'y a donc pas d'utilisation de modérateur.

Dans les gammes d'énergie des neutrons rapides, les sections efficaces de fission et de capture des isotopes de l'uranium sont relativement faibles et rapprochées. Pour être sûr d'entretenir la réaction en chaîne il faut donc obtenir une très grande concentration de noyaux fissiles. On utilise pour cela de l'uranium 235 enrichi ou du plutonium 239.

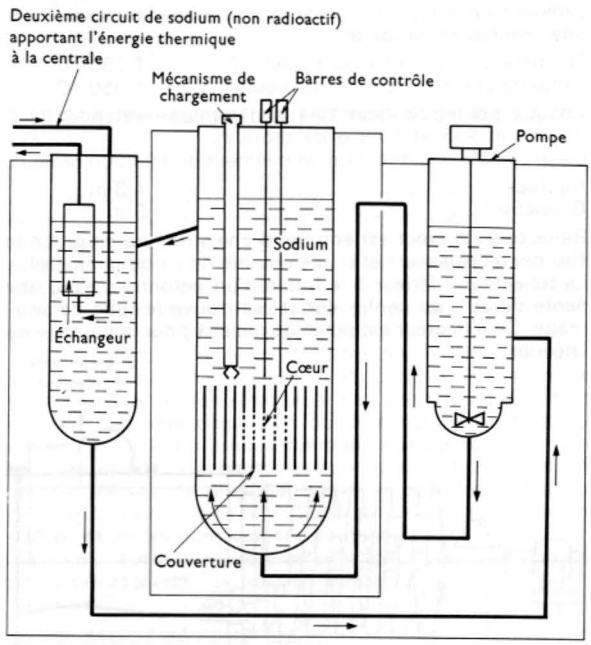


Fig. VII-1 — Schéma de principe d'un réacteur à neutrons rapides

Les taux d'enrichissement étant très élevés (20 %), la masse critique est obtenue sous un volume faible. On a donc de très fortes puissances pour un très faible volume de cœur.

Une autre différence fondamentale avec les réacteurs thermiques est que l'on peut créer du combustible fissile en répartissant convenablement tout autour du cœur une *couverture* de matière fertile (par exemple de l'uranium appauvri en isotope 235). C'est de cette propriété que l'on a tiré le nom de *couveuse* (*breeder*) qui est donné à ce type de réacteur. On le nomme plus souvent *surgénérateur* car, avec un *taux de conversion* supérieur à l'unité, il produit plus de combustible qu'il n'en consomme. (On estime qu'il sera également possible de pratiquer la surgénération dans les réacteurs à haute température à uranium 233).

2. INTÉRÊT DE L'EMPLOI D'UN MÉTAL LIQUIDE COMME FLUIDE CALOPORTEUR

En tenant compte des problèmes métallurgiques posés par les éléments combustibles, on peut ainsi obtenir une combustion de 80 % de l'uranium. Comparé aux autres réacteurs où moins de 1 % de l'uranium consommé est utilisé, on imagine facilement qu'il est ainsi possible de produire une bien plus grande quantité de chaleur.

La matière fissile utilisée dans un réacteur à neutrons rapides représente un investissement très important, aussi essaie-t-on d'en extraire le maximum de puissance thermique. Comme la concentration du combustible est très grande et que l'on obtient des densités de puissance proches de 100 MW par tonne de combustible (au lieu de 10 à 15 MW/t pour les réacteurs à neutrons thermiques), il faut donc disposer d'un fluide caloporteur très efficace. Pour de pareilles puissances spécifiques les coefficients de conductibilité thermique du gaz carbonique ou de l'eau sont insuffisants : le choix s'est donc porté vers un métal liquide. Parmi les métaux liquides, les plus intéressants sont les métaux alcalins comme le sodium $\left(^{23}_{11}\mathrm{Na}\right)$ et un mélange eutectique sodium-potassium (NaK). Ces fluides sont chimiquement stables à haute température et possèdent une faible tension de vapeur pour des températures voisines de 600 °C. Il est donc possible de les faire circuler dans les circuits à une pression peu supérieure à la pression atmosphérique.

Les principales caractéristiques de ces métaux comparées à celles de l'eau sont résumées dans le tableau suivant :

Fluide	Point de fusion	Point d'ébullition	Densité par rapport à l'eau	Chaleur massique (calories par gramme et par degré Celsius)	Section efficace de capture moyenne (barn) (énergies de 0 à 10 MeV)
Sodium	98 °C	883 °C	0,9	à 200 °C 0,32	$0{,}8.10^{-3}$
22 % Sodium 78 % Potassium	— 11 °C	784 °C	0,83	à 200 °C 0,22	5.10^{-3}
Eau	0 °C	100 °C	1	à 100 °C 1	$0{,}1.10^{-3}$

Malheureusement, ces métaux liquides présentent un certain nombre d'inconvénients qui ont une influence sur la conception de l'ensemble du réacteur :

— L'emploi de certains matériaux de structure est à prohiber car ils sont attaqués par le sodium et sont cause de ce qu'on appelle un « transfert de masse ». Par exemple, le carbone de l'acier faiblement allié est soluble dans le sodium (solubilité croissante avec la température) et il s'ensuit une modification des propriétés de cet acier. Ce carbone peut aller se fixer sur d'autres métaux tels l'acier inoxydable austénitique qui est rendu fragile de ce fait. De plus, à cause de ce phénomène de transfert de masse, des particules métalliques radioactives peuvent être entraînées dans des parties plus froides des circuits ; elles se déposent et il y a contamination des circuits : les problèmes de protection biologique prennent plus d'importance.

— L'inconvénient le plus grand est peut être la forte affinité du sodium pour l'oxygène (celui-ci provient soit de l'oxygène de l'air, soit de l'oxygène de l'eau). Heureusement cette oxydation est relativement lente quand les proportions d'oxygène sont faibles. On détecte une éventuelle réaction sodium-eau en analysant le gaz inerte, que l'on met en couverture au-dessus de la surface libre du sodium et dans lequel on trouve alors de l'hydrogène. Il est nécessaire de garantir les circuits de sodium contre toute pénétration d'oxygène et de prévoir une épuration continue du sodium. On y parvient en plaçant un absorbant avide d'oxygène, comme le zirconium par exemple, dans des *pièges chauds*. D'autres impuretés, comme les hydrocarbures (fuites d'huile éventuellement), sont condensées dans des *pièges froids*.

— Un dernier inconvénient majeur est l'activation du sodium sous le bombardement neutronique. En effet, par

capture d'un neutron, le sodium 23 donne naissance à un isotope radioactif, le sodium 24, qui a une période de 15 heures ; il émet deux radiations γ de 1,37 et de 4,75 MeV et une radiation β^- de 1,39 MeV. Cela impose de prévoir une protection biologique autour des circuits sodium et, en cas d'entretien de matériel, il est nécessaire d'attendre un certain temps après l'arrêt du réacteur pour que le personnel puisse intervenir.

Ces deux derniers inconvénients, réactivité chimique du sodium avec l'eau et radioactivité, constituent un grave danger en cas de rupture de circuit. On supprime ce risque en interposant entre le circuit de sodium radioactif (circuit primaire) et le circuit eau-vapeur de la turbine, un circuit secondaire dans lequel circule du sodium qui n'est pas radioactif puisqu'il ne passe pas dans le cœur. L'interposition du circuit intermédiaire est indispensable pour d'autres raisons : en l'absence de ce circuit le rayonnement γ du sodium 24 produirait de l'oxygène actif par radiolyse de l'eau et les tubes des générateurs de vapeur seraient rapidement corrodés.

Ce circuit secondaire permet donc le transfert de la chaleur d'un échangeur primaire (ou intermédiaire) sodium-sodium à un échangeur secondaire sodium-eau, tout en créant une barrière entre le sodium du cœur et l'eau.

Le circuit primaire comprenant le cœur et sa cuve, les pompes primaires de circulation du sodium et les échangeurs primaires sodium-sodium peut être placé dans une même enceinte biologique. C'est alors une disposition intégrée.

Malgré ces inconvénients, ce type de réacteur permet non seulement d'utiliser au mieux le combustible nucléaire et d'en fabriquer mais surtout de produire de la vapeur ayant les mêmes caractéristiques que celle utilisée dans une centrale thermique. Ces centrales nucléaires sont donc équipées des mêmes turbo-alternateurs que les centrales thermiques avec toutefois, en plus, un circuit de refroidissement pour le réacteur à l'arrêt et un circuit de détente-désurchauffe de la vapeur en cas de déclenchement du groupe.

Indépendamment des avantages économiques apportés par cette meilleure utilisation de la chaleur, il est, à notre avis, un autre argument important en faveur de cette filière (et aussi pour la filière des réacteurs à haute température), c'est celui d'une moindre « pollution thermique » de l'eau de refroidissement. En effet avec les centrales nucléaires modérées à l'eau légère, dont les caractéristiques de vapeur sont très médiocres, non seulement on gaspille de l'énergie en renvoyant une très grande quantité de chaleur à la source froide mais on élève la température des eaux et avec elle celle de l'atmosphère.

La construction des réacteurs à neutrons rapides, que l'on nomme plus brièvement réacteurs rapides, n'a pas atteint un grand développement dans le monde. Il reste encore à maîtriser la technique d'utilisation des métaux liquides et en particulier la circulation de ces métaux (le sodium paraît être mondialement retenu comme fluide caloporteur). De plus, les hautes températures atteintes posent des problèmes technologiques difficiles dans le domaine des structures et dans celui des éléments combustibles. En France, en Grande-Bretagne, en U.R.S.S. et aux États-Unis d'Amérique on a construit quelques réacteurs expérimentaux (1 ou 2 par nation) à une échelle assez importante pour qu'ils constituent un banc d'essai du matériel suffisamment puissant. On estime que cette filière prendra la relève des filières actuelles vers 1980.

3. UN EXEMPLE DE SURGÉNÉRATEUR

En France, la première réalisation a été la construction par le C.É.A., au centre de Cadarache, de la pile Rapsodie (Rapides-Sodium) de 40 MW (énergie thermique) ; elle n'est pas prévue pour produire de l'énergie électrique mais simplement pour étudier les problèmes posés par cette nouvelle technique et pour expérimenter aussi bien les éléments combustibles que les pompes de circulation du sodium, par exemple.

Mise en service en août 1967, cette pile a eu une disponibilité de 86,2 % (entre août 1967 et juillet 1969) ce qui est assez remarquable. Elle a permis de résoudre certains problèmes technologiques, d'éclaircir de nombreux points et surtout, devant les bons résultats obtenus, de prendre la décision de construire un réacteur de puissance pour équiper une centrale électrique prototype d'échelle industrielle. Le réacteur Phénix est la pièce maîtresse de cette centrale. Le nom de Phénix donné au réacteur est là pour rappeler qu'en consumant son combustible il en crée du nouveau, comme l'oiseau fabuleux de la mythologie renaissait de ses cendres.

Les études du réacteur Phénix ont été réalisées par une société mixte composée de représentants du C.É.A., d'É.D.F. et d'une société privée G.A.A.A. (Groupement Atomique Alsacienne Atlantique). Les études d'avant-projet ont commencé en 1965 ; l'objectif était de démarrer la centrale en 1972 pour qu'elle soit en service effectif en 1973.

3.1. Le réacteur (fig. VII-2). — Le réacteur est du type intégré : le cœur, le sodium (800 tonnes environ), les pompes de circulation et les échangeurs intermédiaires sont contenus dans une même cuve d'où il ne sort que le sodium du circuit secondaire et les circuits annexes de remplissage, d'épuration et de vidange.

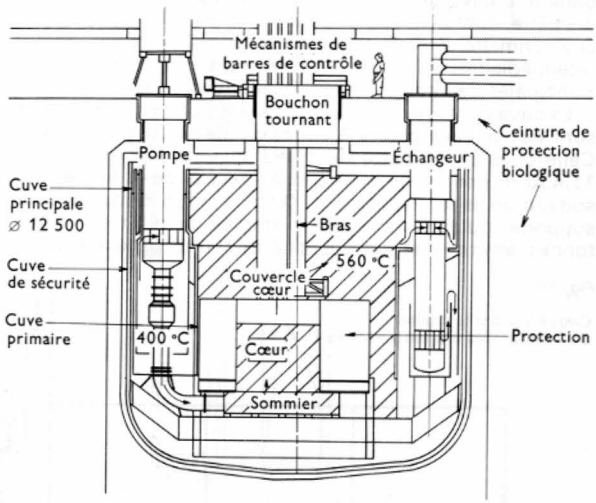


Fig. VII-2 — Coupe du réacteur Phénix (*C.É.A.*)

3.2. Le combustible et le cœur. — Le combustible fissile est composé d'un mélange d'oxyde d'uranium (UO_2) et d'oxyde de plutonium (PuO_2) enrichi en plutonium fissile. Ce combustible se présente sous la forme de pastilles de 5,5 mm de diamètre empilées dans des gaines en acier inoxydable et formant des aiguilles. Ces aiguilles sont groupées en faisceaux de 217 aiguilles placées dans une enveloppe en acier inoxydable de forme hexagonale. Les faisceaux, plus de cent, contiennent également les « ouvertures » axiales supérieure et inférieure de combustible fertile (aiguilles d'oxyde d'uranium appauvri) ainsi que la protection neutronique supérieure. L'ensemble de ces faisceaux occupe un volume cylindrique de 1,40 m de diamètre et de 0,70 m de hauteur, représentant environ 3 tonnes de mélange d'oxyde d'uranium et d'oxyde de plutonium enrichi de 670 kg de plutonium fissile. La puissance calorifique spécifique moyenne du cœur est prévue égale à 200 kW/kg d'oxyde soit 500 kW/dm³ de cœur ; la puissance thermique totale est de 550 MW.

Chaque faisceau comporte à sa partie supérieure une gorge permettant de le saisir avec un grappin et est fiché à sa base dans le *sommier*. Ce dernier, sorte de coffre dans lequel arrive le sodium froid mis en pression par les pompes primaires, est muni d'orifices permettant une répartition judicieuse du sodium entre les différents faisceaux.

Le combustible fertile placé en couverture autour du cœur est composé de pastilles d'oxyde d'uranium (UO_2) appauvri ou d'uranium naturel appauvri, placées dans des aiguilles groupées en faisceaux de 61 aiguilles. Semblables aux faisceaux du combustible fissile, ces assemblages sont également fichés dans le sommier et refroidis par une circulation de sodium. Cette couverture a une épaisseur d'environ 0,40 m.

Dans le cœur, des emplacements sont réservés pour le passage des barres de contrôle.

Le cœur et sa couverture sont entourés d'une protection neutronique « intégrée » comportant, de l'intérieur vers l'extérieur :

— des barres d'acier inoxydable à sections hexagonales plantées dans le sommier et refroidies par la circulation forcée du sodium ;

— des rondins de graphite, placés dans des conteneurs en acier inoxydable à section circulaire, refroidis par convection naturelle du sodium ;

— des rondins de graphite boré.

Dans la protection latérale en acier, 41 logements sont ménagés pour le stockage d'éléments irradiés à décharger.

3.3. La cuve. — La protection supérieure, qui est démontable avec les faisceaux de combustible, est faite avec du carbure de bore. Le cœur avec sa protection biologique et le sodium chaud (560 °C) qui les a traversés sont contenus dans une cuve primaire en acier inoxydable de 6,76 m de diamètre, dont le fond est constitué par le sommier. De cette cuve primaire, le sodium se déverse dans les six échangeurs intermédiaires, répartis régulièrement, et trois pompes principales de circulation le refoulent vers le sommier.

La cuve primaire, les échangeurs, les pompes et le sodium sont eux-mêmes placés à l'intérieur de la cuve principale. Celle-ci, d'un diamètre de 11,82 m et d'une hauteur de 11,430 m permet de ménager au-dessus de la surface du sodium un espace contenant 100 m³ d'argon. Cette enceinte supporte toutes les structures internes du réacteur (1 650 tonnes environ) et est suspendue à une dalle en béton (partie supérieure du réacteur) par 21 suspentes, réparties régulièrement.

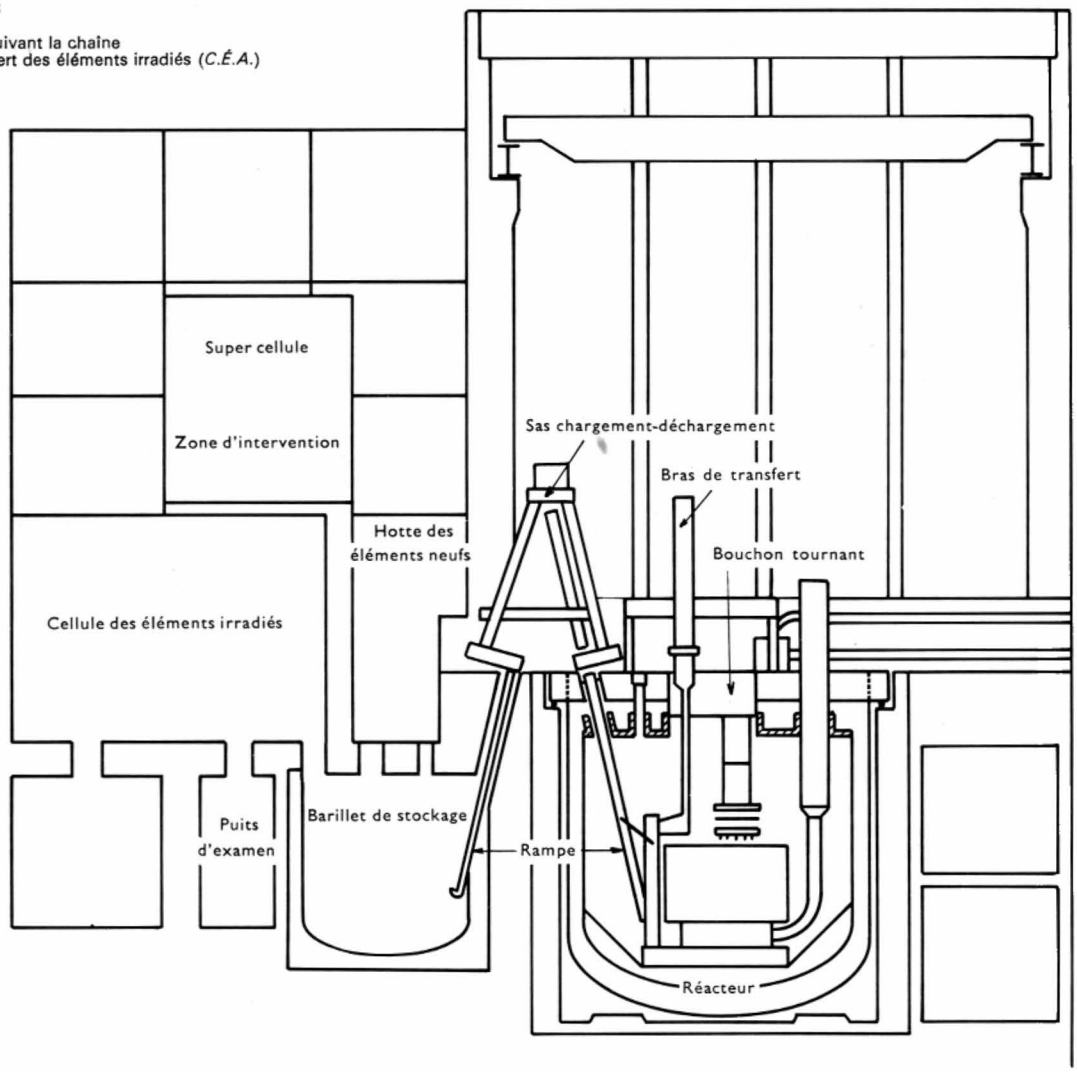
La cuve, n'ayant qu'à supporter les structures et la pression hydrostatique du sodium, n'a qu'une épaisseur relativement faible (20 à 30 mm). Elle est fermée par un toit plat calorifugé dans lequel sont ménagés les orifices pour le passage des échangeurs, des pompes, et elle est raccordée à la virole du bouchon tournant. Par mesure de sécurité, la cuve principale est entourée d'une double enveloppe en acier, calorifugée extérieurement. Cette double enveloppe, destinée à recueillir le sodium en cas de défaillance de la cuve principale, est placée très près de celle-ci (10 cm environ) pour que, dans ce cas, le niveau du sodium ne baisse pas et puisse continuer à refroidir normalement le cœur. La double enveloppe est aussi suspendue à la dalle supérieure de couverture du réacteur.

Une ultime sécurité, prévue pour le cas de rupture des enveloppes précédentes, est constituée par une troisième cuve métallique en acier ordinaire placée à 800 mm de la double enveloppe. Cette enceinte, constamment maintenue en atmosphère d'azote, comporte un double circuit de refroidissement et est destinée à recueillir les produits de fission dans le cas hautement improbable envisagé ici. Le circuit de refroidissement, soudé à cette peau étanche, doit maintenir la température du béton de protection biologique extérieur à moins de 120 °C et doit permettre d'évacuer l'énergie résiduelle du réacteur.

3.4. La dalle supérieure. — La dalle supérieure, à laquelle sont suspendues la cuve principale, sa double enveloppe et la cuve de sécurité, est une plaque circulaire de 15 m de diamètre et de 1,50 m d'épaisseur. Elle est composée

Fig. VII-3

Coupe suivant la chaîne de transfert des éléments irradiés (*C.É.A.*)



d'une ossature métallique remplie de béton et elle forme un écran de protection biologique. Elle repose sur le mur annulaire (formant la protection biologique latérale de la cuve) au moyen de 21 appuis élastiques en néoprène fretté qui permettent sa libre dilatation.

3.5. Le bouchon tournant et le transfert du combustible. — La dalle supérieure comporte une ouverture, excentrée par rapport à l'axe du cœur, fermée par un *bouchon tournant* de 3,50 m de diamètre. Pendant la marche normale du réacteur, le bouchon est fixe et l'étanchéité est assurée par une soupape annulaire. Le bouchon tournant supporte un bras tournant et son mécanisme, dont la position excentrée par rapport à l'axe du bouchon permet, en combinant la rotation du bras et du bouchon tournant, d'atteindre tout emplacement désiré dans le cœur. Pendant cette manœuvre, qui a lieu lors de l'arrêt du réacteur, le bouchon tourne sur un roulement à billes circulaire et l'étanchéité est alors assurée à l'aide de deux joints gonflables appliqués sur la virole de roulement. Le bras tournant permet de déplacer les éléments combustibles neufs ou irradiés, fissiles ou fertiles, ainsi que les barres de contrôle, d'un point du cœur jusqu'à un poste d'évacuation situé dans la partie périphérique du cœur. Les éléments sont introduits ou retirés de ce poste d'évacuation, à l'aide d'une rampe inclinée et d'un chariot (fig. VII-3).

On renouvelle le combustible, réacteur arrêté, à la cadence d'une quinzaine d'assemblages tous les deux mois environ.

3.6. Les barres de contrôle. — Les barres de contrôle, qui assurent à la fois les rôles de réglage de réactivité du cœur et de sécurité, sont au nombre de six. Les mécanismes de commande de ces barres sont placés sur le bouchon tournant et pendant les opérations de transfert du combustible, pour permettre la rotation du bouchon et du bras, elles sont désolidarisées de leur mécanisme et déposées au fond de leur logement.

3.7. Les pompes primaires. — Les trois pompes primaires de circulation du sodium sont suspendues à la dalle supérieure pour qu'elles puissent se dilater librement. Ce sont des pompes à axe vertical dont l'aspiration se fait latéralement et qui refoulent le sodium axialement vers le bas. Le palier inférieur de la pompe est un palier hydrostatique alimenté en sodium prélevé au refoulement de la pompe.

Chaque pompe est entraînée par un moteur asynchrone à rotor bobiné muni d'un dispositif qui permet de faire varier le glissement et d'obtenir ainsi un réglage de la vitesse de rotation de 250 à 975 tr/mn. En cas d'interruption de l'alimentation du moteur principal, la pompe est entraînée par un moteur auxiliaire à courant continu alimenté par le réseau secouru.

La continuité du fonctionnement de la pompe pendant le changement automatique d'entraînement est assurée (pendant trois secondes) par un volant d'inertie placé entre le moteur principal et la pompe.

Caractéristiques principales d'une pompe primaire :

Puissance absorbée par le moteur	975 kW
Vitesse nominale de rotation	925 tr/mn
Débit sodium	1 380 kg/s
Hauteur manométrique (sodium à 400 °C)	76 m

3.8. Les échangeurs intermédiaires (fig. VII-4). — Les six échangeurs de chaleur sodium-sodium sont suspendus à la dalle supérieure comme les pompes. Chaque échangeur est composé de 2 394 tubes droits dudgeonnés et soudés, à chaque extrémité, sur des plaques tubulaires épaisses. Les tubes ont un diamètre intérieur de 12 mm et une épaisseur de 2 mm. Ils sont disposés en 19 couches concentriques. La longueur des tubes est d'environ 5,15 m.

Le sodium primaire chaud circule à l'extérieur des tubes ; le sodium secondaire froid circule à l'intérieur des tubes. Ces échangeurs sont réunis deux par deux, et chacun de ces groupements alimente un circuit secondaire ou boucle : il y a donc trois boucles secondaires.

Les échangeurs intermédiaires sont entourés d'une protection neutronique pour que le sodium du circuit secondaire ne devienne pas radioactif.

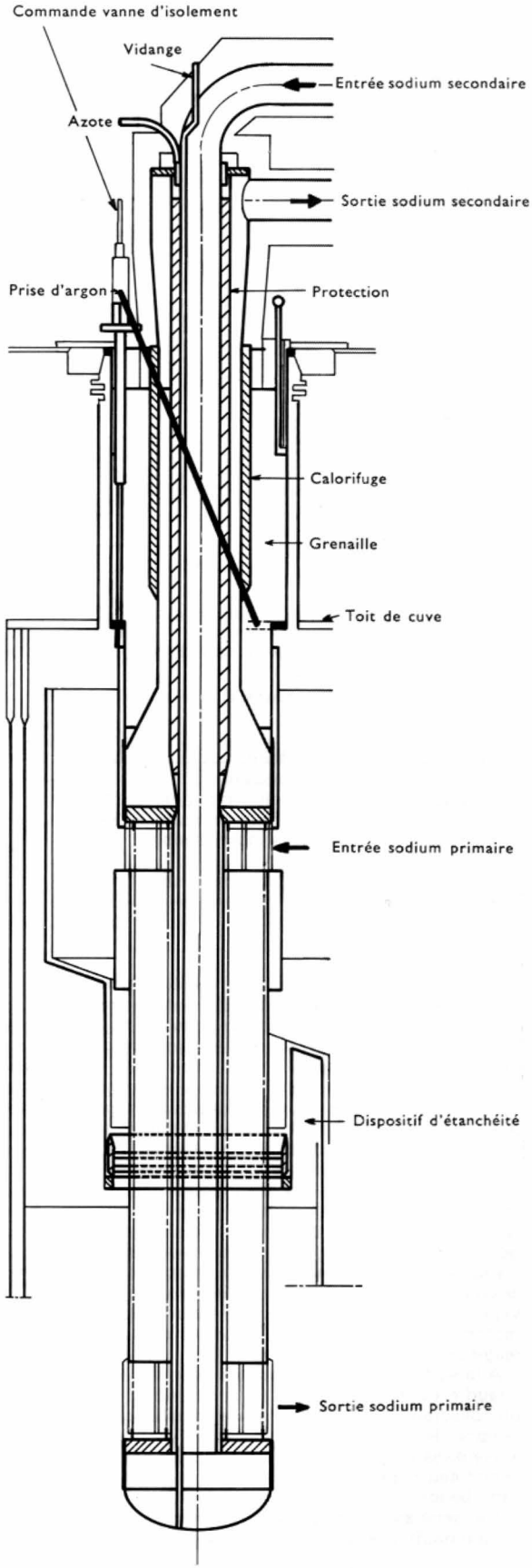


Fig. VII-4 — Échangeur intermédiaire (*C.É.A.*)

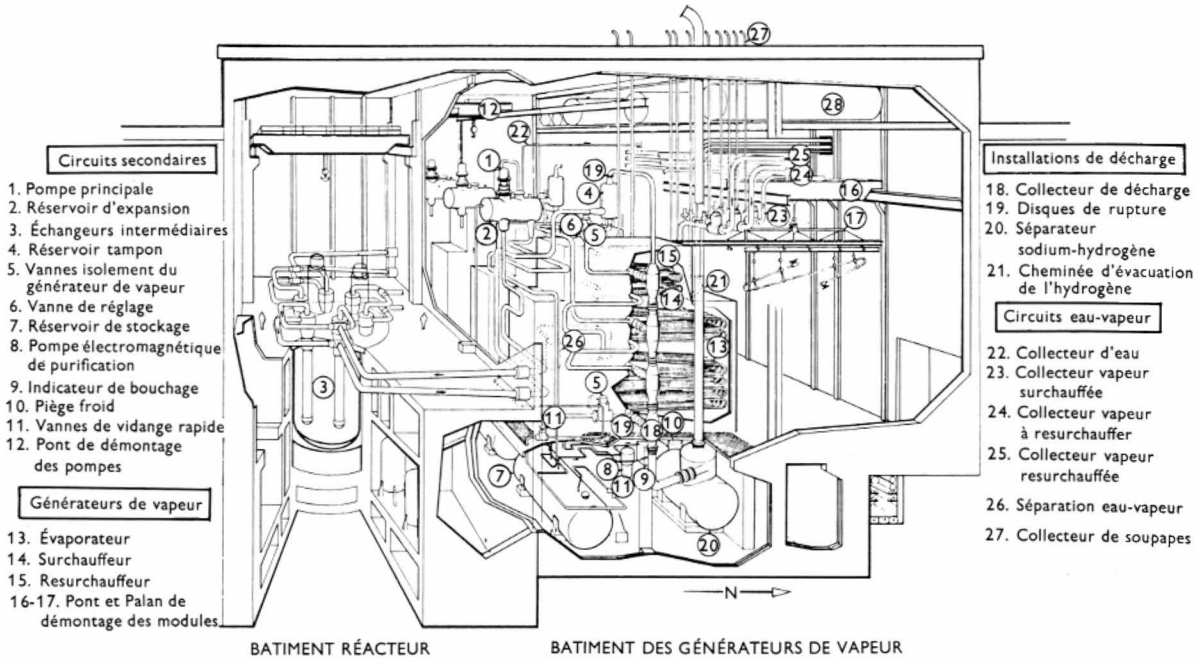


Fig. VII-5 — Phénix. Vue d'ensemble du réacteur et des échangeurs (*C.É.A.*)

Caractéristiques principales des échangeurs intermédiaires (régime dit « froid ») :

Puissance échangée (pour les six)	563 MW
Débit primaire	2 760 kg/s
Débit secondaire	2 210 kg/s
Pertes de charge côté primaire	41 mbar
Pertes de charge côté secondaire	450 mbar
Température d'entrée du sodium primaire	560 °C
Température de sortie du sodium primaire	395,8 °C
Température d'entrée du sodium secondaire	350 °C
Température de sortie du sodium secondaire	550 °C
Coefficient global d'échange	8 525 W/m²-K
Surface d'échange (pour les six)	2 790 m²

3.9. Circuits secondaires - Générateurs de vapeur (fig. VII-5). — Un circuit secondaire permet de transférer la chaleur du sodium primaire au circuit eau-vapeur de la turbine, par l'intermédiaire d'un générateur de vapeur. Il sert aussi d'isolement entre l'eau et le sodium radioactif : en cas de fuite accidentelle du générateur de vapeur, il faut éviter toute émission de vapeur radioactive pouvant contaminer le matériel et l'environnement.

Dans un circuit secondaire la réaction chimique eau-sodium peut néanmoins produire des ondes de pression qui risquent de détériorer les échangeurs intermédiaires et il est primordial de les protéger. Pour éviter une telle éventualité, on a intercalé dans le circuit, de part et d'autre du générateur de vapeur, deux réservoirs d'expansion dans lesquels circule tout le sodium de la boucle et qui peuvent arrêter ces ondes de pression. De plus, le générateur de vapeur peut être isolé par la fermeture rapide de vannes motorisées, limitant ainsi la quantité de sodium pouvant réagir avec l'eau.

À la sortie de deux échangeurs intermédiaires, le sodium chaud est conduit par deux tuyauteries de 355 mm jusqu'à un collecteur de 508 mm. Il passe ensuite dans un réservoir tampon de 1,60 m de diamètre et de 4 m de hauteur puis arrive dans un générateur de vapeur. En ce qui concerne le circuit eau-vapeur, celui-ci est du type à circulation forcée sans ballon.

Ce générateur comprend un économiseur-évaporateur, un surchauffeur et un resurchauffeur. Chacune de ces parties est composée de douze modules de sept tubes, repliés en forme de S pour le surchauffeur et le resurchauffeur, et en forme de double S pour l'économiseur-évaporateur, placés dans une enveloppe calorifugée. L'eau circule à l'intérieur des tubes, de bas en haut, et le sodium circule dans l'enveloppe de haut en bas. Le sodium « froid » est repris à la sortie du générateur de vapeur par un collecteur de 508 mm de diamètre, traverse un réservoir d'expansion et une pompe le refoule par un collecteur de 508 mm de diamètre et deux tuyauteries de 355 mm de diamètre, à la base de deux échangeurs intermédiaires.

Caractéristiques principales de la vapeur :

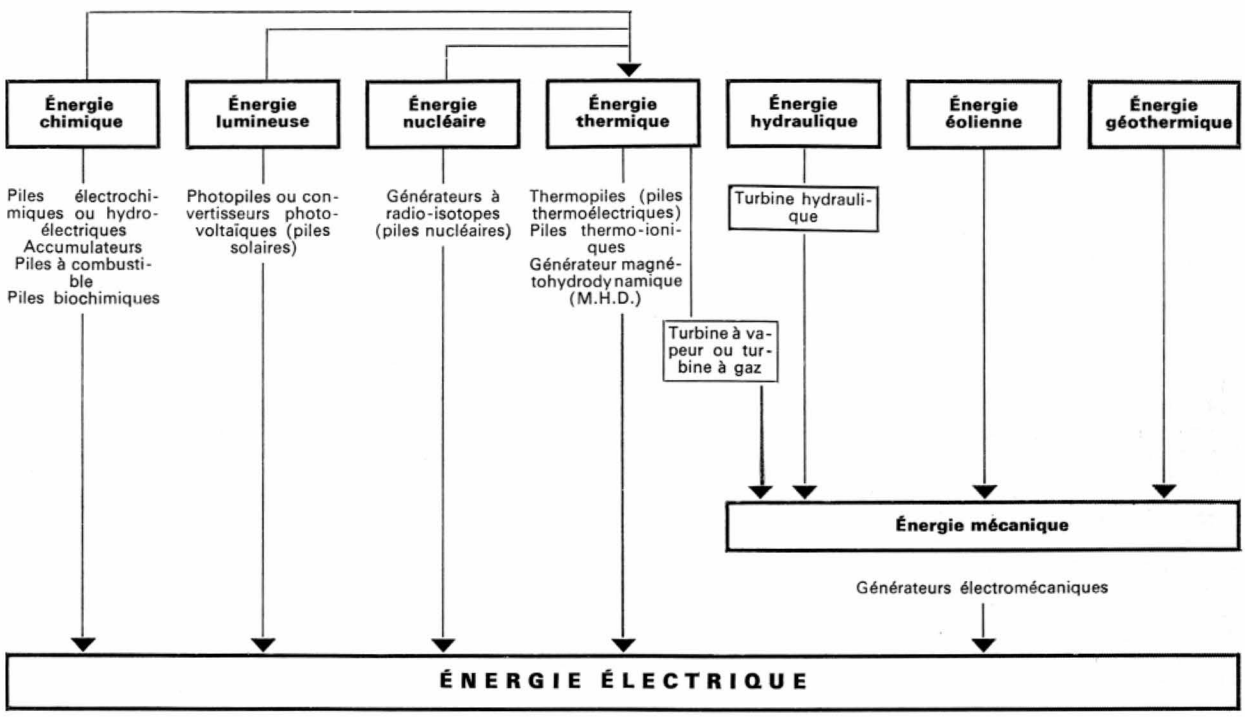
Débit de l'eau d'alimentation	750 t/h
Température de l'eau d'alimentation	246 °C
Température de la vapeur à la sortie des évaporateurs	375 °C
Température de la vapeur à la sortie des surchauffeurs	512 °C
Pression de la vapeur surchauffée à l'admission haute pression	163 bar
Débit de vapeur à resurchauffer	670 t/h
Température de la vapeur à la sortie des resurchauffeurs	512 °C
Pression de la vapeur resurchauffée à l'admission B.P.	33,4 bar

3.10. Les installations de production d'énergie. — La vapeur produite a l'avantage d'avoir des caractéristiques très proches de celles de la vapeur obtenue dans les centrales thermiques classiques (565 °C, 163 bar). Cela permet d'installer dans cette centrale un groupe turbo-alternateur de la même série que ceux qui équipent le palier 250 MW des centrales thermiques d'É.D.F. (en particulier celui de la centrale de Vitry-sur-Seine dont on a donné les principales caractéristiques dans le chapitre consacré aux centrales thermiques).

Sur la turbine, seules diffèrent les tuyères d'admission de la vapeur ; elles permettent le transit d'un débit de vapeur un peu plus grand pour compenser une température d'admission légèrement plus faible.

À part les circuits annexes nécessaires à l'évacuation de l'énergie résiduelle du réacteur pendant l'arrêt, le reste des installations, poste d'eau, condenseur, etc. est identique à celui des centrales thermiques.

AUTRES SOURCES D'ÉNERGIE ÉLECTRIQUE



Les grandes centrales électriques qui viennent d'être étudiées ne constituent pas les seules sources d'énergie électrique ; divers procédés permettent également de produire de l'électricité en utilisant d'autres sources d'énergie ou en les mettant en œuvre d'une manière différente. Dans tous les cas, l'énergie électrique fournie par un générateur provient de la transformation d'une autre forme d'énergie (chimique, mécanique, solaire, etc.). S'il est souvent nécessaire d'utiliser comme intermédiaire de l'énergie thermique ou de l'énergie mécanique, dans un certain nombre de générateurs il est possible de réaliser une transformation directe comme le tableau précédent le met en évidence.

Les sources d'énergie que nous allons étudier dans ce chapitre sont celles qui permettent une transformation directe. Un certain nombre de ces sources, de faible puissance, ont déjà été étudiées (V. t. 1, Électricité, chap. 9) ; il reste à décrire ici celles dont la mise au point est récente ou qui font encore l'objet d'études en laboratoire. Le développement de certaines d'entre elles dépend surtout de conditions économiques et politiques. Ainsi, une utilisation plus judicieuse des combustibles peut avoir pour avantages d'augmenter le rendement énergétique et de réduire considérablement (ou même de supprimer pratiquement) toute pollution. Un exemple est donné par les piles à combustible dont le rendement est plus élevé que celui des générateurs thermiques et qui fonctionnent sans bruit et sans pollution. De plus, la nécessité de disposer de sources d'énergie électrique dans des pays dépourvus de réseaux électriques (pays en voie de développement ou régions isolées) ou sur d'autres planètes fait qu'un grand avenir semble réservé à ces nombreuses sources d'énergie.

1. LES PILES À COMBUSTIBLE

Les piles à combustible sont des générateurs qui permettent d'obtenir de l'énergie électrique à partir de l'énergie chimique potentielle des mélanges de **combustibles** (hydrogène, méthanol ou hydrazine) et de **comburants** (oxygène ou air). Dans ces générateurs l'énergie chimique est transformée directement en énergie électrique sans passer par l'intermédiaire de l'énergie thermique et de l'énergie mécanique.

1.1. Principe. — Une pile à combustible relativement simple comme celle qui utilise l'hydrogène et l'oxygène, comprend deux électrodes poreuses *A* et *B* entre lesquelles se trouve un électrolyte liquide, généralement une solution de potasse (fig. 1). Chaque électrode est reliée à une canalisation par laquelle arrive le gaz et peut être connectée

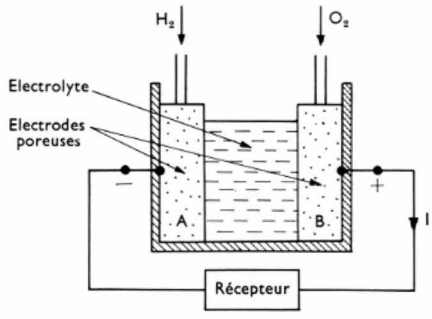


Fig. 1

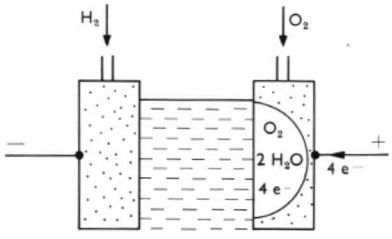


Fig. 2 a

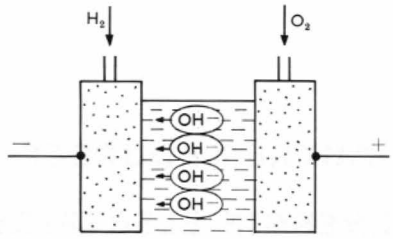


Fig. 2 b

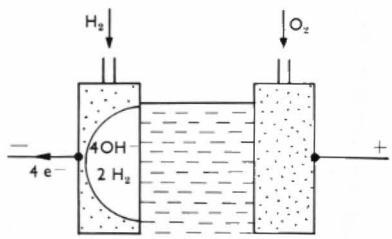


Fig. 2 c

électriquement à un récepteur permettant la circulation des électrons. L'électrode positive est alimentée en oxygène (comburant) ; du fait de la présence de catalyseurs au niveau de cette électrode se produit la réaction suivante :

$$O_2 + 2\ H_2O + 4 \text{ électrons} \rightarrow 4\ (OH)^-$$
$$(4e^-)$$

Dans les pores de l'électrode positive, une molécule d'oxygène et deux molécules d'eau donnent naissance à quatre ions oxydriles $(OH)^-$. Quatre électrons sont pris au circuit extérieur (fig. 2 a et b). Les ions libérés à l'électrode positive se déplacent vers l'électrode négative ; au niveau de celle-ci se produit alors la réaction suivante avec l'hydrogène (fig. 2 c) :

$$4(OH)^- + 2\ H_2 \rightarrow 4\ H_2\ O + 4\ e^-$$

Les molécules d'hydrogène se combinent avec les ions oxydriles pour donner de l'eau et des électrons qui passent dans le circuit extérieur.

La réaction chimique globale est donc celle de la synthèse de l'eau :

$$2\ H_2 + O_2 \rightarrow 2\ H_2O$$

Pour s'en rendre compte il suffit d'additionner membre à membre les deux réactions écrites précédemment pour symboliser les transformations qui ont lieu au niveau des électrodes. Au fur et à mesure que cette réaction se produit, le générateur agit comme une pompe qui « aspire » les électrons en *B* (électrode positive) et les « refoule » dans le circuit extérieur en *A* (électrode négative). Ce circuit est donc traversé par un courant d'électrons qui se déplacent de *A* vers *B* : c'est le courant qui est fourni par la pile (le sens conventionnel de ce courant est évidemment opposé au sens de déplacement des électrons). La pile oxygène-hydrogène est la plus classique ; elle a été utilisée pour équiper des véhicules spatiaux. Cependant, des recherches sont entreprises pour obtenir les conditions de fonctionnement les plus avantageuses et notamment pour trouver les combustibles les moins chers qui puissent donner satisfaction.

1.2. Piles à membranes échangeuses d'ions. — Dans les piles à membranes, l'électrolyte liquide est remplacé par un diaphragme, réalisé à l'aide de résines artificielles (polystyrène sulfoné, par exemple) qui sont des polymères pouvant être dissociés en parties ionisables. Ce diaphragme présente la particularité de ne *laisser circuler les ions que dans un seul sens*. C'est une sorte de *valve pour ions* : la conductibilité ionique est élevée tandis que la conductibilité électronique est très faible. Cette membrane a une épaisseur proche du millimètre ; elle est imperméable au gaz ionisé. Certains diaphragmes sont perméables à une seule sorte d'ions de polarité déterminée. Selon qu'ils laissent passer les ions négatifs (anions) ou les ions positifs (cations), ils sont dits **anioniques** ou **cationiques.**

Dans le cas d'une membrane anionique (fig. 3), la présence de l'oxygène sur le catalyseur provoque la formation d'ions $(OH)^-$; les électrons nécessaires arrivent par le circuit extérieur à la pile. Les ions $(OH)^-$ pouvant traverser le diaphragme atteignent l'électrode négative et au niveau de celle-ci il y a réaction avec l'hydrogène, formation d'eau et restitution d'électrons au circuit extérieur. Avec une membrane cationique (fig. 4) les ions H+ sont formés à l'électrode négative et ce sont eux qui traversent le diaphragme. Au niveau de l'électrode positive il y a réaction avec l'oxygène et formation d'eau. Selon que la membrane est anionique ou cationique l'eau se forme au niveau de l'électrode négative ou de l'électrode positive.

Il est possible d'éviter la formation de l'eau sur l'une des électrodes en disposant **deux membranes jointives,** une anionique et une cationique, convenablement orientées ; l'eau se forme alors entre les deux diaphragmes où elle est prélevée par saturation (fig. 5).

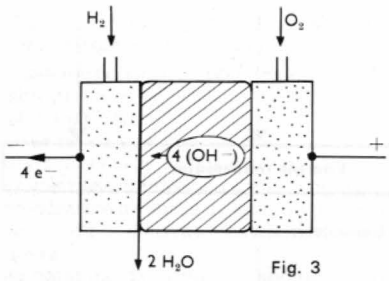


Fig. 3

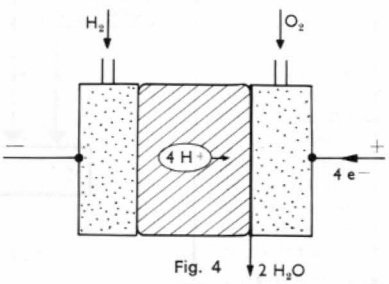


Fig. 4

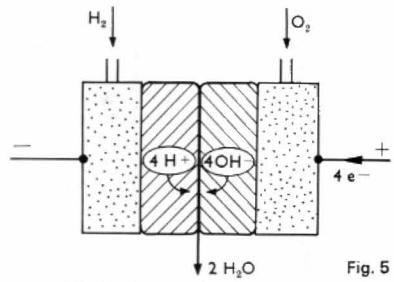


Fig. 5

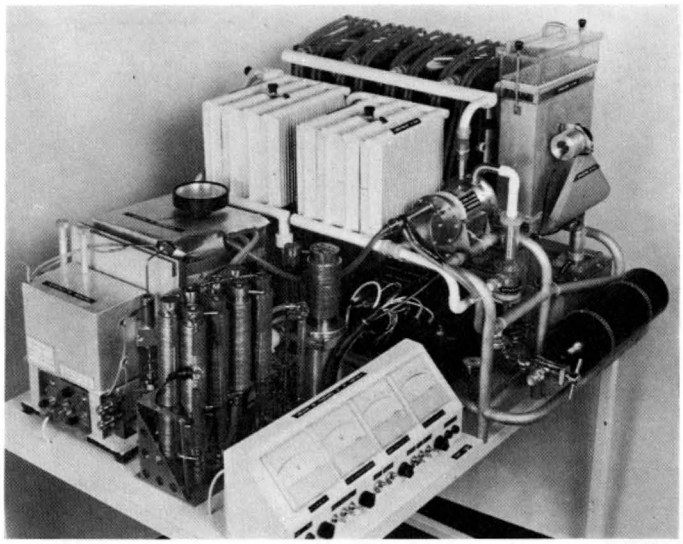
Exemple de caractéristiques de pile à membrane échangeuse d'ions de type cationique, alimentée en oxygène et hydrogène :

Surface des éléments	0,2 m²
Puissance de service	70 W
Intensité du courant nominal	5 A
Autonomie en régime normal	3 h
Masse totale de la pile	9 kg

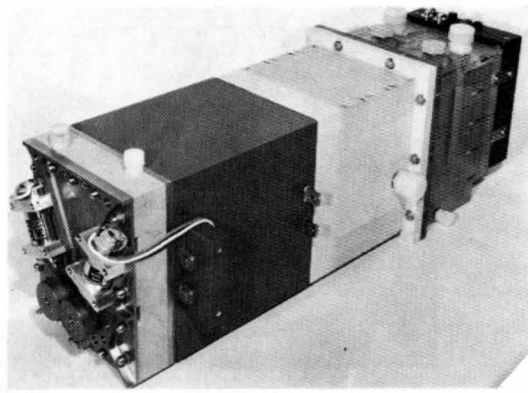
1.3. Piles à produits oxydo-réducteurs (piles redox). — Dans ce générateur, l'oxydant (oxygène, air) et le réducteur (hydrazine, borohydrure) ne sont que des intermédiaires et après avoir été utilisés dans des réactions au contact des électrodes ils sont ramenés à leur état initial dans des réacteurs chimiques appelés régénérateurs. Dans la pile, le domaine d'action de chacun des deux corps est séparé par une membrane semi-perméable. De ce fait, seuls le combustible et l'oxygène sont consommés, mais au cours de réactions chimiques plus faciles que les réactions chimiques directes. Un tel dispositif peut donner de l'électricité ou bien en recevoir pour la régénération des produits altérés.

Tout en conservant des principes de fonctionnement semblables, les chercheurs ont pu mettre au point un grand nombre de piles à combustible. Elles diffèrent notamment par la nature des éléments entrant dans leur constitution, ceux-ci dépendant du combustible et du comburant choisis. Par exemple, dans certaines piles il a été possible d'utiliser un **électrolyte solide** (oxyde de zirconium ZrO_2) et dans d'autres l'électrolyte est un sel fondu (carbonate, chlorure, fluorure). Parfois l'un des réactifs est *contenu dans la solution électrolytique* elle-même (pile au méthanol ou à l'hydrazine) ; il est dissous s'il est soluble ou mis en émulsion s'il est gazeux. Les piles dans lesquelles les produits résul-

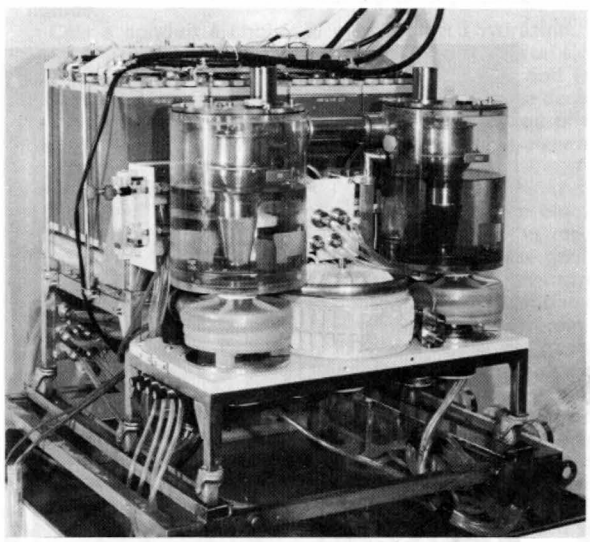
PILES À COMBUSTIBLE



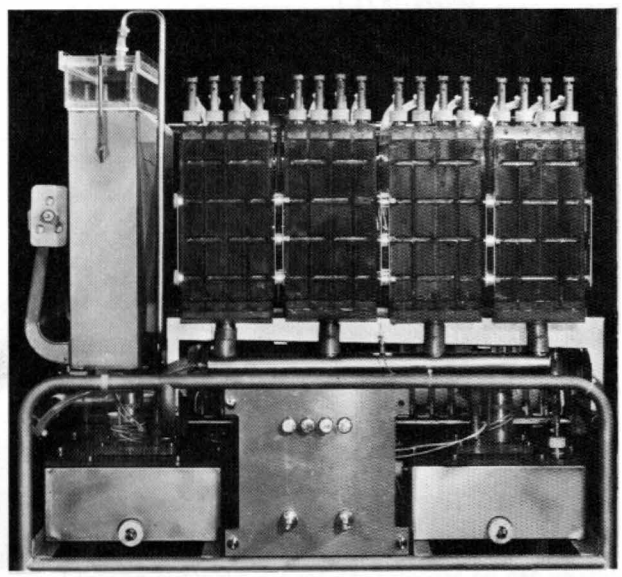
Pile à combustible méthanol-air indirecte; puissance nominale: 500 W
(*Institut français du pétrole*)



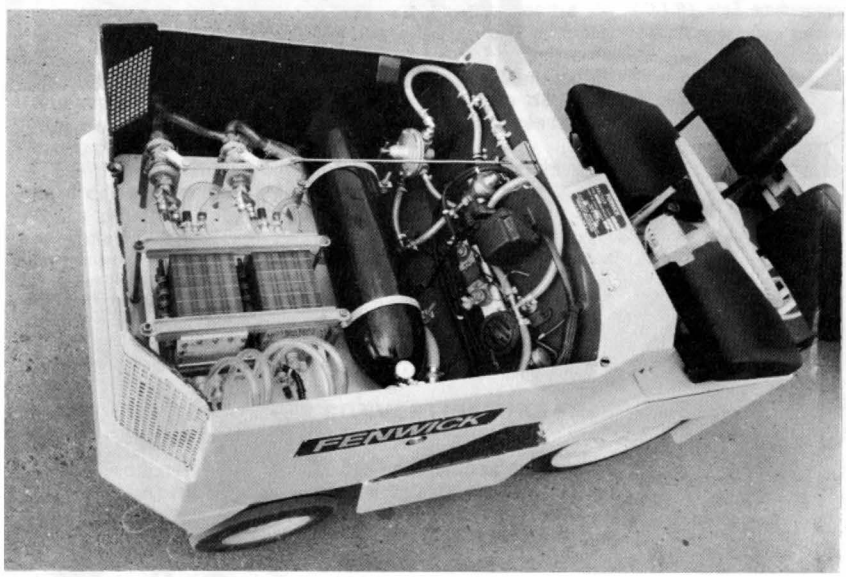
Pile à combustible de 2 kW: hydrazine-eau oxygénée
(*Alsthom*)



Pile à combustible de 30 kW hydrazine-eau oxygénée (*Alsthom*)

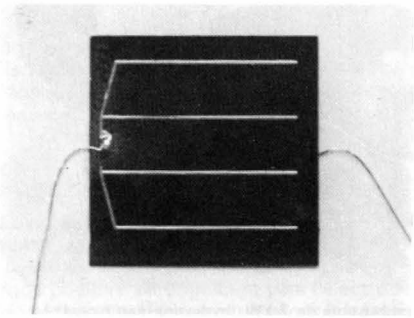


Pile à hydrogène de 500 W
(*Institut français du pétrole*)

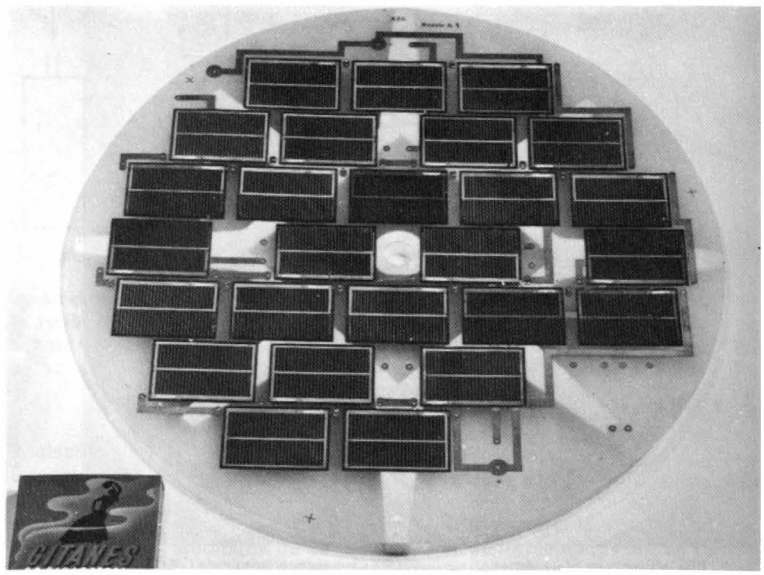


Alimentation d'un tracteur au moyen d'une pile à combustible de 8 kW
(*Roger Violet*)

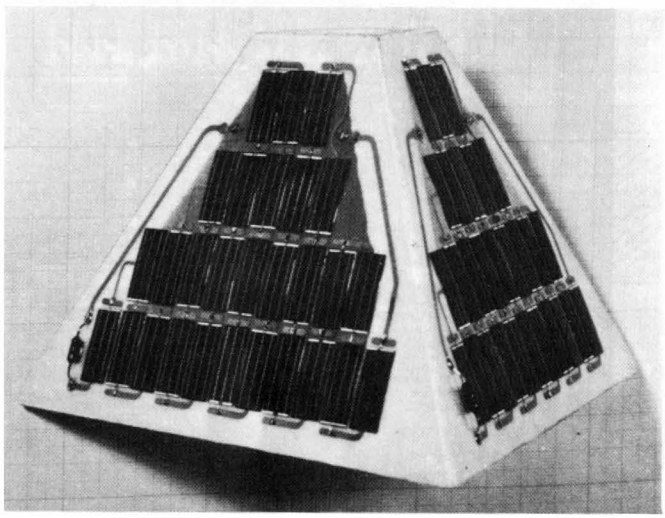
CONVERTISSEURS PHOTOVOLTAÏQUES



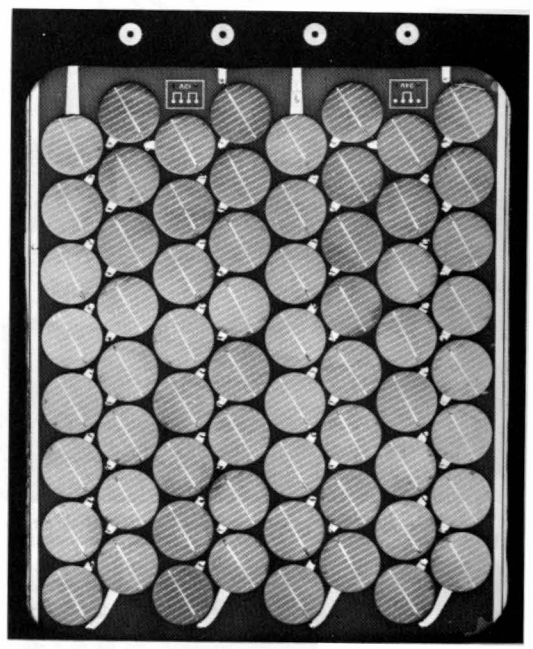
Cellule photovoltaïque au silicium (*R.T.C.*)



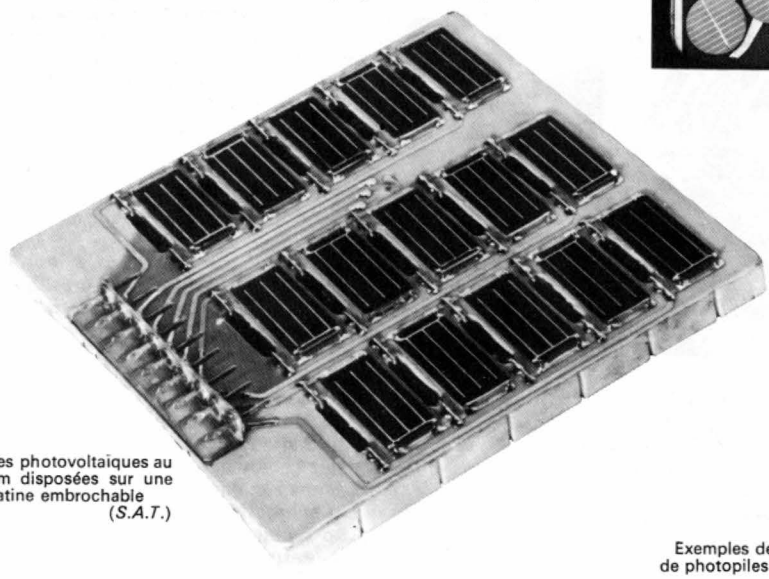
Batterie de cellules solaires en couches minces de tellurure de cadmium pour usages spatiaux (*R.T.C.*)



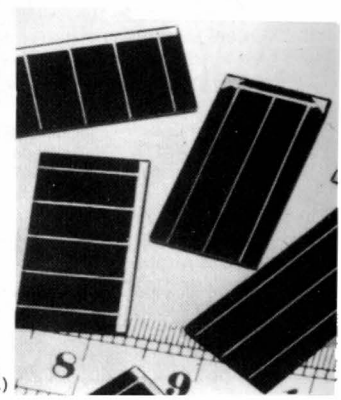
Générateur solaire des ballons du programme Éole (*R.T.C.*)



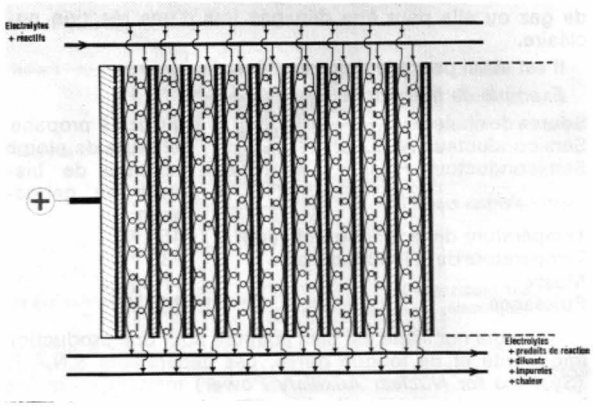
Photopiles solaires (*R.T.C.*)



Cellules photovoltaïques au silicium disposées sur une platine embrochable (*S.A.T.*)

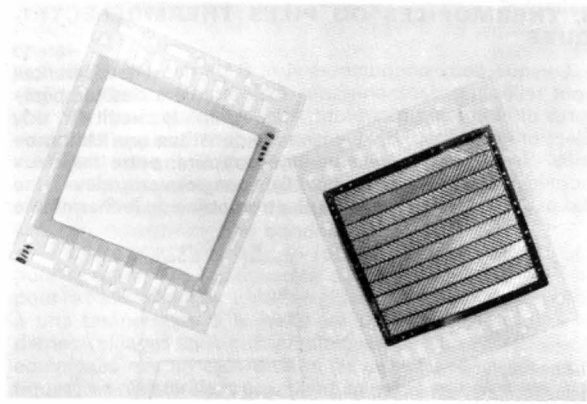


Exemples de grilles de photopiles (*S.A.T.*)



(*Alsthom*)

Fig. 6 — Schéma de principe d'une pile à combustible



(*Alsthom*)

Fig. 7 — Électrode et diaphragme d'un élément d'une pile à combustible

tant de la réaction sont décomposés pour redonner les corps initiaux nécessaires au fonctionnement ont également fait l'objet de nombreuses recherches. À l'heure actuelle, la réalisation d'une installation pratique et économique implique l'utilisation de l'air ambiant à la place de l'oxygène et de combustibles peu onéreux, de préférence sous forme liquide.

Cela a conduit à choisir le méthanol et l'hydrazine. Le méthanol peut être utilisé directement, dissous dans un électrolyte alcalin, ou indirectement; dans ce cas, il doit être transformé en gaz carbonique et en hydrogène et ce dernier gaz est envoyé dans une pile (pile à hydrogène ou pile à électrolyte acide ou basique). Afin d'éviter l'« empoisonnement » des électrodes, on utilise un catalyseur.

1.4. Autres piles à combustible. — La pile biochimique est une pile à combustible particulière: au moins un des corps réagissants est obtenu par l'action de micro-organismes sur un combustible **(combustible primaire)** constitué de glucose ou d'urée ou d'hydrates de carbone ou de matières organiques. Les micro-organismes assurent la transformation en un combustible secondaire gazeux (hydrogène, ammoniac, méthane) ou liquide (éthanol) selon le combustible primaire et les bactéries employées. La puissance d'un générateur biochimique atteint plusieurs dizaines de kilowatts. Ce type de générateur présente l'intérêt d'offrir une excellente solution à la transformation des ordures ménagères dans la mesure où de grandes centrales pourront être construites; en effet, à partir de ces déchets et des gadoues, les bactéries fournissent notamment du méthane, du sulfure d'hydrogène, de l'ammoniac, c'est-à-dire des corps utilisables dans des piles à combustible. De même dans les satellites, ces piles peuvent permettre de résoudre le délicat problème de l'élimination des déchets. D'autre part, la pile biochimique se révèle intéressante comme générateur portatif car pour certaines, le combustible primaire peut être uniquement végétal (pomme de terre, fruits, etc.); leur recharge peut donc se réaliser très facilement, pratiquement partout.

Les piles à combustible sont employées fréquemment à bord des satellites artificiels et des recherches sont entreprises pour les utiliser comme source d'énergie sur des véhicules utilitaires ou de tourisme. Évidemment leur encombrement important constitue un inconvénient mais elles présentent des avantages certains: rendement élevé aux températures ordinaires, capacité particulièrement intéressante pouvant atteindre 1 000 Wh/kg, fonctionnement sans risque de pollution.

2. LES PHOTOPILES OU CONVERTISSEURS PHOTOVOLTAÏQUES (fig. 8 et 9)

Ces générateurs constituent des applications directes de **l'effet photovoltaïque** qui se manifeste par l'apparition d'une force électromotrice au contact d'un métal et d'un semiconducteur ou de deux semiconducteurs de types opposés (V. t. 1, Électronique, chap. 20).

Un élément de générateur est formé d'une plaquette de semiconducteur de type *N* recouverte d'un film mince (quelques micromètres) de semiconducteur de type *P* obtenu par diffusion (fig. 8). Les semiconducteurs pour lesquels **l'énergie d'activation intrinsèque** est comprise entre 1 et 1,6 eV comme le silicium (1,1 eV) conviennent particulièrement bien pour cette utilisation. Cependant, la conversion de l'énergie solaire est réalisée avec un rendement qui ne dépasse pas 15 %. Parmi les autres semiconducteurs employés il faut signaler le sulfure de cadmium, l'arséniure de gallium et le tellurure de gallium.

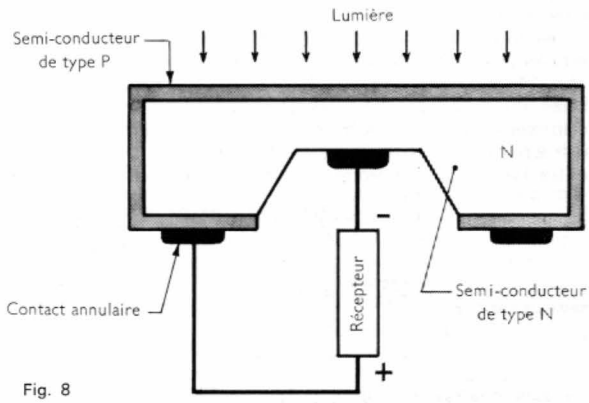


Fig. 8

Les batteries solaires à jonction *P-N* trouvent de nombreuses applications en particulier pour la production de l'énergie électrique à bord des satellites ou des vaisseaux spatiaux. À une distance du Soleil comparable à celle de la Terre elles permettent d'obtenir 100 watts par mètre carré, et leur puissance massique atteint 50 watts par kilogramme. De très grands panneaux de cellules solaires ont été mis au point (V. planche); ceux qui équipent le satellite à moteur ionique SERT 2 n'ont pas moins de 5,8 m de long pour 1,5 m de large et comprennent 33 300 cellules. Les panneaux de Mariner 4 possèdent 28 200 cellules et permettent d'obtenir une puissance de 670 watts.

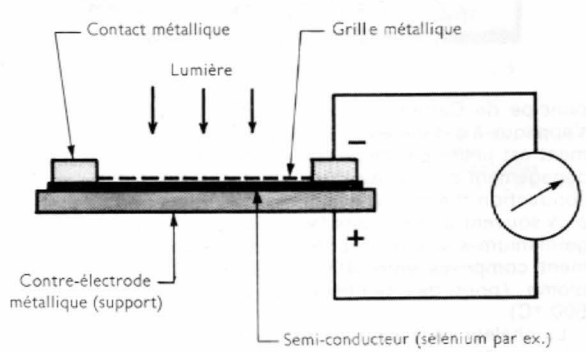


Fig. 9

3. THERMOPILES OU PILES THERMOÉLECTRIQUES

Lorsque deux conducteurs *A* et *B* de natures différentes sont reliés par deux soudures maintenues à des températures différentes, un courant circule dans le circuit (V. t. 1, Électronique, chap. 6). L'ensemble constitue une **thermopile.** Si ce circuit présente une coupure, entre les deux bornes *M* et *N* de celle-ci (fig. 10), nous pouvons relever une d.d.p. qui représente la force électromotrice de la thermopile

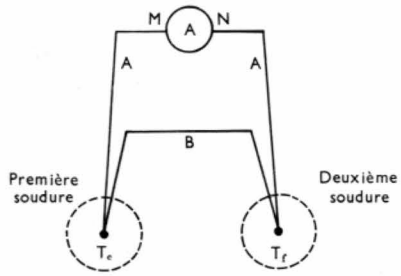


Fig. 10
Thermocouple constitué par deux conducteurs A et B

élémentaire appelée aussi **thermocouple.** Cette f.é.m. *E* est proportionnelle à la différence entre les températures T_c et T_f des soudures « chaude » et « froide » :

$$E = \alpha(T_c - T_f)$$

α est appelé **coefficient de Seebeck** ou **pouvoir thermoélectrique** du corps *A* par rapport au corps *B*. Le résultat n'est pas modifié si un conducteur, dont les extrémités se trouvent portées à la même température, est intercalé dans le circuit.

Les forces électromotrices les plus élevées sont obtenues en employant des semiconducteurs. Un thermocouple (fig. 11) est alors formé de deux plaquettes de semiconducteurs, l'une de type *P*, l'autre de type *N*, dont les deux faces opposées sont portées à des températures différentes. Les semiconducteurs utilisés sont assez impurs, ils contiennent entre 10^{19} et 10^{20} porteurs de charges par centimètre cube.

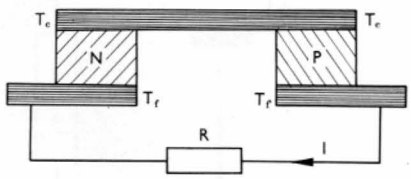


Fig. 11
Thermocouple à semiconducteurs

La liaison entre les semiconducteurs *P* et *N* est faite au moyen d'une plaque conductrice (en cuivre, par exemple) ; elle n'intervient pas dans le fonctionnement de l'ensemble puisqu'elle réunit des points portés à la même température.

Les thermopiles peuvent être considérées comme de véritables machines thermiques dans lesquelles l'apport de chaleur entraîne la mise en mouvement d'un fluide électronique (électrons et trous des régions les plus chaudes). Le

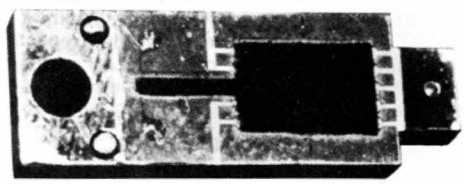


Fig. 12 — Exemple de thermopile (*M + H - R.T.C.*)

principe de Carnot (V. t. 1, Thermodynamique, chap. 5) s'applique à ces générateurs et pour cette raison leur rendement est limité par deux effets irréversibles : d'une part, le dégagement de chaleur dû à l'effet Joule et d'autre part, la conduction thermique des corps. Les semiconducteurs les plus souvent utilisés dans les thermopiles sont des alliages germanium-silicium (pour les températures de fonctionnement comprises entre 400 et 950 °C) et le tellurure de plomb (pour des températures comprises entre 100 à 500 °C).

La chaleur nécessaire au fonctionnement d'une thermopile peut être produite par combustion d'hydrocarbures ou de gaz ou elle peut être dégagée lors d'une réaction nucléaire.

Il est aussi possible d'utiliser l'énergie solaire.

Exemple de thermopile :

Source de chaleur	brûleur à propane
Semiconducteur *N*	tellurure de plomb
Semiconducteur *P*	tellurure de bismuth au germanium
Température de la jonction chaude	450 °C
Température de la jonction froide	130 °C
Masse	17 kg
Puissance	250 W

L'énergie nucléaire est bien adaptée pour une production importante et de longue durée. Les générateurs S.N.A.P. (*Systems for Nuclear Auxiliary Power*) mettent en œuvre la décomposition naturelle d'isotopes radioactifs comme le strontium 90 ou le plutonium 238. Par exemple, dans un générateur S.N.A.P. d'une masse de 27 kg (non compris le blindage protecteur de 800 kg), la chaleur produite par la désintégration du strontium 90 permet d'obtenir une puissance d'environ 10 W avec des thermocouples au tellurure de plomb (fig. 13). Toutefois, si ces générateurs sont particulièrement intéressants pour des appareils qui ne nécessitent pas une puissance électrique élevée, ils présentent deux inconvénients qui limitent leur emploi :

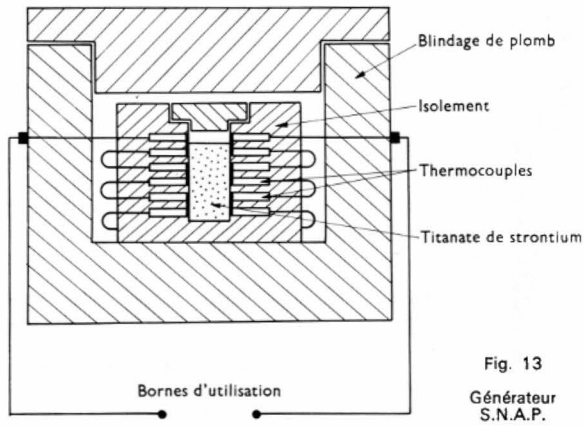


Fig. 13
Générateur S.N.A.P.

— La production d'énergie n'est pas constante puisqu'elle décroît dans le temps comme l'activité de l'isotope qui lui donne naissance. La plupart des produits radioactifs employés ayant une période inférieure à un an, les générateurs ont une durée de fonctionnement réduite. De plus, au début de l'utilisation, l'énergie excédentaire est gaspillée et se perd sous forme de chaleur.

— L'usage de radio-isotopes hautement radioactifs nécessite des dispositifs de protection importants sous forme d'épais blindages, qui augmentent la masse et l'encombrement du générateur (à moins qu'il ne soit utilisé uniquement en des lieux éloignés de toute présence humaine). Parce que leur fabrication est assez longue et onéreuse et parce que leur masse est grande comparée à des réacteurs nucléaires, l'utilisation de ces générateurs a été limitée à des puissances inférieures à 10 kW. La conversion thermoélectrique peut être utilisée en liaison avec un réacteur nucléaire ; une telle combinaison semble intéressante pour produire des puissances comprises entre 10 et 25 kW. Au-delà de cette limite les réacteurs nucléaires deviennent plus avantageux.

4. GÉNÉRATEURS THERMOÉLECTRONIQUES OU THERMO-IONIQUES

Dans ces générateurs, le courant électrique est produit par l'**effet thermoélectronique** (V. t. 1 Électronique, chap. 7), c'est-à-dire que les électrons participant à la conduction sont émis pour une cathode chauffée à une température de 1 500 °C à 2 000 °C et sont recueillis par une anode froide (fig. 14). Le dispositif de chauffage est en tout point com-

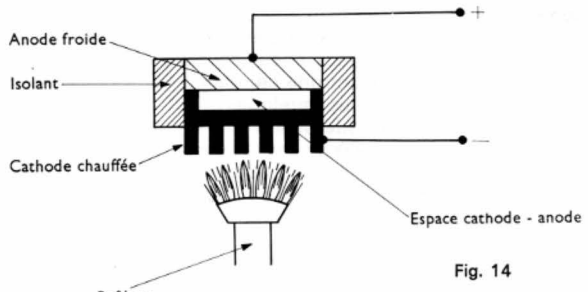


Fig. 14
Générateur thermo-électrique

parable à celui qui est utilisé pour la thermopile mais le générateur est ici une diode à vide ou à gaz (V. t. 1 Électronique, chap. 4).

Il faut distinguer deux types principaux de convertisseurs thermoélectroniques; chacun d'eux représente une solution différente pour éliminer la charge d'espace qui se forme autour de la cathode et qui limite le fonctionnement de la diode thermo-ionique. Dans le premier type, appelé *modèle à vide*, l'espace entre la cathode et l'anode est réduit à une fraction de millimètre afin de limiter l'effet de cette charge d'espace. Dans le second type, plus récent, la charge d'espace est neutralisée par l'introduction d'un corps à l'état de vapeur ionisée (par exemple, du césium); par ailleurs, il y a aussi une augmentation du flux des électrons. La distance entre anode et cathode est proche de 0,1 mm. Le rendement se trouve augmenté et il peut être cinq fois plus grand que dans le modèle à vide; il atteint 15 à 17 % pour une température anodique de 1 500 °C.

Le convertisseur thermo-ionique, d'un principe relativement simple, peut être considéré comme un générateur robuste susceptible de fonctionner dans des conditions particulièrement sévères (exposition à des radiations intenses ou à de hautes températures) sans subir de dommages. Sa taille réduite et sa masse assez faible en font un générateur spécialement indiqué dans l'espace cosmique. Néanmoins des ensembles très importants sont parfaitement réalisables et l'adjonction de tels générateurs, en tête du cycle thermique d'un réacteur nucléaire, permettrait d'augmenter sensiblement la puissance des centrales nucléaires.

5. GÉNÉRATEUR MAGNÉTOHYDRODYNAMIQUE (M.H.D.)

Le générateur magnétohydrodynamique permet également la conversion directe de l'énergie thermique en énergie électrique. Par rapport aux deux précédents générateurs, il présente l'avantage de fournir des puissances de plusieurs

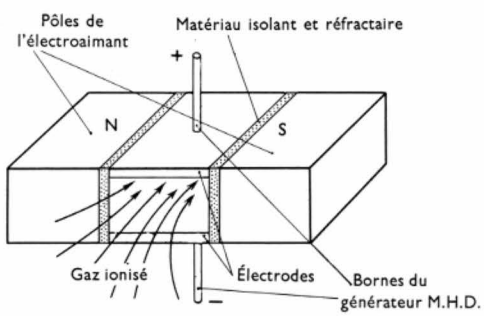


Fig. 15 — Tuyère d'un générateur M.H.D.

mégawatts. La différence de potentiel qui apparaît entre les bornes de sortie d'un tel générateur provient de l'accumulation de charges de signes contraires sur deux plaques métalliques auxquelles elles sont reliées. Afin d'obtenir ce résultat les électrodes sont placées de chaque côté d'un conduit où passe, animé d'une grande vitesse, un gaz porté à une très haute température et partiellement ionisé (il contient des charges électriques: électrons négatifs et ions positifs). Ce gaz est soumis à un champ magnétique qui provoque la déviation des charges en mouvement dans une direction perpendiculaire à celle du vecteur induction magnétique et dans un sens qui dépend du signe de la charge (V. t. 1, Électronique, chap. 2). Une disposition judicieuse des électrodes permet de recueillir ces charges (fig. 15). Cette description du générateur M.H.D. laisse entrevoir les principales difficultés de réalisation: dans le cœur de l'appareil il faut que le gaz soit suffisamment ionisé, qu'il soit animé d'une vitesse importante et il faut aussi un champ magnétique intense pour recueillir convenablement les charges sur les électrodes. Nous allons examiner successivement ces trois conditions.

— *L'ionisation du gaz.* — Ioniser suffisamment le gaz pour le rendre bon conducteur de l'électricité, c'est-à-dire pour le transformer en véritable plasma, exigerait de le porter à une température à laquelle les matériaux les plus modernes (alliages spéciaux, céramiques ou encore matériaux complexes mis en œuvre dans les constructions aéronautiques) ne résisteraient pas. Dans sa partie la moins chaude, c'est-à-dire en surface, le plasma qui constitue le Soleil est encore à une température de 5 500 °C et au sein des étoiles la température atteint des millions de degrés, c'est dire qu'à l'heure actuelle aucun matériau ne pourrait constituer la chambre d'une centrale M.H.D. si le gaz utilisé était vraiment un plasma. Heureusement, il existe des techniques de plasmification artificielle autorisant des températures moins élevées; la solution la plus couramment retenue consiste à ensemencer les gaz chauds au moyen d'un corps qui, lui, est facilement ionisable, tel que le potassium ou le césium (ce dernier bout à 670 °C et ses atomes perdent facilement l'électron de leur couche périphérique). Nous pouvons donc concevoir le générateur en imaginant un dispositif d'introduction du corps entre l'injecteur de gaz et le brûleur; la température du gaz peut alors être abaissée à 1 800 °C dans le cas d'un ensemencement de césium qui assure au plasma une résistivité d'environ un dizième d'ohmmètre (taux de césium dans le gaz : 1 %).

— *La vitesse d'injection du gaz.* — Le problème du débit du gaz est résolu avec les techniques actuelles qui permettent d'obtenir des jets supersoniques correspondant à des vitesses de 1 000 mètres par seconde.

— *Le champ magnétique.* — L'intensité du champ magnétique devant atteindre plusieurs dizaines de teslas, l'alimentation de la bobine de l'électroaimant est réalisée par un ensemble transformateur-redresseur d'une puissance souvent supérieure à 1 000 kW qui doit être abondamment refroidi. La mise en œuvre de ces diverses techniques permet d'obtenir des courants dont les intensités peuvent atteindre 100 000 ampères sous des tensions de quelques centaines de volts avec une chambre de 0,5 m² de section alimentée par un plasma circulant à une vitesse de 1 000 m/s dans un champ magnétique de 30 T. La production d'un courant continu d'aussi grande intensité pouvant constituer un handicap pour l'exploitation, un procédé a été mis au point pour obtenir directement un système de courants alternatifs triphasés. La tuyère utilisée a une section hexagonale (fig. 13) et chaque électrode collectrice des charges est située face à un électroaimant; il y a trois électroaimants qui sont excités par des courants alternatifs. Dans ces conditions, un système de courants triphasés est recueilli à la sortie du générateur. Néanmoins, la température du gaz doit encore être très élevée (1 800 °C) et cela constitue un in-

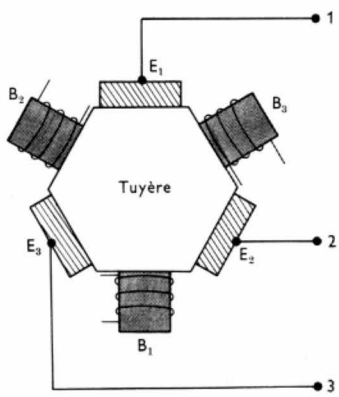


Fig. 16
Générateur M.H.D. de courants triphasés
E_1, E_2, E_3: électrodes
B_1, B_2, B_3: électroaimants

convénient sérieux pour un fonctionnement de longue durée (il est courant d'assigner à une installation une durée de vie de 100 000 heures).

Dans les exemples considérés, le fluide porteur de charges électriques est un gaz provenant de la combustion d'hydrocarbures : il est constitué de molécules de gaz carbonique et de vapeur d'eau. La température de ce fluide porteur est égale à celle du « fluide électrique » c'est-à-dire à celle des ions de césium. En revanche, si le fluide porteur est constitué d'atomes isolés, d'hélium ou d'argon, la faible section de ces atomes évite qu'une élévation de température se produise au moment du mélange avec le césium et le fluide porteur peut ainsi rester à une température inférieure de plusieurs centaines de degrés à celle du « fluide électrique ». Cependant, comme ces produits sont rares il convient de les récupérer après leur passage dans la tuyère ; cela conduit à la réalisation d'un **cycle fermé.** D'autres procédés permettent d'abaisser jusqu'à 1 200 °C la température du gaz qui peut être de l'argon préionisé par un bombardement électronique.

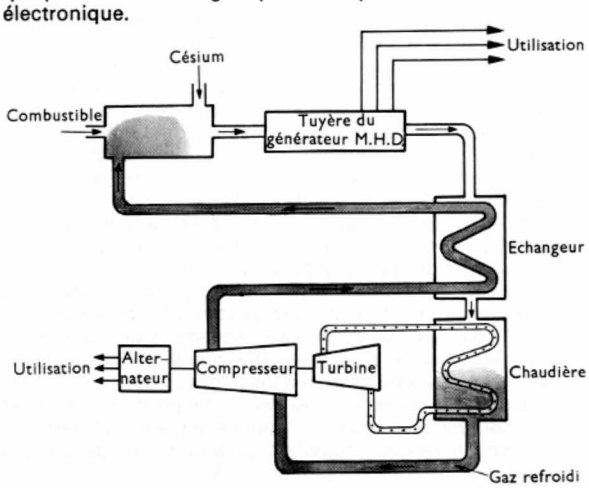


Fig. 17 — Schéma d'une installation M.H.D. en circuit fermé avec turbo-alternateur couplé

Le générateur M.H.D. ne paraît pas constituer un concurrent des turbo-alternateurs mais plutôt leur complément : en effet, les gaz utilisés par le premier sont encore très chauds et ils peuvent servir pour produire la vapeur nécessaire au fonctionnement d'une turbine (fig. 17). Le générateur M.H.D. permet donc une augmentation du rendement d'une installation de centrale thermique.

6. GÉNÉRATEUR ÉLECTROGAZDYNAMIQUE (E.G.D.)

Le générateur E.G.D. possède une certaine ressemblance avec le générateur M.H.D. car il permet aussi de convertir directement en énergie électrique l'énergie cinétique d'un flux gazeux animé d'une grande vitesse. En simplifiant nous pouvons considérer qu'il est constitué d'un tube isolant *T* assez fin dans lequel un gaz doit s'écouler très rapidement (fig. 18). Ce gaz n'est pas ionisé avant son entrée dans le tube mais il contient un certain nombre d'électrons libres,

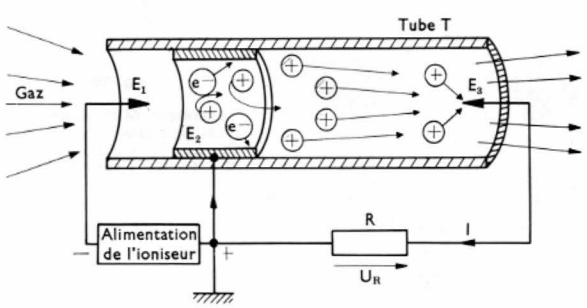


Fig. 18 — Générateur électrogazdynamique

comme tous les gaz. Lorsqu'il pénètre à l'intérieur du tube il reçoit une charge électrique car il traverse un espace où se produit une décharge silencieuse entre des électrodes périphériques et une électrode centrale à pointe très effilée E_1. Plus précisément, les quelques électrons libres sont alors attirés par l'électrode positive E_2 et pendant leur parcours ils entrent en collision avec des molécules du gaz à qui ils arrachent des électrons ; ceux-ci peuvent être suffisamment accélérés pour produire d'autres ionisations par choc : de nombreuses molécules du gaz se trouvent ainsi scindées en ions positifs et en électrons libres. Les ions positifs sont attirés par l'électrode négative E_1 mais ils se déplacent beaucoup moins rapidement que les électrons qui vont sur l'électrode positive E_2. Ce fait permet d'opérer un tri et de recueillir ces charges séparément. Ces ions positifs sont « soufflés » par le courant gazeux avant qu'ils n'atteignent l'électrode négative E_1 et entraînés vers l'aval. Pour les recueillir il suffit de disposer une électrode collectrice E_3 à l'extrémité du tube, dans l'axe du flux gazeux. Cette électrode est pourvue aussi d'une pointe effilée afin qu'un champ électrique intense, dû aux ions qui s'en approchent, permette d'arracher des électrons au métal de l'électrode et d'engendrer un courant électrique I dans le circuit d'utilisation assimilé à une résistance de charge R sur la figure 18.

Si la théorie de ce générateur est relativement simple il n'en est pas de même de sa réalisation qui pose de nombreux problèmes technologiques. La limitation des dimensions des générateurs impose un rapport longueur-diamètre du tube très élevé (souvent supérieur à 17) et des vitesses de flux gazeux largement supersoniques. D'autre part, il convient d'injecter dans le gaz des cendres volantes ou des poussières extrêmement fines afin d'augmenter la fixation des charges électriques. Pour être plus précis, disons qu'avec des particules de 2 micromètres de diamètre, l'efficacité atteint 30 % alors qu'elle atteint 50 % avec des particules deux fois plus petites.

Pour engendrer une puissance appréciable le générateur doit comporter plusieurs étages et le champ électrique ioniseur doit être intense ; il est alors possible de produire un courant continu sous une tension pouvant atteindre 500 000 volts. Pour parvenir à des puissances industrielles il faut envisager des générateurs à multiples étages alimentés par une chambre à combustion brûlant de la houille et fournissant des gaz à 1 200 °C sous une haute pression. De telles conditions ne sont pas sans poser des problèmes technologiques, en particulier pour les tubes ; ceux en alumine de haute pureté ne sont plus suffisamment isolants du point de vue électrique au-delà de 800 °C. Néanmoins les générateurs E.G.D. sont intéressants par le fait qu'ils n'exigent pas d'eau de refroidissement contrairement aux turbo-alternateurs. Sur le plan économique cet avantage doit permettre une meilleure répartition des sources d'énergie ; de plus, les premières estimations indiquent que l'efficacité de telles centrales serait tout à fait comparable à celle des plus modernes centrales électriques pour une surface d'implantation cinq fois plus réduite.

7. PILES NUCLÉAIRES

La production directe d'électricité à l'aide des rayonnements ionisants est possible et deux procédés sont utilisés.

Dans le premier, une source radioactive fournit un rayonnement qui produit la libération d'électrons au voisinage d'une jonction *P-N* ou l'ionisation d'un gaz compris entre deux électrodes dissemblables. Comme dans les photopiles, ces électrons donnent naissance à un courant électrique. Le principe du deuxième procédé fut découvert par Moseley en 1913 : il mit au point un générateur haute tension pouvant débiter un courant de 1 picoampère (10^{-12} A) sous une tension de 100 000 volts en recueillant sur un conducteur isolé les charges électriques engendrées par des particules β émises par des dérivés du radon.

On réalise de minuscules générateurs pouvant délivrer un faible courant sous une tension élevée (6 000 V par exemple) ; d'autres générateurs nucléaires fournissent des courants de plusieurs microampères sous de faibles tensions (1 volt environ).

TABLE DES MATIÈRES

TOME I

PRÉLIMINAIRES

Pages

LETTRES — NOMBRES — SYMBOLES DIVERS 1
- Lettres 1
- Nombres 1
- Symboles divers 1
- Unités 1
- Principales abréviations 7

GRANDEURS — SYSTÈMES D'UNITÉS DE MESURE 7
- Grandeurs 7
- Unités de mesure 7
- Système métrique — Quelques rappels historiques . 8
- Le système international 9
  - Unités géométriques 10
  - Unités de masse 11
  - Unités de temps 12
  - Unités mécaniques 12
  - Unités électriques et magnétiques 15
  - Unités calorifiques 19
  - Unités optiques 19
  - Unités de la radioactivité 20
  - Unités de transmission 20
- Autres systèmes d'unités 21
- Tableaux de correspondance 24

Pages

POIDS ET MASSE 26
- Poids d'un corps 26
- Masse d'un corps 26
- Attraction terrestre 26
- Application : détermination du poids d'un corps . . 26
- Détermination de la masse d'un corps 27

DÉCIBEL ET NÉPER 28
- Le décibel 28
- Tables numériques des décibels 29
- Néper 33

NORMALISATION 33
- Buts de la normalisation 33
- La normalisation française 33
- La marque nationale NF 36
- La normalisation internationale 36

TABLEAU DE CONVERSIONS 37
- Tableau : unités employées aux États-Unis d'Amérique et anciennement en Grande-Bretagne 37
- Tableau de conversion des pouces et fractions de pouces en millimètres 39
- Tableau numérique 40

MATHÉMATIQUES

INTRODUCTION 41
- De l'utilisation des mathématiques 41
- Ensembles et relations 41
  - Principaux symboles utilisés en mathématiques . 42
- Le processus de démonstration en mathématiques 45

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES ENSEMBLES ET DES RELATIONS 45
- Description naïve des ensembles 45
- L'algèbre de Boole des parties d'un ensemble 45
- Le produit cartésien de deux ensembles 46
- Relations binaires dans un ensemble 47
- Applications 48
- Relations d'équivalence 50
- Relations d'ordre 51

LES NOMBRES ENTIERS NATURELS 52
- Définition des nombres entiers naturels 52
- Le comptage : fondements mathématiques 52
- L'addition 53

Pages

ARITHMÉTIQUE SUR L'ANNEAU DES ENTIERS RELATIFS Z 54
Le groupe abélien des entiers relatifs 54
La multiplication : définition de l'anneau des entiers relatifs 55
Autre exemple de groupe : le groupe ternaire 56
Les congruences et la division des entiers 57
Compléments d'arithmétique 58

FRACTIONS ET NOMBRES RATIONNELS . 59
Définition du corps des nombres rationnels 59
Calcul sur un anneau et sur un corps — Puissances entières d'une somme — Identités remarquables . . . 60
Numération, nombres décimaux et calcul approché 61

ÉTUDE DE L'ENSEMBLE DES NOMBRES RÉELS 62
Objet de la construction des nombres réels 62
Construction du corps des nombres réels par les coupures 64
Propriétés des ensembles de la droite réelle 65

ÉTUDE DES SUITES À VALEURS RÉELLES 68
Définition d'une suite 68
Définition et propriétés de la limite d'une suite 68
Suites monotones et intervalles emboîtés 69
Progressions arithmétiques et géométriques — Séries 69
Valeurs d'adhérence d'une suite 70
Suites de Cauchy et approximation décimale d'un nombre réel 70

ÉTUDE DES FONCTIONS RÉELLES D'UNE VARIABLE RÉELLE 71
Représentation graphique d'une fonction R→R . . . 71
Sens de variation d'une fonction 71
Symétries du graphe d'une fonction 72
Définition et graphe d'une fonction périodique . . . 73
Fonctions continues 73
Dérivée d'une fonction réelle de variable réelle 74
Les fonctions puissances et l'exponentielle 75
La fonction logarithme — Dérivées des fonctions puissances et exponentielles 77
Fonctions hyperboliques 78

ESPACES VECTORIELS 79
Espaces vectoriels 79
Dépendance linéaire 80

APPLICATIONS LINÉAIRES 82
Définition 82
Structure des ensembles d'applications linéaires . . 83
Projecteurs et sous-espaces supplémentaires 85

MATRICES 86
Représentation matricielle des applications linéaires 86
Représentation matricielle des vecteurs 87
L'algèbre des matrices carrées de dimension n 88
Matrices diagonales 88
Transposition des matrices 88
Résolution des systèmes d'équations linéaires 89

PRODUIT SCALAIRE ET ORTHOGONALITÉ 90
Produit scalaire et norme 90
Orthogonalité 90
Isométries 91

GÉOMÉTRIE 92
Idée générale 92
Géométrie affine dans R^3 92
Isométries du plan 94
Les équations de la droite 97
Géométrie affine de l'espace 97

POLYNÔMES 99
Polynômes et fonctions polynômes 99
Définition d'un polynôme 99
Structure d'algèbre de l'ensemble des polynômes . 99

Pages

Étude des idéaux de K(X) et division euclidienne des polynômes 100
Étude des anneaux quotients par un polynôme irréductible 100

LE CORPS DES NOMBRES COMPLEXES . . 101
Propriétés des nombres complexes 101
Nombre complexe conjugué 102
Module d'un nombre complexe 102
Argument d'un nombre complexe 103

SÉRIES ENTIÈRES ET FONCTIONS ANALYTIQUES 103
Étude des séries numériques 103
Les séries entières 104
Les fonctions analytiques et leurs développements en série entière 105

L'EXPONENTIELLE ET LES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES 107
Définition et propriétés fondamentales de l'exponentielle complexe 107
Application à la mesure des angles 107
Trigonométrie 108

TOPOLOGIE DES ESPACES MÉTRIQUES . . 109
Espaces métriques 109
Définition de la topologie d'un espace métrique . . 110
Notion de compacité 111
Fonctions continues 111
Espaces connexes 111
Espaces vectoriels normés 112

CALCUL DIFFÉRENTIEL SUR R^n 112
Applications différentiables 112
Expression de la différentielle avec des dérivées partielles 113
Différentielle seconde et dérivées d'ordre supérieur 114
Opérateurs différentiels 115
Application géométrique à l'étude des courbes et des surfaces 115
Formes différentielles 116

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DE L'INTÉGRATION 118
Espace vectoriel normé des fonctions réglées de I dans R 118
L'intégrale des fonctions réglées d'un intervalle borné dans R 120
Primitives d'une fonction continue 121
Fonctions définies par une intégrale 122

COMPLÉMENT DE CALCUL INTÉGRAL . . . 122
Intégrales impropres 122
Intégrale curviligne 124
Intégrales multiples 125
Formules intégrales de l'analyse vectorielle 126
Calculs de surface 127

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES 131
Position du problème 131
Théorème d'existence et d'unicité 132
Les équations différentielles linéaires 133
Les équations différentielles linéaires avec second membre 134

DÉVELOPPEMENT DE FOURIER DES FONCTIONS PÉRIODIQUES 135
Introduction 135
Séries trigonométriques 135
Série de Fourier d'une fonction périodique 136

TRANSFORMÉE DE LAPLACE 137
Intégration d'une fonction complexe de variable réelle 137
Définition de la transformée de Laplace et exemples de fonctions classiques 137
Transformation de Laplace et dérivation 138
Application à l'étude d'un circuit électrique 138

SCIENCES PHYSIQUES

Pages

MÉCANIQUE DES SOLIDES

LES VECTEURS 143
Définitions 143
Vecteur 143
Égalité de deux vecteurs, ensemble de vecteurs . 143
Opérations effectuées sur les vecteurs libres 144
Somme et différence de vecteurs 144
Produit d'un vecteur par une grandeur scalaire .. 144
Projection des vecteurs 145
Produit scalaire de deux vecteurs 147
Produit vectoriel de deux vecteurs 148
Produit mixte de trois vecteurs 150
Double produit vectoriel 151
Les ensembles de vecteurs glissants 153
Définitions relatives aux ensembles de vecteurs glissants 153
Propriétés des torseurs et opérations effectuées sur les torseurs 154
Réduction des systèmes de vecteurs glissants .. 155

CINÉMATIQUE OU ÉTUDE DU MOUVEMENT 159
Dérivations vectorielles 159
Dérivation dans un même repère 159
Mouvement du point matériel 161
Point matériel, trajectoire, position 161
Vitesse et accélération 162
Mouvement uniforme, uniformément varié, périodique 165
Étude de mouvements particuliers 166
Mouvement du solide indéformable 170
Trajectoire, vitesse et accélération 170
Mouvement de translation 171
Mouvement de rotation 171
Mouvement hélicoïdal 171
Mouvement plan 172
Mouvement sphérique ou à point fixe 175
Mouvement quelconque 176

STATIQUE OU ÉQUILIBRE DES CORPS RIGIDES 177
Repères de référence 177
Référentiel absolu 177
Référentiel terrestre 177
Les forces 177
Principe de l'inertie 177
Notion de force 177
Égalité de l'action et de la réaction 178
Systèmes de forces équivalents agissant sur un même point matériel 178
Force agissant sur un corps rigide 178
Nature des forces exercées sur un solide 181
Forces exercées sur un ensemble de plusieurs solides 182
Équilibre 184
Équilibre du point matériel 184
Équilibre du solide 185
Équilibre d'un ensemble de corps solides 186
Utilisation des lois de l'équilibre en résistance des matériaux 188

DYNAMIQUE 188
Loi fondamentale - Théorèmes généraux 188
Le point matériel 188
Dynamique du corps rigide 191
Dynamique des ensembles de corps rigides 197
Théorème de d'Alembert 198
Les théorèmes de l'énergie 199
Travail et puissance 199
Énergie cinétique 201
Théorèmes de la puissance et de l'énergie cinétique 202

Pages

THERMODYNAMIQUE

TEMPÉRATURE - THERMOMÉTRIE 205
Température d'un corps 205
Thermométrie 205

CALORIMÉTRIE 207
Notion de quantité de chaleur 207
Propagation de la chaleur 207
Chaleur massique 207

DILATATION DES SOLIDES, DES LIQUIDES ET DES GAZ 208
Dilatation linéaire d'un solide 208
Dilatation superficielle et dilatation volumique (ou cubique) d'un solide 208
Dilatation des liquides 209
Compressibilité et dilatation des gaz 209

CHANGEMENT D'ÉTAT PHYSIQUE 210
États physiques d'un corps pur 210
Fusion et solidification 210
Vaporisation 211
Sublimation et condensation 212
Diagramme d'un corps pur 212
Isothermes des gaz liquéfiables 213

PRINCIPES DE LA THERMODYNAMIQUE 214
Premier principe de la thermodynamique 214
Second principe de la thermodynamique 215
Entropie 216
Énergie libre et enthalpie libre 216

PHYSIQUE NUCLÉAIRE

L'ATOME 217
Introduction 217
Les théories atomiques 217
Liste des éléments naturels et artificiels 218
Répartition des électrons dans les atomes à l'état fondamental 221
Tableau périodique des éléments 225
Le noyau 225

LA RADIOACTIVITÉ 227
Généralités 227
Processus de désintégration et rayonnement 228
Détection des particules 230
Classification des transmutations 232
Destin des corps radioactifs 233
Les familles radioactives 234
Application de la radioactivité 234

ÉNERGIE NUCLÉAIRE DE FISSION ET DE FUSION 235
Projectiles de bombardement 235
Rôle privilégié des neutrons 235
Les accélérateurs de particules 236
Fission de l'uranium et réaction en chaîne 240
Le réacteur nucléaire 241
L'énergie thermonucléaire de fusion 243
Applications militaires des techniques nucléaires .. 245

LES RAYONS X 246
Généralités 246
Production des rayons X 246
Émission des rayons X 247
Caractéristiques d'un rayonnement X 248
Propriétés des rayons X 249
Interaction des rayons X et de la matière 250
Mesures des caractéristiques d'un rayonnement X . 251
Les domaines d'application des rayons X 251
Protection contre les effets biologiques des rayonnements 252

Pages

LES RAYONS COSMIQUES 254
Mise en évidence 254
Constitution des rayons cosmiques 254
Origine des rayons cosmiques 254

MAGNÉTISME

RAPPELS SOMMAIRES DES PHÉNOMÈNES MAGNÉTIQUES 255
Aimants 255
Champ magnétique 255
Les aimants longs 255
Loi de Coulomb 256
Expérience de l'aimant brisé 256
Induction magnétique — Lignes d'induction 256
Champ magnétique uniforme 257
Aimantation 258
Flux magnétique 258
Champ ou excitation magnétique — Perméabilité magnétique 258
Susceptibilité magnétique 260
Fabrication des aimants 260

MILIEUX MATÉRIELS MAGNÉTIQUES 260
Moment magnétique atomique 260
Les diamagnétiques 261
Les paramagnétiques 261
Ferromagnétisme 263
Antiferromagnétisme 267
Ferrimagnétisme 267
La magnétostriction 268
Désaimantation adiabatique 268

ÉLECTRICITÉ

ÉLECTROCINÉTIQUE 271

LE COURANT ÉLECTRIQUE 271
Le courant électrique défini par ses effets 271
Conducteurs et isolants 271
Sens du courant 272
Expériences d'électrisation 272
Expérience de Rowland (1876) 272
Origine atomique de l'électricité 272
Quantités d'électricité et intensité du courant 272

EFFET JOULE 273
Loi de Joule 273
Autres expressions de la loi de Joule 273
Résistance d'un conducteur 273
Résistivité 273
Conductance et conductivité 274
Applications pratiques de l'effet Joule 274

DIFFÉRENCE DE POTENTIEL — LOI D'OHM 275
Différence de potentiel entre les extrémités d'une portion de circuit ne contenant pas de générateur .. 275
Loi d'Ohm pour une résistance 275
Mesure des différences de potentiel 276
Additivité de différences de potentiel 276

ASSOCIATIONS DE RÉSISTANCES — COURANTS DÉRIVÉS 276
Résistances en série 276
Résistances en parallèle ou en dérivation ; courants dérivés 276
Applications des lois sur les associations de résistances 277

GÉNÉRATEURS — FORCE ÉLECTROMOTRICE 278
Force électromotrice d'un générateur 278
Résistance interne 278
Autres caractéristiques d'un générateur 278
Loi d'Ohm pour un générateur 278

Pages

Loi de Pouillet pour un circuit extérieur réduit à une résistance 279
Groupements de générateurs 279
Court-circuit 280

RÉCEPTEURS — FORCE CONTRE-ÉLECTROMOTRICE 280
Récepteurs 280
Loi de Pouillet généralisée 281
Différence de potentiel aux bornes d'un récepteur .. 281
Application des lois de Pouillet — Influence d'un rhéostat 281

ÉLECTROLYSE 282
Étude qualitative 282
Étude quantitative 283
Interprétation des phénomènes et de la loi de Faraday 284
Force contre-électromotrice d'un voltamètre 284

POLARISATION D'UN VOLTAMÈTRE 284
Phénomène de polarisation dans un voltamètre .. 284
Étude de la force électromotrice d'un voltamètre polarisé 285
Rendement énergétique du voltamètre 285

ACCUMULATEURS ET PILES 285
Accumulateurs au plomb 285
Les accumulateurs alcalins 287
Piles électriques 288

RÉSEAUX DE CONDUCTEURS — LOIS DE KIRCHHOFF 292
Réseaux de conducteurs 292
Lois de Kirchhoff 292
Application pratique des lois de Kirchhoff 292
Conséquence des lois de Kirchhoff 293

ÉLECTROSTATIQUE 294

ÉLECTRISATION — LOI DE COULOMB .. 294
Différents modes d'électrisation 294
Loi de Coulomb 295

CHAMP ÉLECTROSTATIQUE DANS LE VIDE — POTENTIEL ET FLUX 295
Définition du champ électrostatique (ou électrique) 295
Champ produit par une charge isolée 296
Champ produit par un ensemble de charges isolées 296
Champ produit par une distribution superficielle uniforme de charges 296
Champ produit par une distribution volumique des charges 296
Lignes de champ 296
Potentiel électrique 297
Équipotentielles 298
Flux du champ électrostatique 298
Conséquence du théorème de Gauss : divergence de champ 299

EXEMPLES DE CHAMPS ÉLECTROSTATIQUES 300
Champ électrique dû à une sphère uniformément chargée 300
Champ électrostatique dû à un fil rectiligne infini uniformément chargé 300
Étude d'un doublet électrique 300

CONDUCTEURS EN ÉQUILIBRE 302
Définition 302
Propriétés des conducteurs en équilibre 302
Cas particulier : les conducteurs creux 302
Cage de Faraday 302
Cylindre de Faraday — Mesures de charges électriques 302
Étude expérimentale de la distribution superficielle des charges sur un conducteur en équilibre 303

Pages

Champ électrique au voisinage d'un conducteur .. 303
Pression électrostatique 304

INFLUENCE ET CAPACITÉ 304
Influence électrostatique 304
Théorème des éléments correspondants 305
Influence totale 305
Écrans électriques 306
Capacités et coefficients d'influence 306

ISOLANTS OU DIÉLECTRIQUES 306
Polarisation d'un isolant 306
Vecteur polarisation 307
Vecteur déplacement 307
Diélectriques parfaits et diélectriques imparfaits ... 307
Hystérésis diélectrique 307
Rigidité diélectrique 308

LES CONDENSATEURS 308
Capacité d'un condensateur 308
Calcul de la capacité d'un condensateur 309
Influence du diélectrique d'un condensateur 311
Groupements de condensateurs 311
Rigidité diélectrique d'un condensateur 312
Principaux types de condensateurs usuels 312

ÉNERGIE ÉLECTROSTATIQUE 313
Énergie électrostatique d'un système de charge ... 313
Énergie électrostatique d'un conducteur unique isolé dans l'espace 313
Énergie d'un système de conducteurs 313
Calcul des forces s'exerçant entre des corps chargés (méthode des travaux virtuels) 313

ÉLECTROSTATIQUE ET ÉLECTROCINÉTIQUE — DÉCHARGE D'UN CONDENSATEUR 314
Domaine d'application des lois de l'électrostatique et de l'électrocinétique 314
Exemples d'états quasi stationnaires 314

GÉNÉRATEURS ÉLECTROSTATIQUES ... 315
Principe 315
Différents générateurs électrostatiques 316

ÉLECTROMÉTRIE 317
Principe 317
Électromètre absolu 317
Électromètre à quadrants 317

ÉLECTROMAGNÉTISME 318

FORMULE D'AMPÈRE 318
Formule d'Ampère 318
Loi de Biot et Laplace — Loi de Laplace 318

LOI DE BIOT ET LAPLACE — EXEMPLES DE CHAMPS MAGNÉTIQUES 318
Loi de Biot et Laplace 318
Induction magnétique due à un fil rectiligne indéfini (loi de Biot et Savart) 319
Induction magnétique en un point de l'axe d'une spire circulaire 319
Induction magnétique produite au moyen d'une bobine circulaire plate 320
Induction magnétique due à un solénoïde 320
Excitation magnétique — Théorème d'Ampère ... 321
Potentiel vecteur du vecteur induction 322

LOI DE LAPLACE ET LOI DE MAXWELL ... 322
Loi de Laplace 322
Applications de la loi de Laplace 323
Loi de Maxwell — Travail des forces électromagnétiques 324
Règle du flux maximal 325
Application de la loi de Maxwell — Calcul des forces s'exerçant sur un circuit 325
Définition légale de l'ampère 326

Pages

INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE ... 326
Étude qualitative des phénomènes d'induction ... 327
Force électromotrice d'induction 327
F.é.m. d'induction due à un « flux coupé » 327
Courants de Foucault — Applications 328

AUTO-INDUCTION 329
Définition 329
Unité d'auto-induction du système international .. 329
Inductance d'un solénoïde 329
Établissement d'un régime permanent dans un circuit inductif 330
Rupture de courant dans un circuit inductif 331
Décharge d'un condensateur à travers un circuit inductif 331
Ouverture d'un circuit inductif 333

INDUCTANCE MUTUELLE 333
Définition 333
Calcul de l'inductance mutuelle de deux circuits ... 334
Application de l'inductance mutuelle: calcul des forces s'exerçant entre deux circuits électriques ... 334
Passage d'énergie d'un circuit à un autre 334
Applications: Bobine d'induction et bobine de Ruhmkorff 334
Inductance équivalente à deux inductances en série 335

COURANTS ALTERNATIFS 335

GÉNÉRALITÉS 335
Définitions 335
Approximation des états quasi stationnaires 336
Différentes caractéristiques d'une grandeur variant en fonction du temps 336
Grandeur périodique et grandeur alternative 336

LES EFFETS D'UN COURANT ALTERNATIF 337
Obtention d'un courant sinusoïdal 337
Effets du courant alternatif 337
Calcul de la valeur efficace d'une grandeur sinusoïdale 339

REPRÉSENTATION DES GRANDEURS SINUSOÏDALES — VECTEURS DE FRESNEL ET NOTATION COMPLEXE 339
Déphasage entre deux grandeurs sinusoïdales 339
Addition de deux grandeurs sinusoïdales 340
Exemples d'application de la construction de Fresnel 341
Emploi des nombres complexes 342

RÉSISTANCES, CAPACITÉS ET INDUCTANCES EN COURANT ALTERNATIF 343
Résistance non inductive 343
Inductance pure 344
Circuit inductif quelconque 345
Condensateur 345
Circuit comprenant en série une résistance, une inductance et un condensateur 346

LOIS D'OHM ET DE KIRCHHOFF — RÉSONANCE 347
Loi d'Ohm 347
Lois d'association des impédances 347
Lois de Kirchhoff en courant alternatif 350
Exemples de problèmes traités par les notations complexes 350
Phénomènes de résonance — Circuits oscillants . 352

PUISSANCE EN COURANT ALTERNATIF .. 354
Puissance absorbée par un circuit 354
Autre expression de la puissance moyenne 355
Puissance complexe 355
Courant actif et courant réactif 356
Théorème de Boucherot 356
Importance pratique du facteur de puissance 356

SYSTÈMES DE COURANTS POLYPHASÉS . 358
Système polyphasé 358

Pages

Obtention d'un système de tensions polyphasé .. 358
Réseau triphasé à quatre conducteurs 359
Montage étoile — Montage triangle 360
Puissances en triphasé 360
Système tétraphasé 361
Système hexaphasé 363
Puissances en systèmes polyphasés 363

ÉLECTRONIQUE

ÉLÉMENTS DE LA PHYSIQUE DU SOLIDE — CONDUCTEURS, ISOLANTS ET SEMI-CONDUCTEURS 365
Niveaux d'énergies d'un atome — État cristallin .. 365
Conducteurs et isolants 366
Semiconducteurs 367
Semiconducteurs extrinsèques dopés 368
Obtention des semiconducteurs extrinsèques 369

L'ÉLECTRON LIBRE 370
Action d'un champ électrique sur un électron 370
Application de l'action d'un champ électrique ... 372
Action d'un champ magnétique sur un électron .. 373
Application: déviation magnétique d'un faisceau d'électrons 374

ÉMISSION THERMOÉLECTRONIQUE — CATHODES THERMOÉMISSIVES 375
Énergie de sortie et émission thermoélectronique .. 375
Intensité du courant thermoélectronique 376
Cathodes thermoémissives 376

TUBES ÉLECTRONIQUES 377
Tubes électroniques à vide 377
Diode à vide 377
Triode 379
Tétrode 380
Pentode 381
Autres tubes — Désignation (code européen) .. 382
Tubes électroniques à gaz 382
Tubes à gaz à cathode chaude 382
Tubes à gaz à cathode froide 383
Tubes à cathode liquide 383

TUBE CATHODIQUE — OSCILLOGRAPHE 384
Description 384
Application: l'oscillographe cathodique 386

VARISTANCES — SONDES À EFFET HALL — THERMOCOUPLES 388
Thermistances à coefficient de température négatif 388
Thermistances à coefficient de température positif 389
Les résistances dépendant de la tension ou V.D.R.. 390
Sondes à effet Hall — Magnétorésistances 390
Batteries à effet Peltier — Thermocouples..... 391

JONCTION P-N — DIODES SEMICONDUCTRICES 392
Obtention d'une jonction P-N 393
Étude de la jonction P-N 393
Courant dans une jonction polarisée 393
Capacité d'une jonction 394
Diode à jonction 394
Diode à pointe 397
Diode Zener — Diode à avalanche contrôlée 397
Autres diodes à jonction 398
Redresseur métal-semiconducteur 399

TRANSISTOR À JONCTIONS 400
Description 400
Étude théorique d'un transistor 400
Caractéristiques statiques d'un transistor 401
Technique de fabrication des transistors 404
Principe de l'amplification par transistor — Étude graphique 404
Polarisation d'un transistor 408

Pages

Stabilisation thermique d'un transistor 409
Conclusion — Étage amplificateur 410

TRANSISTORS À JONCTIONS — PARAMÈTRES — SCHÉMAS ÉQUIVALENTS 411
Équations pour le fonctionnement dynamique 411
Signification des paramètres hybrides 411
Schéma équivalent du transistor 412
Schéma équivalent de l'étage amplificateur 413
Autres schémas équivalents 414
Fréquences de coupure d'un transistor 415

TRANSISTOR À EFFET DE CHAMP 416
Effet de champ 416
Transistor à effet de champ 416
Caractéristiques statiques d'un transistor à effet de champ 417
Fonctionnement dynamique d'un transistor à effet de champ 418
Transistor à effet de champ à porte isolée 419
Montage pratique d'un transistor à effet de champ. 420
Utilisation du T.E.C. en résistance commandée par une tension 421

THYRISTOR — TRANSISTOR UNIJONCTION — DIAC — TRIAC 421
Thyristor 421
Transistor unijonction 423
Diac 425
Triac 425

CIRCUITS PASSIFS UTILISÉS DANS LES AMPLIFICATEURS — QUADRIPÔLES PASSIFS LINÉAIRES 426
Caractéristiques d'un quadripôle 426
Circuit R.C. passe-bas — Circuit intégrateur 428
Circuit R.C. passe-haut — Circuit différenciateur . 429
Circuit correcteur à avance de phase 430
Circuit correcteur à retard de phase 431
Circuit R-L-C série 431

AMPLIFICATION 433
Classification des amplificateurs 433
Amplificateurs de petits signaux à large bande ... 433
Utilisation du transistor en amplificateur de petits signaux 434
Association de plusieurs étages: amplificateurs en cascade 438
Amplificateur différentiel 441
Courbe de réponse en amplitude d'un étage amplificateur 442
Bruits 444
Amplification d'un signal, en créneaux carrés 444

AMPLIFICATEUR À BANDE ÉTROITE 445
Exemple d'amplificateurs à bande étroite (amplificateur accordé ou sélectif) 445
Courbe de réponse de l'amplificateur 446
Bande passante 446
Autres exemples d'amplificateurs à bande étroite . 447

AMPLIFICATEUR DE PUISSANCE 448
Amplificateur fonctionnant en classe A 448
Distorsion en classe A 449
Réalisation pratique d'un amplificateur classe A .. 451
Amplificateurs fonctionnant en classe B 451

AMPLIFICATEURS AVEC RÉACTION 453
Différentes sortes de réactions 453
Réaction série de tension 454
Contre-réaction série de tension 455
Contre-réaction série de courant 457
Contre-réaction parallèle de courant 458
Contre-réaction parallèle de tension — Amplificateur opérationnel 458
Stabilité des systèmes à contre-réaction 461
Oscillateurs 462

Pages

APPLICATION DES SEMICONDUCTEURS EN COMMUTATION 464
Diode à jonction en commutation 464
Transistor en commutation 465
Commutation et algèbre de Boole 467
Circuits de commutation 468
Autres montages ; les multivibrateurs 470

REDRESSEMENT 472
Alimentation d'une charge résistante en courant unidirectionnel 472
Alimentation d'un récepteur présentant une f.c.é.m. 475
Alimentation d'un circuit inductif 476
Redressement avec débit dans un condensateur .. 477
Multiplicateurs de tension 478
Filtrage 478
Stabilisation 479
Redressement contrôlé 480

CONVERSION DU COURANT CONTINU ET DU COURANT ALTERNATIF 483
Onduleurs monophasés 483
Onduleurs triphasés 486
Onduleur réversible 488
Applications des onduleurs 488
Les convertisseurs continu-continu 489
Les convertisseurs alternatif-alternatif 489

DISPOSITIFS PHOTOÉLECTRIQUES 489
Tubes photoélectriques à vide 490
Tubes photoélectriques à gaz 491
Photomultiplicateurs 491
Cellules photoélectriques 491
Photodiode et composants dérivés 493
Quelques autres dispositifs photoélectriques 493

DISPOSITIFS POUR HYPERFRÉQUENCES. 494
Limites des tubes classiques 494
Tubes à interaction courte du courant et du champ 494
Tubes à interaction répartie du courant et du champ 502
Diodes utilisées en oscillatrices hyperfréquences .. 508

MICROÉLECTRONIQUE — CIRCUITS INTÉGRÉS 510
Présentation I
Classification II
Circuits intégrés monolithiques II
Circuits intégrés monolithiques à isolement diélectrique VIII
Circuits hybrides VIII
Intérêt des circuits intégrés X
Applications des circuits intégrés XII

ÉLECTROTECHNIQUE

GÉNÉRALITÉS SUR LES MACHINES ÉLECTRIQUES 511
Notions préliminaires 511
Classification des machines électriques 511
Constitution d'une machine électrique 511

LE FLUX D'INDUCTION DANS LES ÉLECTROAIMANTS ET LES MACHINES ÉLECTRIQUES 512
Théorie du circuit magnétique 512
Le flux d'induction dans les électroaimants 513
Production d'un flux constant dans les machines électriques 514
Production de flux tournants et glissants au moyen de courants alternatifs 514

Pages

Cas de plusieurs forces magnétomotrices agissant dans la même direction 517
Caractéristique magnétique totale d'une machine . 517
Le flux dans la marche industrielle 518

PERTES — ÉCHAUFFEMENT — RENDEMENT 518
Pertes de puissance active 518
Consommation de puissance réactive — Influence de la tension 520
Échauffement 520
Rendement 521

MOTEURS ET GÉNÉRATEURS ÉLECTRIQUES 522
Moteurs électriques 522
Générateurs électriques 524

BOBINE À NOYAU DE FER 525
Constitution — Intérêt d'un entrefer 525
Diagramme de la bobine à noyau de fer 526
Calcul d'une bobine à noyau droit 526

MACHINES À COURANT ALTERNATIF 527

TRANSFORMATEUR STATIQUE 527
Théorie du transformateur 527
Application de la méthode de Boucherot au transformateur 529
Constitution des transformateurs 529

TRANSFORMATEUR — CARACTÉRISTIQUES INDUSTRIELLES 532
Caractéristiques commerciales d'un transformateur 532
Chute de tension 532
Étude de la chute de tension 534
Formules pratiques donnant la chute de tension .. 534
Réglage de la tension secondaire 535
La chute de tension dans la réalité industrielle ... 535
Tension de court-circuit — Rapport $\frac{I_{0\ \mathrm{eff}}}{I_{n1\ \mathrm{eff}}}$ 536
Pertes à vide — Rendement 536
Tableau des grandeurs caractéristiques d'un transformateur de puissance 536

TRANSFORMATEURS TRIPHASÉS — COUPLAGE DES TRANSFORMATEURS 536
Modes de connexion 537
Schémas et désignations conventionnels 537
Indice horaire 537
Choix du couplage 537
Marche en V 537
Couplage des transformateurs en parallèle 538

TRANSFORMATEURS SPÉCIAUX 539
Autotransformateur 539
Transformateur de phases 541
Transformateurs de mesures 542
Régulateur d'induction 543
Amplificateur magnétique 544
Spire de Frager 545

MACHINES SYNCHRONES 546
Principe — Constitution 546
Formule de la fréquence 547
F.é.m. de l'alternateur 547
Alternateur polyphasé 548
Enroulements des machines à courants alternatifs 548
Alternateur homopolaire 549
Réaction d'induit 549
Définition 551
Mesure directe et mesure indirecte de la chute de tension 551
Diagramme de Behn Eschenburg 551
Détermination de la réactance $L\omega$ de Behn Eschenburg 552

Pages

Critique — Perfectionnement récent du diagramme de Behn Eschenburg 552
Variables dont dépend la chute de tension 553
Régulation de la tension 553
Court-circuit d'un alternateur 554
Rendement vrai — Mesure — Méthode directe ... 554
Rendement approché — Pertes mesurables — Mesure indirecte 554
Refroidissement 555
Graissage et refroidissement des paliers 555
Inducteurs 555
Induit 556
Particularités de construction 556

COUPLAGE DES ALTERNATEURS EN PARALLÈLE 557

Le système alternateur — barres 557
Conditions électriques de couplage en parallèle .. 557
Manœuvres de couplage d'un alternateur 557
Condition de mise en charge de l'alternateur 558
Répartition des puissances entre les moteurs de deux alternateurs en parallèle 558
Courbe de la marche en parallèle 558
Fonctionnement optimal à réaliser 559
Réalisation du fonctionnement optimal 559
Cas général d'alternateurs de puissances différentes 559
Diagramme des puissances à tension constante .. 560
Stabilité — Oscillations d'un alternateur couplé ... 560
Conséquence des fautes de couplage 561
Interconnexion des réseaux 561

MOTEUR SYNCHRONE 561

Principe 561
Équation de fonctionnement du moteur synchrone 561
Diagramme bipolaire simplifié 562
Décalage angulaire — Marche en générateur — Marche en moteur 562
Caractéristiques essentielles du moteur synchrone . 562
Applications du moteur synchrone 564
Couple électromagnétique sur un rotor à pôles saillants 564
Moteur autosynchrone 564

MACHINES ASYNCHRONES — MOTEUR ASYNCHRONE 565

Principe 565
Constitution d'un moteur polyphasé 565
Bobinages du stator et du rotor 567
Vitesse et glissement 567
Définition du couple transmis 568
Bilan énergétique du moteur 568
Glissement et rendement 569
Expression du moment du couple transmis 569
Caractéristique mécanique du moteur asynchrone . 569
Propositions fondamentales relatives au couple et au glissement 570
Réaction magnétique du rotor 570
Relation entre flux et tensions 571
Diagramme des flux et des tensions 571
Diagramme du cercle 572
Essais permettant la construction du diagramme du cercle 572
Exemple numérique d'application du diagramme de l'U.T.E. 573
Problème de couple et problème de courant 574
Démarrage par réduction momentanée de la tension d'alimentation 574
Démarrage par action sur le circuit secondaire (rotor) 575
Rhéostat à plots (démarreur) 575
Procédés de démarrage automatique 576
Courbes caractéristiques en marche de régime 577
Énergie perdue dans le rotor pendant le démarrage 578
Action sur le nombre de pôles 578
Action sur la fréquence d'alimentation 579
Action sur le glissement 579

Pages

MODES D'UTILISATION ET TYPES PARTICULIERS DE MACHINES ASYNCHRONES 580

Générateur asynchrone 580
Principe 580
Diagramme et caractéristiques 580
Propriétés essentielles du générateur asynchrone 581
Avantages et inconvénients du générateur asynchrone 581
Application du générateur asynchrone 581
Moteur asynchrone monophasé 581
Constitution 581
Caractéristique mécanique T(n) 581
Propriétés particulières au moteur monophasé .. 582
Artifices de démarrage 582
Applications 583
Moteur asynchrone synchronisé 583
Principe 583
Constitution 583
Diagramme du moteur asynchrone synchronisé . 584
Fonctionnements successifs en synchrone et asynchrone 584
Stabilité 584
Inconvénients et avantages — Applications 584
Démarrage du moteur synchrone en asynchrone. 585
Frein électrique 585
Freinage en générateur hypersynchrone 585
Freinage à contre-courant 585
Freinage en alternateur 585
Utilisations spéciales 586
Arbre électrique 586
Moteur asynchrone linéaire 586
Petits moteurs synchrones démarrant en asynchrone 586
Principe des moteurs synchrones à aimants permanents 586
Avantages — Inconvénients — Applications 586
Accidents du moteur asynchrone triphasé 587
Mauvais sens de rotation 587
Rupture d'un fil d'alimentation (stator) 587
Rupture d'un conducteur du rotor phénomène de Goerges 587
Essais de réception 587
Recherche de dérangements 587

GÉNÉRATRICE DE COURANT CONTINU — THÉORIE — CONSTITUTION — CONSTRUCTION — ESSAIS DE RÉCEPTION ... 588

Théorie — Constitution 588
Définition 588
Principe 588
Constitution d'une dynamo moderne 588
Force électromotrice d'une dynamo bipolaire .. 589
Machine multipolaire 589
Enroulements d'induit 590
Position des balais 591
Génératrice acyclique ou unipolaire 591
Construction 591
Circuit magnétique 591
Enroulement d'induit 592
Collecteur 592
Balais 592
Essais de réception — Dérangement — Entretien . 592
Données de commande d'une dynamo 592
Essais préliminaires permettant de vérifier la qualité de la construction 593
Tableau des dérangements et de leurs causes .. 594
Entretien des dynamos 595

RÉACTION D'INDUIT — COMMUTATION . 595

Réaction d'induit 595
Définitions 595
Lignes neutres 596
Balais calés sur la ligne neutre théorique 596
Balais calés en avant de la ligne neutre théorique 596
La réaction magnétique en exploitation 597
Inconvénients de la réaction magnétique 597
Diminution ou compensation de la réaction d'induit 597

Pages

Commutation ... 598
Forces électromotrices dans une section en commutation ... 598
Remèdes utilisés pour obtenir une commutation convenable ... 598
Conclusions pratiques ... 598

DYNAMOS — CARACTÉRISTIQUES ... 599

Caractéristiques usuelles ... 599
Dynamo à excitation séparée ... 599
Caractéristique en charge ... 599
Caractères essentiels. Applications ... 599
Dynamo à excitation en dérivation (shunt) ... 600
Amorçage ... 600
Caractéristique à vide ... 600
Caractéristique en charge ... 600
Propriétés essentielles — Applications ... 601
Dynamo à excitation en série ... 601
Caractéristique en charge ... 601
Amorçage ... 601
Applications ... 601
Dynamo à excitation composée (compound) ... 602
Principe et constitution ... 602
Rapport d'équivalence — Taux de compoundage 602
Caractéristiques en charge pour différents compoundages ... 602
Applications ... 602
Couplage des dynamos ... 603
Dynamos excitées en dérivation couplées en parallèle ... 603
Dynamos excitées en série couplées en parallèle. 603
Dynamos spéciales ... 603
Définition ... 603
Dynamo à trois balais ... 603
Amplidyne ... 604
Rototrol ... 604

MOTEUR À COURANT CONTINU — COUPLE — VITESSE — CARACTÉRISTIQUES .. 605

Couple ... 605
Principe du moteur ... 605
Sens du couple et de la rotation ... 605
Définition et expression du couple électromagnétique ... 605
Réaction magnétique et chute totale de tension .. 606
Vitesse ... 606
Expression de la vitesse ... 606
Commutation ... 606
Formules applicables à la machine à courant continu ... 606
Caractéristiques des moteurs à courant continu ... 606
Caractéristiques usuelles d'un moteur ... 606
Moteur à excitation en dérivation (ou shunt) ... 607
Caractéristique de vitesse ... 607
Caractéristique de couple ... 607
Caractéristique mécanique ... 607
Applications ... 607
Moteur à excitation en série ... 607
Caractéristique de vitesse ... 607
Caractéristique de couple T_e (I) ... 608
Caractéristique mécanique T_e (n) ... 608
Applications ... 608
Moteur à excitation composée (ou compound) .. 608
Caractéristiques ... 608
Applications ... 609

MOTEUR À COURANT CONTINU — MARCHE INDUSTRIELLE ... 609

Démarrage ... 609
Problème de couple — Problème de courant ... 609
Rhéostat de démarrage du moteur à excitation en dérivation ... 609
Le démarreur et ses montages incorrects ... 609
Rhéostat de démarrage du moteur à excitation en série ... 610

Pages

Réglage de la vitesse ... 610
Réglage de la vitesse par action sur la tension d'alimentation ... 611
Réglage de la vitesse par action sur le flux ... 611
Comparaison de deux modes de réglage de la vitesse ... 611
Freinage électrique ... 612
Freinage rhéostatique ... 612
Freinage avec récupération ... 612
Rendement ... 612
Mesure du rendement vrai ... 612
Mesure du rendement approché — Méthode du moteur à vide ... 613

MOTEURS À COLLECTEUR ... 613

Moteurs monophasés ... 613
Moteur-série monophasé ... 613
Moteur à répulsion ... 614
Moteur à répulsion — induction ... 615
Moteurs triphasés à collecteur ... 616
Rotor à collecteur (et bagues) ... 616
Principe du moteur triphasé à collecteur ... 616

PETITES MACHINES UTILISÉES DANS LES SERVOMÉCANISMES ... 617

Particularités de ces machines ... 617
Petites machines spéciales ... 617
Moteur diphasé d'asservissement ... 617
Moteur à hystérésis ... 618
Moteur pas à pas ... 618
Stéromoteur ... 619
Moteur à entrefer axial ou à induit plat ... 620
Micromoteurs à courant continu ... 622
Générateurs tachymétriques ... 622
Dynamo à courant continu ... 622
Alternateur diphasé ... 622
Télétransmetteurs ... 622
Synchromachines (ou selsyns) ... 622
Télétransmetteurs à courant continu ... 623
Trigonomètres (resolvers) ... 623
Convertisseurs courant alternatif — courant continu 624
Commutatrices ... 624

CHOIX D'UN MOTEUR ÉLECTRIQUE ... 624

Caractéristiques techniques ... 624
Conditions de démarrage ... 624
Marche de régime ... 624
Caractéristique économique ... 625
Vitesse économique d'un moteur ... 625
Tension économique ... 625
Puissance optimale ... 625
Commandes diverses ... 625
Commande de laminoirs ... 625
Commande d'engins de levage et de manutention 626
Commande des cabestans ... 626
Filatures-Papeteries ... 627
Conclusion générale ... 627

LE FACTEUR DE PUISSANCE DANS LES INSTALLATIONS ÉLECTRIQUES ... 627

Inconvénients d'un faible facteur de puissance ... 627
Causes d'un faible facteur de puissance mensuel .. 627
Amélioration du facteur de puissance ... 628
Avantages de la batterie de condensateurs statiques 628
Conditions d'emploi de la batterie de condensateurs 628
Constitution et prix d'une batterie de condensateurs 628
Précautions d'emploi de la batterie de condensateurs 629
Installation de la batterie — Mode de compensation 630

OPTIQUE

GÉNÉRALITÉS ET LOIS FONDAMENTALES DE L'OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE ... 631

La lumière ... 631
Propagation rectiligne ... 631

Pages

Chambre noire — Objet — Image 631
Lumière complexe, lumière monochromatique 632
L'optique géométrique 632
Réflexion de la lumière 632
Réfraction de la lumière 632

ÉLÉMENTS ET SYSTÈMES OPTIQUES 634
Généralités 634
Les miroirs plans 635
Les miroirs sphériques 636
Lames à faces parallèles 639
Le prisme 639
Dioptre sphérique 641
Lentilles sphériques 641

Pages

LES INSTRUMENTS D'OPTIQUE 644
Préliminaires : l'œil 644
Caractéristiques des instruments d'optique 645
Loupes et oculaires 645
Lunette astronomique 646
Aberrations 647

NATURE DE LA LUMIÈRE — GRANDEURS PHOTOMÉTRIQUES 648
Nature de la lumière 648
Effet Compton 648
Les franges de Young 648
Polarisation de la lumière 649
Grandeurs photométriques 651

ÉNERGIE ÉLECTRIQUE

CENTRALES THERMIQUES

PRÉSENTATION GÉNÉRALE — CHOIX DU SITE 656
Description générale 656
Le site 657

LES COMBUSTIBLES FOSSILES 657
Classification 657
Caractéristiques physico-chimiques des combustibles 658
Caractéristiques propres aux combustibles solides . 658
Caractéristiques propres aux combustibles liquides 658

INSTALLATIONS POUR LA PRODUCTION DE LA VAPEUR D'EAU 659
Alimentation en combustible 659
Un exemple d'alimentation en charbon 659
La préparation du charbon 664
La vapeur — Rappel de quelques notions théoriques 665
Description du générateur de vapeur d'une tranche de 600 MW (centrale de Porcheville B) 670
La partie out-door 673
La cheminée 675
La turbine 676
Le condenseur 678
Le poste d'eau 679

LES INSTALLATIONS POUR LA PRODUCTION DE L'ÉLECTRICITÉ 680
L'alternateur 680
L'excitatrice 682
Caractéristiques principales de l'alternateur de 600 MW de Porcheville B 682
Implantation du groupe turbo-alternateur 683
Liaison alternateur-transformateur 684
Le transformateur principal 684
Le poste électrique 684

INSTALLATIONS AUXILIAIRES — BÂTIMENTS ANNEXES 685
Le circuit d'eau de circulation 685
Le circuit d'eau de réfrigération 688
Les circuits d'eau brute et d'incendie 688
Les auxiliaires électriques 688
Le traitement des eaux pour l'alimentation du générateur de vapeur 691
Auxiliaires généraux divers 692
La salle de commande et de contrôle 692
Manutention des déchets de combustion 693
Les bâtiments annexes 694

ÉVOLUTION DES CENTRALES THERMIQUES — PRODUCTION D'ÉNERGIE DE POINTE 696
Caractéristiques principales des paliers techniques 696
Utilisation des centrales thermiques 696
Énergie de pointe 696

AMÉNAGEMENTS HYDRO-ÉLECTRIQUES

PRINCIPES GÉNÉRAUX SUR L'HYDRO-ÉLECTRICITÉ 701
Historique de l'hydro-électricité 701
Les ressources potentielles 702
Hydrologie, débits utilisables 702
Aspects économiques de l'hydro-électricité 704

EXPLOITATION DES AMÉNAGEMENTS HYDRO-ÉLECTRIQUES 705
Rendement d'un aménagement hydro-électrique .. 705
Exploitation des usines hydro-électriques 705
Différents types d'aménagements 706

PRINCIPAUX OUVRAGES D'UNE CHUTE D'EAU 707
Prises au fil de l'eau 707
Conduites de dérivation et galeries 708
Les grands barrages de retenue 710
Les galeries en charge 715
Les cheminées d'équilibre 715
Conduites forcées 716
Usines 719

MATÉRIEL HYDROMÉCANIQUE 719
Vannes et robinets 719
Turbines 720
Alternateurs triphasés 725
Installations de transfert d'énergie par pompage .. 726

EXEMPLES D'AMÉNAGEMENTS RÉCENTS OU EN PROJET 727
Aménagement du Rhône 727
Exemple d'aménagement progressif d'une vallée de montagne : l'équipement de la vallée de l'Arc ... 729
Usine marémotrice de la Rance 730
Projet d'aménagement mixte : station de pompage et énergie gravitaire 732
L'aménagement de la moyenne et basse Durance . 732
L'aménagement de Churchill Falls et son usine en Labrador 734

AVENIR DE L'HYDRO-ÉLECTRICITÉ 735

Pages

CENTRALES NUCLÉAIRES

RÉACTIONS NUCLÉAIRES 738
Rappels sommaires de notions de physique nucléaire 738
Le modérateur 740
Les sections efficaces de réaction 740

MOYENS D'UTILISATION DE L'ÉNERGIE NUCLÉAIRE 741
Implantation d'une centrale nucléaire 741
Schéma de principe d'une centrale nucléaire 741
Les filières 741

LA FILIÈRE URANIUM NATUREL — GRAPHITE — GAZ CARBONIQUE 742
L'élément combustible 742
Le modérateur 743
Le caisson 746
La peau d'étanchéité et le système de refroidissement 747
Le calorifuge 747
Le générateur de vapeur 748
Dispositif pour la détection des ruptures de gaine . 750
La manutention du combustible 751
Les groupes turbo-alternateurs 754
Les auxiliaires de la centrale 756
Contrôle — commande de la centrale 758

FILIÈRE URANIUM ENRICHI LÉGÈREMENT — EAU LOURDE — GAZ CARBONIQUE ... 762
Le combustible 762
Les canaux 763
La cuve 764
Les barres de contrôle 764
Le modérateur 765
La manutention du combustible 765
Le circuit primaire de refroidissement 766
Le bâtiment du réacteur 767
Les installations de production d'électricité 768
Contrôle - commande de la centrale 769

LA FILIÈRE URANIUM ENRICHI — EAU LÉGÈRE 769
Réacteur à eau sous pression (P.W.R.) 769

Pages

Présentation de la centrale nucléaire P.W.R. des Ardennes (Chooz) 770
Le combustible 771
La cuve 771
Les barres de contrôle 771
Le circuit primaire, les échangeurs 772
Le circuit secondaire (eau-vapeur) 772
Le groupe turbo-alternateur 772
La manutention du combustible 773
Traitement des effluents radioactifs 773
Réacteur à eau bouillante 773
Principe du réacteur à eau bouillante 773
Régulation de la puissance thermique du réacteur 774
Manutention du combustible 775
Caractéristiques techniques principales d'une centrale B.W.R. 775

FILIÈRE DES RÉACTEURS À HAUTE TEMPÉRATURE (H.T.R.) 776
Caractéristiques principales de la filière 776
Le modérateur 776
Le fluide caloporteur 776
Le combustible 776
Le cœur du réacteur 776
Récupération de l'énergie de fission 777

FILIÈRE À NEUTRONS RAPIDES — LES SURGÉNÉRATEURS 778
Principe 778
Intérêt de l'emploi d'un métal liquide comme fluide caloporteur 778
Un exemple de surgénérateur 779

AUTRES SOURCES D'ÉNERGIE ÉLECTRIQUE

Les piles à combustible 783
Les photopiles ou convertisseurs photovoltaïques . 787
Thermopiles ou piles thermoélectriques 788
Générateurs thermoélectroniques 788
Générateur magnétohydrodynamique (M.H.D.) .. 789
Générateur électrogazdynamique (E.G.D.) 790
Piles nucléaires 790

TABLE DES HORS-TEXTE

Pages

Exemples d'union et d'intersection — Illustrations d'équivalences logiques 48

Physique nucléaire 224

Résistances. Code des couleurs — Condensateurs. Code des couleurs — Générateur électrostatique — Condensateurs industriels 304

Transformateur de distribution H.T./B.T. 528

Centrales thermiques — Coupe d'un groupe de 600 MW — Coupe d'un groupe de 250 MW 672

Aménagements hydro-électriques 704

Circuits eau-vapeur 752

Centrales nucléaires 768

Modèle démontable : Machine à courant continu 608

IMPRIMÉ ET RELIÉ
POUR LA
LIBRAIRIE ARISTIDE QUILLET
PAR
L'IMPRIMERIE DES DERNIÈRES NOUVELLES
DE STRASBOURG

DÉPOT LÉGAL : 3e TRIMESTRE 1977
N° D'ORDRE ÉDITEUR 166 — N° D'IMPRESSION 76162